УДК 519.21

В. С. Азарин, канд. физ.-мат. наук, В. Д. Байбиков, А. В. Кравцов

ОДНА ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Пусть $\{\eta_k\}_1^\infty$ — последовательность целочисленных симметричных случайных величин. Обозначим через $\varphi(t, \eta_k)$ характеристическую функцию η_k, которая, как известно, вещественна и четна.

Теорема. *Пусть существует последовательность* $\sigma_k \to \infty$ *такая, что* $\varphi(x/\sigma_k, \eta_k) \to \varphi(x)$ и $\varphi(x/\sigma_k, \eta_k)$ *ограничены по модулю функцией, суммируемой на интервале* $(-\infty, \infty)$ *при* $x \in (0, \pi\sigma_k)$.

Тогда выполняется соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k \mathrm{P}\{\eta_k = 0\} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(x)\,dx. \quad (1)$$

Доказательство этого утверждения можно легко провести, используя формулу

$$\sigma_k \mathrm{P}\{\eta_k = 0\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi\sigma_k} \varphi(x/\sigma_k, \eta_k)\,dx,$$

которая следует из определения характеристической функции $\varphi(t, \eta_k)$ ее вещественности и четности.

Следствие 1. *Пусть* $\{\xi_{ki}\}$, $i = \overline{1,2n}$ — *набор* $2n$ *независимых случайных величин, имеющих распределение вида*

$$\mathrm{P}\{\xi_{ki} = m\} = \frac{1}{k+1},\ m = \overline{0, k};\ i = \overline{1, 2n}.$$

Обозначим

$$\mathrm{P}_{k,n} = \mathrm{P}\{\xi_{k1} + \ldots + \xi_{k,n} = \xi_{k,n+1} + \ldots + \xi_{k,2n}\}.$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} (k+1)\,\mathrm{P}_{k,n} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2n} dx. \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki} - \sum_{i=n+1}^{2n} \xi_{ki}.$$

Имеем тогда

$$\varphi(t, \eta_k) = \left(\frac{\sin \frac{k+1}{2} t}{\sin t/2} \cdot \frac{1}{k+1} \right)^{2n}. \tag{3}$$

Полагая $\sigma_k = \frac{k+1}{2}$, получаем

$$\varphi(x/\sigma_k, \eta_k) = \left(\frac{\sin x}{x} \frac{\pi}{2} \right)^{2n}, \; x \in \left[0; \frac{\pi}{2}(k+1)\right].$$

Таким образом, условия теоремы выполнены и из (1) получаем (2).

Следствие является обобщением известной задачи «о счастливых билетах» [1, с. 62], как показывает.

Пример. Трамвайный билет, как известно, считается «счастливым», если сумма трех первых цифр его шестизначного номера равна сумме трех последних цифр.

Если предполагать, что цифры в номере билета случайны, равновероятны и независимы, то вероятность счастливого билета равна $P_{9,3}$. Используя формулу (2), получаем [2, с. 464]

$$10P_{9,3} \approx \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^6 dx = \frac{11}{20}; \; P_{9,3} \approx 0{,}055.$$

Точное значение $P_{9,3} = 0{,}055252$ (см. [1, с. 62]).

Пусть $\xi_k(n)$ — симметричное случайное блуждание, $\varphi(t, k)$ — его характеристическая функция, $P_n(0, m, k)$ — переходная функция, а $P_n(0, 0, k)$ — вероятность возвращения в нуль (см. [3, с. 13, 73]).

Следствие 2. Пусть $[\varphi(t, k)]^{n_0}$ *при некотором* n_0 *удовлетворяет условиям теоремы. Тогда при всех* $n \geqslant n_0$ *имеем*

$$\lim_{k \to \infty} \sigma_k P_n(0, 0, k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi^n(x)\, dx, \tag{4}$$

где

$$\varphi(x) = \lim_{k \to \infty} \varphi(t/\sigma_k, k).$$

Очевидно, что если $[\varphi(t, k)]^{n_0}$ удовлетворяет условиям теоремы, то $\varphi^n(t, k)$ обладает этим свойством для всех $n \geqslant n_0$. Так как $\varphi^n(t, k)$ — характеристическая функция распределения $P\{\xi_k(n) = m\} = P_n(0, m, k)$, то из (1) следует (4).

Пример. Рассмотрим случайное блуждание с «равномерной» переходной функцией

$$P(0,\ m,\ k) = \begin{cases} \frac{1}{2k} & |m| \leqslant k,\ m \text{ — целое},\ m \neq 0, \\ 0 & |m| > k,\ m = 0. \end{cases}$$

Тогда имеем

$$\varphi(t,\ k) = \operatorname{Re}\left\{ \frac{e^{it}(1-e^{ikt})}{(1-e^{it})k} \right\}.$$

Полагая $\sigma_k = k$, получаем

$$\varphi^n(x) = \lim_{k\to\infty}\left(\operatorname{Re}\left[\frac{e^{ix/k}(1-e^{ix})}{(1-e^{ix/k})k}\right]\right)^n = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$$

Условие мажорации суммируемой функцией выполняется, начиная с $n = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. М. Физматгиз, 1970. 656 с.
2. Рыжик И. С., Градштейн И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1971. 1108 с.
3. Спицер Ф. Принципы случайного блуждания. М., «Мир», 1969. 472 с.