УДК 513.838

В. Д. Головин, канд. физ.-мат. наук

ДВОЙСТВЕННОСТЬ де РАМА — СЕРРА ДЛЯ КОГЕРЕНТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ НА КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Настоящая статья содержит доказательство теоремы двойственности для когомологий комплексного аналитического пространства с коэффициентами в когерентном аналитическом пучке. Полученная двойственность аналогична двойственности де Рама между гомологиями и когомологиями [1] и, с другой стороны, является обобщением двойственности Серра для когомологий комплексного аналитического многообразия [2, 3]. Исходный пункт статьи состоит в определении групп гомологий комплексного аналитического пространства с коэффициентами в когерентном аналитическом пучке. В конце статьи в качестве приложения полученных результатов рассмотрена задача о переходе к проективному пределу в пространствах когомологий.

1. Пусть M — аналитическое множество в области G пространства $\boldsymbol{C}^n$. Наделим множество M структурным пучком $\boldsymbol{O}_M = \boldsymbol{O}_G/\boldsymbol{I} \mid M$, где $\boldsymbol{O}_G$ — пучок ростков голоморфных функций на G, а $\boldsymbol{I}$ — когерентный подпучок идеалов в $\boldsymbol{O}_G$, множество нулей которого совпадает с M. Для произвольного когерентного аналитического пучка $\boldsymbol{F}$ на M при каждом $k = 0,1, \ldots$ положим:

$$H_k^c(M, \boldsymbol{F}) = H_k \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}_G, c}(G; \boldsymbol{F}^G, \boldsymbol{D}_*),$$

где $\boldsymbol{D}_*$ — градуированный дифференциальный пучок ростков потоков двойной размерности $(0, *)$ на G.

Векторное пространство $H_k^c(M; \boldsymbol{F})$ назовем *пространством гомологий* размерности k аналитического множества M с компактными носителями и с коэффициентами в когерентном аналитическом пучке $\boldsymbol{F}$. Это определение аналогично определению групп гомологий по де Раму [1].

Наделим векторное пространство $H_k^c(M; \boldsymbol{F})$ естественной топологией, определяемой сильной топологией в пространстве потоков, и обозначим через $\widetilde{H}_k^c(M; \boldsymbol{F})$ ассоциированное отделимое топологическое векторное пространство. Из результатов работы [4] вытекает следующая «*локальная теорема двойственности*».

Предложение 1. *Имеет место канонический изоморфизм топологических векторных пространств*

$$\left\{\tilde{H}^k(M;\ \boldsymbol{F})\right\}' \approx \tilde{H}^c_k(M;\ \boldsymbol{F}),$$

где сопряженное пространство наделено сильной топологией.

В частности, если U — голоморфно полное открытое множество в M, то

$$H^c_0(U;\ \boldsymbol{F}) = \{\Gamma(U;\ \boldsymbol{F})\}';\ H^c_k(U;\ \boldsymbol{F}) = 0\ \ (k \geqslant 1).$$

Пусть $U_1 \subset U_2$ — голоморфно полные открытые множества в M. Рассмотрим U_1 и U_2 как аналитические множества в открытых множествах G_1 и G_2 соответственно пространств $\mathbf{C}^{n_1}$ и $\mathbf{C}^{n_2}$. Пусть определено голоморфное отображение $f: G_1 \to G_2$, индуцирующее тождественный изоморфизм множества U_1 как кольцованного пространства на себя. Отображение f индуцирует непрерывные линейные отображения соответственно пространств когомологий

$$f^*: H^*(U_2;\ \boldsymbol{F}) \to H^*(U_1;\ \boldsymbol{F})$$

и пространств гомологий

$$f_*: H^c_*(U_1;\ \boldsymbol{F}) \to H^c_*(U_2;\ \boldsymbol{F}).$$

Очевидно, что f^* определяется лишь вложением $U_1 \subset U_2$ и не зависит от вложений U_1, U_2 соответственно в G_1, G_2 и от выбора отображения f. Так как $f_* = {}^t f^*$, то f_* также определяется лишь вложением $U_1 \subset U_2$ и потому является каноническим отображением.

Тем самым $U \to H^c_*(U;\ \boldsymbol{F})$ — ковариантный функтор, определенный на категории голоморфно полных открытых подмножеств в M и принимающий значения в категории векторных пространств. В частности, $H^c_*(U;\ \boldsymbol{F})$ не зависит от выбора вложения U в $\boldsymbol{C}^n$.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{U} = (U_i)$ — локально конечное открытое покрытие множества M. Тогда существует спектральная последовательность*

$$E^2_{p,\,q} = H^c_p(U;\ \mathbf{H}^c_q(\boldsymbol{F})) \Rightarrow H^c_{p+q}(M;\ \boldsymbol{F}),$$

где $\boldsymbol{H}^c_q(\boldsymbol{F})$ — предкопучок $\boldsymbol{U} \to H^c_q(U;\ \boldsymbol{F})$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{G} = (G_i)$ — открытое покрытие области G, для которого $G_i \cap M = U_i$. Для произвольного аналитического пучка $\boldsymbol{L}$ на G положим

$$\boldsymbol{C}_p(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{C}_p(\boldsymbol{G};\ \boldsymbol{L}) = \prod_{i_0 \ldots i_p} \boldsymbol{L}_{G_{i_0 \ldots i_p}}$$

при $p = 0, 1, \ldots$ Тогда определена точная последовательность

$$\ldots \to \boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{L}) \to \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{L}) \to \boldsymbol{L} \to 0$$

пучков и их гомоморфизмов. Рассмотрим двойной комплекс

$$\mathrm{Hom}_{O_G,c}(G;\ \boldsymbol{F}^G,\ \boldsymbol{C}_p(\boldsymbol{D}_q)) = \sum_{i_0 \ldots i_p} \mathrm{Hom}_{O_G,c}(G_{i_0 \ldots i_p};\ \boldsymbol{F}^G,\ \boldsymbol{D}_q).$$

Для его первой спектральной последовательности

$$'E^1_{p,\,q} = \sum_{i_0 \ldots i_p} H^c_q(U_{i_0 \ldots i_p};\ \boldsymbol{F}).$$

Следовательно,

$$'E^2_{p,\,q} = H^c_p(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}^c_q(\boldsymbol{F})).$$

С другой стороны, для второй спектральной последовательности

$$''E^1_{p,\,0} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_G,\,c}(G;\ \boldsymbol{F}^G,\ \boldsymbol{D}_p);\ ''E^1_{p,\,q} = 0\ \ (q \neq 0).$$

Поэтому вторая спектральная последовательность вырождается:

$$''E^2_{p,\,0} = H^c_p(M;\ \boldsymbol{F});\ ''E^2_{p,\,q} = 0\ \ (q \neq 0).$$

Теорема доказана.

Пусть покрытие $\boldsymbol{U}$ состоит из голоморфно полных открытых множеств. Тогда первая спектральная последовательность также вырождается, причем

$$'E^1_{p,\,0} = \sum_{i_0 \ldots i_p} H^c_0(U_{i_0 \ldots i_p};\ \boldsymbol{F});\ 'E^1_{p,\,q} = 0\ \ (q \neq 0).$$

Положим по определению

$$H^c_p(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F}) = H^c_p(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F})) = {'E^2_{p,\,0}}$$

при $p = 0, 1, \ldots$.

Следствие 1. *Если локально конечное покрытие $\boldsymbol{U}$ состоит из голоморфно полных открытых множеств, то имеет место канонический изоморфизм*

$$H^c_k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F}) \approx H^c_k(M;\ \boldsymbol{F}).$$

Отсюда получаем, что $U \to H^c_k(U;\ \boldsymbol{F})$ — ковариантный функтор, определенный на категории всех открытых подмножеств в M. В частности, $H^c_k(M;\ \boldsymbol{F})$ не зависит от выбора вложения M в G.

Так как имеет место канонический изоморфизм [4]

$$H^c_k(M;\ \boldsymbol{F}) \approx \mathrm{Ext}^{n-k}_{\mathbf{O}_G,\,c}(G;\ \boldsymbol{F}^G,\ \Omega^n),$$

где Ω^n — пучок ростков голоморфных дифференциальных форм степени n на G, то $\boldsymbol{F} \to H^c_*(M;\ \boldsymbol{F})$ — *контравариантный гомологический функтор* в смысле Гротендика [5], определенный на категории когерентных аналитических пучков над множеством M.

2. Пусть X — комплексное аналитическое пространство в смысле Грауэрта. Это означает, что X — отделимое топологическое пространство, наделенное пучком комплексных алгебр $\mathbf{O}_X$ так, что каждая точка в X имеет окрестность, изомофную, как кольцованное пространство, аналитическому множеству в области пространства $\boldsymbol{C}^n$. Будем предполагать, что пространство X счетно в бесконечности.

Пусть $U=(U_i)$ — открытое покрытие пространства X, причем каждое U_i пусть изоморфно, как кольцованное пространство, аналитическому множеству в области пространства C^n. Положим

$$C_k^c(U;\ F)=\sum_{i_0\ldots i_k} H_0^c(U_{i_0\ldots i_k};\ F)$$

и определим обычным образом граничный оператор

$$\partial_k: C_k^c(U;\ F)\to C_{k-1}^c(U;\ F).$$

Векторное пространство $C_k^c(U;\ F)$ цепей размерности k покрытия U с компактными носителями и с коэффициентами в пучке F наделим топологией прямой суммы. Тогда отображения ∂_k непрерывны. Векторное пространство гомологий покрытия U с компактными носителями и с коэффициентами в пучке F

$$H_k^c(U;\ F)=H_kC_*^c(U;\ F)=\operatorname{Ker}\partial_k/\operatorname{Im}\partial_{k+1}$$

наделим топологией факторпространства. Наконец, определим топологическое векторное пространство гомологий размерности k комплексного пространства X с компактными носителями и с коэффициентами в когерентном аналитическом пучке F как проективный предел

$$H_k^c(X;\ F)=\varprojlim H_k^c(U;\ F),$$

который берется относительно фильтрующегося множества классов попарно эквивалентных покрытий.

Предложение 2. *Если X — комплексное аналитическое многообразие комплексной размерности n, то при каждом $k=0,\ 1,\ldots$ имеет место канонический изоморфизм*

$$H_k^c(X;F)\approx \operatorname{Ext}^{n-k}_{O_X,\,c}(X;\ F,\ \Omega^n),$$

где Ω^n — пучок ростков голоморфных дифференциальных форм степени n на X.

Доказательство. Аналогично теореме 1 можно доказать существование спектральной последовательности

$$E_{p,q}^2=H_p^c(U;\ H_q^c(F))\Rightarrow \operatorname{Ext}^{n-p-q}_{O_X,\,c}(X;\ F,\ \Omega^n),$$

где $H_q^c(F)$ — предкопучок $U\to H_q^c(U;\ F)$. Если покрытие U состоит из голоморфно полных открытых множеств, то получаем изоморфизм

$$H_k^c(U;\ F)\approx \operatorname{Ext}^{n-k}_{O_X,\,c}(X,\ F,\ \Omega^n).$$

Утверждение получается теперь переходом к проективному пределу.

Теорема 2. *Пусть U и V — открытые покрытия пространства X, причем V вписано в U. Тогда имеет место спектральная* последовательность

$$E^2_{p,\,q} = H^c_p(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}^c_q(\boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F})) \Rightarrow H^c_{p+q}(\boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F}),$$

где $H^c_q(\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{F})$ — *предкопучок* $U \to H^c_q(U \cap \boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F})$.

Доказательство. Рассмотрим двойной комплекс

$$\sum_{i_0 \ldots i_p;\ j_0 \ldots j_q} H^c_0(U_{i_0 \ldots i_p} \cap V_{j_0 \ldots j_q};\ \boldsymbol{F}).$$

Для двух спектральных последовательностей, отвечающих двум фильтрациям этого комплекса, получаем соответственно:

$$'E^1_{p,\,q} = \sum_{i_0 \ldots i_p} H^c_q(\boldsymbol{U}_{i_0 \ldots i_p} \cap \boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F});$$

$$''E^1_{p,\,q} = \sum_{j_0 \ldots j_p} H^c_q(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{V}_{j_0 \ldots j_p};\ \boldsymbol{F}).$$

Так как покрытие V вписано в $\boldsymbol{U}$, то

$$H^c_q(\boldsymbol{U} \cap V_{j_0 \ldots j_p};\ \boldsymbol{F}) = 0$$

при $q \geqslant 1$, откуда следует, что вторая спектральная последовательность вырождается:

$$''E^2_{p,\,0} = H^c_p(\boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F});\ ''E^2_{p,\,q} = 0 \quad (q \neq 0).$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Если покрытие $\boldsymbol{U}$ состоит из достаточно мелких голоморфно полных открытых множеств, то каноническое отображение*

$$H^c_k(X;\ \boldsymbol{F}) \to H^c_k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F})$$

является изоморфизмом топологических векторных пространств.

Доказательство. Если $\boldsymbol{V}$ — открытое покрытие, вписанное в U и состоящее из голоморфно полных множеств, то спектральная последовательность теоремы 2 вырождается. Тогда каноническое отображение

$$H^c_k(\boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F}) \to H^c_k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F})$$

является изоморфизмом. Утверждение доказано.

В силу теоремы о теории когерентных аналитических пучков получаем, что $\boldsymbol{F} \to H^c_*(X;\ \boldsymbol{F})$ — *контравариантный гомологический функтор* в смысле Гротендика, определенный на категории когерентных аналитических пучков над X.

Векторное пространство когомологий $H^k(X,\ \boldsymbol{F})$ наделим обычной топологией и обозначим через $\widetilde{H}^k(X,\ \boldsymbol{F})$ ассоциированное с ним отделимое топологическое векторное пространство.

Аналогично через $\widetilde{H}_k^c(X; \boldsymbol{F})$ обозначим отделимое пространство, ассоциированное с топологическим векторным пространством $H_k^c(X; \boldsymbol{F})$. Тогда имеет место следующая *«глобальная теорема двойственности»*.

Теорема 3. *Существует канонический изоморфизм*

$$\{\widetilde{H}^k(X;\ \boldsymbol{F})\}' \approx \widetilde{H}_k^c(X;\ \boldsymbol{F}),$$

где сопряженное пространство наделено сильной топологией.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{U} = (U_i)$ — покрытие пространства X, состоящее из голоморфно полных открытых множеств, каждое из которых изоморфно, как кольцованное пространство, аналитическому множеству в области пространства $\boldsymbol{C}^n$. Положим

$$C^k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F}) = \prod_{i_0 \ldots i_k} \Gamma(U_{i_0 \ldots i_k};\ \boldsymbol{F}).$$

Тогда

$$H^k(X;\ \boldsymbol{F}) \approx H^k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F}) = H^k C^*(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F}).$$

С другой стороны, в силу предложения 1,

$$\{C^k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F})\}' \approx C_k^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F}).$$

Тем самым получаем изоморфизм

$$\{\widetilde{H}^k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F})\}' \approx \widetilde{H}_k^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F}).$$

Теорема доказана.

Если X — комплексное аналитическое многообразие, то ввиду предложения 2 получаем отсюда результаты работы [4].

Следствие 3. *Если комплексное аналитическое пространство X компактно, то векторные пространства $H^k(X; \boldsymbol{F})$ и $H_k^c(X; \boldsymbol{F})$ конечномерны и канонически двойственны друг к другу.*

3. Пусть комплексное аналитическое пространство X является объединением возрастающей последовательности открытых множеств

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_p \subset \ldots;\ \bigcup_{p=1}^{\infty} X_p = X.$$

Тогда при каждом $k = 0, 1, \ldots$ определено каноническое отображение

$$\alpha : H^k(X;\ \boldsymbol{F}) \to \varprojlim_p H^k(X_p;\ \boldsymbol{F}),$$

которое, вообще говоря, не биективно.

Теорема 4. *При каждом $k = 0, 1, \ldots$ каноническое отображение*

$$\widetilde{\alpha} : \widetilde{H}^k(X;\ \boldsymbol{F}) \to \varprojlim_p \widetilde{H}^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$$

является изоморфизмом топологических векторных пространств, Доказательство. Рассмотрим каноническое линейное отображение

$$\beta : \varinjlim_{p} H_k^c(X_p; \boldsymbol{F}) \to H_k^c(X; \boldsymbol{F}),$$

являющееся изоморфизмом векторных пространств. При каждом $p = 1, 2, \ldots$ выберем покрытие $\boldsymbol{U}_p$ множества X_p, состоящее из голоморфно полных открытых множеств, так, чтобы $\boldsymbol{U}_p \subset \boldsymbol{U}_{p+1}$, и положим: $\boldsymbol{U} = \bigcup \boldsymbol{U}_p$. Тогда топология пространства $C_k^c(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F})$, сильного сопряженного к некоторому пространству Фреше и Шварца, является сильнейшей из локально выпуклых топологий, при которых непрерывны канонические отображения

$$C_k^c(\boldsymbol{U}_p; \boldsymbol{F}) \to C_k^c(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F}) \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда следует, что отображение β является изоморфизмом топологических векторных пространств. Так как $\tilde{\alpha} = {}^t\beta$, то теорема доказана.

Следствие 4. *Если пространства $H^k(X; \boldsymbol{F})$ и $H^k(X_p; \boldsymbol{F})$ $(p = 1, 2, \ldots)$ отделимы, то отображение α является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Отсюда вытекает следующее уточнение одной теоремы Виллани ([6], ср. [7]): *если при некотором k пространство $H^k(X; \boldsymbol{F})$ отделимо и $H^k(X_p; \boldsymbol{F}) = 0$ при $p = 1, 2, \ldots$, то $H^k(X; \boldsymbol{F}) = 0$.*

Теорема 5. *Пусть при некотором $k \geqslant 1$ пространства $H^k(X_p; \boldsymbol{F})$ $(p = 1, 2, \ldots)$ отделимы и пусть при каждом $p = 1, 2, \ldots$ образ пространства $H^{k-1}(X_{p+1}; \boldsymbol{F})$ всюду плотен в $H^{k-1}(X_p; \boldsymbol{F})$. Тогда пространство $H^k(X; \boldsymbol{F})$ отделимо и, следовательно, отображение α является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Доказательство. Из сделанных предположений следует, что пространства $H_{k-1}^c(X_p; \boldsymbol{F})$ отделимы, а отображения

$$H_{k-1}^c(X_p; \boldsymbol{F}) \to H_{k-1}^c(X_{p+1}; \boldsymbol{F})$$

инъективны. Последнее означает, что

$$\partial_k C_k^c(\boldsymbol{U}_{p+1}; \boldsymbol{F}) \cap C_{k-1}^c(\boldsymbol{U}_p; \boldsymbol{F}) = \partial_k C_k^c(\boldsymbol{U}_p; \boldsymbol{F}),$$

где $\boldsymbol{U}_p$ — покрытие множества X_p, определенное, как в доказательстве теоремы 4. Следовательно, при каждом $p = 1, 2, \ldots$ пересечение

$$\partial_k C_k^c(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F}) \cap C_{k-1}^c(\boldsymbol{U}_p; \boldsymbol{F}) = \partial_k C_k^c(\boldsymbol{U}_p; \boldsymbol{F})$$

замкнуто в $C_{k-1}^c(\boldsymbol{U}_p; \boldsymbol{F})$. Так как каждое ограниченное множество из $C_{k-1}^c(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F})$ содержится в одном из пространств $C_{k-1}^c(\boldsymbol{U}_p; \boldsymbol{F})$, то по теореме Банаха-Дьедонне подпространство

$\partial_k C_k^c (\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F})$ замкнуто в $C_{k-1}^c (\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F})$. Это означает, что пространство $H_{k-1}^c (X; \boldsymbol{F})$ отделимо, а потому и $H^k (X; \boldsymbol{F})$ отделимо. Теорема доказана.

Следствие 5. *Если при некотором $k \geqslant 1$ пространства $H^k (X_p; \boldsymbol{F})$ отделимы и $H^{k-1} (X_p; \boldsymbol{F}) = 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$, то пространство $H^k (X; \boldsymbol{F})$ отделимо и отображение α является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Отсюда вытекает следующее хорошо известное утверждение: *если $H^k (X_p; \boldsymbol{F}) = 0$ и $H^{k-1} (X_p; \boldsymbol{F}) = 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$, то $H^k (X; \boldsymbol{F}) = 0$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. М., Изд-во иностр. лит., 1956. 250 с.
2. Serre J. — P. Un théorème de dualité. — «Commentarii mathematici helvetici», 1955, vol. 29, № 1, p. 9—26.
3. Головин В. Д. Двойственность для когерентных аналитических пучков. — «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 4, с. 755—758.
4. Головин В. Д. Теоремы двойственности для когомологий комплексных многообразий. — «Функциональный анализ и его приложения», 1970, т. 4, № 1, с. 33—41.
5. Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М., Изд-во иностр. лит., 1961. 175 с.
6. Villani V. Un teorema di passaggio al limite per la coomologia degli spazi complessi. — «Atti della Accademia nazionale dei Lincei. Rendiconti Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali», 1967, vol. 43, № 3—4, p. 168—170.
7. Головин В. Д. По поводу одной работы В. Виллани. — «Украинский геометрический сборник». Вып. 13, Харьков, 1972, с. 63—66.