УДК 519.21

Л. С. Кудина

О КОМПОНЕНТАХ РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Распределение P в R^n $(n \geqslant 2)$ будем называть *радиально-симметричным* (р. с.), если найдется точка $a = a(P) \in R^n$ такая, что P инвариантно относительно поворотов вокруг a. Распределение P_1 называется *компонентой* распределения P, если для некоторого распределения P_2 выполняется $P = P_1 * P_2$.

Легко видеть, что компоненты р. с. распределения не всегда являются р. с. В самом деле, пусть P, P_1, P_2 — распределения с характеристическими функциями (х. ф.)

$$\varphi(t;\ P) = \exp\left\{-A\left(t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2\right)\right\}; \tag{1}$$

$$\varphi(t;\ P_1) = \exp\left\{-At_1^2\right\},\ \varphi(t;\ P_2) = \exp\left\{-A\left(t_2^2 + \ldots + t_n^2\right)\right\},$$

где $t = (t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_n)$, $A > 0$.

Очевидно, P_1 и P_2 не являются р. с. в R^n, в то время как $P = P_1 * P_2$ являются р. с. Легко видеть, что любое безгранично делимое р. с. распределение имеет компоненты, не являющиеся р. с.

Теорема. *Пусть р. с. распределение P удовлетворяет условию*

$$P(\{x \in R^n : |x| > r\}) = O(\exp\{-Kr^2\}),\ r \to \infty,\ \forall K > 0. \tag{2}$$

Тогда все его компоненты являются р. с.

Следствие. *Если р. с. распределение имеет ограниченный носитель, то все его компоненты являются р. с.*

Заметим, что условие (2) ослабить нельзя. Теорема перестает быть верной, если в условии (2) квантор $\forall$ заменить квантором $\exists$.

Действительно, р. с. распределение с х. ф., задаваемой формулой (1), имеет не только р. с. компоненты и для него $P(\{x \in R^n : |x| > r\}) = O(\exp\{-r^2/(4A)\})$, $r \to \infty$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. *Если распределение P удовлетворяет условию*

$$P(\{x \in R^n : |x| > r\}) = O(\exp\{-Kr^\lambda\}),\ r \to \infty,\ \forall K > 0,\ \exists\lambda > 1,$$

то характеристическая функция $\varphi(t;\ P)$ является целой и допускает оценку

$$\varphi(t;\ P) = O(\exp\{L|t|^{\lambda/(\lambda-1)}\}),\ t \in C^n,\ \forall L > 0.$$

Лемма 2. *Если характеристическая функция $\varphi(t;\ P)$ распределения P в R^n является целой и допускает оценку*

$$\varphi(t;\ P) = O(\exp\{L|t|^\rho\}),\ t \in C^n,\ \forall L > 0,$$

$\exists\rho > 1$, *то характеристическая функция любой компоненты P_1 распределения P тоже является целой и допускает оценку* $\varphi(t;\ P_1) = 0\ (\exp\{L|t|^\rho\})$, $t \in C^n$, $\forall L > 0$.

Эти утверждения в одномерном случае содержатся в хорошо известных результатах [3, с. 54, 80]; многомерный случай выводится из одномерного с помощью метода проекций (см. [3, гл. VI, § 1]).

Переходим к доказательству теоремы. Не уменьшая общности, можно считать $a(P) = 0$. (Этого можно добиться, заменяя P на $P * \varepsilon_{-a(P)}$, где $\varepsilon_a(E) = 1$, $\forall E \ni a$). При этом условии х. ф. распределения P имеет вид [1, с. 244]

$$\varphi(t;\ P) = \int_0^\infty \theta_n(r^2x^2)\, d\sigma(x), \tag{3}$$

где

$$t = (t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n),\ r^2 = t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2,$$

$$\sigma(x) = P(\{y \in R^n : |y| \leqslant x\}),\ x \geqslant 0,$$

$$\theta_n(z) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{z}\right)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(\sqrt{z}),$$

$J_\alpha(z)$ — функция Бесселя порядка α.

Обозначим через $\psi(r)$ функцию, стоящую в правой части (3), т. е. положим

$$\psi(r) = \int_0^\infty \theta_n(r^2x^2)\, d\sigma(x),\ r \in R^1.$$

Так как

$$\int_R^\infty d\sigma(x) = P(\{x \in R^n : |x| > R\}) = O(\exp\{-KR^2\}),\ \forall K,\ R \to \infty,$$

то имеем

$$\int_0^\infty e^{Rx} d\sigma(x) = O(\exp\{LR^2\}),\ R \to \infty,\ \forall L > 0.$$

Замечая, что

$$|\theta_n(z)| \leqslant 1 + \frac{|z|}{2 \cdot n} + \frac{|z|^2}{2 \cdot 4 \cdot n(n+2)} + \ldots \leqslant e^{\sqrt{|z|}},$$

заключаем, что функция $\psi(r)$ является целой и допускает оценку

$$|\psi(r)| \leqslant \int_0^\infty e^{r|x|} d\sigma(x) = O(\exp\{L|r|^2\}),\ r \in C^1,\ \forall L > 0. \tag{4}$$

Пусть $\pm r_1,\ \pm r_2,\ \ldots$ — нули функции $\psi(r)$, $r \in C^1$, (кратные нули повторяются столько раз, какова их кратность).

В силу (4) функция $\psi(r)$ — не выше минимального типа порядка 2. Из известной теоремы о том, что показатель сходимости нулей произвольной целой функции не превышает ее порядка [2, с. 27] следует, что

$$\sum_k |r_k|^{-2-\delta} < \infty,\ \forall \delta > 0. \tag{5}$$

Так как $\psi(r)$ — целая четная функция порядка $\leqslant 2$ и $\psi(0)=1$, то по теореме Адамара [2, с. 38] она представляется в виде

$$\psi(r)=e^{\alpha r^2}\prod_k (1-r^2/r_k^2)\exp(r^2/r_k^2), \tag{6}$$

где α — постоянная. Поскольку $\psi(r)$ не выше минимального типа порядка 2, то по теореме Линделефа о принадлежности целой функции нормальному или минимальному типу [2, с. 42] имеем

$$\lim_{R\to\infty}\left|\alpha+\frac{1}{2}\sum_{|r_k|<R} r_k^{-2}\right|=0.$$

Другими словами,

$$\alpha=-\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\sum_{|r_k|<R} r_k^{-2}.$$

Введем полиномы

$$Q(t;\ r_k)=(r_k^2-t_1^2-t_2^2-\ldots-t_n^2)\,r_k^{-2},\ t=(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n).$$

Из (3) и (6) заключаем, что

$$\varphi(t;\ P)=\exp\left\{\alpha\left(t_1^2+\ldots+t_n^2\right)\right\}\prod_k Q(t;\ r_k)\exp\left[\frac{t_1^2+\ldots+t_n^2}{r_k^2}\right]. \tag{7}$$

Пусть $P=P_1*P_2$, тогда по лемме 2 функции $\varphi(t;\ P_1)$ и $\varphi(t;\ P_2)$ являются целыми, поэтому равенство

$$\varphi(t;\ P)=\varphi(t;\ P_1)\,\varphi(t;\ P_2) \tag{8}$$

справедливо при всех $t\in C^n$. Так как полином $Q(t;\ r_k)$ неприводим, а левая часть (8) делится на этот полином (т. е. $\varphi(t;\ P)/Q(t;\ r_k)$ является целой функцией), то хотя бы одна из двух функций $\varphi(t;\ P_j)$, $j=1,\ 2$, делится на $Q(t;\ r_k)$. Мы приходим к выводу, что множество корней $\{r_1,\ r_2,\ \ldots\}$ можно разбить на два непересекающихся множества A_1 и A_2 такие, что $\varphi(t;\ P_j)$ делится на $Q(t;\ r_k)$ при $r_k\in A_j$.

Положим

$$\psi_j(r)=\prod_{r_k\in A_j}(1-r^2/r_k^2)\exp(r^2/r_k^2),\ j=1,\ 2.$$

Из (5) вытекает, что произведения сходятся на каждом компакте в C^1 и функции $\psi_j(r)$ являются целыми. В силу теоремы Бореля [2, с. 23] из (5) следует также, что справедливы оценки

$$\psi_j(r)=O(\exp\{|r|^{2+\varepsilon}\}),\ r\to\infty,\ \forall\varepsilon>0.$$

Рассмотрим функции

$$\varphi_j(t)=\psi_j\left(\sqrt{t_1^2+\ldots+t_n^2}\right)=\prod_{r_k\in A_j} Q(t;\ r_k)\exp\left[\frac{t_1^2+\ldots+t_n^2}{r_k^2}\right]. \tag{9}$$

Из (9) следует, что

$$\varphi_j(t) = O\left(\exp\left\{\left|t_1^2 + \ldots + t_n^2\right|^{(2+\varepsilon)/2}\right\}\right) = O(\exp\{|t|^{2+\varepsilon}\}), t \in C^n. \quad (10)$$

Функции

$$\Phi_j(t) = \varphi(t;\ P_j)/\varphi_j(t),\ j = 1,\ 2,$$

очевидно, являются целыми. Из (7) и (9) следует, что

$$\Phi_1(t)\,\Phi_2(t) = \exp\left\{\alpha\left(t_1^2 + \ldots + t_n^2\right)\right\},\ \Phi_j(0) = 1,\ j = 1,\ 2.$$

Поэтому функции $\Phi_j(t)$ не имеют нулей. Из леммы 2 имеем $\varphi(t;\ P_j) = O(\exp\{L|t|^2\})$, $\forall L > 0$. Из этой оценки и (10), в силу известных результатов о целых функциях многих переменных [4, с. 82], следует, что $\Phi_j(t) = O(\exp\{|t|^{2+\varepsilon}\})$, $\forall\varepsilon > 0$. Поэтому [4, с. 83] функции $\Phi_j(t)$ представляются в виде

$$\Phi_j(t) = \exp\left\{\sum_{p,\ q=1}^{n} \alpha_{pq}^{(j)} t_p t_q + \sum_{p=1}^{n} \beta_p^{(j)} t_p\right\},$$

где $\alpha_{pq}^{(j)}$, $\beta_p^{(j)}$ — постоянные, $\alpha_{pq}^{(j)} = \alpha_{qp}^{(j)}$. Отсюда следуют соотношения

$$\varphi(t;\ P_j) \equiv \varphi(t_1,\ \ldots,\ t_n;\ P_j) = \varphi_j(t)\exp\left\{\sum_{p,\ q=1}^{n} \alpha_{pq}^{(j)} t_p t_q + \sum_{p=1}^{n} \beta_p^{(j)} t_p\right\}. \quad (11)$$

Покажем, что $\alpha_{11}^{(j)} = \alpha_{22}^{(j)} = \ldots = \alpha_{nn}^{(j)}$ и $\alpha_{pq}^{(j)} = 0$ при $p \neq q$.

Пусть l — любое из чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Полагая в (11) все координаты вектора t, кроме t_l, равными нулю, $t = (0,\ \ldots,\ 0,\ t_l,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, и используя выражение (9) для функций $\varphi_j(t)$, получим

$$\varphi(0,\ \ldots,\ 0,\ t_l,\ 0,\ \ldots,\ 0;\ P_j) = \exp\left\{\alpha_{ll}^{(j)} t_l^2 + \beta_l^{(j)} t_l\right\} \times$$
$$\times \prod_k \left(1 - t_l^2/r_k^2\right)\exp\left(t_l^2/r_k^2\right).$$

Так как $\varphi(0,\ \ldots,\ 0,\ t_l,\ 0,\ \ldots\ 0;\ P_j)$ как функция от t_l — не выше минимального типа порядка 2, то применяя теорему Линделефа [2, с. 42], получаем

$$\alpha_{ll}^{(j)} = -\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} \sum_{|r_k| < R,\ r_k \in A_j} r_k^{-2},\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j = 1,\ 2. \quad (12)$$

Правая часть этого равенства не зависит от $l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, поэтому соотношение $\alpha_{11}^{(j)} = \alpha_{22}^{(j)} = \ldots = \alpha_{nn}^{(j)}$ тем самым доказано.

Возьмем теперь в (11) вектор t в виде $t = (t_1,\ t_1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$. Будем иметь

$$\varphi(t_1,\ t_1, 0,\ \ldots\ 0;\ P_j) = \exp\left\{\left(\alpha_{11}^{(j)} + \alpha_{22}^{(j)} + 2\alpha_{12}^{(j)}\right) t_1^2 + \left(\beta_1^{(j)} + \beta_2^{(j)}\right) t_1\right\} \times$$
$$\prod_k \left(1 - 2t_1^2/r_k^2\right)\exp\left(2t_1^2/r_k^2\right).$$

Используя снова теорему Линделефа, получаем

$$\alpha_{11}^{(j)} + \alpha_{22}^{(j)} + 2\alpha_{12}^{(j)} = -\frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \sum_{|r_k|<R,\ r_k\in A_j} 2r_k^{-2}.$$

Учитывая (12), имеем $\alpha_{12}^{(j)} = 0$. Аналогично заключаем, что все $\alpha_{pq}^{(j)} = 0$ при $p \neq q$.

Покажем, что числа $\beta_p^{(j)}$ в (11) являются чисто мнимыми.

В окрестности точки $t = 0$ имеем представление

$$\varphi(t;\ P_j) = 1 + i \sum_{p=1}^{n} m_p^{(j)} t_p + O(|t|^2),\ t \to 0,$$

где

$$m_p^{(j)} = \int_{R^n} x_p P_j(dx),\ p = 1,\ \ldots,\ n;\ j = 1,\ 2.$$

С другой стороны, имеем $\varphi_j(t) = 1 + O(|t|^2)$, $t \to 0$. Отсюда заключаем, что $\beta_p^{(j)} = i m_p^{(j)}$; $p = 1, \ldots, n$; $j = 1, 2$.

Таким образом, справедливо равенство

$$\varphi(t;\ P_j) = \varphi_j(t) \exp\left\{\alpha^{(j)}\left(t_1^2 + \ldots + t_n^2\right) + i\left(m^{(j)},\ t\right)\right\}, \tag{13}$$

где $\alpha^{(j)} = \alpha_{11}^{(j)} = \ldots = \alpha_{nn}^{(j)}$, $m^{(j)} = \left(m_1^{(j)},\ \ldots,\ m_n^{(j)}\right)$. Функции $\varphi(t;\ P_j) \exp\{-i(m^{(j)},\ t)\}$, очевидно, являются х. ф. распределений $P_j(E - m^{(j)})$. Из (9) и (13) видно, что эти функции зависят только от $t_1^2 + \ldots + t_n^2$. Поэтому [1, с. 244] распределения $P_j(E - m^{(j)})$ инвариантны относительно поворотов вокруг нуля. Теорема доказана.

Замечание. Пусть Λ — невырожденное линейное преобразование пространства R^n в себя. Распределение P назовем Λ-р.с., если преобразование Λ переводит его в р. с. Теорема, очевидно, сохраняет силу, если в ее формулировке заменить «р. с.» на «Λ-р. с.».

Приношу благодарность И. В. Островскому за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М., Физматгиз, 1961. 310 с.
2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956. 632 с.
3. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М., «Наука», 1972. 480 с.
4. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих комплексных переменных. М., «Наука». 1971. 430 с.