УДК 513.88

В. И. Баран, М. М. Драгилев, д-р физ.-мат. наук

О КВАЗИЭКВИВАЛЕНТНОСТИ АБСОЛЮТНЫХ БАЗИСОВ В ПРОСТРАНСТВАХ КЕТЕ КЛАССА $(f)_\sigma$

Пусть X — счетнонормированное полное пространство с абсолютным базисом (пространство Кете), причем $\dim X = \infty$; $f(u)$[1] — неубывающая нечетная функция, логарифмически выпуклая при $u \to \infty$; σ принимает одно из значений: -1, 0, 1, ∞. Отнесем X к классу $(f)_\sigma$ [1], если найдутся а) абсолютный базис (x_n) в X, б) система норм $(|\cdot|_\alpha)_{\alpha<\sigma}$, определяющая топологию X, и в) последовательность положительных чисел (a_n), $a_n \to \infty$, таких, что

$$|x_n|_\alpha = \exp f(\alpha a_n) \quad (n = 1, 2, ..; \ \alpha < \sigma). \tag{1}$$

В частном случае, когда $f(u) \equiv u$, существует лишь два различных класса $(f)_\sigma : R_0 = (f)_{-1} = (f)_0 = (f)_1$ и $R_\infty = (f)_\infty$ (как известно [2], $R_0 \cap R_\infty = \varnothing$). Соответствующие пространства X называют *конечными* и *бесконечными центрами абсолютных шкал Рисса* [2] (также *пространствами степенных рядов* [3]). Если же $f(u) \not\equiv u$, то возможны два случая: либо $(f)_{-1} = (f)_0 = (f)_1 = R_0$ и $(f)_\infty = R_\infty$, либо все классы $(f)_\sigma (\sigma = -1, 0, 1, \infty)$, а также R_0 и R_∞ попарно не содержат изоморфных пространств. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда $f(u)$ — функция быстрого роста, т. е. когда при любом (хотя бы одном) θ, $0 < \theta < 1$ выполнено соотношение

$$\lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{f(\theta u)} = \infty.$$

Имеются бесконечные (несчетные) множества попарно не пересекающихся классов $(f)_\sigma$ [1].

Как известно [1] (см. также [2]), в ядерном пространстве $X \in (f)_\sigma$ любые два базиса квазиэквивалентны[2]. Без предположения о ядерности то же верно для пространств X, принадлежащих классу R_0 [5] или R_∞ [6] (при этом, естественно, речь идет об абсолютных базисах). В настоящей статье методом, близким к тому, который был использован в работах [5] и [6], доказывается квазиэквивалентность всех абсолютных базисов в произвольном пространстве класса $(f)_\sigma$.

---

[1] Функцию $f(u)$ называют логарифмически выпуклой, если $\ln f(u)$ есть выпуклая функция от $\ln u$.

[2] Абсолютные базисы (x_n) и (y_n) в X называют квазиэквивалентными [4], если существуют а) автоморфизм T пространства X; б) последовательность положительных чисел (λ_n) и в) перестановка (j_n) ряда 1, 2, ..., такие, что $y_n = \lambda_n T x_{j_n}$ $(n = 1, \dots)$.

Рассмотрим две шкалы вложенных банаховых пространств l_1 с весом, зависящим от параметра:

$$X_\alpha = l_1(\exp f(\alpha a_n)) \quad (-\infty < \alpha < \infty),$$
$$Y_\beta = l_1(\exp f(\beta l_n)) \quad (-\infty < \beta < \infty),$$

где $a_n \to \infty$ и $b_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Лемма. *Если $f(u)$ — функция быстрого роста и выполняется одно из условий*

$$\text{а)}\ 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2, \quad 0 \leqslant \beta_1 < \beta_2, \quad \beta < \frac{\beta_2}{\alpha_2}\alpha;$$

$$\text{б)}\ \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 0, \quad \beta_1 < \beta_2 \leqslant 0, \quad |\beta| > \frac{|\beta_1|}{|\alpha_1|}|\alpha|,$$

то всякий линейный непрерывный оператор T, действующий из X_{α_1} в Y_{β_1}, и из X_{α_2} в Y_{β_2}, действует непрерывно также из X_α в Y_β.

Доказательство. Так как норма оператора $T: X_\alpha \to X_\beta$, заданного матрицей (t_{kn}) (в координатных базисах пространств X_α и Y_β), определяется соотношением

$$\| T \| = \sup_k \sum_n |t_{nk}| \exp[f(\beta b_n) - f(\alpha a_k)],$$

то нам достаточно доказать неравенство

$$f(\beta b_n) - f(\alpha a_k) \leqslant \begin{cases} f(\beta_1 b_n) - f(\alpha_1 a_k) + C \\ f(\beta_2 b_n) - f(\alpha_2 a_k) + C, \end{cases}$$

где постоянная C не зависит от n и k. В случае a обозначим:

$$a_{k_n} = \min\{a_k : \beta b_n \leqslant \theta\alpha a_k\} \quad (n = 1, 2, \ldots;\ 0 < \theta < 1).$$

Затем для такого N, что при $n > N$

$$\frac{f(\theta\alpha a_{k_n})}{f(\alpha a_{k_n})} + \frac{f(\alpha_1 a_{k_n})}{f(\alpha a_{k_n})} < 1,$$

положим

$$C_1 = \max_{1 \leqslant n \leqslant N} f(\beta b_n).$$

Тогда для тех пар (n, k), для которых $a_k \geqslant a_{k_n}$, будем иметь:

$$f(\beta b_n) - f(\alpha a_k) - f(\beta_1 b_n) + f(\alpha_1 a_k) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\substack{n \leqslant N \\ k \geqslant 1}} [f(\beta b_n) - f(\beta_1 b_n) - f(\alpha a_k) + f(\alpha_1 a_k)] +$$
$$+ \sup_{\substack{n > N \\ a_k \geqslant a_{k_n}}} f(\alpha a_k)\left[-1 + \frac{f(\theta\alpha a_k)}{f(\alpha a_k)} + \frac{f(\alpha_1 a_k)}{f(\alpha a_k)}\right] \leqslant C_1 +$$
$$+ \sup_{\substack{n > N \\ a_k \geqslant a_{k_n}}} f(\alpha a_k)\left[-1 + \frac{f(\theta\alpha a_{k_n})}{f(\alpha a_{k_n})} + \frac{f(\alpha_1 a k_n)}{f(\alpha a_{k_n})}\right] \leqslant C_1.$$

С другой стороны, если $a_k < a_{k_n}$, то $\beta b_n > \theta\alpha a_k$, откуда

$$\alpha_2 a_k < \frac{\beta\alpha_2}{\theta\alpha} b_n < \theta\beta_2 b_n$$

при условии, что $1 > \theta > (\beta\alpha_2/\alpha\beta_2)^{\frac{1}{2}}$. Для соответствующих пар (n, k) имеем

$$f(\beta b_n) - f(\alpha a_k) - f(\beta_2 b_n) + f(\alpha_2 a_k) \leqslant$$

$$\leqslant f(\beta_2 b_n)\left[-1 + \frac{f(\beta b_n)}{f(\beta_2 b_n)} + \frac{f(\theta\beta_2 b_n)}{f(\beta_2 b_n)}\right].$$

Отсюда видно, что

$$f(\beta b_n) - f(\alpha a_k) - f(\beta_2 b_n) + f(\alpha_2 a_k) < C_2,$$

где C_2 — еще одна постоянная, не зависящая от n и k. В случае b доказательство вполне аналогично.

Следствие. *Если $\alpha_2 > 0$ и $\beta_2 > 0$, либо $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, то для любого $\beta < \beta_2$ найдется такое $\alpha < \alpha_2$, что оператор T непрерывно действует из X_α в Y_β.*

Замечание. Можно показать, что если $\alpha_2 < 0$ и $\beta_2 < 0$, то аналогичное утверждение неверно[1].

Пусть, далее, X — пространство класса $(f)_\sigma$, (x_n) — абсолютный базис в X, для которого выполнено (1), и пусть (y_n) — произвольный абсолютный базис в X. Положим:

$$\| x \|_\alpha = \sum_n | x'_n(x) | \, | x_n |_\alpha; \quad \| x \|^*_\alpha = \sum_n | y'_n(x) | \, | y_n |_\alpha. \qquad (2)$$

$$(\alpha < \sigma; \quad x \in X)$$

Как известно [8], каждая из систем норм (2) задает исходную топологию в X. Следовательно, выполнены соотношения

$$\text{а)}\ \underset{\alpha}{\forall}\,\underset{\alpha'}{\exists}\, \| x \|_\alpha < C' \| x \|^*_{\alpha'}, \quad \text{б)}\ \underset{\alpha'}{\forall}\,\underset{\alpha''}{\exists}\, \| x \|^*_{\alpha'} < C'' \| x \|_{\alpha''},$$

где C' и C'' не зависят от x. Это означает, в частности, что если X_α и X^*_α — соответствующие пополнения X по нормам (2), то имеют место непрерывные тождественные вложения $X_\alpha \leftarrow \leftarrow X^*_{\alpha'} \leftarrow X_{\alpha''}$. Рассмотрим отдельно три случая (предполагается, что $f(u)$ — функция быстрого роста).

1. (Ср. [5]) $\sigma = 0,1$ (для определенности $\sigma = 1$). Пусть $| x_n |_1 = \exp f(a_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и X_1 — пополнение по норме $\| \cdot \|_1 = \sum_n | X'_n(\cdot) | \, | x_n |_1$ линейной оболочки базиса (x_n). Для каждого n найдем $\alpha_n < 1$ и C_n такие, что

$$\| x \|^*_{1-\frac{1}{n}} \leqslant C_n \| x \|_{\alpha_n} \leqslant C_n \| x \|_1,$$

---

[1] Если $f(u) \equiv u$, соответствующее утверждение (для любых α_2 и β_2) следует из известной интерполяционной теоремы С. Крейна [7].

затем положим

$$\| x \|_1^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n C_n} \| x \|_{1-\frac{1}{n}}^*.$$

Пополнение пространства X по норме $\| \cdot \|_1^*$ обозначим X_1^* (ср. [2, теорема 11]). Тогда для некоторых α, α', $\alpha'' < 1$ и любого $\varepsilon > 0$ будет выполнена следующая диаграмма (стрелками обозначены непрерывные вложения) (рис. 1).

Не уменьшая общности, можем считать, что $\| y_n \|_{\alpha'} = 1$ (это достигается нормировкой элементов базиса). Пусть тогда

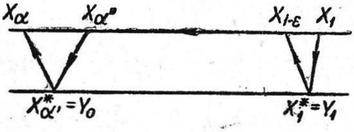

Рис. 1

$$\| y_n \|_1^* = \exp f(b_n) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

При этом числа b_n определяются однозначно, а так как вложение $X_1^* \to X_{1-\varepsilon} \to X_{\alpha''} \to X_{\alpha'}^*$ вполне непрерывно, то $b_n \to \infty$. Пусть Y_β — пополнение X_1 по норме

$$| \cdot |_\beta^\circ = \sum_n | y_n'(\cdot) | \exp f(\beta b_n) \quad (0 \leqslant \beta \leqslant 1). \tag{3}$$

Из первой части леммы и из диаграммы 1 следует, что для любого $\beta < 1$ найдется $\alpha < 1$ $(\alpha > \beta)$ такое, что $X_\alpha \to Y_\beta$, и обратно, для любого $\alpha < 1$ найдется такое $\beta < 1$ $(\beta > \alpha)$, что $Y_\beta \to X_\alpha$. Это означает, что система норм (3) определяет исходную топологию в X. Предполагая, что последовательность (b_n) монотонна (этого можно достичь перестановкой элементов y_n), будем иметь при любых β', β'', $\beta' < \beta'' < 1$ и $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{| y_n |_{\beta'}^\circ}{| y_n |_{\beta''}^\circ} = \exp [f(\beta' b_n) - f(\beta'' b_n)] \geqslant$$

$$\geqslant \exp [f(\beta' b_{n+1}) - f(\beta'' b_{n+1})] = \frac{| y_{n+1} |_{\beta'}^\circ}{| y_{n+1} |_{\beta''}^\circ}.$$

Другими словами, базис (y_n) перестановкой можно сделать правильным. Но как показано в [1], любые два таких базиса в пространстве $X \in (f)_\sigma$ квазиэквивалентны. Следовательно, все абсолютные базисы в X квазиэквивалентны. В случае $\sigma = 0$ доказательство аналогично (применяется второе утверждение леммы).

2. (Ср. [6]) $\sigma = \infty$. Пусть $\widetilde{Y}$ — линейная оболочка базиса (y_n). Выберем шестерку пространств $X_{\alpha_1} \leftarrow X_{\alpha_1'}^* \leftarrow X_{\alpha_1''} \leftarrow X_{\alpha_2} \leftarrow X_{\alpha_2'}^* \leftarrow$ $\leftarrow X_{\alpha_2''}$ и положим

$$\| y_n \|_{\alpha_1'}^* = 1, \quad \| y_n \|_{\alpha_2'}^* = \exp f(b_n) \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

$$|x|_\beta^\circ = \sum_n |y_n^*(x)| \exp f(\beta b_n) \quad (0 \leqslant \beta < \infty;\ x \in \tilde{Y}). \tag{4}$$

Нам достаточно показать, что система норм (4) (продолженных по непрерывности на X) задает в X исходную топологию. Обозначим Y_β пополнение Y по норме $|\cdot|_\beta^\circ$. Для произвольного $\lambda > 1$ положим $\lambda' = \lambda_n \alpha_2''$, затем найдем такие μ и ν', чтобы имела место следующая диаграмма (рис. 2).

Обозначим еще

$$\|y_n\|_\mu^* = \exp f(c_n) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$|x|_\gamma^\mu = \sum_n |y_n'(x)| \exp f(\gamma c_n) \quad (x \in \tilde{Y};\ 0 \leqslant \gamma \leqslant 1).$$

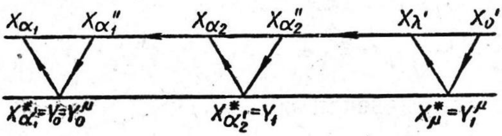

Рис. 2

Через Y_γ^μ будем обозначать пополнение $\tilde{Y}$ по норме $|\cdot|_\gamma^\mu$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$.

Как вытекает из леммы, имеют место (вполне непрерывные) вложения $Y_{\alpha_2/\lambda'}^\mu \to X_{\alpha_2} \to Y_{\alpha_2/\alpha_2''}$, но это возможно лишь при условии, что $c_n\alpha_2/\lambda' \leqslant b_n\alpha_2/\alpha_2''$ для достаточно больших n. Следовательно,

$$X_\mu^* = Y_1^\mu \to Y_\lambda. \tag{5}$$

С другой стороны, очевидно, имеем $Y_1 \to X_{\alpha_2} \to Y_{\alpha_2/\nu'}^\mu$. Отсюда вытекает, что

$$Y_\nu \to Y_1^\mu = X_\mu^*, \tag{6}$$

где $\nu = \nu'/\alpha_2$. Доказываемое утверждение непосредственно следует из (5) и (6).

3. $\sigma = -1$. Найдем числа $\alpha_k < -1$, $\alpha_k' < -1$ и $\alpha_k'' < -1$, такие, чтобы выполнялись непрерывные вложения $X_{\alpha_k} \leftarrow X_{\alpha_k'}^* \leftarrow X_{\alpha_k''}$, причем $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\alpha_k \to -1$ при $k \to \infty$. По аналогии с предыдущим определим норму $\|\cdot\|_{-1}^*$ в X, и для произвольного элемента $x \in X$ положим

$$|x|_\beta^k = \sum_n |y_n'(x)|\, |y_n|_{-1}^* \exp [f(\beta b_{kn}) - f(-b_{kn})],$$

где k — фиксировано, $\beta < -1$ и последовательность $(b_{kn})_{n=1}^{\infty}$, $b_{kn} \to \infty$ $(n \to \infty)$, однозначно определяется из соотношений:

$$\frac{|y_n|^*_{-1}}{|y_n|_{\alpha'_k}} = \exp\left[f(-b_{kn}) - f(\alpha_k b_{kn})\right] \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пополнение X по норме $|\cdot|_\beta^k$ обозначим Y_β^k. Из второй части леммы (с учетом того, что $\alpha_k/|\alpha_{k+1}| < \alpha_k/|\alpha''_k|$) следует:

$$\text{а) } \underset{\alpha<-1}{\forall}\ \underset{\beta<-1}{\exists} \mid X_\alpha \leftarrow Y_\alpha^k; \text{ б) } \underset{\alpha<-1}{\exists} \mid Y^k_{\alpha_k/|\alpha_{k+1}|} \leftarrow X_\alpha;$$

$$\text{в) } \underset{\alpha<-1}{\forall}\ \underset{\beta<-1}{\exists} \mid X_\alpha \leftarrow Y_\beta^{k+1}; \text{ г) } \underset{\alpha<-1}{\exists} \mid Y^{k+1}_{\alpha_{k+1}/|\alpha_{k+2}|} \leftarrow X_\alpha.$$

Но тогда найдутся $\beta'_k < -1$, $\beta''_k < -1$ такие, чтобы выполнялись вложения

$$Y^k_{\alpha_k/|\alpha_{k+1}|} \leftarrow Y^{k+1}_{\beta'_k}; \quad Y^{k+1}_{\alpha_{k+1}/|\alpha_{k+2}|} \leftarrow Y^k_{\beta''_k}.$$

Отсюда вытекают неравенства

$$f\left(\frac{\alpha_k}{|\alpha_{k+1}|} b_{kn}\right) - f(-b_{kn}) \leqslant f(\beta'_k b_{k+1\,n}) - f(-b_{k+1,\,n}) + C,$$

$$f\left(\frac{\alpha_{k+1}}{|\alpha_{k+2}|} b_{k+1,\,n}\right) - f(-b_{k+1,\,n}) \leqslant f(\beta''_k b_{kn}) - f(-b_{kn}) + C,$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от n. Из того, что $f(u)$ — функция быстрого роста, следуют теперь асимптотические неравенства

$$\begin{aligned} b_{k+1,\,n} &\leqslant \theta_k \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k+1}|} b_{kn}; \\ b_{kn} &\leqslant \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_{k+2}|} b_{k+1,\,n}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $|\beta'_k|^{-1} < \theta_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$ (при этом без ограничения общности можно считать, что неравенства (7) выполнены для всех n). Следовательно, имеем

$$\frac{|\alpha_{k+s+1}|}{|\alpha_{k+1}|} b_{kn} \leqslant b_{k+s} \leqslant \theta_k \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k+s}|} b_{kn}$$

$$(s = 1, 2, \ldots; \ k = 1, 2, \ldots; \ n = 1, 2, \ldots).$$

Это означает, в частности, что при любом n существует предел

$$\lim_{k\to\infty} b_{kn} = b_n,$$

причем

$$\frac{1}{|\alpha_{k+1}|} b_{kn} \leqslant b_n \leqslant \theta_k |\alpha_k| b_{kn} \ (k, \ n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Введем в X новую систему норм, положив для произвольного элемента $x \in X$:

$$|x|_\beta^0 = \sum_n |y_n'(x)|\, |y_n|_{-1}^* \exp [f(\beta b_n) - f(-b_n)] \quad (\beta < -1).$$

Остается показать, что система норм $(1 \cdot 1_\beta^0)\, \beta < -1$ задает исходную топологию в X. В самом деле, пусть Y_β^0 — пополнение X по норме $|\cdot|_\beta^0$. Для любого $\alpha < -1$ выберем $\alpha_k > \alpha$ и $\beta > -\theta_k^{-1}$. Как вытекает из правого неравенства (8), $Y_{\beta_k}^0 \to Y_{\alpha_k}^k$, следовательно, $Y_\beta^0 \to Y_{\alpha_k}^k \to X_{\alpha_k} \to X_\alpha$. С другой стороны, для любого $\beta < -1$ найдется $\alpha_k > \beta$, и тогда с помощью левого неравенства (8) получим, что $Y_\beta^0 \leftarrow Y_{\alpha_k/|\alpha_{k+1}|}$. Следовательно, найдется $\alpha < -1$, такое, что $X_\alpha \to Y_{\alpha_k/|\alpha_{k+1}}^k \to Y_\beta^0$. Таким образом, доказана

Теорема. *В каждом пространстве Кете, принадлежащем классу $(f)_\sigma$, все абсолютные базисы квазиэквивалентны.*

Заметим, что при $\sigma = 0$ и $\sigma = \infty$ достаточно было бы потребовать лишь выпуклости функции $f(u)$ (см. [9, лемма 1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Драгилев М. М. О правильных базисах в ядерных пространствах. — «Мат. сборник», 1965, т. 68, с. 153—173.
2. Митягин Б. С. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах. — «Усп. мат. наук», 1961, т. 26, вып. 4, с. 63—132.
3. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства. М., «Мир», 1967. 112 с.
4. Драгилев М. М. Каноническая форма базиса пространства аналитических функций. — «Усп. мат. наук», 1960, т. 15, вып. 2, с. 181—188.
5. Захарюта В. П. О квазиэквивалентности базиса в конечных центрах гильбертовых шкал. — «Докл. АН СССР», 1969, т. 180, № 4, с. 786—788.
6. Митягин Б. С. Эквивалентность безусловных базисов в гильбертовых шкалах. — «Мат. сборник», 1970, т. 37, с. 101—126.
7. Крейн С. Г. Об одной интерполяционной теореме в теории операторов. — «Докл. АН СССР», 1960, т. 130, № 3, с. 491—494.
8. Банах С. Курс функціонального аналізу. Київ, «Наукова думка», 1948. 515 с.
9. Драгилев М. М. О продолжаемых базисах некоторых пространств Кете. — «Сиб. мат. журн.», 1973, № 4, с. 878—882.