УДК 519.4:513.88

В. В. Синявский

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Настоящая работа содержит развитие методов и результатов работ [1, 2] в применении к представлениям абелевых групп в топологических векторных пространствах.

Пусть E — полное бочечное локально выпуклое комплексное пространство[1], G — абелева локально компактная группа. Пред-

[1] Все необходимые нам сведения о топологических векторных пространствах содержатся, например, в книге [3].

ставление T группы G непрерывными линейными операторами в пространстве E называется сильно непрерывным, если функции $T_g x$ для всех $x \in E$ непрерывны.

Пусть $\alpha(g)$ — измеримая вещественная функция на группе G, удовлетворяющая условиям

$$\alpha(g) \geqslant 1, \quad \alpha(g_1 + g_2) \leqslant \alpha(g_1)\, \alpha(g_2).$$

Будем называть $\alpha(g)$ нормирующей функцией представления T, если для каждого $x \in E$ множество $V_x = \{[\alpha(g)]^{-1} T_g x\}_{g \in G}$ ограничено. Представление назовем неквазианалитическим, если оно обладает нормирующей функцией, удовлетворяющей условию неквазианалитичности

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \alpha(ng)}{1+n^2} < \infty.$$

В дальнейшем T всегда будет обозначать сильно непрерывное неквазианалитическое представление группы G. Все матричные элементы представления T принадлежат пространству $L_\alpha^\infty(G)$ и при условии неквазианалитичности допускают спектральный анализ по Берлингу. Обозначим спектр Берлинга функций $\varphi(T_g x)$ через $\sigma_{\varphi, x}$. Он является подмножеством группы G^* унитарных характеров группы G.

Определение 1. *Спектром элемента* $x \in E$ *называется множество*

$$\sigma_x = \overline{\bigcup_{\varphi \in E'} \sigma_{\varphi, x}}.$$

Определение 2. *Спектром представления* T *называется множество*

$$\sigma_T = \overline{\bigcup_{\varphi, x} \sigma_{\varphi, x}} = \overline{\bigcup_{x \in E} \sigma_x}.$$

В обоих определениях черта означает замыкание в обычной топологии группы G^*.

Примечание. Ввиду следствия из теоремы 1 определение спектра представления не зависит от выбора нормирующей функции.

Отметим, что для представлений в топологических (но не банаховых) пространствах определение спектра представления на языке квазисобственных последовательностей [4], по-видимому, нецелесообразно, как показывает следующий

Пример. Пусть пространство $E = \prod_{i \in N} C_i$ — топологическое произведение счетного числа одномерных пространств. Зададим в нем диагональный оператор A, который n-ю координату умножает на $e^{i\lambda_n}$, где $\{\lambda_n\}_0^\infty$ — стремящаяся к нулю последовательность вещественных чисел, причем $0 < \lambda_n < 2\pi$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Спектр оператора A состоит из элементов последовательности $\{e^{i\lambda_n}\}_0^\infty$ и единицы, но оператор $A - I$ имеет непрерывный обратный в пространстве E и, следовательно, не может иметь квазисобственной последовательности.

Этот же пример показывает, что множество $\bigcup\limits_{\varphi, x} \sigma_{\varphi, x}$[1] может быть незамкнуто.

Сопоставим каждой функции $f \in L_\alpha^1(G)$ непрерывный линейный оператор

$$f_T = \int\limits_G f(g)\, T_g dg$$

в пространстве E. Операторное исчисление, развитое в [2], дословно переносится на наш случай, поскольку оно опирается только на берлинговский анализ в пространстве $L_\alpha^\infty(G)$.

Пусть W_x — замкнутая выпуклая закругленная оболочка множества V_x. Тогда линейное многообразие $E_x = \bigcup\limits_{\lambda > 0} \lambda W_x$ можно превратить в банахово пространство B_x, беря в качестве нормы калибровочную функцию множества W_x. Пространство B_x инвариантно относительно всех операторов T_g, и все эти операторы ограничены в B_x. Они образуют представление, которое мы обозначим через $T^{(x)}$.

Определение 3. *Спектр представления T называется отделимым, если для любого компакта $Q \subset G^*$ существует подпространство $L(Q) \subset E$, спектральное в том смысле, что*

1) *$L(Q)$ приводит T, и для всех $x \in L(Q)$ представление $T^{(x)}$ непрерывно по норме операторов в пространстве B_x;*

2) $\sigma_{T/L(Q)} \subset \sigma_T \cap Q$;

3) *точки $\sigma_T \cap Q$, внутренние в топологии σ_T, индуцированной из G^*, принадлежат $\sigma_{T/L(Q)}$;*

4) *если какое-нибудь подпространство L приводит T и спектр сужения T на L содержится в Q, то $L \subset L(Q)$.*

Теорема 1. *Пусть E — полное бочечное локально выпуклое комплексное пространство, G — локально компактная абелева группа, T — сильно непрерывное неквазианалитическое представление группы G непрерывными линейными операторами в пространстве E. Тогда спектр представления T отделим.*

Доказательство. По сравнению с [2] новым является 1) доказательство замкнутости линейного многообразия

$$L(Q) = \{x \mid \sigma_x \subset Q\}$$

[1] В отличие от случая банахова пространства, для которого замкнутость объединения спектров $\bigcup\limits_{\varphi, x} \sigma_{\varphi, x}$ доказал Г. М. Фельдман (устное сообщение).

и 2) доказательство непрерывности представлений $T^{(x)}$ $(x \in L(Q))$ по норме операторов в пространстве B_x. Приступая к первому пункту, предположим противное. Пусть y — предельная точка многообразия $L(Q)$, но $\sigma_y \not\subset Q$. Тогда существует такой характер $\chi_0 \in \sigma_y$, что χ_0 не входит в некоторую окрестность U компакта Q. В силу регулярности алгебры $L^1_\alpha(G)$ существует такая функция $f \in L^1_\alpha(G)$, что ее преобразование Фурье $\tilde{f}$ равно нулю в окрестности U и $\tilde{f}(\chi_0) = 1$. Тогда $T_h \tilde{f}_T x = 0$ при $x \in L(Q)$, значит, по непрерывности $T_h \tilde{f}_T y = 0$, но это означает, что $\tilde{f}$ обращается в нуль на σ_y, что противоречит условию $\tilde{f}(\chi_0) = 1$. Тем самым, замкнутость многообразия $L(Q)$ доказана.

Покажем теперь непрерывность представлений $T^{(x)}$ $(x \in L(Q))$ по норме операторов в пространстве B_x. Положим

$$M_\varphi = \sup_{z \in W_x} |\varphi(z)| \quad (\varphi \in E').$$

Так как множество W_x замкнуто, выпукло и закруглено, то $y \in E$ тогда и только тогда принадлежит W_x, когда $|\varphi(y)| \leqslant M_\varphi$ $(\varphi \in E')$. Спектр ограничения представления T на линейном многообразии E_x компактен. Значит, существует функция $f \in L^1_\alpha(G)$ такая, что $\tilde{f}(\chi) = 1$ на некоторой компактной окрестности спектра $\sigma_{T|E_x}$ и, следовательно, оператор $\tilde{f}_T$ есть тождественный оператор на линейном многообразии E_x. Поэтому

$$I - T_h = \int_G f(g) T_g dg - \int_G f(g) T_{g+h} dg = \int_G (f(g) - f(g-h)) T_g dg.$$

Пусть $y \in W_x$, $\varphi \in E'$. Тогда

$$\varphi((I - T_h) y) = \int_G (f(g) - f(g-h)) \alpha(g) \varphi([\alpha(g)]^{-1} T_g y) dg \leqslant$$

$$\leqslant \| f(g) - f(g-h) \|_\alpha M_\varphi.$$

Так как сдвиг в алгебре $L^1_\alpha(G)$ непрерывен, то последнее равенство как раз и означает непрерывность представления $T^{(x)}$ по норме операторов в пространстве B_x. Теорема доказана.

Пусть $\alpha(g)$ и $\beta(g)$ — нормирующие функции представления T, удовлетворяющие условию неквазианалитичности. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha(g) \leqslant \beta(g)$. Тогда по функции $\alpha(g)$ мы можем определить спектр представления σ_T, а по функции $\beta(g)$ — спектр σ^1_T.

Следствие. $\sigma_T = \sigma^1_T$.

Доказательство. Для некоторого элемента x пространства E мы определяем его спектр $\sigma_x = \overline{\bigcup_{\varphi \in E'} \sigma_{\varphi, x}}$, где $\sigma_{\varphi, x}$ есть множество характеров группы G, входящих в слабо $\Gamma(L_\alpha^\infty(G), L_\alpha^1(G))$ замкнутое подпространство F пространства $L_\alpha^\infty(G)$, порожденное сдвигами функции $\varphi(T_g x)$, $\varphi \in E'$. Из того, что $\alpha(g) < \beta(g)$, следует, что $L_\alpha^\infty(G), < L_\beta^\infty(G)$ и что топология $\Gamma(L_\alpha^\infty(G), L_\beta^1(G))$ слабее топологии $\Gamma(L_\alpha^\infty(G), L_\alpha^1(G))$. Поэтому слабо $\Gamma(L_\beta^\infty(G), L_\beta^1(G))$ замкнутое подпространство F_1, порожденное сдвигами функции $\varphi(T_g x)$, включает в себя пространство F. Отсюда из определения спектра следует, что

$$\sigma_{\varphi, x}^1 \supset \sigma_{\varphi, x}, \ \sigma_x^1 \supset \sigma_x, \ \sigma_T^1 \supset \sigma_T.$$

С другой стороны, спектр σ_T^1 по теореме 1 отделим. Значит, для любого характера χ из спектра σ_T^1 и любой компактной окрестности V этого характера существует ненулевое спектральное подпространство $L(V)$. Для любого элемента x из подпространства $L(V)$ имеем

$$V \supset \sigma_x^1 \supset \sigma_x,$$

т. е. характер χ является предельным для спектра σ_T. Ввиду произвольности характера $\varkappa$ и замкнутости спектра σ_T имеем $\sigma_T^1 \supset \sigma_T$. Следствие доказано.

Отметим, что если спектр представления T состоит более чем из одной точки, то в силу теоремы 1 представление приводимо, и если нормирующая функция представления ограничена, то оно тогда и только тогда неприводимо, когда одномерно.

Рассмотрим одно применение теоремы 1. Пусть A — такой непрерывный оператор в пространстве E, что представление $T : : n \to A^n$ $(n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \ \ldots)$ группы $\boldsymbol{Z}$ неквазианалитично. Покажем, что характер $\chi(n)$ тогда и только тогда принадлежит спектру σ_T, когда он имеет вид $\chi(n) = \lambda^n$, где λ^n входит в спектр σ_A оператора A.

Рассмотрим отображение $F : f \to \widetilde{f}_T$ банаховой алгебры $L_\alpha^1(\boldsymbol{Z})$ в алгебру непрерывных линейных операторов пространства E. Пусть W — замкнутая выпуклая закругленная оболочка образа единичного шара алгебры $L_\alpha^1(\boldsymbol{Z})$ при этом отображении. Образуем банахову алгебру $R_1 = \bigcup\limits_{\lambda > 0} \lambda W$; очевидно, что операторы $\widetilde{f}_T$ принадлежат алгебре R_1. Отображение F является гомоморфизмом банаховой алгебры $L_\alpha^1(\boldsymbol{Z})$ в банахову алгебру R_1. Замыкание образа этого гомоморфизма обозначим через R.

Используя леммы 3.1 и 3.2 работы [2], нетрудно показать, что пространство максимальных идеалов алгебры R совпадает со спектром представления T. Спектр σ_A^1 оператора A как элемента банаховой алгебры R, очевидно, содержит спектр σ_A оператора A. Значит, если $\lambda \in \sigma_A$, то характер $\chi(n) = \lambda^n \ (n \in \mathbf{Z})$ входит в спектр представления T, т. е.

$$\sigma_A \subset \sigma_T. \tag{1}$$

Для доказательства обратного включения прежде всего отметим, что $\sigma_A \supset \sigma_{A|L(Q)}$. Действительно, если λ_0 входит в спектр оператора $A|L(Q)$, но не входит в спектр оператора A, то резольвента $R(\lambda)$ оператора A определена и ограничена в некоторой окрестности U точки λ_0. Ясно, что спектр оператора $A|L(Q)$ лежит на единичной окружности, поэтому любая точка $\lambda \in U$ является предельной точкой множества $U_1 = U \diagdown \sigma_{A/L(Q)}$. Если $\mu \in \in U_1$, то подпространство $L(Q)$ инвариантно относительно оператора $R(\mu)$. Следовательно, оно инвариантно относительно оператора $R(\lambda_0)$, что противоречит выбору λ_0 из спектра оператора $A|L(Q)$.

Пусть теперь характер χ_0 принадлежит спектру представления T. Тогда по теореме 1 для любой компактной окрестности V характера χ_0 существует спектральное подпространство $L(V) \neq \neq 0$. Если λ входит в спектр оператора $A/L(V)$, то в силу теоремы 1 и доказанного выше включения (1) характер $\chi(n) = = \lambda^n \ (n \in \mathbf{Z})$ входит в компакт V. Значит, в силу замкнутости спектра σ_A оператора A

$$\sigma_T \supset \sigma_A.$$

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 имеет место формула*

$$\sigma_T = \overline{\bigcup_{x \in K} \sigma_{T(x)}},$$

где K — подмножество подпространства E, состоящее из элементов с компактным спектром.

Доказательство. Если $x \in K$, то представление $T^{(x)}$ непрерывно по норме операторов в банаховом пространстве B_x, а значит, согласно [2], его спектр отделим. Пусть $\chi_0 \in \sigma_{T(x)}$, V — произвольная компактная окрестность характера χ_0. Тогда существует подпространство $B(V)$ в пространстве B_x такое, что представление $T^{(x)}|B(V)$ имеет спектр, содержащийся в компакте V, т. е.

$$V \supset \sigma_{T(x)|B(V)} \supset \sigma_Z \ (Z \in B(V).$$

Из этого включения следует, что характер χ_0 является предельной точкой для спектра σ_T, а значит,

$$\sigma_T \supset \overline{\bigcup_{x \in K} \sigma_{T(x)}}.$$

С другой стороны, пусть χ_0 — характер, принадлежащий спектру σ_T, тогда для любой его компактной окрестности V по теореме 1 существует спектральное подпространство $L(V) \neq 0$, а следовательно, найдется такой элемент $x \in L(V) \subset E$, что $\sigma_x \subset V$. Значит,

$$\chi_0 \in \overline{\bigcup_{x \in K} \sigma_x} = \overline{\bigcup_{x \in K} \sigma_{T(x)}}.$$

Теорема доказана.

В заключение автор благодарит Ю. И. Любича за постановку задачи и внимание к работе и Г. М. Фельдмана за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любич Ю. И., Мацаев В. И., Фельдман Г. М. О представлениях с отделимым спектром. — «Функциональный анализ и его приложения», 1973, т. 7, вып. 2, с. 52—61.
2. Фельдман Г. М. Гармонический анализ неунитарных представлений локально компактных абелевых групп. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 17, Харьков, 1973, с. 169—182.
3. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1971. 359 с.
4. Любич Ю. И. О спектре представления топологической абелевой группы. — ДАН СССР, 1971, т. 200, № 4, с. 777—780.