УДК 517.54

М. Т. Бродович

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, СОХРАНЯЮЩИХ УГЛЫ. I

В статье используются следующие обозначения:

$\operatorname{Fr} D$ — граница области D;

A^0 — внутренность множества A;

CA — дополнение к множеству A относительно плоскости;

$\overline{A}$ — замыкание множества A;

$\operatorname{Ls} B_n$ — верхний топологический предел последовательности множеств B_n;

$[t_1 \wedge t_2]$ — величина наименьшего угла между лучами t_1, t_2;

$t(z)$ — луч, исходящий из точки z.

1

Предлагаемая работа является продолжением работы автора [1] об условиях конформности произвольного взаимно-однозначного отображения f: $D \to R^2$, D — область в R^2 (непрерывность отображения f не предполагается). В [1] достоточное условие конформности гомеоморфизмов, условие K'' Меньшова, в основу которого положено свойство конформного отображения сохранять растяжения, распространяется на произвольные взаимно-однозначные отображения f: $D \to R^2$.

В настоящей работе для отображения f: $D \to R^2$, D — область в R^2 — произвольных (непрерывность отображения f не предполагается), ограниченных и взаимно-однозначных решается следующая задача: $\forall z \in D$ вдоль какой системы лучей $t_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, исходящих из точки z, нужно требовать существование предела $\lim\limits_{\substack{\Delta z \to 0 \\ z+\Delta z \in \bigcup\limits_{i=1} t_i(z)}} \arg \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = T(z)$, чтобы рассматриваемое отображение $f(z)$ $(f: D \to R^2)$ было конформным.

Сформулированная задача для гомеоморфизмов решена Д. Е. Меньшовым в [2], для непрерывных отображений — Ю. Ю. Трохимчуком [3].

Для удобства сформулируем условие K' Меньшова и его теорему.

Определение. *Отображение $f(z)$ $(f: D \to R^2)$ удовлетворяет в точке $z_0 \in D$ условию K', если из этой точки исходят три неколлинеарные луча, вдоль которых*

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ z+\Delta z \in \bigcup\limits_{i=1}^{3} t_i(z)}} \arg \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = T(z).$$

Теорема 1 Меньшова. *Пусть $f(z)$ — гомеоморфизм области D и пусть $\forall z \in D$, исключая, возможно, счетное или конечное множество точек, отображение $f(z)$ удовлетворяет условию K', тогда отображение $f(z)$ — конформно в области D.*

Пример следующего отображения:

$$f(z) = \begin{cases} z, & z \in D_1, \\ z + i, & z \in D_2, \end{cases} \tag{A}$$

где область $D = D_1 \cup D_2$; $D_1 = \underset{z}{\mathrm{E}} \left\{ 0 < \operatorname{Re} z < 1; \quad 0 < \operatorname{Im} z < \frac{1}{2} \right\}$;

$D_2 = \underset{z}{\mathrm{E}} \left\{ 0 < \operatorname{Re} z < 1; \frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Im} z < 1 \right\}$, для которого $\forall z_0 \in \left\{ z : \operatorname{Im} z = \right.$ $\left. = \frac{1}{2} \right\}$ предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \operatorname{arq} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ существует и имеет одно и то же значение вдоль полуплоскости $\operatorname{Im}(z - z_0) \leqslant 0$ и луча дополнительной полуплоскости $t(z_0)$, перпендикулярного к прямой $\left\{ z : \operatorname{Im} z = \frac{1}{2} \right\}$, подсказывает, что искомая система лучей $\{t_i(z)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ $\forall z \in D$ должна быть такой, чтобы в каждый открытый сектор с вершиной в точке z раствора π попадало хотя бы два луча системы $\{t_i(z)\}$.

Поэтому имеем

Определение 1. *Отображение $f(z)$ $(f : D \to R^2)$ удовлетворяет условию K^{**} в точке z_0 области D, если из этой точки исходят пять лучей $t_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ таких, что в каждый открытый сектор раствора π с вершиной в точке z_0 попадают хотя бы два луча системы $t_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, вдоль которых*

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ z_0 + \Delta z \in \bigcup\limits_{i=1}^{5} t_i(z_0)}} \operatorname{arq} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = T(z_0). \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ $(f : D \to R^2,\ D \subset R^2)$ — произвольное ограниченное взаимно-однозначное отображение и пусть $\forall z \in D$ отображение $f(z)$ удовлетворяет условию K^{**}, тогда отображение $f(z)$ — конформно в области D.*

Очевидно, условие K^{**}, в силу примера (A), в теореме 1 не может быть ослаблено.

Доказательство теоремы 1 состоит из ряда лемм и утверждений.

Заметим, что при доказательстве теоремы 1 часто используется теория простых концов Каратеодори [5] (см. также [7]).

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — произвольное взаимно-однозначное отображение области D, β — совершенное множество в области D; функция $f(z)$ удовлетворяет условию K^{**} в каждой точке $z \in \beta$.*

Тогда существуют порция β_0 множества β, множество β', $\beta' \subset \subset \beta_0$, всюду плотное на β_0, числа $\sigma > 0$, $\rho > 0$, угол $0 \leqslant T < 2\pi$ такие, что имеем

1) $[t_i(z') \wedge t_i(z'')] < \sigma$ для $z', z'' \in \beta'$; $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$;

2) $800\sigma < [t_i(z) \wedge t_j(z)] < \pi - 800\sigma$ для $z \in \beta'$, $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$;

3) пусть $\beta_1' = f(\beta')$, z_0 — произвольная фиксированная точка множества β', Ω_i — фиксированные углы $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ с общей вершиной, раствора 4σ каждый, биссектрисами которых служат направления лучей $t_i(z_0)$, повернутые на угол T, углы $\Omega_i(w)$ для каждой точки w получаются параллельным переносом углов Ω_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ в точку w, тогда образы отрезков $t_i(z) \cap \cap \{z' : |z' - z| < \rho\}$, $z \in \beta'$ принадлежат углам $\Omega_i(w)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, $w = f(z)$, соответственно.

Доказательство. В плоскостях z и w фиксируем лучи t и τ, соответственно, и обозначим через $\beta(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \nu, p, q) = \beta(n_i, \nu, p, q)$ множество точек $z \in \beta$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$(a)\quad \left|\left\{t \wedge t_i(z)\right\} - \frac{n_i}{800p}\right| < \frac{1}{800p}\ (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

где через $\{t \wedge t_i(z)\}$ обозначена величина угла, отсчитываемого в положительном направлении от t, заключенная между 0 и 2π;

$$(б)\quad \frac{4}{p} < \left[t_i(z) \wedge t_j(z)\right] < \pi - \frac{4}{p}\ (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3, 4, 5);$$

$$(в)\quad \left|\left\{\tau \wedge T(z)\right\} - \frac{\nu}{800p}\right| < \frac{1}{800p};$$

(г) угол $\Omega(z)$ с вершиной $w = 0$ раствора $\dfrac{1}{400p}$ и биссектрисой $T(z)$ (здесь $T(z)$ (см. (1)) понимаем как луч, аргумент которого $T(z)$) содержит значения отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при всех Δz таких, что

$$0 < |\Delta z| \leqslant \frac{1}{q},\ z + \Delta z \in t_i(z)\ (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Из определения свойства K^{**} и условий леммы 1 следует, что

$$\cup\, \beta(n_i, \nu, p, q) = \beta,$$

где суммирование распространено на всевозможные целые положительные значения чисел n_i, ν, p, q.

Так как совершенное множество β не первой категории на себе, то найдутся определенные значения n_i, ν, p, q, такие, что соответствующее им множество $\beta(n_i, \nu, p, q)$ будет всюду плотно на некоторой порции $\beta_0 = \beta \cap \delta$, $\delta \subset D$, δ — открытый круг множества β.

Для этих чисел положим

$$\beta(n_i, \nu, p, q) \cap \delta = \beta'; \quad \frac{1}{200p} = \sigma; \ \frac{1}{q} = \rho. \tag{2}$$

Убедимся, что для чисел $\sigma > 0$, $\rho > 0$ и точек множества β' выполняются пункты *1*), *2*), *3*), указанные в лемме 1. В силу *а*, *б* и (2) пункты *1*), *2*) выполняются очевидным образом. Что же касается пункта *3*), то если в качестве угла $0 \leqslant T < 2\pi$ принять угол $T(z_0)$, отвечающий, согласно (1), некоторой точке $z_0 \in \beta'$, то тогда, в силу *а*, *в*, *г* и обозначений (2), для углов $\Omega_i(w)$, $w \in \beta_1'$, $\beta_1' = f(\beta')$, определенных в пункте *3*) формулировки леммы 1, выполняются требования пункта *3*). Лемма 1 доказана.

Утверждение 1. В каждой точке $z_0 \in \beta_0$, для которой контингенция $\operatorname{contg}_{\beta_0} z_0 = 2\pi$, имеем $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta'}} f(z) = f(z_0)$.

Доказательство. Считаем, что лучи $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, $z \in \beta'$ занумерованы против часовой стрелки. Углы $\Omega_i(w)$, определенные в пункте *3*) леммы 1, соответствуют лучам $t_i(z)$ в w-плоскости, $w = f(z)$, $z \in \beta'$. Обозначим через $\Omega_{i,j}(w)$ $(i \neq j, \ i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ наименьший угол, содержащий углы $\Omega_i(w)$, $\Omega_j(w)$; угол $\Omega_{i,j}(w)$ соответствует в z-плоскости углу $[t_i(z) \wedge t_j(z)]$.

Замечание. В дальнейшем постоянно сумма индексов $i + j$ $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ при всевозможных углах и лучах равна числу $k \leqslant 5$, определенному таким образом $i + j = k \pmod 5$, например: $t_{4+3}(z) = t_2(z)$.

Рассмотрим вспомогательное

Утверждение α. Пусть $\tilde{z} \in \beta'$. Образы точек $z \in \beta' \cap [t_i(\tilde{z}) \wedge t_{i+1}(\tilde{z})]$ достаточно малой окрестности точки $\tilde{z}$ попадают в угол $\Omega_{i,i+1}(\tilde{w})$, $\tilde{w} = f(\tilde{z})$, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Доказательство. Пусть $z \in \beta' \cap [t_i(\tilde{z}) \wedge t_{i+1}(\tilde{z})]$. В силу условия K^{**} угол $[t_{i+4}(\tilde{z}) \wedge t_{i+1}(\tilde{z})] < \pi$ должен содержать луч $t_i(\tilde{z})$, для угла $[t_{i+4}(\tilde{z}) \wedge t_{i+1}(\tilde{z})]$ выполняется пункт *2*) леммы 1; учитывая пункт *1*) леммы 1, заключаем: луч $t_{i+4}(z)$ пересекает луч $t_i(\tilde{z})$ в некоторой точке, пусть точке z_1. В силу аналогичных условий луч $t_{i+2}(z)$ пересекает луч $t_{i+1}(\tilde{z})$, пусть в точке z_2.

Можем считать, что длина отрезков zz_1, zz_2, $\tilde{z}z_1$, $\tilde{z}z_2$ меньше ρ. В силу пункта *3*) леммы 1 точка $w_1 = f(z_1)$ принадлежит одновременно углу $\Omega_i(\tilde{w})$ и $\Omega_{i+4}(w)$, аналогично — точка $w_2 = f(z_2)$ принадлежит пересечению $\Omega_{i+1}(\tilde{w}) \cap \Omega_{i+2}(w)$. Итак, углы $\Omega_{i+4}(w)$, $\Omega_{i+2}(w)$ (они совпадают с углами $\Omega_{i+4}(\tilde{w})$, $\Omega_{i+2}(\tilde{w})$, соответственно (см. пункт 3) леммы 1, с точностью до параллельного переноса) пересекают углы $\Omega_i(\tilde{w})$, $\Omega_{i+1}(\tilde{w})$, следовательно, точка $w \in \Omega_{i,\, i+1}(\tilde{w})$. Утверждение α доказано.

Пусть $\forall z_0 \in \beta_0$ — замкнутые углы $\theta_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ раствора σ с вершиной в точке z_0, содержат направления лучей $t_i(z)$, $z \in \beta'$, соответственно. Через $V_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ обозначим открытые углы, дополняющие $\bigcup_{i=1}^{5} \theta_i(z_0)$ к полному углу. Будем считать, что углы $\theta_i(z_0)$ занумерованы против часовой стрелки; угол $V_i(z_0)$ — смежный с углом $\theta_i(z_0)$ и следует за углом $\theta_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ при движении против часовой стрелки. Через $\tilde{V}_i(z_0)$ обозначим наименьший открытый угол, содержащий углы $V_i(z_0)$ и $V_{i+1}(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Докажем, что предел $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta'}} f(z)$ существует. Для этого достаточно убедиться в существовании предела

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \tilde{V}_i(z_0)}} f(z) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{3}$$

Действительно, последний предел один и тот же для всех углов $\tilde{V}_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, так как $\tilde{V}_i(z_0) \cap \tilde{V}_{i+1}(z_0) = V_{i+1}(z_0)$.

Согласно условию $\operatorname{contg}_{\beta'} z_0 = \operatorname{contg}_{\beta_0} z_0 = 2\pi$, имеется последовательность точек $z_n \to z_0$, $\{z_n\} \subset \beta' \cap \theta_{i+1}(z_0)$; можем считать, что соответствующая последовательность w_n сходится к некоторой точке, пусть точка a w-плоскости. Пусть точка z_n последовательности $\{z_n\}$ достаточно близка к точке z_0 и пусть, в силу утверждения α, образы точек $z \in \beta' \cap [t_{i+4}(z_n) \wedge t_{i+3}(z_n)] \cap \tilde{V}_i(z_0)$ попадают в угол $\Omega_{i+4,\, i+3}(w_n)$. Пусть $z_m \in \{z_n\} \cap [t_{i+4}(z_n) \wedge t_{i+3}(z_n)]$; согласно утверждению α, образы точек $z \in \beta' \cap [t_{i+4}(z_n) \wedge t_{i+3}(z_n)] \cap \cap [t_i(z_m) \wedge t_{i+2}(z_m)]$ попадают в угол $\Omega_{i,\, i+2}(w_m)$.

Итак, точки множества β', находящиеся в четырехугольнике $[t_{i+4}(z_n) \wedge t_{i+3}(z_n)] \cap [t_i(z_m) \wedge t_{i+2}(z_m)] = \square_{n,\, m}$, попадают в пересечение $\Omega_{i+4,\, i+3}(w_n) \cap \Omega_{i,\, i+2}(w_m)$. Из определения углов $\tilde{V}_i(z_0)$, $\theta_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ ясно, что если число m достаточно велико, то в четырехугольник $\square_{m,\, n}$ попадает любая наперед заданная точка $z \in \beta' \cap \tilde{V}_i(z_0) \cap [t_{i+4}(z_n) \wedge t_{i+3}(z_n)]$. Из определения последовательности $\{z_n\}$ следует, что при n, $m \to \infty$ образы четырехугольников $\square_{m,\, n}$ — четырехугольники $\Omega_{i+4,\, i+3}(w_n) \cap \Omega_{i,\, i+2}(w_n)$ стягиваются к точке a.

Существование предела (3) доказано.

венно (см. пункт 3) леммы 1, с точностью до параллельного переноса) пересекают углы $\Omega_i(\widetilde{w})$, $\Omega_{i+1}(\widetilde{w})$, следовательно, точка $w \in \Omega_{i,\,i+1}(\widetilde{w})$. Утверждение α доказано.

Пусть $\forall z_0 \in \beta_0$ — замкнутые углы $\theta_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ раствора σ с вершиной в точке z_0, содержат направления лучей $t_i(z)$, $z \in \beta'$, соответственно. Через $V_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ обозначим открытые углы, дополняющие $\bigcup\limits_{i=1}^{5} \theta_i(z_0)$ к полному углу. Будем считать, что углы $\theta_i(z_0)$ занумерованы против часовой стрелки; угол $V_i(z_0)$ — смежный с углом $\theta_i(z_0)$ и следует за углом $\theta_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ при движении против часовой стрелки. Через $\widetilde{V}_i(z_0)$ обозначим наименьший открытый угол, содержащий углы $V_i(z_0)$ и $V_{i+1}(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Докажем, что предел $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta'}} f(z)$ существует. Для этого достаточно убедиться в существовании предела

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \widetilde{V}_i(z_0)}} f(z) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{3}$$

Действительно, последний предел один и тот же для всех углов $\widetilde{V}_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, так как $\widetilde{V}_i(z_0) \cap \widetilde{V}_{i+1}(z_0) = V_{i+1}(z_0)$.

Согласно условию $\operatorname{contg}_{\beta'} z_0 = \operatorname{contg}_{\beta_0} z_0 = 2\pi$, имеется последовательность точек $z_n \to z_0$, $\{z_n\} \subset \beta' \cap \theta_{i+1}(z_0)$; можем считать, что соответствующая последовательность w_n сходится к некоторой точке, пусть точка a w-плоскости. Пусть точка z_n последовательности $\{z_n\}$ достаточно близка к точке z_0 и пусть, в силу утверждения α, образы точек $z \in \beta' \cap [t_{i+4}(z_n)^\wedge t_{i+3}(z_n)] \cap \widetilde{V}_i(z_0)$ попадают в угол $\Omega_{i+4,\,i+3}(w_n)$. Пусть $z_m \in \{z_n\} \cap [t_{i+4}(z_n)^\wedge t_{i+3}(z_n)]$; согласно утверждению α, образы точек $z \in \beta' \cap [t_{i+4}(z_n)^\wedge t_{i+3}(z_n)] \cap \cap [t_i(z_m)^\wedge t_{i+2}(z_m)]$ попадают в угол $\Omega_{i,\,i+2}(w_m)$.

Итак, точки множества β', находящиеся в четырехугольнике $[t_{i+4}(z_n)^\wedge t_{i+3}(z_n)] \cap [t_i(z_m)^\wedge t_{i+2}(z_m)] = \square_{n,\,m}$, попадают в пересечение $\Omega_{i+4,\,i+3}(w_n) \cap \Omega_{i,\,i+2}(w_m)$. Из определения углов $\widetilde{V}_i(z_0)$, $\theta_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ ясно, что если число m достаточно велико, то в четырехугольник $\square_{m,\,n}$ попадает любая наперед заданная точка $z \in \beta' \cap \widetilde{V}_i(z_0) \cap [t_{i+4}(z_n)^\wedge t_{i+3}(z_n)]$. Из определения последовательности $\{z_n\}$ следует, что при n, $m \to \infty$ образы четырехугольников $\square_{m,\,n}$ — четырехугольники $\Omega_{i+4,\,i+3}(w_n) \cap \Omega_{i,\,i+2}(w_n)$ стягиваются к точке a.

Существование предела (3) доказано.

Отметим следующее: совершенно аналогично (строятся аналогичные четырехугольники $\square_{m,n}$), как существование предела (3), доказывается нужное впоследствии

Утверждение β. Для произвольной точки $z_0 \in \beta_0$ имеет место следующее:

1) $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap V_i(z_0)}} f(z)$ — существует $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$;

2) $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \theta_i(z_0)}} f(z)$ — существует $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$;

3) для смежных углов $\theta_i(z_0)$, $V_j(z_0)$ $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \theta_i(z_0)}} f(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap V_j(z_0)}} f(z).$$

Завершим доказательство утверждения 1. Докажем, что

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta'}} f(z) = a = f(z_0). \tag{4}$$

Пусть $\forall i = 1, 2, 3, 4, 5$ $Q_i(z_0)$ — пара замкнутых вертикальных углов раствора 100σ, биссектриса которых содержит биссектрису соответствующего угла $\theta_i(z_0)$. Так как, в силу пункта *2)* леммы 1, углы $Q_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ не пересекаются, то имеются две пары вертикальных углов, пусть $Q_1(z_0)$, $Q_2(z_0)$, каждая из которых содержит не более, чем один луч системы $t_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, соответствующей точке z_0, согласно условию K^{**}.

Для доказательства (4) предложим, что $f(z_0) \neq a$. Тогда $f(z_0)$ не принадлежит одному из двух углов $\Omega_i(a)$ $(i = 1,2)$, пусть $f(z_0) \overline{\in} \Omega_1(a)$. В каждом дополнительном угле к паре вертикальных углов $Q_1(z_0)$, в силу определения 1, имеются по два луча системы $t_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Так как контингенция $\operatorname{contg}_{\beta'} z_0 = 2\pi$, то в угле пары вертикальных углов $Q_1(z_0)$, не содержащем $\theta_1(z_0)$, имеются точки z_1, $z_2 \in \beta'$ (в качестве точек z_1, z_2 взяты точки, для которых угол между отрезками z_0z_1, z_0z_2 близок к 100σ), такие, что лучи $t_1(z_1)$, $t_1(z_2)$ пересекают по два луча системы лучей $t_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Считаем, что точки z_1, z_2 достаточно близки к точке z_0, тогда углы $\Omega_1(w_1)$, $\Omega_1(w_2)$, так как $f(z_0) \overline{\in} \Omega_1(a)$, не содержат точки $f(z_0)$. Образы точек пересечения лучей $t_1(z_1)$, $t_1(z_2)$ с четырьмя лучами системы лучей $t_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ (обозначим их через w', w'', w''', w^4) принадлежат множеству $\Omega_1(w_1) \cup \Omega_1(w_2)$.

Так как точки w_1, w_2 лежат в малой окрестности точки a (множество $\Omega_1(w_1) \cup \Omega_1(w_2)$ — это почти угол $\Omega_1(a)$), можем считать, что наименьший угол с вершиной в точке $w_0 = f(z_0)$, содержащий отрезки w_0w', w_0w'', w_0w''', w_0w^4, имеет раствор меньше π. С другой стороны, тот же угол, в силу условия K^{**} в точке z_0, должен быть больше π. Последнее противоречие доказывает (4). Утверждение 1 доказано.

В силу утверждения 1, из леммы 1 следует

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 существует открытое всюду плотное в области D множество, на котором отображение $f(z)$ аналитично.*

Действительно, если условие K^{**} выполняется для всех точек $z \in D$, то множество β_0 (см. лемму 1) — открытое множество и условие утверждения 1 выполняется для всех точек $z_0 \in \beta_0$. Легко видеть, что в данном случае из условия $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta'}} f(z) = f(z_0)$ следует — $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Непрерывная на открытом множестве β_0 функция $f(z)$, удовлетворяющая условию K^{**} для $z \in \beta_0$, в силу теоремы Меньшова аналитична на нем. Лемма 2 доказана.

Пусть H — множество точек аналитичности функции $f(z)$, $H \subset D$. Множество $\beta = D - H$ не имеет изолированных точек, т. е. совершенно в области D.

К множеству $\beta = D - H$ применима лемма 1. Пусть β_0 — порция множества β, определяемая кругом δ, $\delta \cap \beta = \beta_0$, на которой выполняются условия леммы 1.

Теорема 1 будет доказана, если покажем, что $\forall z_0 \in \beta_0$ функция $f(z)$ обязана быть непрерывной, т. е. $\delta \subset H$.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть контингенция $\operatorname{contg}_{\beta_0} z_0$ для некоторой точки $z_0 \in \beta_0$ не содержит полуплоскости, тогда $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta'}} f(z) = f(z_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях утверждения 2 имеется открытый сектор, пусть v, угла с вершиной в точке z_0, содержащего некоторый угол $\theta_i(z_0) \cup V_i(z_0) \cup \theta_{i+1}(z_0)$ (i принимает одно из значений 1, 2, 3, 4, 5) и два луча, пусть $t_1(z_0)$, $t_2(z_0)$, соответствующие точке z_0, согласно условию K^{**} в точке z_0, такой, что $\beta_0 \cap v = 0$. В секторе v отображение $f(z)$ конформно.

Пусть $\{z_n\}$ — последовательность точек множества β', $z_n \to z_0$ такая, что соответствующая последовательность $f(z_n)$ сходится, пусть к точке a плоскости w, и последовательности лучей $t_i(z_n)$, $t_{i+1}(z_n)$ имеют предельные положения, пусть лучи $\tilde{t}_i(z_0)$, $\tilde{t}_{i+1}(z_0)$ соответственно, очевидно, $\tilde{t}_i(z_0) \subset \theta_i(z_0)$, $\tilde{t}_{i+1}(z_0) \subset \theta_{i+1}(z_0)$. В w-плоскости лучам $t_i(z_n)$, $t_{i+1}(z_n)$ соответствуют углы $\Omega_i(w_n)$, $\Omega_{i+1}(w_n)$, предельное положение которых — углы $\Omega_i(a)$, $\Omega_{i+1}(a)$ соответственно. Считаем, что диаметр сектора v меньше ρ. Так как, в силу пункта *3* леммы 1, образы отрезков $v \cap t_i(z_n)$, $v \cap t_{i+1}(z_n)$ попадают в углы $\Omega_i(w_n)$, $\Omega_{i+1}(w_n)$ соответственно ($n = 1, 2, \ldots$), то в силу непрерывности функции $f(z)$ в области v, образы отрезков $\{\tilde{t}_i(z_0)-z_0\}\cap v$ и $\{\tilde{t}_{i+1}(z_0)-z_0\}\cap v$ принадлежат углам $\Omega_i(a)$, $\Omega_{i+1}(a)$ соответственно.

Рассмотрим область $[\tilde{t}_i(z_0)\hat{\ }\tilde{t}_j(z_0)]^0\cap v$; обозначим ее через g. Убедимся, что $\operatorname{Fr} f(g)\subset\{\Omega_i(a)\cup\Omega_{i+1}(a)\cup f(\lambda)\}$, где λ — дуга, ограничивающая сектор v. Действительно, никакая точка $z\overline{\in}\Omega_i\times\times(a)\cup\Omega_{i+1}(a)\cup f(\lambda)$ не содержится в $\operatorname{Fr} f(g)$, так как в противном случае на $\operatorname{Fr} f(g)$ имелось бы много различных достижимых точек $\operatorname{Fr} f(g)$, которым в z-плоскости отвечает достижимая точка $z_0\in\operatorname{Fr} g$. Поэтому достаточно малый сектор одного из двух углов $C(\Omega_i(a)\cup\Omega_{i+1}(a))$ содержится в области $f(g)$; обозначим его через $\tilde{g}$. Пусть l — радиус, проведенный в секторе $\tilde{g}$. Прообраз $f^{-1}(l-a)$ — простая жорданова дуга с концом в точке z_0, $f^{-1}(l-a)\subset g$. Действительно, если $f^{-1}(l-a)$ не является простой дугой с концом в точке z_0, то континуум $\limsup\limits_{\substack{w\to a\\ w\in l-a}} f^{-1}(w)=$ $=k$ содержится в $\tilde{t}_i(z_0)\cup\tilde{t}_{i+1}(z_0)$, но на множестве $\tilde{t}_i(z_0)\cup\tilde{t}_{i+1}\times\times(z_0)-z_0$ отображение $f(z)$ однолистно и непрерывно, следовательно, различным точкам континуума $k-z_0$ отвечают разные точки $\operatorname{Fr} f(g)$; если же существует $\lim\limits_{\substack{w\to a\\ w\in l-a}} f^{-1}(w)\neq z_0$, то, так как радиус l разделяет область $f(g)$ на две области такие, что граница одной из них содержит $\operatorname{Fr} f(g)\cap\Omega_i(a)$, а граница второй — $\operatorname{Fr} f(g)\cap\Omega_{i+1}(a)$, то, в силу однолистности отображения $f(z)$, также получаем противоречие. Итак, вдоль жордановой дуги $f^{-1}(l-a)=l_{z_0}$ имеем $\lim\limits_{\substack{s\to z_0\\ z\in l_{z_0}}} f(z)=a$.

Убедимся, что
$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\beta'}} f(z)=a. \tag{5}$$

Действительно, предложим противное, т. е. что для некоторой последовательности точек $\{z_n'\}\subset\beta'$, $z_n'\to z_0$ (можем считать, что последовательности лучей $t_i(z_n')$, $t_{i+1}(z_n')$ имеют предельные положения) соответствующая последовательность $f(z_n)$ имеет пределом точку b плоскости w, $b\neq a$. Тогда аналогично, как доказывается выше, в угле $\theta_i(z_0)\cup V_i(z_0)\cup\theta_{i+1}(z_0)$ имеется простая жорданова дуга l_{z_0}' с концом в точке z_0, вдоль которой $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=$ $=b$. Соединим в секторе v начала дуг l_{z_0}, l_{z_0} так, чтобы полученная замкнутая дуга γ была простой жордановой дугой. Пусть d — область, для которой $\operatorname{Fr} d=\gamma$, $d\subset v$. Отображение $f(z)$ — конформно в $\bar{d}-z_0$. Так как граница области $f(d)$ — простая жорданова дуга $f(\gamma-z_0)\cup\{a\}\cup\{b\}$, то $b=a$. Существование предела (5) доказано.

Рассмотрим теперь область $v \cap [t_1(z_0) \wedge t_2(z_0)]^\circ$. Аналогично, как доказывается существование дуги l_{z_0}, вдоль которой $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$, доказывается существование простой жордановой дуги γ_{z_0}, вдоль которой $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Действительно, достаточно малые отрезки лучей $t_1(z_0)$, $t_2(z_0)$, в силу условия K^{**} в точке z_0, отображаются в углы наперед заданного малого раствора; обозначим их через $\widetilde{\Omega}_1(w_0)$, $\widetilde{\Omega}_2(w_0)$ соответственно. Далее повторяя рассуждения, приводящие к дуге l_{z_0}, получим нужную дугу γ_{z_0}.

Если теперь соединить дуги γ_{z_0} и l_{z_0} так, чтобы полученная замкнутая простая жорданова дуга, пусть γ', принадлежала сектору v, то аналогично, как при доказательстве равенства $a = b$, получим равенство $a = f(z_0)$. Итак, утверждение 2 доказано.

Из доказательства утверждения 2 следует следующее нужное впоследствии

Утверждение γ. Пусть для некоторой точки $z_0 \in \beta_0$ $\exists i = 1, 2, 3, 4, 5$ такое, что в некотором секторе угла $\theta_i(z_0) \cup V_i \times (z_0) \cup \theta_{i+1}(z_0)$ нет точек множества β_0, тогда $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta'}} f(z)$ существует.

В силу теоремы о контингенции (см. [4]), $\operatorname{contg}_{\beta_0} z_0$, $z_0 \in \beta_0$, во всех точках множества β_0, исключая множество длины нуль,— полная плоскость, полуплоскость или прямая. В силу утверждения 1, если $\operatorname{contg}_{\beta_0} z_0 = 2\pi$, $z_0 \in \beta_0$, или, в силу утверждения 2, если $\operatorname{contg}_{\beta_0} z_0 = \pi$ или прямая, имеем

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta'}} f(z) = f(z_0). \tag{6}$$

Обозначим через β^* множество точек, $\beta^* \subset \beta_0$, для которых не выполняется (6). В силу теоремы о контингенции и (6), $\beta^* = 0$.

Введем новую функцию $\varphi(z)$, определенную в круге δ. Напомним, что δ — открытый круг, определяющий порцию β_0, $\beta_0 = \beta \cap \delta$ следующим образом:

$$\varphi(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \delta - \beta^*, \\ \lim\limits_{z_n \to z} f(z_n), & z \in \beta^*, \end{cases} \tag{7}$$

где $\{z_n\}$ — некоторая последовательность точек множества β', для которой предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n)$ существует; предложим еще, что последовательность точек $\{z_n\}$ такова, что $\forall i = 1, 2, 3, 4, 5$ последовательность лучей $t_i(z_n)$ имеет предельное положение, пусть луч $\widetilde{t}_i(z)$.

Лемма 3. Функция $\varphi(z)$ непрерывна в каждой точке множества $\beta_0 - \beta^*$.

Доказательство леммы 3. Предложим противное, функция $\varphi(z)$ разрывна в некоторой точке $z_0 \in \beta_0 - \beta^*$. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что для произвольного $\delta > 0$ имеем

$$\varphi(K) \cap \{w : |w - w_0| \geqslant \varepsilon\} \neq 0, \tag{8}$$

где

$$K = \{z : |z - z_0| < \delta\}, \; w_0 = f(z_0).$$

Пусть число $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{1000}$. В силу (6), (7), можем считать, что число $\delta > 0$ таково, что $\varphi(\overline{K} \cap \beta_0) \subset \{w : |w - w_0| \leqslant \varepsilon_0\}$. Из последнего включения следует, что $G = \varphi(K) \cap \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ — открытое множество; $\varphi^{-1}(G) \subset H \cap K$ (напомним — через H обозначено множество точек аналитичности функции $f(z)$ в области D). Пусть G_k — компоненты множества G; их прообразы в z-плоскости — области $D_k = \varphi^{-1}(G_k)$, $D_k \subset K \cap H$.

Лемма 3 следует из следующего (оно будет доказано ниже)

Утверждения I. Для каждой области D_k и произвольной точки $z \in \operatorname{Fr} D_k \cap K$ имеем следующее: для произвольной последовательности точек

$$\{z_n\} \subset D_k, \; z_n \to z, \; \operatorname{Ls} \varphi(z_n) \subset \left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Убедимся, что из утверждения I следует лемма 3. Действительно, функции $\varphi(z)$, $f(z)$ совпадают на множестве $H \cap K$ и интеграл Дирихле ограниченной по условию, аналитической, однолистной функции $f(z)$ на множестве H конечен. Следовательно, в силу теоремы Фубини, имеется такое число ρ_0 $(0 < \rho_0 < \delta)$, что

$$\sum_s \text{дл.}\, \varphi(\delta_s) < \infty, \tag{9}$$

где δ_s — открытые дуги, составляющие множества $\{z : |z - z_0| = \rho_0\} - \beta_0$.

Пусть $K_{\rho_0} = \{z : |z - z_0| < \rho_0\}$ — новая окрестность точки z_0. Множества $K_{\rho_0} \cap D_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — открытые. Рассмотрим те из них, для которых

$$\varphi(D_k \cap K_{\rho_0}) \cap \{w : |w - w_0| \geqslant \varepsilon\} \neq 0. \tag{10}$$

Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ множество $\operatorname{Fr}(D_k \cap K_{\rho_0})$ состоит из точек $\operatorname{Fr}(D_k) \cap K$ и точек открытых дуг δ_{s_k}, $\left\{\delta_{s_k}\right\} \subset \left\{\delta_s\right\}$. В силу (9) и утверждения I, $\varphi(\delta_{s_k})$ — простые жордановы дуги, $\varphi(\delta_{s_k}) \subset \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, с концами на $\left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Так как, в силу (9), только конечное число дуг $\varphi(\delta_{s_k})$ имеет длину больше некоторого фиксированного числа, то

$$\operatorname{Fr}\varphi(D_k \cap K_{\rho_0}) = \bigcup_s \varphi(\delta_{s_k}) \cup \left[\operatorname{Fr}\varphi(D_k \cap K_{\rho_0}) \cap \left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right]. \tag{11}$$

Учитывая (10), имеем

$$\sum_s \text{дл.}\, \varphi(\delta_{s_k}) \geqslant \varepsilon. \tag{12}$$

В силу (11), условия

$$\overline{\varphi(D_k \cap K_{\rho_0})} = \varphi(D_k \cap K_{\rho_0}) \cup \operatorname{Fr}\varphi(D_k \cap K_{\rho_0}),$$

включения $\{\delta_{s_k}\} \subset H$, замкнутое множество

$$\sigma_k = \overline{\varphi(D_k \cap K_{\rho_0})} \cap \{w : |w - w_0| \geqslant \varepsilon\}$$

состоит из образов точек множества $H \cap \overline{K}_{\rho_0}$. В силу (9), (12) имеется лишь конечное число множеств $D_k \cap K_{\rho_0}$, удовлетворяющих (10); следовательно, множество $\sigma = \bigcup_k \sigma_k$ — замкнутое.

Очевидно, множество $\varphi^{-1}(\sigma)$ — замкнутое, $\varphi^{-1}(\sigma) \subset \overline{K}_{\rho_0} \cap H$ и $z_0 \overline{\in} \varphi^{-1}(\sigma)$. Пусть $\delta_0 = \rho(\varphi^{-1}(\sigma), z_0)$, $\delta_0 > 0$, тогда имеем

$$\varphi(\{z : |z - z_0| < \delta_0\}) \subset \{w : |w - w_0| < \varepsilon\}.$$

Последнее включение противоречит (8). Итак, показано, что из утверждения I следует лемма 3.

Утверждение I докажем на основании ряда вспомогательных утверждений о границе области D_k.

У т в е р ж д е н и е 3. Множество $\operatorname{Fr} D_k \cap H$ всюду плотно на $\operatorname{Fr} D_k$.

Действительно, в любой окрестности произвольной точки $\operatorname{Fr} D_k$ имеется точка $z \in \operatorname{Fr} D_k$, достижимая кругом из области D_k (точка $z \in \operatorname{Fr} D_k$ — достижима кругом C из области D_k, если $C \subset D_k$, $z \in \overline{C}$). Убедимся, что $z \in H$. Предложим противное, т. е., что $z \in \beta_0$. Тогда (см. доказательство утверждения 2), имеется простая жорданова дуга l_z с концом в точке z, $l_z - z \subset C$, вдоль которой $\lim\limits_{\substack{z' \to z \\ z' \in l_z - z}} f(z') = f(z)$. Поэтому

$$f(z) \in \left\{w : |w - w_0| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

С другой стороны, в силу утверждения 2, $\lim\limits_{\substack{z' \to z \\ z' \in \beta'}} f(z') = f(z)$, и поэтому

$$f(z) \in \left\{w : |w - w_0| \leqslant \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{1000}\right\}.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение 3.

Утверждение 4. Пусть точка $z \in \operatorname{Fr} D_k \cap H \cap K$, тогда

$$f(z) \in \left\{ w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Действительно, $f(z) \in \operatorname{Fr} D_k$, и так как область G_k — компонента множества G, то

$$f(z) \overline{\in} \left\{ w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

если

$$z \in K \cap H \cap \operatorname{Fr} D_k.$$

Утверждение 5. Область D_k — односвязна.

Доказательство. Так как точка z_0 (z_0 — центр круга K) — предельная точка множества β_0, β_0 — совершенное в области D, можем считать, что круг K таков, что $(\overline{K} - K) \cap \beta_0 \neq 0$. Докажем утверждение 5 от противного. Пусть $\operatorname{Fr} D_k = F_1 \cup F_2$, где F_1, F_2 — замкнутые множества такие, что $\rho(F_1, F_2) > 0$.

Для $\operatorname{Fr} D_k$ имеются две возможности: 1) $\operatorname{Fr} D_k \cap (\overline{K} - K) = 0$, 2) $\operatorname{Fr} D_k \cap (\overline{K} - K) \neq 0$.

Достаточно рассмотреть возможность *2*; в случае *1* рассуждения, доказывающие утверждения 5, аналогичны.

Множество $(\overline{K} - K) \cap \operatorname{Fr} D_k$ содержится в множестве F_1 либо в F_2, так как оно принадлежит границе (граница связная) компоненты открытого множества $(CD_k)^\circ$, содержащей внешность круга $\overline{K}$.

Пусть $F_1 \supset (\overline{K} - K) \cap \operatorname{Fr} D_k$. Пусть простая замкнутая дуга $\gamma \subset D_k$ разбивает область D_k на две области D_k', D_k'' так, что $F_1 \subset \operatorname{Fr} D_k'$, $F_2 \subset \operatorname{Fr} D_k''$. Пересечение $F_1 \cap K \neq 0$, так как в противном случае $\overline{K} - K \subset F_1$ и каждая точка $z \in \overline{K} - K$ была бы достижимой некоторым кругом C из области D_k, т. е. $\overline{K} - K \subset H$. Пусть $z_1 \in F_1 \cap K \cap H$, $z_2 \in F_2 \cap K \cap H$; их образы точки w_1, w_2, соответственно, в силу утверждения 4, содержатся на $\left\{ w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2} \right\}$. Так как образ дуги γ — дуга $\varphi(\gamma) \subset G_k$, то точки w_1, w_2, в области G_k можно соединить дугой λ, $\lambda \cap \varphi(\gamma) = 0$. Дуга $\varphi^{-1}(\lambda)$, соединяющая точки z_1, z_2, пересечет дугу γ. Полученное противоречие доказывает утверждение 5.

Из утверждения 4 и определения области D_k следует

Утверждение 6. Пусть точка $z \in \operatorname{Fr}(D_k) \cap H$, тогда в некоторой окрестности точки z граница $\operatorname{Fr} D_k$ — простая дуга.

Утверждение 7. Граница области D_k состоит только из достижимых точек.

Доказательство. Предположим, что носитель некоторого простого конца, пусть континуум k, состоит больше чем из одной точки. В силу утверждения 6, $k \subset \beta_0$. Пусть точки $z_1, z_2 \in k$ и пусть $\{z_n^{(1)}\}$, $\{z_n^{(2)}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\{z_n^{(1)}\} \cup \{z_n^{(2)}\} \subset D_k$ — последовательности точек, сходящиеся, соответственно, к точкам z_1, z_2. Пусть λ_n — простые, попарно непересекающиеся дуги, соединяющие точки $z_n^{(1)}, z_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, соответственно, такие, что $\mathrm{Ls}\,\lambda_n \subset k$. Можем считать, что последовательности $\{z_n^{(1)}\}$, $\{z_n^{(2)}\}$ такие, что имеются простые жордановы дуги γ_1, γ_2, (не обязательно принадлежащие области D_k): $\gamma_1 \supset \{z_n^{(1)}\} \cup z_1$, $\gamma_2 \supset \{z_n^{(2)}\} \cup z_2$ и

$$\rho(\gamma_1, \gamma_2) > 0. \qquad (13)$$

Для каждой дуги λ_n существует дуга $\hat{\lambda}_n$ такая, что $\hat{\lambda}_n \subset \lambda_n$ и $\gamma_1 \cap \hat{\lambda}_n = \hat{z}_n^{(1)}$, $\gamma_2 \cap \hat{\lambda}_n = \hat{z}_n^{(2)}$. Считаем, что последовательности точек $\{\hat{z}_n^{(1)}\}$, $\{\hat{z}_n^{(2)}\}$ сходятся, соответственно, к точкам $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ (в противном случае в качестве системы дуг $\{\hat{\lambda}_n\}$ берем ее надлежащим образом выбранную подпоследовательность).

Пусть область g — область, дополнительная к дуге $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \hat{\lambda}_1$, $Fr g = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \lambda_1$. Отобразим область g конформно на внутренность единичного круга E, $\Psi : g \to E^\circ$. При этом дуги $\hat{\lambda}_n$ отобразятся на неперекрывающиеся простые жордановы дуги, пусть β_n, с концами на окружности $E - E^\circ$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть β_{n_p} — подпоследовательность последовательности дуг β_n и для каждого $p = 1, 2, \ldots$ область g_{n_p} — одна из компонент множества $E^\circ - \beta_{n_p}$ таковы, что $\forall p\, [g_{n_{p+1}} \supset g_{n_p}]$. Поэтому $\bigcup_{p=1}^{\infty} g_{n_p}$ — область.

Рассмотрим в z-плоскости прообраз области $\bigcup_{p=1}^{\infty} g_{n_p}$ — область $\tilde{g}$, $\tilde{g} = \Psi^{-1}\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} g_{n_p}\right)$. Граница области $\tilde{g}$ состоит из континуума $\mathrm{Ls}\,\hat{\lambda}_{n_p} = k_1 \subset k$ и дуги $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \hat{\lambda}_1$ или ее части. Поэтому из (13) и условия $\hat{\lambda}_1 \cap k_1 = 0$ следует, что имеется достижимая точка $\tilde{z} \in k_1$ границы области $\tilde{g}$ такая, что $\rho(\tilde{z}, \gamma_1) > 0$, $\rho(\tilde{z}, \gamma_2) > 0$. Так как континуум k_1 содержится в носителе одного простого конца границы области D_k, то можем считать, что точка $\tilde{z}$ — недостижимая точка этого простого конца. Соединим теперь точку $\tilde{z}$ в области $\tilde{g}$ простой жордановой дугой γ (в силу достижимости точки $\tilde{z}$ в области $\tilde{g}$ это возможно) с некоторой точкой дуги $\hat{\lambda}_1$. Имеем $\lim\limits_{p\to\infty}\gamma\cap\hat{\lambda}_{n_p}=\tilde{z}$, где $\forall p$ множество $\gamma\cap\hat{\lambda}_{n_p}$ необязательно одноточечное. Дуга γ разбивает область $\tilde{g}$ на две области: пусть область $\tilde{g}^1$ — та из них, граница которой содержит дугу γ_1; область $\tilde{g}^2$ — та из них, граница которой содержит дугу γ_2.

Обозначим через $\tilde{g}_{p,\,p+1}$ область $\psi^{-1}(g_{n_{p+1}}-g_{n_p})^\circ$. Дуга γ разбивает каждую область $\tilde{g}_{p,\,p+1}$ на несколько областей: пусть $\tilde{g}^{(1)}_{p,\,p+1}$ — та из них, граница которой содержит точки дуги γ_1; $\tilde{g}^{(2)}_{p,\,p+1}$ — та из них, граница которой содержит точки дуги γ_2.

Предложим, что рассматривается подпоследовательность последовательности областей $\{\tilde{g}_{p,\,p+1}\}$, для нее сохраним обозначение $\{\tilde{g}_{p,\,p+1}\}$ со следующими свойствами:

1) $\forall p=1,\ 2,\ \ldots\ \exists z_p\in\tilde{g}_{p,\,p+1},\ z_p\in\operatorname{Fr}D_k\cap\gamma,\quad z_p\to\tilde{z}$ (точка $\tilde{z}\in\operatorname{Fr}D_k$ — недостижимая точка $\operatorname{Fr}D_k$ дугой γ);

2) $\forall z_p\exists k_p$ — континуум, $k_p\subset\operatorname{Fr}D_k$, $z_p\in k_p$, и пусть $k_p\cap\gamma_1\neq 0$ (область D_k односвязна и $\{\hat{\lambda}_{n_p}\}\subset D_k$, поэтому

$$\forall z_p\exists k_p\ni z_p\,[k_p\subset\operatorname{Fr}D_k]\wedge\{[k_p\cap\gamma_1\neq 0]\vee[k_p\cap\gamma_2\neq 0]\}).$$

Для последовательности континуумов $\{k_p\}$ имеем

$$\operatorname{Ls}k_p=\operatorname{Ls}\tilde{g}^{(1)}_{p,\,p+1}=\tilde{k}_1\subset k_1,\ \tilde{k}_1\subset\operatorname{Fr}\tilde{g}^{(1)}.$$

Пусть $\bar{z}$, $\bar{z}\in\tilde{k}_p$ — достижимая кругом C точка (рис. 1) границы области $\tilde{g}^{(1)}$. Пусть два луча $\tilde{t}_i(\bar{z})$, $\tilde{t}_j(\bar{z})$, пересекающие круг C, определены как обычно (см., например, определение функции $\varphi(z)$ (7)). Лучи $\tilde{t}_i(z)$, $\tilde{t}_j(\bar{z})$ пересекают все дуги $\tilde{\lambda}_{n_p}$, начиная с некоторого p по последовательностям точек, сходящимся к точке $\bar{z}$ при $p\to\infty$. Пусть лучи $l_i(\bar{z})$, $l_j(\bar{z})$ исходят из точки $\bar{z}$, пересекают круг C и образуют угол

$$[l_i(\bar{z})\wedge l_j(\bar{z})]\supset[\tilde{t}_i(\bar{z})\wedge\tilde{t}_j(\bar{z})].$$

Пусть область $\tilde{g}^{(1)}_{p,\,p+1}$ — одна из областей последовательности $\{\tilde{g}^{(1)}_{p,\,p+1}\}$ и пусть лучи $\tilde{t}_i(\bar{z})$, $\tilde{t}_j(\bar{z})$, $l_i(\bar{z})$, $l_j(\bar{z})$ пересекают части дуг $\hat{\lambda}_{n_p}$, $\hat{\lambda}_{n_{p+1}}$, входящие в границу области $\tilde{g}^{(1)}_{p,\,p+1}$.

Пусть h (рис. 2) — та компонента открытого множества $D_k\cap\tilde{g}^{(1)}_{p,\,p+1}\cap[l_i(\bar{z})\wedge l_j(\bar{z})]^\circ$, граница которой содержит часть дуги

$\hat{\lambda}_{n_p}$ и множество $\mathrm{Fr}\, h \cap k_p$ содержит континуум, пересекаемый каждым лучом $t(z) \subset [l_i(\bar{z})^\wedge l_j(\bar{z})]$; тогда, в силу определения континуума k_p, $\mathrm{Fr}\, h \cap \hat{\lambda}_{n_{p+1}} = 0$.

Предложим, что дуга $\hat{\lambda}_{n_p}$ параметризована и обозначим через z', z'' точки множества $\hat{\lambda}_{n_p} \cap \mathrm{Fr}\, h$, которым отвечает наибольшее

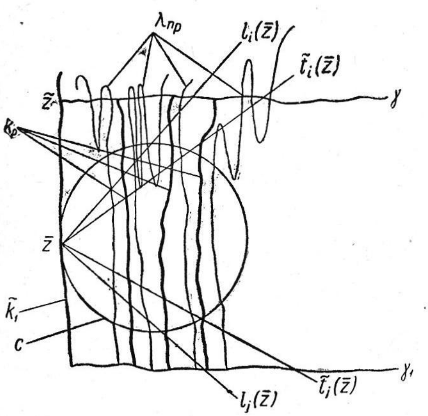

Рис. 1

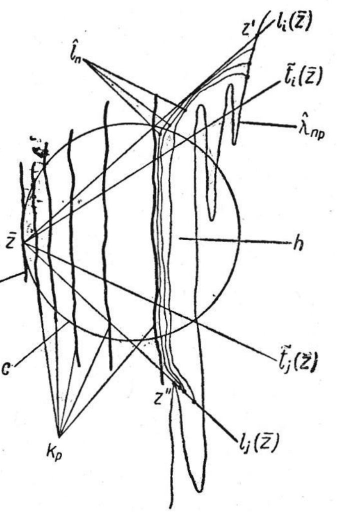

Рис. 2

и наименьшее значение параметра. Пусть $\{z_n'\}$, $\{z_n''\}$ — последовательности точек множества $\mathrm{Fr}\, h$, $\forall n\, z_n' \neq z'$ и $\forall n\, z_n'' \neq z''$, сходящиеся к точкам z' и z'' соответственно. Так как, в силу аналитичности функции $f(z)$ в точках z', z'', в окрестностях этих точек $\mathrm{Fr}\, h$ — простая жорданова дуга, то можем считать, что последовательности точек $\{z_n'\}$, $\{z_n''\}$ — последовательности достижимых точек $\mathrm{Fr}\, h$. Соединим $\forall n$ точки z_n', z_n'' дугой l_n, расположенной в области h так, чтобы $\mathrm{Ls}\, l_n \subset \mathrm{Fr}\, h$ и $\mathrm{Ls}\, l_n \cap [\hat{\lambda}_{n_p} \cap \mathrm{Fr}\, h] = \{z', z''\}$.

Тогда $\forall n \geqslant n_0$ дуги l_n пересекают лучи $\tilde{t}_i(\bar{z}), \tilde{t}_j(\bar{z})$ и пусть $\forall n \geqslant n_0$ — дуга $\hat{l}_n$, $\hat{l}_n \subset l_n$ — дуга, имеющая по одной общей точке с лучами $\tilde{t}_i(\bar{z}), \tilde{t}_j(\bar{z})$; $\mathrm{Ls}\, \hat{l}_n \subset k_p$.

Дуги $\left\{\varphi\left(\hat{l}_n\right)\right\} \subset \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, $\mathrm{Ls}\varphi\left(\hat{l}_n\right) \subset \mathrm{Fr}h'$, где область $h' = \varphi(h)$ и, так как концы дуг $\hat{l}_n$ лежат на лучах $\tilde{t}_i(\bar{z})$, $\tilde{t}_j(\bar{z})$, то их образы, в силу непрерывности функции $\varphi(z)$ на $\left\{\hat{l}_n\right\}$, определения лучей $\tilde{t}_i(\bar{z})$, $\tilde{t}_j(\bar{z})$, пункта *3* леммы 1, попадают в углы $\Omega_i(\bar{w})$, $\Omega_j(\bar{w})$ соответственно, где $w = \varphi(\bar{z}) \subset \{w : |w - w_0| < \varepsilon_0\}$; поэтому имеем

$$d\left(\mathrm{Ls}\varphi\left(\hat{l}_n\right)\right) > \min_{\substack{i,\, j \\ w \in \{w : |w - w_0| < \varepsilon_0\}}} d\left([\Omega_{i,\,j}(w) - (\Omega_i(w) \cup \Omega_j(w))] \cap \left\{w : |w - w_0| = \right.\right.$$

$$\left.\left. = \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = m > 0. \tag{14}$$

Относительно $\mathrm{Ls}\varphi\left(\hat{l}_n\right)$ имеем две возможности:

1) $\mathrm{Ls}\varphi\left(\hat{l}_n\right) \subset \left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$; очевидно, тогда

либо

а) $\mathrm{Ls}\varphi\left(\hat{l}_n\right) \supset \left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{\Omega_{i,\,j}(\bar{w}) - [\Omega_i(\bar{w}) \cup \Omega_j(\bar{w})]\right\}$,

либо

б) $\mathrm{Ls}\varphi\left(\hat{l}_n\right) \supset \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap C(\Omega_{i,\,j}(\bar{w}))$;

2) $\mathrm{Ls}\varphi\left(\hat{l}_n\right) \cap \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \neq 0$.

Возможность 1, *а* (случай *б* — аналогичный). Будем считать, что на $\forall t(\bar{w}) \in \left\{\Omega_{i,\,j}(\bar{w}) - (\Omega_i(\bar{w}) \cup \Omega_j(\bar{w}))\right\}$ имеется последовательность точек множества $\mathrm{Fr}h'$, сходящаяся к точке $t(\bar{w}) \cap \cap \left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Действительно, в противном случае на луче $t(\bar{w})$ имеется интервал с концом на окружности $\left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, содержащийся в $h' \cap t(\bar{w})$, и описанная ситуация, в силу однолистности функции $\varphi(z)$ ($\varphi(z) = f(z)$ на D_k), имеет место для единственного индекса p (единственной области $\tilde{g}^{(1)}_{p,\,p+1}$, для которой выполняется возможность 1, *а*) и его исключаем из рассмотрения.

В силу ограниченности конформного на области G_k отображения $\varphi^{-1}(w)$, интеграл Дирихле функции $\varphi^{-1}(w)$ на области h' конечен, и в силу теоремы Фубини, имеется луч $t(\bar{w})$ такой, что системе интервалов $t(w) \cap h' = \underset{i}{U} \delta_i^w$ в z-плоскости отвечает система дуг δ_i^z $(i = 1, 2, \ldots,)$, для которых

$$\sum_i \text{дл. } \delta_i^z < \infty. \tag{15}$$

Пусть $\forall n \left[w_n \in \varphi\left(\hat{l}_n\right) \cap t(\overline{w})\right]$, $\{w_n\} \subset \underset{i}{U} \delta_i^w$; $w_n \to t(\overline{w}) \cap \left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, $\varphi^{-1}(w_n) = z_n$, предположим, что $\lim z_n$ — существует, $\lim z_n \in \left[\tilde{t}_i(\overline{z}) \wedge \tilde{t}_j(\overline{z})\right] \cap k_p$. Из того, что $w_n \to t(\overline{w}) \cap \left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, и существования на луче $t(\overline{w})$ последовательности точек множества $\mathrm{Fr} h'$, сходящейся к той же точке $t(\overline{w}) \cap \left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, следует, что система дуг $\left\{\delta_i^z\right\}$ бесконечная.

Так как, в силу (15), длины дуг $\delta_i^z \to 0$ и имеются точки последовательности $\{z_n\}$, содержащиеся в интервалах δ_i^z со сколь угодно большими индексами i (последнее легко видеть для $\{w_n\}$ и $\left\{\delta_i^w\right\}$), из существования предела $\lim z_n \in k_p \cap \left[\tilde{t}_i(\overline{z}) \wedge t_j(\overline{z})\right]$ следует, что имеется интервал δ_i^z, $\overline{\delta_i^z} \subset \left[l_i(\overline{z}) \wedge l_j(\overline{z})\right]^0$, $\overline{\delta_i^z} \cap \hat{\lambda}_{n_p} = 0$. Пусть точка a — один из концов дуги δ_i^z, очевидно, $a \in k_p$, и пусть $\lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \in \delta_i^z}} \varphi(z) = \xi_0 \in \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.

Рассмотрим теперь круг S в w-плоскости, $S = \{w : |w - \xi_0| < r\}$, $r > 0$, такой, что $\overline{S} \cap \varphi\left(\hat{\lambda}_{np}\right) = 0$ и

$$\overline{S} \subset \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{16}$$

Пусть область $\overset{*}{g}_w$ — та компонента открытого множества $S \cap h'$, которая содержит образ рассматриваемой дуги δ_i^z — интервал $\delta_i^w = \varphi\left(\delta_i^z\right)$ или его часть с концом в точке ξ_0. Очевидно,

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in \delta_i^z}} \varphi(z) = \xi_0 \overline{\in} \overline{S} - S. \tag{17}$$

Для области $\overset{*}{g}_z = \varphi^{-1}\left(\overset{*}{g}_w\right)$ докажем следующее, противоречащее (17), включение:

$$\underset{\substack{z \to \mathrm{Fr}\overset{*}{g}_z \cap \left[l_i(\overline{z}) \wedge l_j(\overline{z})\right]^0 \\ z \in \overset{*}{g}_z}}{\mathrm{Ls}} \varphi(z) \subset \overline{S} - S. \tag{18}$$

Возможность 2. Убедимся, что в этом случае можно построить область, аналогичную области $\overset{*}{g}_z$ возможности 1, сохраним для нее обозначение $\overset{*}{g}_z$, для которой выполняется (17) и ниже будет доказано включение (18). Пусть точка $w \in \mathrm{Ls}\,\varphi\left(\hat{l}_n\right) \cap \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, и предположим, что последовательности точек $\varphi\left(\hat{l}_n \cap \tilde{t}_i(\bar{z})\right)$, $\varphi\left(\hat{l}_n \cap \tilde{t}_j(\bar{z})\right)$ сходятся, пусть к точкам w_i, w_j соответственно (в противном случае в качестве последовательности $\left\{\hat{l}_n\right\}$ рассматриваем ее надлежащим образом выбранную подпоследовательность) и пусть $w \neq w_i$, $w \neq w_j$. Пусть $\delta(w)$ — некоторая круговая окрестность точки w, $\overline{\delta(w)} \subset \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, $w_i \bar{\in} \overline{\delta(w)}$, $w_j \bar{\in} \overline{\delta(w)}$. Нетрудно убедиться, что имеется прямолинейное сечение τ круга $\delta(w)$ такое, что τ пересекает бесконечное число дуг $\varphi\left(\hat{l}_n\right)$ и система дуг $\underset{i}{U}\delta_i^w = \tau \cap h'$ такова, что относительно их прообразов $\left\{\delta_i^z\right\}$ имеем (15).

Пусть S — круг с центром в одной из предельных точек последовательности $\varphi\left(\hat{l}_n\right) \cap \tau$, $n \to \infty$, $\bar{S} \not\subset \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ и $\bar{S} \cap \cap\, \varphi\left(\hat{\lambda}_{n_p}\right) = 0$. Тогда в качестве области $\overset{*}{g}_w$ принята одна из компонент открытого множества $h' \cap S$: если множество $h' \cap \tau$ содержит интервал с концом в центре круга S, пересекаемый бесконечным числом дуг $\varphi\left(\hat{l}_n\right)$, то область $\overset{*}{g}_w$ содержит этот интервал, в противном случае область $\overset{*}{g}_w$ выбираем аналогично, как при наличии возможности 1.

Противоречия (17), (18) завершат доказательство утверждения 7. Включение (18) будет следовать из нескольких предложений о границе области $\overset{*}{g}_w$.

Продолжение доказательства в вып. 26 данного сборника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бродович М. Т. Об условиях моногенности не непрерывных отображений. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 12, Харьков, 1970, с. 94—103.
2. Menchoff D. Sur les representations qui conservent les angles. — «Math. Ann», 1933, № 109, p. 101—159.
3. Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. М., Физматгиз, 1963. 212 с.
4. Сакс С. Теория интеграла. М., Изд-во иностр. лит., 1949. 494 с.
5. Caratheodory C. Uber die Begrenzung einfach zusammenhängen der Gebiete. — «Math. Ann»., 1912, № 73, p. 323—370.

6. Каратеодори. Конформное отображение. М., Гостехтеоретиздат., 1934. 129 с.
7. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. — Л., «Наука». 1966. 628 с.