УДК 518.61

В. С. Азарин, канд. физ.-мат. наук, В. И. Бармин

ОБ АППРОКСИМАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Пусть задана достаточно гладкая функция $f(x)$, $x \in [0, l]$. Пусть $f_k(x, \Delta_1, \ldots \Delta_k, a_i, b_i, \ldots)$ — кусочно-линейная функция вида

$$f_k(x, \ldots) = a_i x + b_i;\ x \in (x_{i-1}, x_{i-1} + \Delta_i); \tag{1}$$

$$x_i = x_{i-1} + \Delta_i;\ x_0 = 0;\ x_k = l;$$

$$i = 1, \ldots k.$$

Обозначим

$$I(\Delta_1, \ldots \Delta_k) = \min_{a_i, b_i} \int_0^l [f_k(x, \ldots) - f(x)]^2 dx, \tag{1a}$$

$$I(k, f) = \min_{\Delta_i} I(\Delta_1, \ldots \Delta_k), \tag{2}$$

$$I_n[f] = \min_{k \leqslant n} I(k, f). \tag{3}$$

Нахождение точного значения функционала I_n представляет трудную задачу. Мы рассматриваем и решаем вопрос об асимптотическом значении I_n при $n \to \infty$.

Рассматриваемая аппроксимация реализуется в некоторых приложениях (см., например, [2, с. 116]).

Отметим, что в этой постановке мы не требуем непрерывности кусочно-линейных функций, как это характерно для «сплайновой» аппроксимации [1].

Ответ на вопрос об асимптотическом значении I_n дает следующая

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — функция с ограниченной в интервале $[0, l]$ четвертой производной. Пусть $f''(x) > 0$, $x \in [0, l]$. Тогда выполняется соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} n^4 I_n = \frac{1}{720}\left(\int_0^l [f''(x)]^{2/5} dx\right)^5. \tag{3a}$$

Легко видеть, что если интервалы, на которых функция линейна, фиксированы, то оптимальные значения коэффициентов a_i, b_i могут быть найдены по методу наименьших квадратов.

Обозначим

$$B(\varphi) = \int_0^\varphi [f''(t)]^{2/5} dt \Big/ \int_0^l [f''(t)]^{2/5} dt.$$

Пусть $\varphi(x)$ — решение уравнения

$$B(\varphi) = x, \ x \in [0,1], \tag{4}$$

которое, как легко видеть, единственно и непрерывно дифференцируемо. Обозначим $\mu(x) = \varphi'(x)$ и положим

$$\Delta_{k,n} = \mu\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{l}{n}, \ k = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Пусть $k_n(\varphi) = \max k$ при условии

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta_{i,n} \leqslant \varphi. \tag{6}$$

Следующая теорема дает асимптотическое распределение длин оптимальных интервалов.

Теорема 2. *Пусть $\Delta_{i,n}$ $(i = \overline{1, n})$ определены соотношением* (5). *Тогда при условиях теоремы 1 выполняются равенства*

$$\lim_{n \to \infty} I(\Delta_{1n}, \ldots \Delta_{n,n}, f)\, n^4 = \lim_{n \to \infty} I_n n^4 \tag{7}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} k_n(\varphi)\, n^{-1} = B(\varphi). \tag{8}$$

Во всем дальнейшем изложении мы будем предполагать, не оговаривая этого особо, что $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Обозначим

$$I(a,\ b,\ \Delta,\ \bar{\alpha}) = \int\limits_{\bar{\alpha}-\Delta/2}^{\bar{\alpha}+\Delta/2} [f(x) - ax - b]^2 dx, \tag{9}$$

$$\min_{a,\ b} I(a,\ b,\ \Delta,\ \bar{\alpha}) = I(\Delta,\ \bar{\alpha}), \tag{10}$$

$a_{\min}$, $b_{\min}$ — коэффициенты, при которых достигается минимум в (10).

Лемма 1. *Для* $I(\Delta,\ \bar{\alpha})$, *определенного формулой* (10), *верны следующие соотношения:*

$$I(\Delta,\ \bar{\alpha}) = \frac{\Delta^5}{720} f''^2(\bar{\alpha}) + O(\Delta^7), \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} I(\Delta,\ \bar{\alpha}) = \frac{\Delta^5}{720} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \{f''^2(\bar{\alpha})\} + O(\Delta^6), \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Delta} I(\Delta,\ \bar{\alpha}) = \frac{5\Delta^4}{720} f''^2(\bar{\alpha}) + O(\Delta^6), \tag{13}$$

$$a_{\min} = f'(\bar{\alpha}) + O(\Delta^3), \tag{14}$$

$$b_{\min} = f(\bar{\alpha}) - f'(\bar{\alpha})\bar{\alpha} + \frac{\Delta^2}{24} f''(\bar{\alpha}) + O(\Delta^4). \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим

$$f_0(u,\ \Delta,\ \bar{\alpha}) = f\left(u \cdot \frac{\Delta}{2} + \bar{\alpha}\right). \tag{16}$$

Тогда получим

$$I(a,\ b,\ \Delta,\ \bar{\alpha}) = \frac{\Delta}{2} \int\limits_{-1}^{1} [f_0(u,\Delta,\ \bar{\alpha}) - Au - B]^2 du \overset{\text{def}}{=} \frac{\Delta}{2} I(A,\ B,\ \Delta,\ \bar{\alpha}), \tag{17}$$

где A и B линейно выражаются через a, b:

$$A = \frac{\Delta}{2} a;\quad B = a\bar{\alpha} + b. \tag{18}$$

Из (17) видно, что $I(A,\ B,\ \Delta,\ \bar{\alpha})$ квадратичная функция по A, B. Находя её минимум, получаем

$$A_{\min} \overset{\text{def}}{=} A(\Delta,\ \bar{\alpha}) = \frac{3}{2} \int\limits_{-1}^{1} f_0(u,\ \Delta,\ \bar{\alpha})\, u\, du, \tag{19}$$

$$B_{\min} = B(\Delta,\ \bar{\alpha}) = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f_0(u,\ \Delta,\ \bar{\alpha})\, du. \tag{20}$$

Производные A, B по Δ, $\bar{\alpha}$ очевидным образом выражаются через производные $f_0(u,\ \Delta,\ \bar{\alpha})$.

Обозначим

$$P_i(u,\ \Delta,\ \bar{\alpha}) = \sum_{k=0}^{i} \frac{f^{(k)}(\bar{\alpha})}{k!} \frac{(u\Delta)^k}{2^k}. \tag{21}$$

Разлагая f_0 и ее производные по формуле Тейлора, получаем

$$f_0(u) = P_3(u,\ \Delta,\ \bar{\alpha}) + O(\Delta^4), \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial\Delta} f_0 = \frac{\partial}{\partial\Delta} P_3(u,\ \Delta,\ \bar{\alpha}) + O(\Delta^3), \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}} f_0 = \frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}} P_2(u,\ \Delta,\ \bar{\alpha}) + O(\Delta^3). \tag{24}$$

Подставляя соотношение (22) в (19), (20), получаем

$$A(\Delta,\ \bar{\alpha}) = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} P_3(u,\ \Delta,\ \bar{\alpha})\, u\,du + O(\Delta^4) = \frac{\Delta}{2} f'(\bar{\alpha}) + O(\Delta^4); \tag{25}$$

$$B(\Delta,\ \bar{\alpha}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_3(u,\ \Delta,\ \bar{\alpha})\,du + O(\Delta^4) = f(\bar{\alpha}) + \frac{\Delta^2}{24} f''(\bar{\alpha}) + O(\Delta^4).$$

Из (23) и (24) следует, что формулы (25) можно дифференцировать по Δ и $\bar{\alpha}$, заменив остаточный член на $O(\Delta^3)$. Поэтому все дальнейшие преобразования верны не только для самих величин, но и для их производных по Δ и $\bar{\alpha}$.

Из формулы (25) и соотношений (21), (22) следует, что

$$f_0(u,\ \Delta,\ \bar{\alpha}) - A(\Delta,\ \bar{\alpha})\,u - B(\Delta,\ \bar{\alpha}) = \left(\frac{u^2}{8} - \frac{1}{24}\right) f''(\bar{\alpha})\,\Delta^2 + O(\Delta^4). \tag{26}$$

Подставляя (26) в выражение для $I(A,\ B,\ \Delta,\ \bar{\alpha})$, из (17) получаем

$$I(A(\Delta,\ \bar{\alpha}),\ B(\Delta,\ \bar{\alpha}),\ \Delta,\ \bar{\alpha}) = \frac{\Delta^4}{32} f''^2(\bar{\alpha}) \int_0^1 \left(u^2 - \frac{1}{3}\right)^2 du + O(\Delta^6).$$

Вычислив интеграл и использовав связь (17) между $I(A,\ B,\ \Delta,\ \bar{\alpha})$ и $I(a,\ b,\ \Delta,\ \bar{\alpha})$, получаем (11).

Из замечания относительно производных по Δ и $\bar{\alpha}$, сделанного выше, следует, что соотношение (11) можно дифференцировать по Δ и $\bar{\alpha}$, понижая на единицу порядок остаточного члена. Выражения (14) и (15) получаются из (25) с помощью соотношений (18).

Лемма 2. *В соотношении* (3) min *достигается при* $k = n$. Доказательство. Допустим противное, т. е. предположим, что

$$I_n = I(k,\ f),\quad k \leqslant n - 1. \tag{27}$$

Пусть $l_j = (x_{j-1},\ x_j)$ $j = \overline{1,\ k}$ — экстремальный набор интервалов, а f_k — соответствующая кусочно-линейная функция.

Разделим интервал l_k пополам. Пусть l_k', l_k'' — полученные подынтервалы. В силу выпуклости f одна и та же линейная функция не может быть оптимальной в обоих интервалах. Значит, $I\,[k+1,\ f] < I\,[k,\ f] = I_n$, что противоречит определению I_n.

Лемма доказана.

Обозначим

$$\Phi\,(\Delta_1 \ldots \Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} f''^2\,(\bar{\alpha}_i)\,\Delta_i^5, \tag{28}$$

где

$$\bar{\alpha}_i = \sum_{k=1}^{i-1} \Delta_k + \frac{\Delta_i}{2}. \tag{29}$$

Напомним, что

$$I\,(\Delta_1,\ \ldots\ \Delta_n,\ f) = \min_{a_i,\ b_i} \int_0^l [f\,(x) - f_n\,(x)]^2 dx \tag{30}$$

при фиксированном наборе интервалов.

Лемма 3. *Для любого набора Δ_i $(i = \overline{1,\ n})$, удовлетворяющих условиям*

$$\Delta_i > 0,\ i = \overline{1, n},\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = l, \tag{31}$$

выполняется соотношение

$$I\,(\Delta_1,\ \ldots\ \Delta_n;\ f) = \frac{1}{720}\,\Phi\,(\Delta_1,\ \ldots\ \Delta_n)\,[1 + O\,(\max_i\left[\Delta_i^2\right]]. \tag{32}$$

Если $\Delta_i^э$ $(i = \overline{1,\ n})$ — экстремальный набор, то существует $\lambda = \lambda_n$ такое, что при $\Delta_i = \Delta_i^э$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta_i} - \lambda_n = O\,(\max_k \Delta_k^5),\ i = \overline{1,\ n}. \tag{33}$$

Доказательство. Из соотношения (11) леммы 1 следует, что

$$I\,(\Delta_1,\ \ldots\ \Delta_n,\ f) = \left[\Phi\,(\Delta_1,\ \ldots\ \Delta_n) + \sum_{i=1}^{n} O\left(\Delta_i^7\right)\right]\frac{1}{720}.$$

Из ограниченности f''^2 снизу получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} O\left(\Delta_i^7\right)\right| \leqslant C\left(\max_i \Delta_i^2\right),\ \ \sum_{i=1}^{n} f''^2\,(\bar{\alpha}_i)\,\Delta_i^5 \tag{34}$$

что и доказывает (32).

Пусть теперь $\Delta_i^э$ $(i=\overline{1,n})$ — экстремальный набор. Так как по лемме 2 все $\Delta_i^э > 0$, то из необходимого условия для связанного экстремума следует, что существует λ_n такое, что

$$\frac{\partial}{\partial\Delta_i} I(\Delta_1^э, \dots \Delta_n^э, f) - \lambda_n = 0. \tag{35}$$

Из (12) и (13) следует, что в равенстве (35) можно заменить на $\Phi(\Delta_1, \dots \Delta_n)\ \frac{1}{720}$ с точностью до $O(\max\limits_i \Delta_i^5)$. Тем самым доказано и соотношение (33).

Лемма 4. *Верно соотношение*

$$n^4 I_n = O(1),\ n \to \infty. \tag{36}$$

Доказательство. Легко видеть, что при равномерном разбиении отрезка $[0, l]$ получаем

$$\Phi\left(\frac{l}{n}, \frac{l}{n}, \dots \frac{l}{n}\right) = \frac{l^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} f''^2(\xi_i)\frac{l}{n},$$

где ξ_i — середины соответствующих интервалов. Так как

$$\sum_{i=1}^{n} f''^2(\xi_i)\frac{l}{n} \to \int_0^l f''^2(x)\,dx < \infty,$$

то из неравенства

$$I_n \leqslant \frac{1}{720}\Phi\left(\frac{l}{n}, \dots \frac{l}{n}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \tag{37}$$

следует утверждение леммы.

Лемма 5. *Пусть $\Delta_{i,n}$ — экстремальный набор. Тогда*

$$\max_i \Delta_{i,n} \to 0 \ (n \to \infty). \tag{38}$$

Доказательство. Допустим противное. Выберем подпоследовательность n_k так, чтобы выполнилось условие

$$\max_i \Delta_{i,n_k} \to \Delta > 0. \tag{39}$$

Из соответствующей последовательности интервалов, на которых достигается max в (39), можно выбрать подпоследовательность (α_n, β_n), удовлетворяющую условиям:

а) $\beta_n - \alpha_n \to \Delta$;

б) существует фиксированный интервал (α, β) такой, что

$$(\alpha_n, \beta_n) \supset (\alpha, \beta)\ \forall n.$$

Тогда имеем

$$I_n \geqslant \min_{a,b} \int_\alpha^\beta [f(x) - ax - b]^2\,dx. \tag{40}$$

Правая часть неравенства (40) не зависит от n и положительна, так как $f''(x) \neq 0$. Но тогда (40) противоречит лемме 4.

Обозначим

$$\mu_n(x) = n\Delta_i, \ \frac{i-1}{n} < x \leqslant \frac{i}{n}\ i = \overline{1, n}, \tag{41}$$

$$F(x) = f''^2(x). \tag{42}$$

Лемма 6. *Верны соотношения:*

$$n^4\Phi(\Delta_1, \ldots \Delta_n) = \int\limits_0^1 F\left(\int\limits_0^x \mu_n(t)\,dt\right)\mu_n^5(x)\,dx + $$

$$+ O\left(\max_i \Delta_i^2\right)\int\limits_0^1 \mu_n^5(x)\,dx, \tag{43}$$

$$n^4\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta_i} = \int\limits_x^1 F'\left(\int\limits_0^t \mu_n(u)\,du\right)\mu_n^5(t)\,dt + 5\mu_n^4(x)\,F\left(\int\limits_0^x \mu_n(t)\,dt\right) + $$

$$+ O\left(\max_i \Delta_i\right)\mu_n^5(x). \tag{44}$$

Доказательство. Отметим, что из ограниченности $f^{IV}(x)$ следует, что $F(x)$ и $F'(x)$ удовлетворяют условию Липшица с показателем 1. Поэтому, обозначив

$$\bar{\alpha}_i = \sum_{k=1}^{i-1}\Delta_k + \frac{\Delta_i}{2} = \int\limits_0^{\frac{i-1}{n}} \mu_n(t)\,dt + \frac{\Delta_i}{2}, \tag{45}$$

получаем

$$\left|F(\bar{\alpha}_i) - F\left(\int\limits_0^x \mu_n(t)\,dt\right)\right| \leqslant C\Delta_i \quad \forall x \in \left(\frac{i-1}{n}, \ \frac{i}{n}\right). \tag{46}$$

Из определения Φ следует:

$$n^4\Phi(\Delta_1 \ldots \Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} F(\bar{\alpha}_i)\int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \mu_n^5(x)\,dx. \tag{47}$$

Теперь, используя (46), получаем (43). Вычислив производную $\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta_i}$ и использовав для $F'(u)$ соотношение, аналогичное (46), получим (44).

В дальнейшем изложении будем предполагать, что функции $\mu_n(x)$ построены для экстремального набора $\Delta_{i,n}$.

Лемма 7. *Последовательности* $\mu_n(x)$ и $\mu_n^5(x)$ *слабо компактны.*

Доказательство. Достаточно доказать, что интегралы

$$\int\limits_0^1 \mu_n(x)\,dx, \quad \int\limits_0^1 \mu_n^5(x)\,dx$$

ограничены.

Имеем

$$\int_0^1 \mu_n(x)\,dx = l. \tag{48}$$

Из (36) и (32) следует, что для экстремального набора $\Delta_{i,n}$ верно соотношение

$$n^4\Phi(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) = O(1) \quad (n \to \infty). \tag{49}$$

Используя положительность F и (38), получаем из (43)

$$n^4\Phi(\Delta_{1n}, \ldots, \Delta_{n,n}) \geqslant C \min_{x \in [0,\, l]} F(x) \int_0^1 \mu_n^5(x)\,dx. \tag{50}$$

Из (49) и (50) следует

$$\int_0^1 \mu_n^5(x)\,dx < C \quad \forall n,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 8. *Последовательность* $\mu_n(x)$ *содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду, причем для предела* $\mu(x)$ *выполняется соотношение*

$$\int_x^1 F'\left(\int_0^t \mu(u)\,du\right)\mu^5(t)\,dt + 5\mu^4(x)\,F\left(\int_0^x \mu(t)\,dt\right) - \lambda = 0, \tag{51}$$

где λ — постоянная.

Доказательство. Из леммы 7 следует, что последовательность $\mu_n(x)$ ограничена для почти всех x. Поэтому из соотношений (33) леммы 3 и (44) леммы 6 следует

$$\int_x^1 F'\left(\int_0^t \mu_n(u)\,du\right)\mu_n^5(t)\,dt + 5\mu_n^4(x)\,F\left(\int_0^x \mu_n(t)\,dt\right) - \lambda_n n^4 = o(1) \tag{52}$$

для почти всех x.

Из слабой сходимости $\mu_n(u)$ и $\mu_n^5(u)$ получаем, что последовательности

$$\varphi_n(x) = \int_x^1 F'\left(\int_0^t \mu_n(u)\,du\right)\mu_n^5(t)\,dt;$$

$$\psi_n(x) = F\left(\int_0^x \mu_n(t)\,dt\right) \tag{53}$$

сходятся для почти всех x.

Из равенства (52) получаем, что последовательность $\delta_n = \lambda_n n^4$ ограничена и, значит, можно выбрать сходящуюся последовательность $\delta_{n_k} \to \lambda$. Тогда из (53) следует, что $\{\mu_{n_k}(x)\}$ сходится для почти всех x к некоторому пределу $\mu(x)$. Переходя к пределу в равенстве (52), получаем (51).

Лемма 9. *Существует* $\mu(x)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\varlimsup_{n\to\infty} n^4 I_n = \frac{1}{720}\int_0^1 F\left(\int_0^x \mu(t)\,dt\right)\mu^5(x)\,dx, \tag{54}$$

$$\int_x^1 F'\left(\int_0^t \mu(u)\,du\right)\mu^5(t)\,dt + 5\mu^5(x)\,F\left(\int_0^x \mu(t)\,dt\right) - \lambda = 0, \tag{55}$$

$$\int_0^1 \mu(x)\,dx = l. \tag{56}$$

Доказательство. Пусть $\mu_n(x)$ — последовательность функций, построенная по той подпоследовательности экстремальных наборов $\Delta_{i,n}$ $(i = \overline{1, n})$, на которой достигается $\varlimsup$ в (54). По лемме 8 выделяем из нее подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к $\mu(x)$. Тогда $\mu(x)$ удовлетворяет (55) для почти всех x. Из (55) видно, что $\mu(x)$ может быть по непрерывности доопределена для всех значений x с сохранением соотношения (55).

Переходя к пределу в соотношении (43) леммы 6 и используя равенство (32) леммы 3, получаем (54). Равенство (56) следует из (48).

Лемма 10. *Система уравнений* (55), (56), *в которой* $F(x) = f''^2(x)$ *имеет единственное решение* $\mu(x) = \varphi'(x)$, *где* $\varphi(x)$ *определено соотношением* (4).

Доказательство. Из равенства (55) видно, что $\mu(x)$ непрерывно дифференцируема.

Обозначим

$$\int_0^x \mu(t)\,dt = \varphi(x) \tag{57}$$

и продифференцируем (55). Тогда получим

$$\varphi'^3\left[\varphi'^2 F'(\varphi) + 5\varphi'' F(\varphi)\right] = 0. \tag{58}$$

Из (56) и (57) имеем

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi(1) = l. \tag{59}$$

Для уравнения (58) получаем следующие возможные решения:

$$\varphi'(x) = 0; \quad \varphi'(x) = [F(\varphi)]^{-1/5} C_1. \tag{60}$$

Функция $\varphi(x)$ ни в одной точке не может удовлетворять и первому, и второму уравнению, если $C_1 \neq 0$, так как $F(\varphi) > 0$. Если $C_1 = 0$, невозможно удовлетворить условиям (59). Если $C_1 \neq 0$, то решая второе уравнение в (60), получаем

$$x = \int_0^\varphi [F(y)]^{1/5}\,dy \Big\backslash \int_0^l [F(y)]^{1/5}\,dy, \tag{61}$$

что и доказывает лемму.

Доказательство теорем 1 и 2. Подставляя $\mu(x)$, найденное по лемме 10 в равенство (54), получаем

$$\lim_{n\to\infty} n^4 I_n = \frac{1}{720}\left(\int_0^l [f''(y)]^{2/5} dy\right)^5. \tag{62}$$

Возьмем в качестве $\Delta_{i,n}$ $(i = \overline{1, n})$ последовательность, определенную соотношением (5). Тогда из (43) и (30) имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^4 I_n \leqslant \lim_{n\to\infty} n^4 \Phi(\Delta_{1n}, \ldots, \Delta_{n,n}) =$$

$$= \int_0^1 f''^2\left(\int_0^x \mu(t)\, dt\right)\mu^5(x)\, dx. \tag{63}$$

Подставляя $\mu(x)$ в (63), получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^4 I_n \leqslant \frac{1}{720}\left(\int_0^l [f''(y)]^{2/5} dy\right)^5. \tag{64}$$

Из (64) и (62) следует (7).

Пусть x выбрано так, чтобы было

$$\varphi = \int_0^x \mu(t)\, dt.$$

Тогда имеем по определению $k_n(\varphi)$

$$\sum_{i=1}^{k_n(\varphi)} \mu\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} \leqslant \varphi \leqslant \sum_{i=1}^{k_n(\varphi)+1} \mu\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}. \tag{65}$$

Обозначим

$$\bar{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{k_n(\varphi)}{n};\ \underline{x} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{k_n(\varphi)}{n}.$$

Тогда из (65) следуют неравенства

$$\int_0^{\bar{x}} \mu(t)\, dt \leqslant \int_0^x \mu(t)\, dt \leqslant \int_0^{\underline{x}} \mu(t)\, dt.$$

Из монотонности $\varphi(x)$ получаем тогда, что существует

$$\lim_{n\to\infty} k_n(\varphi)\, n^{-1} = x,$$

что и доказывает соотношение (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Уолш Дж., Алберг Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972. 752 с.
2. Смолов Б. В. Вычислительные машины непрерывного действия. М., «Высшая школа», 1964. 623 с.