вательно, найдется такой элемент $x \in L(V) \subset E$, что $\sigma_x \subset V$. Значит,

$$\chi_0 \in \overline{\bigcup_{x \in K} \sigma_x} = \overline{\bigcup_{x \in K} \sigma_{T(x)}}.$$

Теорема доказана.

В заключение автор благодарит Ю. И. Любича за постановку задачи и внимание к работе и Г. М. Фельдмана за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любич Ю. И., Мацаев В. И., Фельдман Г. М. О представлениях с отделимым спектром. — «Функциональный анализ и его приложения», 1973, т. 7, вып. 2, с. 52—61.
2. Фельдман Г. М. Гармонический анализ неунитарных представлений локально компактных абелевых групп. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 17, Харьков, 1973, с. 169—182.
3. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1971. 359 с.
4. Любич Ю. И. О спектре представления топологической абелевой группы. — ДАН СССР, 1971, т. 200, № 4, с. 777—780.

УДК 517.519

Е. В. Токарев

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ НЕКОТОРЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Под симметричным пространством [1] будем понимать банахово пространство E измеримых функций на отрезке [0,1], которое удовлетворяет следующим двум условиям.

1) Если $x(t) \in E$ и $|y(t)|$ равноизмерима с $|x(t)|$, то $y(t) \in E$ и $x\|_E = \|y\|_E$.

2) Если $x(t) \in E$ и $|y(t)| \leqslant |x(t)|$, то $y(t) \in E$ и $\|y\|_E \leqslant \|x\|_E$.

Фундаментальной функцией $\varphi(t)$ пространства E назовем норму характеристической функции множества лебеговой меры τ:

$$\varphi_E(\tau) = \|\chi_{[0, \tau]}(t)\|_E.$$

Будем говорить, что $x(t) \in E$ имеет абсолютно непрерывную норму, если

$$\lim_{\tau \to 0} \sup_{\text{mess } G = \tau} \|x(t)\chi_G(t)\| 0,$$

где G пробегает все измеримые подмножества отрезка [0,1].

Симметричное пространство E сепарабельно в том и только том случае, если все функции из E имеют абсолютно непрерывную норму.

Важными примерами симметричных пространств, отличных от L_p, являются пространства Лоренца $\Lambda(\varphi)$ и Марцинкевича $M_0(\varphi)$, $M(\varphi)$, норма в которых задается равенствами

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 x^*(t)\, d\varphi(t) < \infty, \tag{1}$$

$$\|x\|_{M_0(\varphi)} = \|x_{M(\varphi)} = \sup_{0<h\leqslant 1} \frac{1}{\varphi(h)} \int_0^h x^*(t)\, dt \tag{2}$$

где $x^*(t)$ — невозрастающая функция, равноизмеримая с $|x(t)|$; $\varphi(t)$ — неубывающая, вогнутая на $[0,1]$ — такова, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$; $M_0(\varphi)$ — такое подпространство в $M(\varphi)$, что для всех $x(t) \in M_0(\varphi)$ норма $x(t)$ абсолютно непрерывна.

В дальнейшем будем предполагать, что для рассматриваемых пространств функция $\varphi_E(t)$ непрерывна в нуле [1]. В этом случае в тройке пространств $\{M_0(\varphi), \Lambda(\varphi), M(\varphi)\}$ каждое последующее является сопряженным к предыдущему, причем пространства $M_0(\varphi)$ и $\Lambda(\varphi)$ сепарабельны в отличие от $M(\varphi)$. Отметим, что в силу сепарабельности $\Lambda(\varphi)$ пространство $M_0(\varphi)$ не содержит подпространства, изоморфного l_1.

Множество $\{t : |x(t)| > 0\} = Sx(t)$ называется носителем функции $x(t)$. Лебегову меру этого множества $\operatorname{mess} Sx(t)$ обозначим $\operatorname{msp} x(t)$.

1. ***Лемма*** 1. *Каковы бы ни были функция $x(t) \in \Lambda(\varphi)$ и $\varepsilon > 0$, найдется $h_0 = h(x,\varepsilon)$ такое, что для любой функции $y(t) \in \Lambda(\varphi)$, у которой $\operatorname{msp} y(t) \leqslant h_0$,*

$$\|x + y\|_{\Lambda(\varphi)} \geqslant (1-\varepsilon)\|x\|_{\Lambda(\varphi)} + \|y\|_{\Lambda(\varphi)}. \tag{3}$$

Доказательство. Выберем h_0 так, чтобы

$$\int_0^{h_0} x^*(t)\, d\varphi(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|x\|. \tag{4}$$

Возьмем также сохраняющее меру отображение $\pi : [0,1] \to [0,1]$, для которого $|y(\pi(t))| = y^*(t)$, а функция $x_1(t) = |x(\pi(t))|$ не возрастает на отрезке $[\operatorname{msp} y, 1]$. Очевидно, на этом отрезке $x_1(t) \geqslant x^*(t)$. Оценим снизу $\|x + y\|_{\Lambda(\varphi)}$. Согласно (4)

$$\|x + y\|_{\Lambda(\varphi)} \geqslant \int_0^1 |x(\pi(t)) + y(\pi(t))|\, d\varphi(t) \geqslant \int_0^1 |x(\pi(t))|\, d\varphi +$$

$$+ \int_0^{h_0} |x(\pi(t)) + y(\pi(t))|\, d\varphi \geqslant \int_0^{h_0} y_0^*(t)\, d\varphi - \int_0^{h_0} x^*(t)\, d\varphi + \int_{y_0}^1 x^*(t)\, d\varphi =$$

$$= \int_0^1 x^*(t)\, d\varphi - 2\int_0^{h_0} x^*(t)\, d\varphi + \int_0^{h_0} y^*(t)\, d\varphi \geqslant (1-\varepsilon)\|x\|_{\Lambda(\varphi)} + \|y\|_{\Lambda(\varphi)}.$$

---

[1] Заметим, что $\varphi_{\Lambda(\varphi)}(t) = \varphi(t)$; $\varphi_{M(\varphi)}(t) = \dfrac{t}{\varphi(t)}$.

Лемма 2. Каковы бы ни были функция $x(t) \in \mathrm{M}_0(\varphi)$ и $\varepsilon > 0$, найдется $h_0 = h(x, \varepsilon)$ такое, что для любой функции $y(t) \in \mathrm{M}(\varphi)$, у которой $\operatorname{msp} y \leqslant h_0$,

$$\|x + y\|_{\mathrm{M}(\varphi)} \leqslant (1 + \varepsilon) \max \{\|x\|, \|y\|\}. \tag{5}$$

Доказательство. Выберем h_1 так, чтобы

$$\frac{1}{\varphi(h_1)} \int_0^{h_1} x^*(t)\, dt \leqslant \varepsilon \|x\|. \tag{6}$$

Затем выберем h_0 настолько малым, что

$$\varphi(h_0) < \varepsilon \varphi(h_1). \tag{7}$$

Возьмем $y \in \mathrm{M}(\varphi)$, $\operatorname{msp} y \leqslant h_0$ и оценим $\|x + y\|$

$$\|x + y\| = \sup_{0 < h \leqslant 1} \frac{1}{\varphi(h)} \int_0^h (x + y)^*\, dt \leqslant \sup_{0 < h \leqslant 1} \frac{1}{\varphi(h)} \int_0^h (x^* + y^*)\, dt.$$

Оценим последнее выражение.

Пусть сначала $0 < h < h_1$; тогда, согласно (6),

$$\frac{1}{\varphi(h)} \int_0^h (x^* + y^*)\, dt \leqslant \varepsilon \|x\| + \|y\| \leqslant (1 + \varepsilon) \max \{\|x\|, \|y\|\}.$$

Если же $h_1 < h < 1$, то в силу (7)

$$\frac{1}{\varphi(h)} \int_0^h (x^* + y^*)\, dt = \frac{1}{\varphi(h)} \left[\int_0^y x^* dt + \int_0^h y^* dt \right] \leqslant \|x\| + \frac{\varphi(h_0)}{\varphi(h)} \|y\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x\| + \varepsilon \|y\| \leqslant (1 + \varepsilon) \max \{\|x\|, \|y\|\}.$$

Предложение 1. *Всякая нормированная система функций* $\{x_n(t)\} \in \Lambda(\varphi)$ *(либо* $\{x_n(t)\} \in \mathrm{M}_0(\varphi)$*), для которой* $\operatorname{msp} x_n(t) \to 0$, *содержит подпоследовательность, натягивающую в* $\Lambda(\varphi)$ *подпространство, изоморфное* l_1 *(соответственно в* $\mathrm{M}_0(\varphi)$ *подпространство, изоморфное* c_0*).*

Доказательство. Для $\Lambda(\varphi)$. Пользуясь леммой 1 и формулой (5), можно выбрать из последовательности $\{x_n\}$ подпоследовательность $\{y_n\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \geqslant \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| \geqslant (1 - \varepsilon) \|a_1 y_1\| + \left\| \sum_{n=2}^{\infty} a_n y_n \right\| \geqslant$$

$$\geqslant (1 - \varepsilon)(\|a_1 y_1\| + \|a_2 y_2\|) + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| \geqslant \ldots \geqslant$$

$$\geqslant (1 - \varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n y_n\| = (1 - \varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

так, что $\{y_n\}$ натягивает подпространство, изоморфное l_1.

Для $M_0(\varphi)$. Пользуясь леммой 2, выберем из $\{x_n\}$ подпоследовательность $\{y_n\}$ так, чтобы при $\varepsilon < 1$.

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_k y_n\right\| \leqslant (1+\varepsilon) \max \left\{|a_1|, \left\|\sum_{n=2}^{\infty} a_n y_n\right\|\right\} \leqslant (1+\varepsilon)$$

$$(1+\varepsilon^2) \max \left\{|a_1|,\ |a_2|, \left\|\sum_{n=3}^{\infty} a_n y_n\right\|\right\} \leqslant \prod_{n=1}^{\infty} (1+\varepsilon^n) \max_k \{|a_k|\}.$$

Поскольку последовательность $\{y_n\}$ слабо сходится к нулю, из нее можно выделить базисную последовательность $\{z_n\} \subset \{y_n\}$, для которой

$$\max |a_n| \leqslant \|\Sigma a_n z_n\| \leqslant \prod_{1}^{\infty} (1+\varepsilon^n) \max_n |a_n|,$$

где левое неравенство является следствием базисности и отграниченности от нуля последовательности $\{z_n\}$, так что $\{z_n\}$ натягивает подпространство, изоморфное c_0.

2. Пусть K — некоторое множество функций из симметричного пространства E, а $\tau > 0$.

Положим (ср. [2])

$$\eta_E^{\tau}(K) = \sup_{x \in K} \frac{\|\chi_{[0,\tau]}(t)\, x^*(t)\|_E}{\|x\|_E}, \tag{8}$$

$$\eta_E(K) = \lim_{\tau \to 0} \eta_E^{\tau}(K). \tag{9}$$

Лемма 3. *Если симметричное пространство E сепарабельно либо сопряжено к сепарабельному и для некоторого множества функций $K \subset E$ $\eta_E(K) = 1 - \varepsilon$, то найдется константа $C(\varepsilon)$ такая, что*

$$\|x\|_{L_1} \leqslant \|x\|_E \leqslant C(\varepsilon)\, \|x\|_{L_1}$$

для всех $x \in K$, т. е. на K нормы из E и из L_1 эквивалентны.

Доказательство. Левое неравенство очевидно. Докажем правое. Согласно (9) и условиям леммы найдется такое $\tau = \tau(\varepsilon)$, что

$$\|\chi_{[0,\tau]}(t)\, x^*(t)\|_E < \|x\|_E \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

для всех $x \in K$. Учитывая [3], что для симметричных пространств, удовлетворяющих условиям леммы

$$\|x\|_E = \sup_{\varphi \in \varphi_1} \|x\|_{\Lambda(\varphi)},$$

где $\|\cdot\|_{\Lambda(\varphi)}$ — норма Лоренца (1), а верхняя грань берется по некоторому подмножеству Φ_1 класса Φ всех вогнутых неубывающих функций $\varphi(t)$; $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, можно записать:

$$\|x\|_E = \sup_{\varphi\in\Phi_1}\int_0^1 x^* d\varphi = \sup_{\varphi\in\Phi_1}\left\{\int_0^\tau x^* d\varphi + \int_\tau^1 x^* d\varphi\right\} \leqslant \sup_{\varphi\in\Phi_1}\int_0^\tau x^* d\varphi +$$

$$+\sup_{\varphi\in\Phi_1}\int_\tau^1 x^* d\varphi \leqslant \|x\|_E\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \sup_{\varphi\in\Phi_1}\varphi'(\tau)\int_0^1 x^* dt \leqslant \|x\|_E \times$$

$$\times\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi'(\tau)\,\|x\|_{L_1}.$$

Поскольку $\varphi'(\tau) \leqslant \frac{1}{\tau}$ для всякой функции $\varphi \in \Phi$, то

$$\|x\|_E \leqslant \frac{2}{\varepsilon\tau}\|x\|_{L_1} = C(\varepsilon)\,\|x\|_{L_1}.$$

Предложение 2. *Пусть E — симметричное пространство, сепарабельное либо сопряженное к сепарабельному и пусть для бесконечномерного подпространства B в E выполнено неравенство $\eta_E(B) < 1$. Тогда*

а) $\eta_E(B) = 0$,

б) *B рефлексивно*,

в) *B замкнуто в метрике $L_1(0,1)$.*

Доказательство. Обозначим через $(B, \|\cdot\|_X)$ множество функций B, наделенное нормой $\|\cdot\|_X$.

Пусть B — такое бесконечномерное подпространство пространства $M(\varphi)$, что $\eta_{M(\varphi)}(B) < 1$. Тогда, согласно лемме 3, пространства $(B, \|\cdot\|_{M(\varphi)})$ и $(B, \|\cdot\|_{L_1})$ изоморфны. Это означает, что нормы всех элементов $x \in B$ абсолютно непрерывны и, значит, $B \subset M_0(\varphi)$. Поскольку $M_0(\varphi)$ не содержит подпространства, изоморфного l_1, то B также не содержит l_1, а такое подпространство в $L_1(0,1)$ рефлексивно [2]. Теперь пусть E — любое симметричное пространство, удовлетворяющее условиям теоремы. Пользуясь леммой 3 и теоремами вложения Семенова, можно для любого элемента $x \in B$ (где B — подпространство E; $\eta_E(B) < 1$) записать цепочку неравенств

$$\|x\|_{L_1} \leqslant \|x\|_{M(\varphi)} \leqslant \|x\|_E \leqslant C\,\|x\|_{L_1} \leqslant \|x\|_{M(\varphi)},$$

где $\varphi = t/\varphi_E(t)$, а C — некоторая постоянная.

Отсюда следует, что $(B, \|\cdot\|_E)$ изоморфно $(B, \|\cdot\|_{M_0})$ и изоморфно $(B, \|\cdot\|_{L_1})$, а значит, B рефлексивно и замкнуто в метрике $L_1(0,1)$. Это доказывает пункты *б* и *в* утверждения теоремы. Докажем пункт *а*. Допустим, для некоторого B $0 \neq \eta_E(B) < 1$. Тогда, в силу изоморфности B и $(B, \|\cdot\|_{L_1})$, окажется, что $\eta_{L_1}(B) \neq 0$, что противоречит рефлексивности B, рассматриваемого как подпространство в $L_1(0,1)$ (см. [4, с. 317]).

Непосредственным следствием предложений 1 и 2 является следующее утверждение.

Теорема 1. *Всякое нерефлексивное подпространство в* $M_0(\varphi)$ *содержит подпространство, изоморфное* c_0; *всякое нерефлексивное подпространство пространства* $\Lambda(\varphi)$ *содержит подпространство, изоморфное* l_1. *Всякое рефлексивное подпространство в* $M_0(\varphi)$ *и* $\Lambda(\varphi)$ *замкнуто в метрике* $L_1(0,1)$.

Доказательство. Пусть B — подпространство пространства $M_0(\varphi)$ (либо $\Lambda(\varphi)$). Если $\eta(B) < 1$, то по предложению 2 $\eta(B) = 0$. Это означает, что B рефлексивно и замкнуто в метрике $L_1(0, 1)$. Если же $\eta(B) = 1$, то можно выбрать последовательность функций $\{x_n(t)\} \subset B$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{msp} x_n(t) = 0$. Применяя предложение 1, завершаем доказательство теоремы.

Следствие 1. *Для слабой компактности бесконечномерного множества* K *в пространствах* $M_0(\varphi)$ *и* $\Lambda(\varphi)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

1) множество K было ограничено,

2) $\eta(K) = 0$.

3. В. Ф. Гапошкин [5] доказал теорему.

Никакая система измеримых функций $\{x_n(t)\} \subset L_p$ *таких, что* $\|x_n\|_{L_p} = 1$; $\|x_n\|_{L_\infty} \leqslant A < \infty$ $(1 < p \neq 2 < \infty)$, *не является безусловным базисом пространства* L_p.

Следующая теорема обобщает этот результат на произвольное симметричное пространство.

Теорема 2. *Пусть в симметричном пространстве* E

$$m(E) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)} > 1.$$

Если нормированная система функций $\{x_n(t)\} \subset E$ *является безусловной базисной, а* $\|x_n\|_{L_\infty} \leqslant A < \infty$, *то замыкание ее линейной оболочки изоморфно гильбертову пространству* l_2.

Следствие 2. *Если* E — *симметричное пространство, отличное от* L_2, *то никакая система функций* $\{x_n(t)\} \subset E$ *таких, что* $\|x_n\|_E = 1$, *а* $\|x_n\|_{L_\infty} \leqslant A < \infty$, *не является безусловным базисом пространства* E.

Автор благодарит М. И. Кадеца за постановку задачи и руководство,

ЛИТЕРАТУРА

1. Семенов Е. М. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций. — ДАН СССР, 1964, т. 156, вып. 6, с. 1292—1295.
2. Kadec M. I., Pełczyński A. Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in L_p. — «Studia Math»., 1962, vol. 21, p.161—176.
3. Семенов Е. М. Одна новая интерполяционная теорема. — «Функциональный анализ и его приложения», 1968, т. 2. № 2, с. 68—80.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы I. М., ИЛ, 1962. 535 с.
5. Гапошкин В. Ф. О безусловных базисах в пространстве L_p $(p > 1)$. — УМН, 1958, т. 13, № 4, е. 179—184.