УДК 517.944

Н. Ю. Иохвидович, канд. физ.-мат. наук

КЛАССЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЩЕЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial t} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{u}(x, t), \tag{1}$$

где $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, $\bar{u}(x, t) = (u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t))$ — искомая вектор-функция; $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и $Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матрицы размера $(n\times n)$, состоящие из дифференциальных операторов порядка $\leqslant s$ с постоянными комплексными коэффициентами, при начальном условии

$$\bar{u}(x, 0) = 0. \tag{2}$$

Впредь мы будем рассматривать регулярные (обладающие непрерывными производными всех порядков, входящих в систему) решения $\overline{u}(x, t)$ системы (1), имеющие по t нормальный тип, т. е. решения системы (1), которые вместе со своими производными, входящими в систему, растут по t не быстрее $\exp\{\alpha t\}$ с некоторым $\alpha > 0$:

$$\left\| D_x^j D_t^k \overline{u}(x, t) \right\| \leqslant C(x) \exp\{\alpha t\}, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

$$j = 0, 1, \ldots, s; \; k = 0, 1,$$

где $C(x)$ — локально ограниченная функция.

Нас будет интересовать вопрос, какие оценки решения $\overline{u}(x, t)$ задачи (1)—(2) при $t > 0$ и $x \leqslant 0$ (либо $x \geqslant 0$) дают возможность заключить, что $\overline{u}(x, t) \equiv 0$, $t > 0$. При этом никаких предположений о поведении этих функций на другой полуоси не делается.

Дальнейшие рассмотрения относятся к случаю, когда оценки на функции, в классе которых изучаются вопросы единственности, задаются на полуоси $x \leqslant 0$; при $x \geqslant 0$ исследование может быть проведено аналогичным способом.

Аналогичный вопрос был изучен нами в [1], где были получены необходимые и достаточные условия единственности решения задачи Коши для уравнений вида

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) \equiv \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} = 0,$$

$-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, $P(\lambda, w)$ — произвольный многочлен с постоянными коэффициентами порядка m по λ и порядка n по w, $P_m(w) \not\equiv 0$ в классе функций, удовлетворяющих некоторой оценке лишь на полуоси $x \leqslant 0$.

Все рассмотрения данной работы проведены при предположении, что

$$\det[\lambda P(w) - Q(w)] \not\equiv C.$$

В п. 1 мы сведем задачу к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексным параметром.

В п. 2 дадим классификацию систем вида (1).

В п. 3 покажем, как вопросы единственности решения задачи (1)—(2) сводятся к изученному в [1], укажем классы единственности решения задачи Коши (1)—(2).

Что касается классов функций, в которых нарушается единственность решения задачи (1)—(2), то они подлежат отдельному изучению, которое проведено также в п. 3.

1. Сведение к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексным параметром

Применив к системе (1) с начальным условием (2) преобразование Лапласа, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром λ:

$$\lambda P\left(\frac{d}{dx}\right)\bar{y}(x, \lambda) = Q\left(\frac{d}{dx}\right)\bar{y}(x, \lambda), \tag{4}$$

где $\bar{y}(x, \lambda) = (y_1(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda))$ — преобразование Лапласа функции $\bar{u}(x, t)$, $\lambda = \sigma + i\tau$, $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$.

Легко показать, что каждая функция $y_p(x, \lambda)$, $p = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\det\left[\lambda P\left(\frac{d}{dx}\right) - Q\left(\frac{d}{dx}\right)\right] y_p(x, \lambda) = 0. \tag{5}$$

Характеристическое уравнение для уравнения (5)

$$\det[\lambda P(w) - Q(w)] = 0. \tag{6}$$

Корни этого уравнения (не обязательно различные) таковы [2]:

$$w_j(\lambda) = \alpha_j^{(0)}\lambda^{q_j^{(0)}} + \alpha_j^{(1)}\lambda^{q_j^{(1)}} + \ldots, \tag{7}$$

$$\alpha_j^{(0)} \neq 0, \quad q_j^{(0)} > q_j^{(1)} > \ldots, \; j = 0, 1, \ldots, m-1,$$

и

$$w_j(\lambda) \equiv 0.$$

Обозначим через $z_0(x, \lambda), \ldots, z_m(x, \lambda)$ фундаментальную систему решений уравнения (5). Тогда решение $y_p(x, \lambda)$, $p = 1, 2, \ldots, n$ уравнения (5) имеет вид

$$y_p(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{pj}(\lambda) z_j(x, \lambda),$$

$c_{pj}(\lambda)$ — произвольные функции от λ, а решение системы (1) таково:

$$\bar{y}(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \bar{c}_j(\lambda) z_j(x, \lambda),$$

$$\text{где} \quad \bar{c}_j(\lambda) = \begin{pmatrix} c_{1j}(\lambda) \\ \vdots \\ c_{nj}(\lambda) \end{pmatrix}, \; j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{8}$$

Отметим, что среди функций $c_{pj}(\lambda)$ в (8), $1 \leqslant p \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$ есть лишь m линейно независимых, поскольку пространство решений системы (1) конечномерно и его размерность равна степени по w алгебраического уравнения (6) [3].

Лемма 1. *Пусть $w(\lambda)$ — корень характеристического уравнения (6). Тогда при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$ существует аналитическое решение системы (4)*

$$\bar{y}(x, \lambda) = \bar{c}(\lambda)\exp\{w(\lambda)x\}$$

такое, что

$$\|\bar{c}(\lambda)\| \leqslant Cr^{-\gamma},\ C>0,\ r=|\lambda|,$$

$\gamma>0$ — *любое наперед заданное число.*

Доказательство. Очевидно, что вектор-функция

$$\bar{y}(x,\ \lambda)=\bar{c}(\lambda)\exp\{w(\lambda)x\},$$

где $w(\lambda)$ — корень характеристического уравнения (6), является решением системы (4), если вектор-функция $\bar{c}(\lambda)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$[\lambda P(w(\lambda))-Q(w(\lambda))]\,\bar{c}(\lambda)=0. \tag{9}$$

Определитель этой системы тождественно равен нулю, следовательно, существует нетривиальное решение системы (9). Если ранг матрицы этой системы равен k, то $n-k$ компонент вектора $\bar{c}(\lambda)$ можно задать произвольно. Легко показать, что этот выбор можно осуществить таким образом, чтобы $\|\bar{c}(\lambda)\|\leqslant Cr^{-\gamma}$, $C>0$, $\gamma>0$ — любое наперед заданное число.

2. Классификация систем вида (1)

Прежде, чем приступить к классификации систем вида (1), проведем классификацию корней $w_j(\lambda)$ характеристического уравнения (6).

Так же, как в [1], все корни вида (7) разбиты на типы T_1-T_7, T', причем так, что каждый корень $w_j(\lambda)$ принадлежит к одному и только одному из типов.

Сформулируем ряд свойств корней $w_j(\lambda)$.

1. Если корень $w_j(\lambda)\in T_1$, то $\operatorname{Re} w_j(\lambda)\to+\infty$ при $\sigma\to\infty$.

2. Для корней типов T_2-T_4 и T' $\exists\, \varkappa\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ такое, что при $\lambda=\sigma_0+\rho\exp\{i\varkappa\}$

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda)=B_j+o(1),\ o(1)\to 0,\ \rho\to\infty,$$

и при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\sigma_0$

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda)\geqslant B_j-\varepsilon,\ \varepsilon\to+0,\ \sigma_0\to\infty.$$

Обозначим $\max B_j=B$. Для корней типа T' $B_j<B$. Для корней типов T_2-T_4 $B_j=B$.

3. Для корней типа T_2 $\exists\, C_j>0$ и $\exists\,\beta_j>0$ такие, что при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\sigma_0$, где σ_0 достаточно велико, $\operatorname{Re} w_j(\lambda)\geqslant B+C_jr^{-\beta_j}$. Обозначим $\inf\beta_j=\beta_j^{(0)}$.

4. Корни типа T_3 — это $w_j(\lambda)\equiv\mathrm{const}$, $\operatorname{Re} w_j(\lambda)=B$.

5. Для корней $w_j(\lambda)$ типа T_4 $\exists\,\varkappa_j\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ и $\exists\rho_0>0$ такие, что при $\lambda=\sigma_0+\rho\exp\{i\varkappa_j\}$, $\rho>\rho_0$

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda)-B<0.$$

6. Если корень $w_j(\lambda) \in T_5$, то $\exists C_j > 0$ и $\exists \mu^j \in (0, 1)$ такие, что при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, σ_0 достаточно велико:

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda) \geqslant -C_j r^{\mu_j}.$$

Обозначим $\inf \mu_j = \mu_j^{(0)}$.

7. Если корень $w_j(\lambda) \in T_6$, то для любого $\varkappa \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\exists C_j > 0$ такое, что при $\lambda = \sigma_0 + \rho \exp\{i\varkappa\}$

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda) = -C_j r(1 + 0(1)),\ 0(1) \to 0,\ \rho \to \infty.$$

8. Если корень $w_j(\lambda) \in T_7$, то $\exists \dot{\varkappa}_j \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ такое, что при $\lambda = \sigma_0 + \rho \exp\{i\varkappa_j\}$

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda) = -C_j r^{\mu_j}(1 + 0(1)),\ C_j > 0,\ \mu_j \geqslant 1,\ 0(1) \to 0,\ \rho \to \infty.$$

Свойства 1—8 корней характеристического уравнения (6) доказываются так же, как в [1].

Определение. *Систему (1) отнесем к типу Γ_k, $1 \leqslant k \leqslant 7$, если существует хотя бы один корень $w_j(\lambda)$ характеристического уравнения (6), имеющий тип T_k, но ни один из корней не имеет типа T_l, $1 \leqslant l < k$.*

Замечание. Системы типов $\Gamma_1 - \Gamma_4$ могут иметь корни типа T', так как если уравнение (6) имеет корень типа T', то оно также имеет корень одного из типов T_2, T_3, T_4.

3. Необходимые и достаточные условия единственности

Теорема 1. *Пусть система уравнений (1) имеет тип Γ_1, $h(x) > 0$ — непрерывная функция ($x \leqslant 0$).*

Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций, удовлетворяющих оценкам

$$\| D_x^k \overline{u}(x, t) \| \leqslant C \exp\{\alpha t - |x| h(x)\}; \tag{10}$$

$$x \leqslant 0,\ t > 0,\ \alpha > 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup h(x) = \infty. \tag{11}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\overline{u}(x, t)$ — решение системы (1), удовлетворяющее условию (2), а $\overline{y}(x, \lambda)$ — его преобразование Лапласа. Функция $\overline{y}(x, \lambda)$ при каждом фиксированном x, $-\infty < x < \infty$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \alpha > 0$ и удовлетворяет системе (4), а также, в силу (10), оценкам

$$\| \overline{y}^{(k)}(x, \lambda) \| \leqslant C_1 \exp\{-|x| h(x)\},\ x \leqslant 0; \tag{12}$$

$$k = 0, 1, \ldots, m-1,\ \operatorname{Re}\lambda > \alpha,\ \sup h(x) = \infty.$$

Тем самым доказательство теоремы 1 сводится к доказательству следующего утверждения.

Лемма. *Всякое решение системы (4), аналитическое в какой-либо полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha > 0$ *и удовлетворяющее в ней оценкам (12), тождественно равно нулю.*

Доказательство. Как показано в п. 1, решение системы (4)

$$\bar{y}(x, \lambda) = (y_1(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda))$$

имеет вид

$$y_p(x, \lambda) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} c_{pj}(\lambda)\, z_j(x, \lambda), \quad p = 1, 2, \ldots, n.$$

Далее так же, как это было сделано в [1], докажем, что

$$c_{pj}(\lambda) \equiv 0, \quad p = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Необходимость. Пусть $w(\lambda)$ — корень характеристического уравнения (6), имеющий тип T_1. Такой корень существует в силу условий теоремы. Тогда, в силу леммы 1, существует аналитическое при $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0$ решение системы (4)

$$\bar{y}(x, \lambda) = \bar{c}(\lambda) \exp\{w(\lambda)\, x\}$$

такое, что $\|\bar{c}(\lambda)\| \leqslant C r^{-\gamma}$, $\gamma > 0$ — любое наперед заданное число.

Пусть условие (11) не выполнено, т. е. $h(x) \leqslant C_1$. Оценим при $x \leqslant 0$ и $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0$

$$\|\bar{y}^{(k)}(x, \lambda)\| = \|\bar{c}(\lambda)\| \cdot |w(\lambda)|^k \exp\{-|x|\,\mathrm{Re}\,w(\lambda)\} \leqslant$$

$$\leqslant C r^{k q^{(0)} - \gamma} \exp\{-|x|\,\mathrm{Re}\,w(\lambda)\}.$$

Выберем $\gamma > m q^{(0)}$, тогда

$$\|\bar{y}^{(k)}(x, \lambda)\| \leqslant C \exp\{-|x|\,\mathrm{Re}\,w(\lambda)\}.$$

Поскольку $w(\lambda) \in T_1$, то при $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0$, где σ_0 достаточно велико, $\mathrm{Re}\,w(\lambda) > C_1$ (свойство 1, п. 2). Тогда при $x \leqslant 0$ и $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0$

$$\|\bar{y}^{(k)}(x, \lambda)\| \leqslant C \exp\{-C_1 |x|\} \leqslant C \exp\{-|x|\, h(x)\}. \tag{13}$$

Обозначим

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_0 + i\tau)^{-2} \exp\{(\sigma_0 + i\tau)\, t\}\, \bar{y}(x, \sigma_0 + i\tau)\, d\tau.$$

Функция $\bar{u}(x, t)$ дает искомое решение задачи (1)—(2). Действительно, нетривиальность $\bar{u}(x, t)$ при $t > 0$ следует из нетривиальности $\bar{y}(x, \lambda)$. Условие (2), очевидно, выполняется. Оценки (10) вытекают из (13); те же оценки (13) показывают, что $\bar{u}(x, t)$ является решением системы (1), так как $\bar{y}(x, \lambda)$ — решение системы (4).

Теорема 2. *Пусть система (1) имеет тип Γ_2, $h(t) > 0$ — непрерывная убывающая при $t \geqslant 0$ функция.*

Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) классе функций, удовлетворяющих оценкам

$$\| D_x^k \bar{u}(x, t) \| \leqslant C \exp \left\{ \alpha t - B|x| - \int_0^{|x|} h(t)\, dt \right\}, \tag{14}$$

$$x \leqslant 0,\ t \geqslant 0,\ \alpha > 0,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{\infty} [h(t)]^{1+\frac{1}{\beta}} dt = \infty,\ \beta = \min_{\{j:\, \omega_j(\lambda) \in T_2\}} \beta_j^{(0)}. \tag{15}$$

Доказательство. Достаточность условий теоремы 2 доказывается так же, как в [1].

Необходимость. Пусть $\omega_j(\lambda)$ — корень характеристического уравнения (6), имеющий тип T_2 с $\beta_j^{(0)} = \beta$.

Тогда, в силу леммы 1, существует аналитическое при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ решение системы (4)

$$\bar{y}(x, \lambda) = \bar{c}(\lambda) \exp\{\omega_j(\lambda) x\}$$

такое, что $\| \bar{c}(\lambda) \| < Cr^{-\gamma}$, $\gamma > 0$ — любое наперед заданное число.

Оценим выражение

$$f(\lambda) \equiv \sup_{\substack{x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant k \leqslant m-1}} \| \bar{y}^{(k)}(x, \lambda) \| C_1 \exp \left\{ B|x| + \int_0^{|x|} h(t)\, dt \right\}.$$

Пусть условие (15) не выполняется, т. е.

$$\int^{\infty} [h(t)]^{1+\frac{1}{\beta}} dt < \infty. \tag{16}$$

Тогда

$$f(\lambda) \leqslant \sup_{\substack{x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant k \leqslant m-1}} Cr^{-\gamma} |\omega_j(\lambda)|^k \exp \left\{ \int_0^{|x|} [B + h(t) - \operatorname{Re}\omega_j(\lambda)]\, dt \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup C \exp \left\{ \int_0^{|x|} [B + h(t) - \operatorname{Re}\omega_j(\lambda)]\, dt \right\}.$$

Поскольку $\operatorname{Re}\ \omega_j(\lambda) \geqslant B + C_j r^{-\beta}$ (п. 2, свойство 3), то мы получаем

$$f(\lambda) \leqslant \sup_x C \exp \left\{ \int_0^{|x|} [h(t) - C_j r^{-\beta}]\, dt \right\}.$$

Определим функцию $g(r)$ из условия $h(g(r)) = C_j r^{-\beta}$.
Тогда

$$f(\lambda) \leqslant C \exp \left\{ \int_0^{g(r)} [h(t) - C_j r^{-\beta}]\, dt \right\} \leqslant C \exp \left\{ \int_0^{g(r)} h(t)\, dt \right\} \equiv f_1(r).$$

Отсюда, так же, как в [1], получаем

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln |f(\lambda)|}{r^2} dr < \infty$$

в силу (16).

Тогда, в силу известного критерия Карлемана [4], существует аналитическая при $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \sigma_0$ функция $F(\lambda) \not\equiv 0$ такая, что $|F(\lambda) f(\lambda)| < C_1$ и так же, как в теореме 1, функция $\bar{z}(x, \lambda) = F(\lambda) \bar{y}(x, \lambda)$ приводит к нетривиальному решению $\bar{u}(x, t)$ задачи (1)—(2), удовлетворяющему условию (14).

Теорема 3. *Пусть система (1) имеет тип* Γ_3, $\beta(x) > 0$ — *монотонная функция* $(x \leqslant 0)$.

Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций, удовлетворяющих оценкам

$$\| D_x^k \bar{u}(x, t) \| \leqslant \beta(x) \exp\{\alpha t - B|x|\}; \tag{17}$$
$$x \leqslant 0, \ t \geqslant 0, \ \alpha > 0, \ k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{x<0} \beta(x) = 0. \tag{18}$$

Доказательство. Достаточность условий теоремы 3 доказывается так же, как в [1].

Необходимость. Пусть $\omega_j(\lambda)$ — корень характеристического уравнения (6), имеющий тип T_3, т. е. $\omega_j(\lambda) \equiv \text{const}$, $\operatorname{Re} \omega_j(\lambda) = B$. В силу леммы 1, существует аналитическое при $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \sigma_0$ решение системы (4)

$$\bar{y}(x, \lambda) = \bar{c}(\lambda) \exp\{\omega_j(\lambda) x\}$$

такое, что $\|\bar{c}(\lambda)\| \leqslant C r^{-\gamma}$, $\gamma > 0$ — любое наперед заданное число.

Пусть условие (18) не выполнено, т. е. $\beta(x) \geqslant A$. Тогда при $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \sigma_0$, где σ_0 достаточно велико, $(\gamma > m q_j^{(0)})$

$$\| \bar{y}^{(k)}(x, \lambda) \| \leqslant C r^{-\gamma} r^{k q_j^{(0)}} \exp\{-|x| B\} \leqslant$$
$$\leqslant CA \exp\{-|x| B\} \leqslant C\beta(x) \exp\{-|x| B\}.$$

Функция $\bar{y}(x, \lambda)$ так же, как в доказательстве теоремы 1, приводит к нетривиальному решению $\bar{u}(x, t)$ задачи (1)—(2), удовлетворяющему условию (17).

Теорема 4. *Пусть система (1) имеет тип* Γ_4, $h(x) > 0$ — *непрерывная функция* $(x > 0)$.

Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций, удовлетворяющих оценкам

$$\| D_x^k \bar{u}(x, t) \| \leqslant C \exp\{\alpha t - B|x| + |x| h(x)\}; \tag{19}$$
$$x \leqslant 0, \ t \geqslant 0, \ \alpha > 0, \ k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{x\leqslant 0} h(x) = 0. \tag{20}$$

Доказательство. Достаточность условий теоремы 4 доказывается так же, как в [1].

Необходимость. Пусть $\omega_j(\lambda)$ — корень характеристического уравнения (6), имеющий тип T_4. Тогда, в силу леммы 1, существует аналитическое при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ решение системы (4)

$$\bar{y}(x, \lambda) = \bar{c}(\lambda)\exp\{\omega_j(\lambda)x\}$$

такое, что $\|\bar{c}(\lambda)\| \leqslant Cr^{-\gamma}$, $\gamma > 0$ — любое наперед заданное число.

Пусть условие (20) не выполнено, т. е. $h(x) \geqslant h > 0$. Оценим $\|\bar{y}^{(k)}(x, \lambda)\|$:

$$\|\bar{y}^{(k)}(x, \lambda)\| \leqslant Cr^{-\gamma}r^{kq_j^{(0)}}\exp\{-|x|\operatorname{Re}\omega_j(\lambda)\},\ \gamma > mq_j^{(0)}.$$

Поскольку $\omega_j(\lambda) \in T_4$, то при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ $\operatorname{Re}\omega_j(\lambda) \geqslant B - \varepsilon$, $\varepsilon \to +0$ при $\sigma_0 \to \infty$ (свойство 2, п. 2). При достаточно большом σ_0 $\varepsilon < h$.

Тогда

$$\|\bar{y}^{(k)}(x, \lambda)\| \leqslant C\exp\{-|x|B + \varepsilon|x|\} \leqslant C\exp\{-|x|B + |x|h\} \leqslant$$
$$\leqslant C\exp\{-|x|B + |x|h(x)\}.$$

Далее так же, как в доказательстве теоремы 1, функция $\bar{y}(x, \lambda)$ приводит к нетривиальному решению $\bar{u}(x, t)$ задачи (1)—(2), удовлетворяющему условию (19).

Теорема 5. *Пусть система (1) имеет тип Γ_5, $h(t) > 0$ — непрерывная возрастающая при $t \geqslant 0$ функция.*

Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций, удовлетворяющих оценкам

$$\|D_x^k\bar{u}(x, t)\| \leqslant C\exp\left\{\alpha t + \int_0^{|x|} h(t)\,dt\right\}; \tag{21}$$

$$x \leqslant 0,\ t \geqslant 0,\ \alpha > 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{\infty} [h(t)]^{1-\frac{1}{\mu}}dt = \infty,\ \mu = \min_{\{j:\omega_j(\lambda)\in T_5\}} \mu_j^{(0)}. \tag{22}$$

Доказательство. Достаточность условий теоремы 5 доказывается так же, как в [1].

Необходимость. Пусть $\omega_j(\lambda)$ — корень характеристического уравнения (6), имеющий тип T_5 с $\mu_j^{(0)} = \mu$.

Тогда, в силу леммы 1, существует аналитическое при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ решение системы (4)

$$\bar{y}(x, \lambda) = \bar{c}(\lambda)\exp\{\omega_j(\lambda)x\}$$

такое, что $\|\bar{c}(\lambda)\| < Cr^{-\gamma}$, $\gamma > 0$ — любое наперед заданное число.

Оценим выражение

$$f(\lambda) \equiv \sup_{\substack{x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant k \leqslant m-1}} \| \bar{y}^{(k)}(x, \lambda) \| C \exp\left\{ -\int_0^{|x|} h(t)\, dt \right\}.$$

Пусть условие (22) не выполняется, т. е.

$$\int^{\infty} [h(t)]^{1-\frac{1}{\mu}} dt < \infty. \tag{23}$$

Тогда

$$f(\lambda) \leqslant \sup_x C r^{-\gamma} r^{mq_j^{(0)}} \exp\left\{ -|x| \operatorname{Re} w_j(\lambda) - \int_0^{|x|} h(t)\, dt \right\}.$$

Поскольку $\operatorname{Re} w_j(\lambda) \geqslant -C_j r^{\mu}$, $C_j > 0$, $0 < \mu < 1$ (свойство 6, п. 2), то мы получаем

$$f(\lambda) \leqslant \sup_x C \exp\left\{ \int_0^{|x|} [C_j r^{\mu} - h(t)]\, dt \right\}.$$

Определим функцию $g(r)$ из условия $h(g(r)) = C_j r^{\mu}$.
Тогда

$$f(\lambda) \leqslant C \exp\left\{ \int_0^{g(r)} [C_j r^{\mu} - h(t)]\, dt \right\} \leqslant C \exp\left\{ \int_0^{g(r)} C_j r^{\mu} dt \right\} =$$
$$= C \exp\{C_j r^{\mu} g(r)\} \equiv f_1(r).$$

Отсюда так же, как в [1], получаем

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln |f(\lambda)|}{r^2} dr < \infty,$$

в силу (23).

Тогда, в силу известного критерия Карлемана [4], существует аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ функция $F(\lambda) \not\equiv 0$ такая, что $|F(\lambda) \times f(\lambda)| < C_1$, и так же, как в доказательстве теоремы 1, функция $\bar{z}(x, \lambda) = F(\lambda)\bar{y}(x, \lambda)$ приводит к нетривиальному решению $\bar{u}(x, t)$ задачи (1)—(2), удовлетворяющему условию (21).

Теорема 6. *Пусть система (1) имеет тип* Γ_6, $h(t) > 0$ — *непрерывная возрастающая при* $t > 0$ *функция.*

Тогда в классе функций, удовлетворяющих оценкам

$$\| D_x^k \bar{u}(x, t) \| \leqslant C \exp\left\{ \alpha t + \int_0^{|x|} h(t)\, dt \right\},$$

$$x \leqslant 0, \ t \geqslant 0, \ k = 0, 1 \ldots, m-1,$$

где

$$\int^{\infty} [h(t)]^{-\varepsilon} dt = \infty.$$

при каком-либо $\varepsilon > 0$, *решение задачи Коши (1)—(2) есть тождественный нуль.*

Доказательство проводится так же, как в [1].

Теорема 7. *Пусть система (1) имеет тип* Γ_7. *Тогда задача Коши (1)—(2) может иметь лишь тривиальное решение.*

Доказательство проводится так же, как в [1].

Пример. Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2}; \\ \dfrac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2}, \end{cases} \tag{24}$$

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = 0. \tag{25}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - a^2 w^4 = 0. \tag{26}$$

Обозначим $\arg a = \varphi$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Корни уравнения (26) таковы:

$$w_0 = a^{-\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}},\ w_1 = -a^{-\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}},$$

$$w_2 = ia^{-\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}},\ w_3 = -ia^{-\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}.$$

а) $\varphi \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$.

В этом случае один из корней $w_j(\lambda)$, $j = 0, 1, 2, 3$, принадлежит типу T_1, остальные — типу T_5. Система (24) имеет тип Γ_1, значит, для единственности решения задачи Коши (24)—(25) в классе функций (10) необходимо и достаточно, чтобы $\sup h(x) = \infty$.

б) $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

В этом случае два корня принадлежат типу T_2 с $\beta = \dfrac{1}{2}$, $B = 0$, остальные принадлежат типу T_5. Система (24) имеет тип Γ_2, значит, для единственности решения задачи Коши (24)—(25) в классе функций (14) с $B = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{\infty} [h(t)]^3 dt = \infty.$$

В заключение автор приносит благодарность В. М. Борок и Я. И. Житомирскому за постоянное внимание и руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иохвидович Н. Ю. О классах единственности решения задачи Коши.— Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 14, Харьков, 1971, с. 40—58.
2. Чеботарев В. Г. Теория алгебраических функций. М.-Л., «Наука», 1948. 396 с.
3. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.-Л., «Наука», 1939. 718 с.
4. Мандельбройт С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М., Изд-во иностр. лит., 1955. 415 с.