УДК 517.15

Н. И. Березовский, Н. И. Нагнибида, канд. физ.-мат. наук

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОПЕРАТОРОВ УМНОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В последние годы внимание многих математиков привлекают вопросы эквивалентности различных классов линейных непрерывных операторов. Особое место в этих исследованиях занимают дифференциальные операторы. Но, как известно, с помощью определенных преобразований функциональных пространств изучение дифференциальных операторов часто сводится к изучению операторов умножения на некоторые функции в соответствующих пространствах. В частности, такой переход к операторам умножения полезен и при исследовании дифференциальных операторов на эквивалентность.

Статья посвящена изучению вопроса об эквивалентности операторов умножения в аналитических пространствах. Важную роль в решении этой задачи играют специальные базисы, близкие к тем, которые рассматривались ранее Дельсартом и М. К. Фаге [1].

Условимся об обозначениях. Под $A(G)$ (A_R) всюду в дальнейшем будем понимать пространство всех однозначных и аналитических в области G (соответственно в круге $K_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R < \infty$) функций с топологией компактной сходимости [2]. Если $\varphi(z)$ — фиксированная функция из $A(G)$, то U_φ обозначает оператор умножения на $\varphi(z)$, т. е. $U_\varphi f(z) = \varphi(z) f(z)$ для любой $f(z) \in A(G)$, а $\varphi(G)$ — область значений этой функции, принимаемых в G. И, наконец, предполагая, что область аналитичности функции $F(z)$ содержит $\varphi(G)$, сложную функцию $F(\varphi(z))$ иногда будем обозначать $(F_\circ \varphi)(z)$.

1. Предварительно построим тот специальный базис, о котором упоминалось выше. Пусть $\{\alpha_j\}_1^\infty$ — некоторая последовательность точек круга K_R. Рассмотрим последовательность функций $\{\Omega_j(z)\}_0^\infty$, определенную следующим образом:

$$\Omega_j(z) = \begin{cases} 1, \ j = 0 \\ \prod\limits_{\nu=1}^{j} \dfrac{R^2(z-\alpha_\nu)}{R^2 - \bar{\alpha}_\nu z}, \ j = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 1. *Если* $\alpha = \sup\limits_j |\alpha_j| < R$, *то система* (*1*) *является квазистепенным базисом пространства* A_R.

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что система

$$L_j(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|z|=r>\alpha} \dfrac{f(z)}{z-\alpha_1} dz; \ j = 0 \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|z|=r>\alpha} \dfrac{(R^2 - \bar{\alpha}_j \alpha_{j+1}) f(z)\, dz}{\Omega_j(z)\left(R^2 - \bar{\alpha}_j z\right)(z - \alpha_{j+1})}, \ j = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2}$$

является биортогональной к (1) системой линейных непрерывных функционалов, обладающей, кроме того, свойством единственности. (Из соотношений $L_j(f) = 0$, $j = 0, 1, \ldots$ следует, что $f(\alpha_j) = 0$. Если же некоторые точки последовательности повторяются, то в них равны нулю и производные от функции $f(z)$ всех порядков, меньших их кратности).

Рассмотрим, далее, оператор T, определенный на элементах степенного базиса по закону $Tz^j = \Omega_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Так как для каждого α_ν $(|\alpha_\nu| \leqslant \alpha < R)$ верны неравенства

$$\max_{|z|=\rho} \left| \frac{R^2(z-\alpha_\nu)}{R^2 - \bar{\alpha}_\nu z} \right| = \frac{R^2(\rho + |\alpha_\nu|)}{R^2 + \rho|\alpha_\nu|} \leqslant \frac{R^2(\rho+\alpha)}{R^2+\alpha\rho} < R,$$

то

$$\max_{|z|=\rho} |Tz^j| = \max_{|z|=\rho} |\Omega_j(z)| \leqslant \left(\frac{R^2(\rho+\alpha)}{R^2+\alpha\rho} \right)^j$$

и, следовательно [5, 6], оператор T распространяется до линейного непрерывного оператора в A_R. Очевидно, T — инъективен, т. е. он не имеет нетривиальных нулей.

С другой стороны, поскольку для любых r $(\alpha < r < R)$ и α_ν $(|\alpha_\nu| \leqslant \alpha)$

$$\max_{|z|=r} \left| \frac{R^2 - \bar{\alpha}_\nu z}{R^2(z-\alpha_\nu)} \right| = \frac{R^2 - |\alpha_\nu| r}{R^2(r-\alpha_\nu)} \leqslant \frac{R^2 - \alpha r}{R^2(r-\alpha)},$$

то для произвольной функции $f(z) \in A_R$ справедлива (см. (2)) оценка

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|L_j(f)|} \leqslant \frac{R^2 - \alpha r}{R^2(r-\alpha)}. \tag{3}$$

Так как левая часть неравенства (3) от r $(\alpha < r < R)$ не зависит, при $r \to R$ получим

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|L_j(f)|} \leqslant \frac{1}{R}.$$

Это значит, что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} L_j(f) z^j$ сходится по топологии пространства A_R. Пусть $f_0(z)$ — его сумма. Тогда $Tf_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} L_j(f)\,\Omega_j(z)$, так что полученный ряд также сходится по топологии A_R и непременно к функции $f(z)$ [3]. Этим доказано, что T — сюръективен, и поэтому, согласно теореме Банаха об обратном операторе, он является изоморфизмом пространства A_R, а система $\{\Omega_j(z)\}_0^\infty$ — квазистепенным базисом в нем [4].

Замечание 1. Условие $\alpha = \sup_j |\alpha_j| < R$ существенно для базисности системы (1). Действительно, пусть для простоты α_j — попарно различны и $|\alpha_j| \to R$. Тогда, как известно (см., например, [7]), существует функция $g(z) \not\equiv 0$, аналитическая в круге K_R и равная нулю в точках α_j. Поэтому $L_j(g) = 0$, $j = 0, 1, \ldots$, и, следовательно,

$$g(z) \neq \sum_{j=0}^{\infty} L_j(g)\,\Omega_j(z),$$

т. е. система $\{\Omega_j(z)\}_0^\infty$ не является даже базисом пространства A_R.

Теорема 1 допускает следующее обобщение.

Теорема 2. *Пусть G — произвольная односвязная область, граница которой содержит не менее двух точек, и $\{\varphi_j(z)\}_1^\infty$ — некоторая последовательность взаимно-однозначных и конформных отображений области G на круг K_R. Если при этом последовательность $\{\beta_j\}_1^\infty$, где β_j — единственный нуль функции $\varphi_j(z)$, находится на положительном расстоянии от границы области G, то система*

$$\Phi_j(z) = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ \varphi_1(z) \ \ldots \ \varphi_j(z), & j = 1, 2, \ldots \end{cases}, \tag{4}$$

образует квазистепенной базис в пространстве $A(G)$.

Доказательство. Пусть $g(z)$ — взаимно-однозначное и конформное отображение круга K_R на G. Тогда, очевидно, оператор T_g, действующий по закону $T_g f(z) = f(g(z))$, устанавливает линейное взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение $A(G)$ на A_R. При этом функции $\omega_j(z) = T_g\varphi_j(z) = \varphi_j(g(z))$ осуществляют взаимно-однозначное и конформное отображение круга K_R на себя. Следовательно,

$$\omega_j(z) = \frac{R^2(z - \alpha_j)}{R^2 - \bar{\alpha}_j z} e^{i\theta_j},$$

где $\alpha_j = g^{-1}(\beta_j)$, $|\alpha_j| < R$ и θ_j — вещественные. Так как последовательность $\{\beta_j\}_1^\infty$ находится на положительном расстоянии от границы области G, то и $\{\alpha_j\}_1^\infty$ находится на положительном расстоянии от окружности $|z| = R$, т. е. $\sup\limits_j |\alpha_j| < R$. Поскольку, очевидно, $T_g 1 = 1$ и

$$T_g\Phi_j(z) = (\varphi_1 \circ g)(z) \ \ldots \ (\varphi_j \circ g)(z) = \omega_1(z) \ \ldots \ \omega_j(z) = \Omega_j(z)\, e^{i\widetilde{\theta_j}},$$

то система $\{\Phi_j(z)\}_0^\infty$ является квазистепенным базисом пространства $A(G)$.

Замечание 2. В теореме 2 (как и в теореме 1 для $\{\alpha_j\}_1^\infty$) несущественно, будут ли функции $\varphi_j(z)$ попарно различны или нет. Поэтому система (4) является обобщением известного [8] базиса в $A(G)$ вида $\{\varphi^n(z)\}_0^\infty$, где $\varphi(z)$ — произвольное взаимно-однозначное и конформное отображение области G на круг K_R.

2. Перейдем теперь к исследованию вопроса об эквивалентности операторов умножения на функции в аналитических пространствах. В связи с этим напомним понятие эквивалентности двух операторов. Пусть A — линейный непрерывный оператор, действующий из линейного топологического пространства X в X, а B — соответственно из Y в Y. Если существует такое линейное взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение T (т. е. изоморфизм) пространства X на Y, что $TA = BT$, то

операторы A и B называются эквивалентными. В случае совпадения пространств X и Y говорят, что операторы A и B эквивалентны в X и сокращенно обозначают так: $A \sim B$. Заметим еще, что иногда изоморфизм T называют оператором преобразования A и B.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие (первые три из них — почти очевидные) вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть операторы U_φ и U_ψ эквивалентны в A_R, а $F(z)$ — произвольная функция, аналитическая в некотором круге K, причем $K \supset \varphi(K_R) \cup \psi(K_R)$. Тогда операторы $U_{F \circ \varphi}$ и $U_{F \circ \psi}$ также эквивалентны в A_R. Кроме того, если T — оператор преобразования U_φ в U_ψ, то он также преобразует $U_{F \circ \varphi}$ в $U_{F \circ \psi}$.*

Лемма 2. *Пусть операторы U_φ и U_ψ эквивалентны в A_R, G — некоторая односвязная область, граница которой содержит не менее двух точек, и $g(z)$ — взаимно-однозначное и конформное отображение области G на круг K_R. Тогда операторы $U_{\varphi \circ g}$ и $U_{\psi \circ g}$ эквивалентны в $A(G)$.*

Лемма 3. *Если оператор U_φ эквивалентен оператору U_{z^n} в пространстве A_R, то $\varphi(K_R) = K_{R^n}$.*

Лемма 4. *Если оператор U_φ эквивалентен оператору U_{z^n} в A_R, то функция $\varphi(z)$ имеет в K_R не более n нулей (учитывая их кратности).*

Действительно, пусть $\varphi(z)$ имеет больше чем n нулей. Рассмотрим произвольные m (учитывая кратности) из них, где $m > n$. Пусть α_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ — выбранные нули с кратностями m_i соответственно $\left(\sum_{i=1}^{p} m_i = m > n\right)$. Тогда для каждой функции

$$f(z) = f_0(z^n) + f_1(z^n)\, z + \ldots + f_{n-1}(z^n)\, z^{n-1} \in A_R$$

имеем

$$g(z) = Tf(z) = f_0(\varphi(z))\, \psi_0(z) + f_1(\varphi(z))\, \psi_1(z) + \ldots + f_{n-1}(\varphi(z))\, \psi_{n-1}(z),$$

где T — один из операторов преобразования U_{z^n} в U_φ и $\psi_\nu(z) = Tz^\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$.

Легко проверить, что для функции $g(z)$ имеют место следующие m равенств:

$$\begin{cases} g(\alpha_i) = f_0(0)\, \psi_0(\alpha_i) + \ldots + f_{n-1}(0)\, \psi_{n-1}(\alpha_i) \\ g'(\alpha_i) = f_0(0)\, \psi_0'(\alpha_i) + \ldots + f_{n-1}(0)\, \psi_{n-1}'(\alpha_i) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g^{(m_i-1)}(\alpha_i) = f_0(0)\, \psi_0^{(m_i-1)}(\alpha_i) + \ldots + f_{n-1}(0)\, \psi_{n-1}^{(m_i-1)}(\alpha_i) \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p).$$

Теперь можно подобрать такую нетривиальную систему m чисел $\{\beta_0^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_{m_i}^{(i)}\}_{i=1}^{p}$ (легко усмотреть, что она является решением системы n однородных уравнений относительно m, $m > n$ неизвестных), чтобы

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{\mu=0}^{m_i}\beta_\mu^{(i)} g^{(\mu)}(\alpha_i) = \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(0)\left(\sum_{i=0}^{p}\sum_{\mu=0}^{m_i}\beta_\mu^{(i)}\psi_\nu^{(\mu)}(\alpha_i)\right) = 0.$$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{p}\sum_{\mu=0}^{m_i}\beta_\mu^{(i)}(Tf)^{(\mu)}(\alpha_i) = 0$ для любой $f(z) \in A_R$, что невозможно, так как $TA_R = A_R$.

Теорема 3. *Если*

$$\varphi(z) = \frac{R^2(z-\alpha_1)}{R^2-\bar\alpha_1 z}\cdots\frac{R^2(z-\alpha_m)}{R^2-\bar\alpha_m z},$$

где $|\alpha_j| < R$, *то* $U_\varphi \sim U_{z^m}$ *в* A_R.

Доказательство. Образуем из нулей функции $\varphi(z)$ периодическую последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots$, т. е. рассмотрим последовательность чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$, где $\alpha_{km+\nu} = \alpha_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$. По этой последовательности строим систему $\{\Omega_j(z)\}_0^\infty$ вида (1). Так как $\alpha = \sup_j|\alpha_j| = \max_{1\leqslant\nu\leqslant m}|\alpha_\nu|$, то $\alpha < R$ и $\{\Omega_j(z)\}_0^\infty$ является квазистепенным базисом пространства A_R (см. теорему 1). Поэтому существует такой изоморфизм T пространства A_R, что $Tz^j = \Omega_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Учитывая, что здесь $\Omega_m(z) = \varphi(z)$ и $\Omega_j(z)\varphi(z) = \Omega_{j+m}(z)$ $(j = 0, 1, \ldots)$, легко проверить, что

$$TU_{z^m} = U_\varphi T. \tag{5}$$

Действительно, если $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$, то $U_{z^m}f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{j+m}$ и $TU_{z^m}f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\Omega_{j+m}(z)$. С другой стороны, $Tf(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\Omega_j(z)$ и $U_\varphi Tf(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\varphi(z)\Omega_j(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\Omega_{j+m}(z)$. Из полученных соотношений следует (5).

Теорема 4. *Если* U_φ *эквивалентен* U_{z^n} *в* A_R, *где функция* $\varphi(z)$ *аналитична в замкнутом круге* $|z| \leqslant R$ *и* $\varphi'(z) \neq 0$ *при* $|z| = R$, *то*

$$\varphi(z) = \frac{R^2(z-\alpha_1)}{R^2-\bar\alpha_1 z}\cdots\frac{R^2(z-\alpha_n)}{R^2-\bar\alpha_n z}e^{i\theta},$$

где $|\alpha_j| < R$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *и* $\operatorname{Im}\theta = 0$.

Доказательство. Очевидно (в силу леммы 2), эту теорему достаточно доказать для случая $R = 1$. Действительно, так как функция $g(z) = Rz$ осуществляет взаимно однозначное и конформное отображение K_1 на K_R, то $U_{(R_z)^n} \sim U_{\varphi(Rz)}$ в A_1 и, очевидно, $U_{z^n} \sim U_{R^{-n}\varphi(Rz)}$. Поэтому, если теорема 3 верна для круга K_1, то

$$R^{-n}\varphi(Rz) = \frac{z-\beta_1}{1-\bar{\beta}_1 z} \cdots \frac{z-\beta_n}{1-\bar{\beta}_n z} e^{i\Theta},$$

где $|\beta_j| < 1$, $|z| < 1$. Следовательно,

$$\varphi(Rz) = \frac{R^2(Rz-\beta_1 R)}{R^2-\bar{\beta}_1 R\cdot Rz} \cdots \frac{R^2(Rz-\beta_n R)}{R^2-\bar{\beta}_n R\cdot Rz} e^{i\Theta} \quad (|z|<1),$$

т. е.

$$\varphi(z) = \frac{R^2(z-\alpha_1)}{R^2-\bar{\alpha}_1 z} \cdots \frac{R^2(z-\alpha_n)}{R^2-\bar{\alpha}_n z} \cdot e^{i\Theta} \quad (|z|<R),$$

где $|\alpha_j| = |\beta_j R| < R$ и $\operatorname{Im}\Theta = 0$.

Итак, пусть $U_\varphi \sim U_{z^n}$ в A_1, функция $\varphi(z)$ аналитична в $\overline{K_1}$ и $\varphi'(z) \neq 0$ при $|z|=1$. Если L — окружность $|z|=1$, то $\Gamma = \varphi(L)$ — замкнутая аналитическая кривая без особых точек, содержащаяся в круге $|w| \leqslant 1$. Кроме того, Γ покрывает единичную окружность $|w|=1$. На основании свойства «единственности» [9, с. 463] правильных (без особых точек) аналитических дуг заключаем, что Γ целиком лежит на окружности $|w|=1$, т. е. $|\varphi(z)|=1$ при $|z|=1$. Отсюда следует, что на L функция $\varphi(z)$ не имеет нулей, а внутри L она их обязательно имеет, но не более n (см. лемму 4). Следовательно,

$$\varphi(z) = \frac{z-\beta_1}{1-\bar{\beta}_1 z} \cdots \frac{z-\beta_m}{1-\bar{\beta}_m z} \varphi_1(z),$$

где $1 \leqslant m \leqslant n$ и $\varphi_1(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1$. Так как $|\varphi_1(z)|=1$ при $|z|=1$, то из принципа максимума модуля для $\varphi_1(z)$ и $\frac{1}{\varphi_1(z)}$ следует, что $|\varphi_1(z)| \equiv 1$, т. е. $\varphi_1(z) = e^{i\Theta}$. Далее, как следует из теоремы 3, $U_\varphi \sim U_{z^m}$ в A_1. Следовательно, $U_{z^m} \sim U_{z^n}$, что возможно (хотя бы на основании леммы 4) только в случае $m=n$. Этим и завершается доказательство теоремы 4.

Таким образом, имеет место следующая основная

Теорема 5. *Пусть $\varphi(z)$ — аналитическая функция в круге $|z| \leqslant R$ и $\varphi'(z) \neq 0$ при $|z|=R$. Для того чтобы оператор U_φ был эквивалентен оператору Uz^n $(n=1, 2, \ldots)$ в пространстве A_R, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(z)$ имела вид*

$$\varphi(z) = \frac{R^2(z-\alpha_1)}{R^2-\bar{\alpha}_1 z} \cdots \frac{R^2(z-\alpha_n)}{R_2-\bar{\alpha}_n z} e^{i\Theta}, \tag{6}$$

где $|\alpha_j| < R$, а θ — вещественное число.

Отметим, кстати, что если функция $\varphi(z)$ имеет вид (6), то $\varphi'(z) \neq 0$ при $|z| = R$, в чем легко убедиться, вычисляя ее логарифмическую производную.

Замечание 3. Условие аналитичности и отличие от нуля производной функции $\varphi(z)$ на единичной окружности L можно заменить другим, требуя от функции $\varphi(z)$ непрерывности в замкнутом круге $|z| \leq 1$ и правильной аналитичности контура $\Gamma = \varphi(L)$ [9, с. 462]. При этом условие правильной аналитичности контура Γ является существенным, в чем можно убедиться на таком примере. Пусть $h(z)$ — однолистное и конформное отображение круга $|z| < 1$ на область, ограниченную касающимися внутренним образом окружностями $|w| = 1$ и $\left|w + \frac{3}{4}i\right| = \frac{1}{4}$, которое переводит верхнюю полуокружность окружности L на внешнюю окружность $|w| = 1$, а нижнюю — на внутреннюю $\left|w + \frac{3}{4}i\right| = \frac{1}{4}$ (таким отображением будет, например, $h(z) = (h_3 \circ h_2 \circ h_1)(z)$, где $h_1(z) = \frac{z-1}{i(z+1)}$, $h_2(z) = \ln z$ и $h_3(z) = \frac{3z - \pi i}{3iz - \pi}$. Тогда функция $\varphi(z) = h^2(z)$ аналитична в круге K_1, непрерывна на $\overline{K_1}$ (она даже аналитична на $\overline{K_1}$ за исключением точек ± 1), отображает его на себя, но не сводится к произведению дробно-линейных отображений круга K_1 на себя.

Внимание авторов на этот факт обратил А. А. Гольдберг, за что они ему искренне признательны.

Замечание 4. Из теоремы 5, в частности, при $n = 1$ следует, что операторы U_φ и U_z эквивалентны в A_R тогда и только тогда, когда функция $\varphi(z)$ конформно и однолистно отображает круг K_R на себя. Это утверждение сходным путем было доказано ранее в [10].

Теорема 6. *Если $\Phi(z) = \varphi_1(z) \ldots \varphi_n(z)$, где $\{\varphi_j(z)\}_1^n$ — некоторые конформные отображения области G на K_R, то оператор U_Φ в $A(G)$ эквивалентен оператору U_{z^n} в A_R.*

Доказательство. Пусть $\psi(z)$ — некоторое взаимно-однозначное и конформное отображение области G на K_R. Тогда функция $\Omega(z) = (\Phi \circ \psi^{-1})(z)$ является произведением n дробно-линейных преобразований круга K_R на себя и поэтому (см. теорему 3) $U_\Omega \sim U_{z^n}$ в A_R. Кроме того, как это следует из леммы 2, $U_\Phi \sim U_{\psi^n}$ в пространстве $A(G)$. Справедливость теоремы 6 теперь уже следует из очевидной эквивалентности операторов U_{ψ^n} в $A(G)$ и U_{z^n} в A_R.

Замечание 5. Если предположить, что функция $(\Phi \circ \psi^{-1})(z)$ аналитична и на окружности $|z| = R$ с отличной от нуля производной, то, очевидно, в случае эквивалентности U_Φ в $A(G)$ с U_{z^n} в A_R

$$\Phi(z) = \varphi_1(z) \ldots \varphi_n(z),$$

где $\varphi_j(z)$ — некоторые взаимно-однозначные и конформные отображения области G на круг K_R.

3. Приведем теперь одно следствие из полученных результатов.

Теорема 7. *Пусть* $\{\psi_\nu(z)\}_{\nu=0}^{n-1}$ — *функции пространства* A_R, *а* $\varphi(z)$ — *аналитична в круге* $|z| \leqslant R$ *и* $\varphi'(z) \neq 0$ *при* $z = R$. *Тогда система*

$$\{[\varphi(z)]^k (\psi_0(z), \ldots, \psi_{n-1}(z))\}_{k=0}^{\infty} \tag{7}$$

образует квазистепенной базис пространства A_R *в том и только том случае, когда*

$$1)\ \varphi(z) = \frac{R^2(z-\alpha_1)}{R^2-\bar{\alpha}_1 z} \ldots \frac{R^2(z-\alpha_n)}{R^2-\bar{\alpha}_n z} e^{i\Theta} \ (|\alpha_j| < R,\ \operatorname{Im}\Theta = 0);$$

$$2)\ \det \left\| \sum_{s=0}^{\infty} L_{sn+\mu}(\psi_\nu) z^{sn} \right\|_{\mu,\nu=0}^{n-1} \neq 0$$ *в круге* $|z| < R$, *где* $L_j(f)$ *определены соотношениями* (2) *по периодической системе, составленной из нулей функции* $\varphi(z)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (7) образует квазистепенной базис в A_R. Тогда существует такой изоморфизм T этого пространства, что

$$Tz^{kn+\nu} = \varphi^k(z)\psi_\nu(z) \quad (k \geqslant 0;\ 0 \leqslant \nu \leqslant n-1).$$

Поэтому, как показывают простые подсчеты, для произвольной функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n-1} c_{kn+\nu} z^{kn+\nu}$$

из A_R имеет место равенство $TU_{z^n}f(z) = U_\varphi Tf(z)$. Следовательно, $U_{z^n} \sim U_\varphi$ и на основании теоремы 5 фукция $\varphi(z)$ удовлетворяет первому условию теоремы.

Пусть, далее, T_0 — изоморфизм пространства A_R, построенный по полученной функции $\varphi(z)$ так, как это делалось при доказательстве теоремы 3, т. е.

$$T_0 z^j = \Omega_j(z) \quad (j = 0, 1, \ldots) \text{ и } T_0 U^k{}_{z^n} T_0^{-1} = U_\varphi^k \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Тогда квазистепенной базис в A_R образует также система

$$\{z^{kn}(T_0^{-1}\psi_0(z), \ldots, T_0^{-1}\psi_{n-1}(z))\}_{k=0}^{\infty}.$$

Так как

$$\psi_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} L_j(\psi_\nu)\Omega_j(z),$$

то

$$T_0^{-1}\psi_\nu(z)=\sum_{j=0}^{\infty}L_j(\psi_\nu)\,z^j.$$

Следовательно [11],

$$\det\left\|\sum_{s=0}^{\infty}L_{sn+\mu}(\psi_\nu)\,z^{sn}\right\|_{\mu,\ \nu=0}^{n-1}\neq 0$$

в круге $|z|<1$, т. е. выполнено и условие 2 теоремы.

Проведя аналогичные рассуждения в обратном порядке, мы легко убеждаемся в справедливости и обратного утверждения. Теорема доказана.

Полученная теорема 7 является, очевидно, обобщением соответствующей теоремы 2 из [11]. Кроме того, она допускает перенесение и на пространство $A(G)$, где G — односвязная область с континуальной границей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаге М. К. Операторно-аналітичні функції однієї незалежної змінної. Вид-во Львівськ. ун-ту, 1959. 112 с.
2. Köthe G. Dualität in der Funktionentheorie. — «Journal für reine und angewandte Mathematik», 1953, 191, p. 29—49.
3. Маркушевич А. И. О базисах в пространстве аналитических функций. — «Мат. сборник», 1945, т. 17, № 2, с. 211—252.
4. Хапланов М. Г. Матричный признак базиса в простанстве аналитических функций. — «Докл. АН СССР», 1951, т. 80, № 2, с. 177—180.
5. Хапланов М. Г. Линейные преобразования аналитических пространств.— «Докл. АН СССР», 1951, т. 80, № 1, с. 21—24.
6. Фишман К. М. К вопросу о линейных преобразованиях аналитических пространств. — «Докл. АН СССР», 1959, т. 127, № 1, с. 40—43.
7. Голубев В. В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. М., Физматгиз, 1961. 103 с.
8. Евграфов М. А. Метод близких систем в пространстве аналитических функций и его применение к интерполяции. — «Труды мат. о-ва», 1956, т. 5, с. 89—201.
9. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М., «Наука», 1968. 207 с.
10. Нагнибида Н. И. О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве. — «Сиб. мат. журн.», 1966, № 6, с. 1306—1318.
11. Нагнибида Н. И. Операторы, перестановочные с операторами умножения на аналитические функции, и связанные с ними квазистепенные базисы. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 13. Харьков, 1971, с. 63—67.