УДК 517, 944; 97

В. С. Рабинович

КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Известно, что в случае ограниченной области Ω с гладкой границей общая граничная задача нетерова в пространствах Соболева-Слободецкого тогда и только тогда, когда дифференциальный оператор эллиптичен в Ω и граничные условия накрывают оператор (см., например, [1, 4]).

Аналогичная ситуация имеет место и в неограниченных областях с конической структурой на бесконечности [5]. При этом в условие эллиптичности и в условия накрытия ввиду некомпактности области и границы входят также и младшие члены дифференциальных операторов.

В настоящей работе, в § 1 устанавливается разрешимость общих граничных задач для квазиэллиптических уравнений с переменными коэффициентами для бесконечной по «времени» цилиндрической области с неограниченным основанием Ω. Показано, что для нетеровости общих граничных задач в таких областях, кроме выше перечисленных стандартных условий, необходимо и достаточно, чтобы были обратимы некоторые семейства эллиптических задач для основания цилиндра Ω, получающиеся при $t \to \pm\infty$.

В § 2 доказана обратимость параболических задач в бесконечном по «времени» полуцилиндре с неограниченным основанием Ω. В качестве следствия получена экспоненциальная асимптотика при $t \to \infty$ решений сильно параболических задач в областях с неограниченным основанием.

Разрешимость квазиэллиптических граничных задач и задач С. Л. Соболева в бесконечном цилиндре с ограниченным основанием рассматривалась в работе [9]. В [2] исследовалось асимптотическое поведение решений квазиэллиптических граничных задач при $t \to \infty$. В этих работах предполагалось, что коэффициенты операторов от времени не зависят.

Параболические задачи в полуцилиндрических областях с ограниченным основанием рассмотрены в известной работе [3], § 2 настоящей работы можно рассматривать как распространение результатов работы [3] на полуцилиндры с неограниченным основанием, имеющим коническую структуру на бесконечности.

Отметим еще работу [10], где эллиптические и параболические задачи для неограниченных областей рассматриваются при иных предположениях, чем в настоящей статье.

§ 1. Квазиэллиптические граничные задачи в бесконечном цилиндре с неограниченным основанием

1°. Будем обозначать через $y=(t,\ x)$ точки пространства $R_y^{n+1}=R_t^1\times R_x^n$, а через $\eta=(\tau,\xi)$ — точки двойственного к R_η^{n+1} пространства R_η^{n+1}. К каждому лучу, выходящему из начала координат, присоединим бесконечно удаленную точку, «сферу» всех таких точек будем обозначать через $\widetilde{S}^n$, а через $\widetilde{R}^{n+1}=R^{n+1}\cup\widetilde{S}^n$. Каждой точке множества $\widetilde{S}^n$ очевидным образом сопоставляется точка ω_y единичной сферы $S^n\subset R^{n+1}$. В пространстве $\widetilde{R}^{n+1}$ стандартным образом вводится топология (см. [5]).

Пусть Ω — неограниченная область в пространстве R_x^n, имеющая коническую структуру на бесконечности. Это означает, что вне шара достаточно большого радиуса область Ω есть коническое множество. Граница области Ω есть бесконечно дифференцируемое многообразие в R^n, вообще говоря, некомпактное.

Обозначим через $T_\Omega=R_t^1\times\Omega$ цилиндрическую область в пространстве R_y^{n+1}, а через $\widetilde{T}_\Omega$ ее замыкание в топологии $\widetilde{R}_y^{n+1}$.

Пусть $\mu > 0$, $-\infty < s < \infty$, тогда через $H^{s,\mu}$ обозначим пространство таких распределений, что их преобразование Фурье измеримы и норма $\|u\|_{s,\mu} = \|(1+|\tau|^{2/\mu}+|\xi|^2)^{s/2}Fu\|_{L_2} < \infty$, где $Fu = \hat{u}(\tau, \xi) = (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \int u(y)\, e^{i(\eta, y)}\, dy$ — оператор преобразования Фурье.

Через $H^{s,\mu}(T_\Omega)$ обозначается пространство, состоящее из сужений на область T_Ω элементов из $H^{s,\mu}$ с естественной нормой фактор-пространства.

Пусть $s > \frac{1}{2}$, тогда распределения, принадлежащие пространству $H^{s,\mu}(T_\Omega)$, допускают сужение на границу ∂T_Ω. Множество всех таких сужений с нормой фактор-пространства есть пространство $H^{s-1/2,\mu}(\partial T_\Omega)$ на границе ∂T_Ω.

2°. Рассмотрим общую граничную задачу в области T_Ω:

$$P(y, D_y)\, u = \sum_{\mu\cdot\alpha_t+|\alpha_x|\leqslant 2m} a_\alpha(t, x)\, D_t^{\alpha_t} D_x^{\alpha_x} u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \tilde{T}_\Omega;$$

$$\gamma_{\partial T_\Omega} B^{(j)}(y, D_y)\, u = \sum_{\mu\cdot d_t+|\alpha_x|\leqslant q_j} b_\alpha^{(j)}(t, x)\, D_t^{\alpha_t} D_x^{\alpha_x} u(t, x) =$$

$$= f_j(t, x), \quad (t, x) \in \partial\tilde{T}_\Omega, \tag{1.1}$$

$j = 1, 2, \ldots, m$, $\alpha = (\alpha_t, \alpha_x)$ — мультиндекс, μ — такое целое число, что $\frac{2m}{\mu}$ и $\frac{q_j}{\mu}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ — целые числа. Решение задачи (1.1) ищется в классе $H^{s,\mu}(\tilde{T}_\Omega)$.

$$f \in H^{s-2m,\mu}(\tilde{T}_\Omega), \quad f_j(t, x) \in H^{s-q_j-1/2,\mu}(\partial T_\Omega),$$

$$s > \max(2m, q_j + 1/2), \; j = 1, 2, \ldots, m.$$

Коэффициенты операторов $P(y, D_y)$, $B^{(j)}(y, D_y)$ бесконечно дифференцируемы и обладают следующими свойствами:

$$1)\ a_\alpha(t, x),\ b_\alpha^{(j)}(t, x) \in C(\tilde{R}^{n+1});$$

$$2)\ D^\gamma a_\alpha(t, x) \to 0, \quad D^\gamma b_\alpha^{(j)}(t, x) \to 0 \text{ при } |t| + |x| \to \infty, \tag{1.2}$$

если $\gamma \neq 0$ равномерно по всем направлениям.

Граничной задаче (1.1) сопоставим оператор U:

$$Uu = (P(y, D_y)\, u,\ \gamma_{\partial T_\Omega} B^{(1)}(y, D_y)\, u, \ldots, \gamma_{\partial T_\Omega} B^m(y, D_y)\, u),$$

действующий из

$$\boldsymbol{H}_1^{(s)} = H^{s,\mu}(T_\Omega) \text{ в } \boldsymbol{H}_2^{(s)} = H^{s-2m,\mu}(T_\Omega) \bigoplus_{j=1}^{m} H^{s-q_j-1/2,\mu}(\partial T_\Omega).$$

Введем следующие обозначения:

$$P_{2m}(y,\ \eta)=\sum_{\mu\cdot\alpha_t+|\alpha_x|=2m} a_\alpha(t,\ x)\,\tau^{\alpha_t}\xi^{\alpha_x}; \tag{1.3}$$

$$\widetilde{P}(\omega_y,\ \eta)=\sum_{\mu\cdot\alpha_t+|\alpha_x|\leqslant 2m} \widetilde{a}_\alpha(\omega_y)\,\tau^{\alpha_t}\cdot\xi^{\alpha_x}\ , \tag{1.4}$$

где $\widetilde{a}_\alpha(\omega_y)=\lim\limits_{|y|\to\infty} a_\alpha(y);\quad y=\omega_y\,|y|$.

Пределы (1.4) существуют ввиду свойства *1* коэффициентов. В случае, когда $\omega_y=(\pm 1,\ 0,\ldots,\ 0)$, мы будем писать $\widetilde{P}_\pm(\eta)$. Аналогичный смысл будут иметь обозначения:

$$B_{2m}^{(j)}(y,\ \eta),\ \widetilde{B}^{(j)}(\omega_y,\ \eta),\ B_\pm^{(j)}(\eta),\ j=1,\ 2,\ldots,\ m.$$

Будем говорить (см. [6]), что оператор $P(y,\ D_y)$ квазиэллиптический в области $\widetilde{T}_\Omega$, если выполнены следующие условия:

1) $P_{2m}(y,\ \eta)\neq 0,\ \forall y\in\widetilde{T}_\Omega,\ |\tau|+|\eta|\neq 0$,

2) $P(\omega_y,\ \eta)\neq 0,\ \forall\eta\in R_\eta^{n+1}$ и всех направлений ω_y, отвечающих точкам $\widetilde{S}^n\cap\widetilde{T}_\Omega$.

Отметим, что условие *1* есть стандартное условие квазиэллиптичности (см. [3]), условия *1*, *2* есть условия квазиэллиптичности для неограниченной области (см. [6]).

Полином $Q(\tau,\ \xi)$ мы будем называть правильно эллиптическим относительно ξ, если для любых двух линейно независимых векторов ξ_1 и ξ_2 полином по λ $Q(\tau,\ \xi_1+\lambda\xi_2)$ имеет m-корней в верхней полуплоскости и m-корней в нижней полуплоскости.

Отметим, что если $n+1>2$, то квазиэллиптичность влечет за собой правильную эллиптичность. Для квазиоднородных полиномов проверка этого факта стандартна (см. [3], [4]). Если же полином

$$Q(\tau,\ \xi)=\sum_{\mu\cdot\alpha_t+|\alpha_x|\leqslant 2m} C_\alpha\tau^{\alpha_t}\xi^{\alpha_x}$$

неоднороден, то введем вещественный параметр q и рассмотрим квазиоднородный полином переменных $(\tau,\ \xi,\ q)$:

$$\widetilde{Q}(\tau,\ \xi,\ q)=\sum_{\mu\cdot\alpha_t+|\alpha_x|+\beta=2m} C_\alpha\tau^{\alpha_t}\xi^{\alpha_x}q^\beta,$$

причем

$$\widetilde{Q}(\tau,\ \xi,\ 1)\neq 0,\quad\forall(\tau,\ \xi)\in R^{n+1}.$$

В силу квазиоднородности $\widetilde{Q}(\tau,\xi,q)\neq 0$, если $|\tau|+|\xi|+|q|\neq 0$, т. е. $\widetilde{Q}(\tau,\ \xi,\ q)$ — квазиэллиптичен, а следовательно, правильно эллиптичен по ξ.

3°. Пусть в точке $y=(t,\ x)\in\partial\widetilde{T}_\Omega$ выбрана локальная система координат так, что ось x_n направлена по нормали, а плоскость $(t,\ x')$ является касательной. Оператору U в $\widetilde{T}_\Omega$ сопоставим набор обыкновенных дифференциальных операторов с граничными условиями:

$$1)\ P_{2m}\left(y,\ \tau,\ \xi',\ \frac{d}{dx_n}\right)u=0,\ |\tau|+|\xi'|\neq 0;\ y\in\partial\widetilde{T}_\Omega; \tag{1.5}$$

$$B_{2m}^{(j)}\left(y,\ \tau,\ \xi',\ \frac{d}{dx_n}\right)u\,|_{x_n=0}=C_j,\ j=1,\ 2,\ldots,\ m,$$

$$2)\ \widetilde{P}\left(\omega_y,\ \tau,\ \xi',\ \frac{d}{dx_n}\right)u=0,\ (\tau,\ \xi')\in R^n,\ y\in\partial\widetilde{T}_\Omega\cap\widetilde{S}^n;$$

$$\widetilde{B}^{(j)}\left(\omega_y,\ \tau,\ \xi',\ \frac{d}{dx_n}\right)u\,|_{x_n}=C_j,\quad j=1,\ 2,\ldots,\ m. \tag{1.6}$$

Говорят, что граничные операторы $B^{(j)}$ накрывают в области $\widetilde{T}_\Omega$ оператор P, если задачи (1.5), (1.6) разрешимы единственным образом для любого вектора $C=(C_1,\ldots,\ C_m)\in C^m$ в классе устойчивых при $x_n\to\infty$ решений. В этом случае также говорят, что выполнены условия Шапиро-Лопатинского.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 1. *Оператор U есть нетеров оператор из $\boldsymbol{H}_1^{(s)}$ в $\boldsymbol{H}_2^{(s)}$ тогда и только тогда, когда*

1) *оператор $P(y,\ D_y)$ — квазиэллиптический в области $\widetilde{T}_\Omega$;*

2) *в области $\widetilde{T}_\Omega$ для U выполнены условия Шапиро-Лопатинского;*

3) *эллиптические граничные задачи с параметром*

$$P_\pm(\tau,\ D_x)v=\sum_{\mu\cdot\alpha_t+|\alpha_x|\leqslant 2m}a_\alpha^\pm\tau^\alpha D_x^{\alpha_x}v=f(x),\quad x\in\widetilde{\Omega}$$

$$\gamma_{\partial\Omega}B_\pm^{(j)}(\tau,\ D_x)v=\sum_{\mu\cdot\alpha_t+|\alpha_x|\leqslant q_j}b_\alpha^{(j)\pm}\tau^{\alpha_t}D_x^{\alpha_x}v=f_j(x'),\ x'\in\partial\widetilde{\Omega},$$

где $a_\alpha^\pm=\lim\limits_{t\to\pm\infty}a_\alpha(t,\ x)$; $b_\alpha^{(j)\pm}=\lim\limits_{t\to\pm\infty}b_\alpha^{(j)}(t,\ x)$; $v\in H^s(\widetilde{\Omega})$; $f\in H^{s-2m}(\widetilde{\Omega})$; $f_j\in H^{s-m_j-1/2}(\partial\Omega)$; $j=1,\ 2,\ldots,\ m$, *разрешимы единственным образом для всех значений параметра* $\tau\in(-\infty,\ \infty)$.

Доказательство. Оператор U есть оператор локального типа [5] на $\widetilde{T}_\Omega$, поэтому для доказательства того, что U нетеров, достаточно доказать, что условия *1, 2, 3* обеспечивают локальную нетеровость локальных представителей оператора U.

а) Локальными представителями оператора U во внутренних точках $T_{\mathfrak{Q}}$ являются операторы $P_{2m}(y, D_y)$, если y — конечная точка и операторы $P(\omega_y, D_y)$, если y — бесконечно удаленная точка, отвечающая направлению ω_y. Из условия квазиэллиптичности следует локальная обратимость этих операторов,

б) В конечных точках, лежащих на границе $\partial\widetilde{T}_{\mathfrak{Q}}$, условия Шапиро-Лопатинского для задачи (1.5) есть условия локальной обратимости локальных представителей операторов в полупространстве, определяемом вектором внешней нормали к границе.

В бесконечно удаленных точках, лежащих на границе $\partial\widetilde{T}_{\mathfrak{Q}}$ и таких, что $\omega_y \neq (\pm 1, 0, 0, \ldots, 0)$, условие Шапиро-Лопатинского для задачи (1.6) есть условие локальной обратимости локальных представителей оператора U — операторов в полупространстве.

в) Пусть теперь $\omega_y = (\pm 1, 0, 0, \ldots, 0)$. Локальными представителями оператора U в этих точках являются операторы

$$U_{\pm}v = \{P_{\pm}(D_t, D_x)v, B_{\pm}^{(1)}(D_t, D_x)v, \ldots, B_{\pm}^{(m)}(D_t, D_x)v\}.$$

Стандартные рассуждения (см., например, [4, с. 164—168]), использующие преобразование Фурье по t, показывают, что условие *3* есть условие обратимости операторов $U_{\pm}$.

Таким образом, достаточность условий *1—3* доказана.

Доказательство необходимости условий *1—3* опирается на следующую лемму.

Лемма. *Пусть B_k, $k = 1, 2$ — банаховы пространства, $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность операторов, принадлежащих Hom[1](B_k, B_k), $k = 1, 2$ и удовлетворяющих следующим требованиям:*

а) *C_j — изометрические операторы в B_k, $k = 1, 2$;*

б) *последовательность C_j слабо сходится к нулю в B_k, $k = 1, 2$; тогда, если оператор $A \in Hom(B_1, B_2)$ инвариантен относительно C_j, $j = 1, 2, \ldots$, т. е. $C_jA = AC_j$, то из нетеровости оператора $A \in Hom(B_1, B_2)$ следует его обратимость.*

Доказательство. Так как A нетеров оператор из B_1 в B_2, то справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{B_1} \leqslant C\|Au\|_{B_2} + \|Tu\|_{B_1}, \quad u \in B_1, \quad (1.7)$$

где T — вполне непрерывный оператор в B_1.

Рассмотрим последовательность $\{C_ju\}$. Ввиду свойства *б* она слабо сходится к нулю в B_1, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для $j > N$ $\|TC_ju\| < \varepsilon$. Таким образом, ввиду свойства *а*

$$\|u\|_{B_1} = \|C_ju\|_{B_1} \leqslant C\|AC_ju\|_{B_2} + \varepsilon, \quad j > N$$

---

[1] Через $Hom(X, Y)$ обозначается пространство линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y.

и в силу инвариантности A относительно C_j и свойства a

$$\| u \|_{B_1} \leqslant C \| Au \|_{B_2} + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε получаем, что оператор A обратим слева.

Используя априорную оценку (1.7) для сопряженного оператора, получаем, что оператор A^* обратим слева, следовательно, A обратим справа.

Необходимость условий *1—3*. Локальные представители оператора инвариантны относительно сдвигов;

в п. 1) вдоль любого вектора пространства R^{n+1};

в п. 2) вдоль векторов касательного пространства;

в п. 3) вдоль оси t.

Легко проверить, что операторы сдвига τ_h при $|h| \to \infty$ удовлетворяют условиям леммы 1. Кроме того, с помощью сдвига носитель финитной функции можно сдвинуть в окрестность нужной бесконечно удаленной точки.

Таким образом, из леммы 1 следует необходимость условий *1—3* в бесконечно удаленных точках.

В конечных точках необходимость условий *1—2* известна и следует также из леммы 1, где в качестве операторов C_j выбирается композиция операторов сдвига и подобия, так как локальные представители в конечных точках однородны, т. е. инвариантны относительно операторов подобия и сдвига.

4°. В качестве приложения теоремы 1 установим нетеровость первой краевой задачи для сильно эллиптического оператора в области $\widetilde{T}_\Omega$. В силу неограниченности основания $\widetilde{\Omega}$, неоднородный оператор $P(y, D_y)$ мы будем называть сильно эллиптическим в $\widetilde{T}_\Omega$, если для всех $y \in \widetilde{T}_\Omega$ существует такая константа C, что

$$Re\, P(y, \eta) \geqslant C(1 + |\tau|^2 + |\varepsilon|^{2m}). \tag{1.8}$$

Рассмотрим задачу

$$P(y, D_y)\, u(t, x) = f(t, x);\ (t, x) \in \widetilde{T}_\Omega; \tag{1.9}$$

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right|_{\partial T_\Omega} = f_j(t, x');\ (t, x') \in \partial\widetilde{T}_\Omega,\ j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Решение задачи имеется в классе $H^s(T_\Omega)$, $f \in H^{s-2m}(T_\Omega)$, $f_j \in H^{s-j-1/2}(\partial T_\Omega)$ (H^s — пространство Соболева — Слободицкого).

Теорема 2. *Задача* (1.9) *определяет нетероз оператор из* $H^s(T_\Omega)$ *в* $H^{s-2m}(T_\Omega) \overset{m-1}{\underset{j=0}{\oplus}} H^{s-j-1/2}(\partial T_\Omega)$.

Доказательство. а) Условие (1.8) влечет за собой выполнение условий *1* теоремы 1.

б) Как известно (см. [4]), граничные условия задачи (1.9) накрывают оператор $P(y, D_y)$, т. е. выполнены условия *2* теоремы 1.

в) Рассмотрим теперь задачу (1.9) для операторов $P_{\pm}(\tau, D_x)$ в области $\widetilde{\Omega}$. Из условия (1.8) следует оценка снизу

$$\| P_{\pm}(\tau, D_x) u \|_{-m} > C \| u \|_m \tag{1.10}$$

с постоянной C, не зависящей от τ.

Из оценки (1.10) следует, что если решение задачи

$$P_{\pm}(\tau, D_x) v = f(x), \quad x \in \Omega \tag{1.11}$$

$$\left.\frac{\partial^j v}{\partial^j \nu}\right|_{\partial\Omega} = f_j(x'), \ x' \in \partial\Omega, \ j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

в классе $H^s(\Omega)$, $s > 2m$ существует для правых частей

$$f(x) \in H^{s-2m}(\Omega), \ f_j(x') \in H^{s-j-1/2}(\partial\Omega), \ j = 0, 1, \ldots, m-1,$$

то оно единственно.

Докажем теперь, что задача (1.11) нетерова и ее индекс равен нулю. Действительно, как легко показать, граничные условия (1.11) накрывают оператор $P_{\pm}(\tau, D_x)$ для любого значения параметра τ, т. е. для всех τ задача (1.11) нетерова, но при больших по модулю τ эта задача обратима (см. [4]). Следовательно, индекс задачи (1.11) равен нулю, т. е. задача (1.11) обратима из $H^s(\Omega)$ в $H^{s-2m}(\Omega) \bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} H^{s-j-1/2}(\partial\Omega)$. Теорема доказана.

Пример. Задача Дирихле для цилиндрической области $\partial\widetilde{T}_\Omega$ с неограниченным основанием

$$-\Delta u(t, x) + g(t, x) u(t, x) = f(t, x); \quad (t, x) \in T_\Omega$$

$$u(t, x)|_{\partial T_\Omega} = \varphi(t, x'), \ (t, x') \in \partial T_\Omega,$$

где $\operatorname{Re} g(t, x) > 0$, нетерова из $H^s(T_\Omega)$ в $H^{s-2}(T_\Omega) \oplus H^{s-1/2}(\partial T_\Omega)$, $s > 2$.

§ 2. Параболические задачи в бесконечных цилиндрических областях с неограниченным основанием

1°. Пусть $\widetilde{T}^{+}_{\Omega} = \{\widetilde{T}_\Omega \cap \{t \geqslant 0\}\}$ — полуцилиндр. Через $\mathring{H}^{s,\mu}(R^{n+1}_{+})$ будем обозначать подпространство пространства $H^{s,\mu}(R^{n+1})$, состоящее из функций с носителями в полупространстве $R^{n+1}_{+} = \{(t, x) \in R^{n+1} : t \geqslant 0\}$, а через $\mathring{H}^{s,\mu}(T^{+}_{\Omega})$ — пространство сужений распределений из $\overset{\circ}{H}{}^{s,\mu}(R_+^{n+1})$ на полуцилиндр T_Ω^+ с нормой

$$\|u\|_{s,\mu}^{T_\Omega^+} = \inf \|lu\|_{s,\mu},$$

где inf берется по всем продолжениям $lu \in \overset{\circ}{H}{}_\lambda^{s,\mu}(R_+^{n+1})$.

Нам также необходимы пространства с экспоненциальным весом $e^{-t\lambda}$. Мы будем говорить, что $u(t, x) \in \overset{\circ}{H}{}_\lambda^{s,\mu}(T_\mu^+)$, если

$$\|u(t, x)\|_{s,\mu,\lambda} = \|e^{-t\nu}u(t, x)\|_{s,\mu} < \infty.$$

2°. Дифференциальный оператор $P(y, D_y)$ будем называть параболическим в полуцилиндре T_Ω^+, если выполнены следующие условия (см. [3, 6]):

1) $P_{2m}(y, \tau + i\lambda, \xi) \neq 0$ при $|\tau + i\lambda| + |\xi| \neq 0$,
$\lambda \geqslant 0$, $\forall y \in \widetilde{T}_\Omega^+$;

2) $P(\omega_y, \tau + i\lambda, \xi) \neq 0$ при всех $(\tau, \xi) \in R^{n+1}$,
$\lambda > -\varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0$ и для всех $y \in \widetilde{T}_\Omega^+ \cap \widetilde{S}^n$.

Рассмотрим параболическую граничную задачу в полуцилиндре

$$P(y, D_y)\, u_+(t, x) = f(t, x), \ (t, x) \in \widetilde{T}_\Omega^+ \tag{2.1}$$

$$\gamma_{\partial T_\Omega^+} B^{(j)}(y, D)\, u_+(t, x) = f_j^+(t, x), \ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Коэффициенты дифференциальных операторов $P(y, D)$, $B^{(j)}(y, D)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ удовлетворяют тем же условиям, что и в § 1.

Граничной задаче (2.1) сопоставим оператор

$$Uu_+ = (P(y, D_y)\, u_+, \gamma_{\partial T_\Omega} B^{(1)}(y, D_y)\, u_+, \ldots, \gamma_{\partial T_\Omega^+} B^{(m)}(y, D_y)\, u+),$$

действующий из

$$\boldsymbol{H}_1^{s,\mu,\lambda} = \overset{\circ}{H}{}_\lambda^{s,\mu}(T_\Omega^+) \text{ в } \boldsymbol{H}_2^{s-2m,\mu,\lambda} =$$

$$= \overset{\circ}{H}{}_\lambda^{s-2m,\mu}(T_\Omega^+) \bigoplus_{j=1}^{m} \overset{\circ}{H}{}_\lambda^{s-q_j-1/2,\mu}(\partial T_\Omega^+), \tag{2.2}$$

где q_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ — порядки операторов $B^{(j)}(y, D_y)$, причем $s > \max\limits_{j=1, 2, \ldots, m} (2m, q_j)$.

Отметим формулу

$$e^{-t\lambda}Ue^{t\lambda}u_+ = (P(y, D_t + i\lambda, D_x)\, u_+, B^{(1)}(y, D_t + i\lambda, D_x)\, u_+, \ldots,$$
$$B^{(m)}(y, D_t + i\lambda, D_x)\, u_+) = U_\lambda u_+,$$

согласно которой, вместо того чтобы рассматривать оператор U в семействе пространств с весом $e^{-t\lambda}$, можно рассматривать семейство операторов U_λ, непрерывно зависящее от параметра $\lambda \geqslant 0$ из $\boldsymbol{H}_1^{s,\mu}$ в $\boldsymbol{H}_2^{s-2m,\mu}$.

Будем говорить, что граничные операторы $B^{(j)}(y, D_y)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ накрывают параболический оператор $P(y, D_y)$, если в точках границы ∂T_Ω^+ выполнены условия (1.5), (1.6) для оператора U_λ.

Теорема 3. *Пусть $P(y, D_y)$ — параболический оператор в области $\tilde{T}_\Omega^+$, и граничные операторы $B^{(j)}(y, D_y)$ накрывают оператор $P(y, D_y)$, тогда существует такое число α, что при $\lambda \geqslant \alpha$ оператор U является изоморфизмом пространств $\boldsymbol{H}_1^{s, \lambda}$ и $\boldsymbol{H}_2^{s, \lambda}$.*

Доказательство. Рассмотрим локальный представитель оператора U_λ в точке $\omega_y = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. Локальным представителем является оператор U_λ^+;

$$U_\lambda^+ v_+ = \{P_+(D_t + i\lambda, D_x) v_x, \gamma_{\partial T_\Omega}{}^+ B^{(1)}(D_t + i\lambda, D_x) v_+, \ldots,$$
$$\gamma_{\partial T_\Omega^+} B^{(m)}(D_+ + i\lambda, D_x) v).$$

Таким образом, оператору U_λ^+ соответствует семейство операторов

$$U^+(\tau + i\lambda) = \{P_+(\tau + i\lambda, D_x), \gamma_{\partial\Omega} B^+(\tau + i\lambda, D_x), \ldots,$$
$$\gamma_{\partial\Omega} B^{(m)}(\tau + i\lambda, D_x)\},$$

зависящих от комплексного параметра $(\tau + i\lambda) \in \boldsymbol{C}^1$ и отвечающих эллиптическим граничным задачам в области $\tilde{\Omega}$.

Повторяя рассуждения из работы [3], легко показать, что существует такое число α, что при $\lambda \geqslant \alpha$ оператор $U^+(\tau + i\lambda)$ обратим для всех $\tau \in R^1$.

В силу теоремы 1 семейство операторов U_λ нетерово для любого $\lambda \geqslant \alpha$. Так же, как и в работе [3], строим регулятор для оператора

$$R_\lambda U_\lambda = I + T_\lambda^1, \quad U R_\lambda = I + T_\lambda^2, \tag{2.3}$$

где I — единичный, а T_λ^i, $i = 1, 2$ вполне непрерывные операторы, допускающие оценку

$$\| T_\lambda^i \| \leqslant \frac{C_i}{1 + |\lambda|}, \quad i = 1, 2. \tag{2.4}$$

Из оценки (2.4) находим, что существует такое $\lambda_1 \geqslant \alpha$, что при $\lambda \geqslant \lambda_1$ операторы $I + T_\lambda^i$, $i = 1, 2$ обратимы и, следовательно, U при $\lambda \geqslant \lambda_1$ есть изоморфизм пространств $\boldsymbol{H}_1^{s, \lambda}$ в $\boldsymbol{H}_2^{s-2m, \lambda}$.

Покажем, что на самом деле оператор U обратим при $\lambda \geqslant \alpha$. Действительно, индекс оператора U равен нулю при всех $\lambda \geqslant \alpha$. Каждое решение уравнения

$$U u_+ = 0, \quad u_+ \in \boldsymbol{H}_1^{s, \lambda} \text{ при } \lambda \geqslant \alpha$$

принадлежит также H_1^{s,λ_1} в силу вложения $H_1^{s,\lambda_1} \subset H_1^{s,\lambda}$, $\lambda \leqslant \lambda_1$ и, будучи тривиальным в H_1^{s,λ_1}, тривиально также в $H_1^{s,\lambda}$.

Замечание 1. Число α, фигурирующее в формулировке теоремы 3, есть наименьшее из чисел α, при которых обратим предельный оператор U_+^λ.

Замечание 2. Результат, сформулированный в теореме 3, очевидно, имеет место, когда основание Ω полуцилиндра ограничено.

Если Ω ограниченная область, то условие *2* параболичности принимает вид

$$P_+(\tau + i\lambda, \xi) \neq 0 \text{ при всех } (\tau, \xi) \in R^{n+1}, \ \lambda > -\varepsilon, \ \varepsilon \geqslant 0.$$

Замечание 3. Из теоремы 3 следует априорная оценка решения параболической задачи (2.1) при $\lambda \geqslant \alpha > -\varepsilon$:

$$\| e^{-t\lambda} u_+ \|_{s,\mu} \leqslant C(\| e^{-t\lambda} f_+ \|_{s-2m,\mu}) + \sum_{j=1}^{m} \| e^{-t\lambda} f_j^+ \|_{s-m_j-1/2,\mu}. \quad (2.5)$$

Из оценки (2.5) следует, что при $\alpha < 0$ решение u_+ экспоненциально убывает при $t \to \infty$, т. е.

$$\| u_+ \|_{s,\mu} = O(e^{\alpha t}), \ \alpha < 0,$$

если

$$f_+ \in H_\alpha^{s-2m,\mu}(T_\Omega^+), \quad f_j^+ \in H_\alpha^{s-m_j-1/2,\mu}(\partial T_\Omega^+).$$

2°. Рассмотрим первую краевую задачу для параболического оператора в области T_Ω^+:

$$\frac{\partial u_+}{\partial t} + P(t, x, D_x) u_+ + b(t, x) u_+ = f_+, \quad (2.6)$$

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \right|_{\partial T_\Omega^+} = f_j^+, \ j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

где $P(t, x, D_x)$ сильно эллиптический оператор порядка $2m$, т. е.

$$\operatorname{Re} P(t, x, \xi) \geqslant C |\xi|^{2m}, \ \operatorname{Re} b(t, x) \geqslant \delta > 0$$

$$u_+ \in H^{s,2m}(T_\Omega^+), \ f_+ \in H^{s-2m,2m}(T_\Omega^+),$$

$$f_j^+ \in H^{s-j-1/2,2m}(\partial \widetilde{T}_\Omega), \quad s > 2m.$$

Условия теоремы 3 выполняются при $\alpha = -(\delta - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 4. *Задача* (2.6) *разрешима единственным образом в классе* $H_\lambda^{s-2m}(T_\Omega^+)$ *для любой правой части*

$$(f_+, f_1^+, \ldots, f_m^+) \in H_\lambda^{s-2m,2m}(T_\Omega^+) \bigoplus_{j=1}^{m} H_\lambda^{s-j-1/2,2m}(T_\Omega^+)$$

при $\lambda \geqslant -(\delta - \varepsilon),\ \varepsilon > 0$.

Следствие 1. *Пусть* $(f_+, f_1^+, \ldots, f_m^+) \in H^{s-2m,\,2m}_{-(\delta-\varepsilon)} \bigoplus_{j=1}^{m} H^{s-j-1/2,\,2m}_{-(\delta-\varepsilon)}(T_\Omega^+)$, *тогда решение* u_+ *задачи* (2.6) *экспоненциально убывает на бесконечности и*

$$\| u_+ \|_{s,\,2m} = O\left(e^{-(\delta-\varepsilon)t}\right),\ \delta > 0.$$

3°. Пусть Ω — ограниченная область. Рассмотрим в полуцилиндре T_Ω^+ первую краевую задачу для сильно параболического уравнения

$$\frac{\partial u_+}{\partial t} + P(t, x, D_x)\, u_+ = f_+; \tag{2.7}$$

$$\left.\frac{\partial^j u_+}{\partial \nu_j}\right|_{\partial T_\Omega^+} = f_j^+,\ j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

где $P(t, x, D_x)$ сильно эллиптический оператор порядка $2m$, т. е. $\operatorname{Re} P(t, x, \xi) \geqslant C\,|\,\xi\,|^{2m}$.

Теорема 5. *Существует такое число* $\delta > 0$, *что задача* (2.7) *имеет единственное решение в классе* $H_\lambda^{s,\,2m}(T_\Omega^+)$ *для любой правой части*

$$(f_+, f_1^+, \ldots, f_m^+) \in H_\lambda^{s-2m,\,2m}(T_\Omega^+) \bigoplus_{j=1}^{m} H_\lambda^{s-j-1/2,\,2m}(\partial T_\Omega^+)$$

и для всех $\lambda > -\delta$.

Доказательство. Пусть $P_+(D_x)$ — предельный оператор для $P(t, x, D_x)$, т. е.

$$P_+(\xi) = \lim_{t \to \infty} P(t, x, \xi).$$

Рассмотрим оператор

$$Q_{\tau+i\lambda}(D_x) = -i(\tau + i\lambda) + P_+(D_x).$$

Первая краевая задача для оператора $Q_{\tau+i\lambda}(D_x)$ обратима для всех $\tau + i\lambda \in \overline{C}{}^{1}_{+}$[1], для всех $\tau + i\lambda \in C^1$ эта задача порождает оператор Нетера.

Таким образом, почти для всех $\tau + i\lambda \in C^1$, за исключением дискретного множества значений $\tau + i\lambda$ на отрицательной мнимой полуоси, такая задача обратима (см. [3]). Это означает, что существует такое число $\delta > 0$, что при $\lambda \geqslant -\delta$ для всех $\tau \in R^1$ краевая задача для оператора $Q_{\tau+i\lambda}(D_x)$ обратима.

Таким образом, из замечания 2 следует теорема 5.

---

[1] C_+^1 — верхняя полуплоскость в C^1.

Следствие 2. *Пусть λ_0 — наименьшее по абсолютной величине собственное число первой краевой задачи для оператора $P_+(D_x)$, тогда для любой правой части*

$$\left(f_+, f_1^+, \ldots, f_m^+\right) \in H_\delta^{s-2m,\,2m}\left(T_\Omega^+\right) \bigoplus_{j=1}^{m} H_\delta^{s-j-1/2,\,2m}\left(\partial T_\Omega^+\right)$$

решение u_+ имеет при $t \to \infty$ бесконечности асимптотику

$$\|u_+\|_{s,\,2m} = O\left(e^{-\delta t}\right),\ \delta = -(\lambda_0 + \varepsilon),$$

где $\lambda_0 < 0$; $\varepsilon > 0$; $\lambda_0 + \varepsilon < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М., ИЛ, 1962. 250 с.
2. Agmon S., Nirenberg L. Properties of solutions of ardinary differential aquations in Banach space. — «Comm. pure and appl. Math. 1963, vol. 16, N 2, p. 121—239.
3. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. — УМН, 1964, т. 19, вып. 3, с. 53—161.
4. Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М. «Мир», 1971, 371 с.
5. Рабинович В. С. Псевдодифференциальные уравнения в неограниченных областях с конической сгруктурой на бесконечности. — «Матем. сб.» 1969, т. 80 (122), № 77, с. 77—96.
6. Рабинович В. С. Квазиэллиптические псевдодифференциальные операторы и задача Коши для параболических уравнений. — ДАН СССР, 1971, т. 201, № 5, с. 1055—1058.
7. Рабинович В. С. Задача Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений с нестабилизирующимся символом. — «Изв. вузов. Математика», 1972, № 7 (122), с. 85—94.
8. Мазья В. П., Пламеневский Б. А. Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. — «Изв. АН СССР», сер. матем., 1972, т. 36, с. 1080—1133.
9. Стернин Б. Ю. Квазиэллиптические уравнения в бесконечном цилиндре. — ДАН СССР, 1970, т. 194, № 5, с. 149—163.
10. Багиров Л. А. Краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях. — ДАН СССР, 1970, т. 194, № 5, с. 612—627.