УДК 511.6 + 517.56

В. П. Петренко, д-р физ.-мат. наук, М. Хуссайн, канд. физ.-мат. наук

О ДЕФЕКТАХ ЦЕЛЫХ КРИВЫХ НИЖНЕГО ПОРЯДКА $\lambda < 1$

§ 1. Введение

Пусть

$$\vec{G}(z) = \{g_1(z), \ldots, g_p(z)\}$$

p-мерная целая кривая (см. [1—4]). Мы предполагаем далее, что целые функции $\{g_k(z)\}_{k=1}^{p}$ (координаты целой кривой $\vec{G}(z)$) могут иметь лишь конечное число общих корней, являются линейно независимыми и хотя бы одна из мероморфных функций $(k \neq n)$

$$\frac{g_k(z)}{g_n(z)}$$

трансцендентная. Известно следующее классическое соотношение для величин дефектов целых кривых (см. [1, 4]):

$$\sum_{\vec{a} \in A} \delta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant p, \tag{1.1}$$

где A означает всюду далее фиксированную допустимую систему векторов (см. [1]). Соотношение (1.1) в общем случае усилить нельзя. Действительно, рассмотрим целую кривую первого порядка

$$\vec{G}_0(z) = \{e^z, e^{2z}, \ldots, e^{pz}\}$$

и допустимую систему векторов, содержащую векторы

$$\vec{a}_k = \{0, 0, \ldots, 1, \ldots 0\}, \tag{1.2}$$

где 1 находится на k-м месте, $k = 1, 2, 3, \ldots, p$.
Для этой целой кривой имеем

$$\delta(\vec{a}_k, \vec{G}_0) = 1, \; k = 1, 2, 3, \ldots, p,$$

значит,

$$\sum_{\vec{a} \in A} \delta(\vec{a}_k, \vec{G}_0) = p.$$

В этой работе мы показываем, что для p-мерных целых кривых нижнего порядка $\lambda < 1$ соотношение (1.1) для величин дефектов может быть уточнено. Имеет место

Теорема 1. *Если нижний порядок целой кривой* $\lambda \leqslant 0{,}5$, *то величины ее дефектов удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{\vec{a} \in A} \delta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant p-1. \tag{1.3}$$

Соотношение (1.3) уже усилить нельзя. Действительно, рассмотрим целую кривую (см. [2, 5])

$$\vec{G}_1(z) = \{z, z^2, \ldots, z^{p-1}, g(z)\},$$

где $g(z)$ — трансцендентная целая функция нижнего порядка $\lambda \leqslant 0{,}5$, а в качестве системы векторов A_1 выберем систему, содержащую векторы (1.2). Мы находим

$$\sum_{\vec{a} \in A_1} \delta(\vec{a}, \vec{G}_1) = p-1.$$

§ 2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим сначала случай, когда целая кривая имеет нерегулярный рост, т. е. ее нижний порядок λ и порядок ρ удовлетворяют соотношению $0 \leqslant \lambda < \rho \leqslant \infty$. Выберем q $(q > p)$ различные векторы $\{\vec{a}_k\}_{k=1}^{q}$ из фиксированной допустимой системы векторов A и положим

$$F_k(z) = (\vec{G}(z)\, \vec{a}_k) = \sum_{n=1}^{p} g_n(z)\, a_{k,n}, \tag{2.1}$$

где

$$\vec{a}_k = \{\bar{a}_{k,1}, \bar{a}_{k,2}, \ldots, \bar{a}_{k,p}\}. \tag{2.2}$$

Пусть

$$\Psi_k(z) = \frac{F_k(z)}{F_1(z)}, \ k = 2, 3, \ldots, q.$$

Для характеристики Р. Неванлинны мероморфной функции $\Psi_k(z)$ справедлива оценка[1] (см. [1, с. 294]) $r > r_0$

$$T(r, \Psi_k) \leqslant T(r, \vec{G}) + O(1) < C \cdot T(r, \vec{G}), \ k = 2, 3, \ldots, q.$$

Представим теперь $\Psi_k(z)$ в виде (см. [6, с. 263])

$$\Psi_k(z) = C_k \cdot z^{\gamma_k - \gamma_1} \frac{\prod\limits_{|a_n(k)| \leqslant R} \left(1 - \frac{z}{a_n(k)}\right)}{\prod\limits_{|a_n(1)| \leqslant R} \left(1 - \frac{z}{a_n(1)}\right)} \cdot W_R(z, k), \tag{2.3}$$

[1] Буквы C всюду далее означают различные положительные постоянные

где при

$$|z| = r \leqslant 0{,}5R$$

$$|\ln W_R(z,\ k)| \leqslant C \cdot \frac{r}{R} \cdot T(2R,\ \Psi_k) \leqslant C \cdot \frac{r}{R} \cdot T(2R,\ \vec{G}), \quad (2.4)$$

и $\{a_n(k)\}$ — нули функции $F_k(z)$; γ_k — кратность корня $F_k(z)$ в нуле (R — фиксировано). Функция

$$g_R(z) = \frac{F_1(z)}{C_1 \cdot z^{\gamma_1} \cdot \prod\limits_{|a_n(1)| \leqslant R} \left(1 - \frac{z}{a_n(1)}\right)} \quad (2.5)$$

целая и не имеет нулей при $|z| \leqslant R$. Из (2.3) и (2.5) находим ($k = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ q$)

$$F_k(z) = C_k \cdot z^{\gamma_k} \prod_{|a_n(k)| \leqslant R} \left(1 - \frac{z}{a_n(k)}\right) g_R(z) \cdot W_R(z,\ k)$$

и

$$F_1(z) = C_1 \cdot z^{\gamma_1} \cdot \prod_{|a_n(1)| \leqslant R} \left(1 - \frac{z}{a_n(1)}\right) g_R(z).$$

Рассмотрим теперь вспомогательную аналитическую при $|z| \leqslant R$ кривую

$$\vec{G}_R(z) = \left\{\frac{g_1(z)}{g_R(z)},\ \ldots,\ \frac{g_p(z)}{g_R(z)}\right\}, \quad (2.6)$$

где $g_R(z)$ определено соотношением (2.5).

Аналитическая кривая (2.6) обладает такими свойствами (у нас R — фиксировано). При $|z| = r \leqslant R$

$$m(r,\ \vec{a},\ \vec{G}_R) = m(r,\ \vec{a},\ \vec{G}),\ T(r,\ \vec{G}_R) = T(r,\ \vec{G}).$$

Далее, из (2.1), (2.2), (2.6) находим при $k = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ q$

$$\Phi_k(z) = (\vec{G}_R(z) \cdot \vec{a}_k) = \sum_{n=1}^{p} \frac{g_n(z)}{g_R(z)} a_{n,k} =$$

$$= \frac{F_k(z)}{g_R(z)} = C_k \cdot z^{\gamma_k} \prod_{|a_n(k)| \leqslant R} \left(1 - \frac{z}{a_n(k)}\right) \cdot W_R(z,\ k)$$

и

$$\Phi_1(z) = (\vec{G}_R(z) \cdot \vec{a}_1) = \frac{F_1(z)}{g_R(z)} = C_1 \cdot z^{\gamma_1} \cdot \prod_{|a_n(1)| \leqslant R} \left(1 - \frac{z}{a_n(1)}\right).$$

При фиксированном $z\,(|z|<R)$ и R занумеруем $\Phi_k(z)$ в порядке невозрастания их модулей:

$$|\Phi_{\alpha_k}(z)| \geqslant |\Phi_{\alpha_{k+1}}(z)|,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ q$$

и положим (см. [1, 4])

$$u_R(z)=\max_{1\leqslant n\leqslant p}\ \ln\left|\frac{g_n(z)}{g_R(z)}\right|=\max_{1\leqslant n\leqslant p}\ \ln|g_n(z)|-$$
$$-\ln|g_R(z)|=u(z)-\ln|g_R(z)|.$$

Для любого n, $1\leqslant n\leqslant p$ (см. [1, 4])

$$\left|\frac{g_n(z)}{g_R(z)}\right|\leqslant C\cdot|\Phi_{\alpha_k}(z)|,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ q-p+1,$$

поэтому

$$(q-p+1)\,u(z)-(q-p+1)\ln|g_R(z)|=(q-p+1)\,u_R(z)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{q-p+1}\ln^+|\Phi_{\alpha_k}(z)|+C\leqslant\sum_{k=1}^{q}\ln^+|\Phi_k(z)|+C.$$

Таким образом, $(r<R)$,

$$(q-p+1)\,u(re^{i\Theta})\leqslant\sum_{k=1}^{q}\ln|\Phi_k(re^{i\Theta})|+$$
$$+\sum_{k=1}^{q}\ln^+\frac{1}{|\Phi_k(re^{i\Theta})|}+C+(q-p+1)\ln|g_R(re^{i\Theta})|,$$

откуда при $|z|=r<R$ получаем

$$(q-p+1)\cdot T(r,\ \vec{G})\leqslant\sum_{k=1}^{q}N(r,\ 0,\ F_k)+C+$$
$$+\sum_{k=1}^{q}m(r,\ 0,\ \Phi_k)=\sum_{k=1}^{q}N(r,\ \vec{a}_k,\ \vec{G})+\sum_{k=1}^{q}m(r,\ 0,\ \Phi_k)+C. \quad (2.7)$$

Далее нам необходимо исследовать рост величин $m(r,\ o,\ \Phi_k)$ при r и $R\nearrow\infty$. Для этого используем такие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (см. [6, с. 299]). *Если для некоторого* γ, $0<\gamma<1$

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{T(r,\ \vec{G})}{r^\gamma}=0,\ \varlimsup_{r\to\infty}\frac{T(r,\ \vec{G})}{r^\gamma}=\infty,$$

то для любого ε, $0<\varepsilon<1$ *найдутся две последовательности* $r_k\nearrow\infty$ *и* $R_k\nearrow\infty$ *такие, что*

$$\text{а)}\quad T(t,\ \vec{G})\leqslant\left(\frac{t}{r_k}\right)^\gamma\cdot T(r_k,\ \vec{G}),\ 1\leqslant t\leqslant R_k, \quad (2.8)$$

$$\text{б)}\quad r_k<\varepsilon\cdot R_k.$$

Положим теперь

$$\hat{\Phi}_1(z, R) = \prod_{|a_n(1)| \leqslant R} \left(1 - \frac{z}{|a_n(1)|}\right) = \hat{\alpha}_1(z, R),$$

$$\Phi_k(z, R) = \prod_{|a_n(k)| \leqslant R} \left(1 - \frac{z}{|a_n(k)|}\right) \cdot W_R(z, k) = \hat{\alpha}_k(z, R)\, W_R(z, k),$$

где $W_R(z, k)$ определяется соотношением (2.3). Очевидно,

$$N(r, 0, \hat{\Phi}_k) = N(r, 0, F_k) + n(0, F_k) \ln r.$$

В силу (2.4) при $r \leqslant 0{,}5R$ [6, с. 300]

$$T(r, \Phi_k) \leqslant T(r, \hat{\Phi}_k) \leqslant T(r, \hat{\alpha}_k) + C\frac{r}{R} T(2R, \vec{G}) + C \ln r. \quad (2.9)$$

Заметим далее, что в рассматриваемом нами случае соотношение (2.8) выполняется при некотором γ, $0 < \gamma < 1$. Положим в (2.9) $r = r_k$ и $2R = R_k$, где r_k и R_k определяются соотношением (2.8).

В силу (2.8)

$$\frac{r}{R} T(2R, \vec{G}) \leqslant 2^{\gamma} \left(\frac{r}{R}\right)^{1-\gamma} T(r, \vec{G}) \leqslant C\varepsilon^{1-\gamma} T(r, \vec{G}).$$

Поэтому (2.9) принимает вид

$$T(r, \Phi_k) \leqslant T(r, \hat{\alpha}_k) + C \cdot \varepsilon^{1-\gamma} T(r, \vec{G}) + C \cdot \ln r. \quad (2.10)$$

Лемма 2. (см. [6, с. 296]). *Пусть $F(z)$, $F(0) = 1$ целая функция рода нуль с положительными нулями. Обозначим через B множество (возможно пустое) тех значений r, $0 < r < \infty$, для которых выполняется*

$$T(r, F) = N(r, 0, F).$$

Для каждого $r \bar{\in} B$ найдется $\beta(r)$, $0 < \beta(r) < \pi$, такое, что

$$T(r, F) = \int_0^{\infty} N(t, 0, F)\, P(t, r, \beta(r))\, dt, \quad (2.11)$$

где

$$P(t, r, \theta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{t - re^{i\Theta}}.$$

Зафиксируем некоторую пару (r_k, R_k) $(r_k > r_0)$, определенную соотношением (2.8). Предположим, что при этом найдется $\mu = \mu(r_k)$ функций[1]

$$\hat{\alpha}_{\Theta_1}(\zeta), \ \ldots, \ \hat{\alpha}_{\Theta_\mu}(\zeta),$$

[1] Напомним, что

$$\hat{\alpha}_k(z) = \hat{\alpha}_k(z, R) = \prod_{0 < |a_n(k)| \leqslant R} \left(1 - \frac{z}{a_n(k)}\right).$$

для которых при $|\zeta| = r_k = r$

$$T(r, \hat{\alpha}_{\Theta_\nu}) = N(r, 0, \hat{\alpha}_{\Theta_\nu}). \tag{2.12}$$

При $r_k = r \leqslant R = 0{,}5 \cdot R_k$ у нас

$$N(r, 0, \hat{\alpha}_{\Theta_\nu}) = N(r, 0, \hat{\Phi}_{\Theta_\nu})$$

и соотношение (2.10)) дает для данной фиксированной пары (r_k, R_k)

$$m(r, 0, \Phi_{\Theta_\nu}) \leqslant C \cdot \varepsilon^{1-\gamma} \cdot T(r, \vec{G}) + C \cdot \ln r. \tag{2.13}$$

Для $q - \mu$ функций

$$\left\{\hat{\alpha}_{\nu_n}(\zeta)\right\}_{n=1}^{q-\mu}$$

соотношение (2.12) не имеет места для выбранной пары (r_k, R_k). В этом случае равенство (2.11) дает

$$T(r, \hat{\alpha}_{\nu_n}) = \int_0^\infty N(t, 0, \hat{\alpha}_{\nu_n}) \cdot P(t, r, \beta_{\nu_n})\, \mathrm{dt}.$$

Заметим далее, что при $t \leqslant R$

$$N(t, 0, \hat{\alpha}_{\nu_n}) = N(t, 0, \hat{\Phi}_{\nu_n}) \leqslant N(t, 0, \Phi_{\nu_n}) + C \ln r,$$

а при $t > R$

$$N(r, 0, \hat{\alpha}_{\nu_n}) \leqslant N(R, 0, \Phi_{\nu_n}) + n(R, 0, \Phi_{\nu_n}) \cdot \ln\frac{t}{R} +$$

$$+ C \cdot \ln r \leqslant 2 \cdot T(2R, \vec{G}) \cdot \ln\frac{et}{R} + C \ln r.$$

Таким образом, (см. [6, с. 302])

$$T(r, \hat{\alpha}_{\nu_n}) \leqslant \int_0^R N(t, \vec{a}_{\nu n}, \vec{G}) \cdot P(t, r, \beta_{\nu_n})\, \mathrm{dt} +$$

$$+ C \cdot \frac{r}{R} \cdot T(2R, \vec{G}) + C \cdot \ln r.$$

Поэтому при $\lambda < 0{,}5$, $r = r_k > r_0$

$$\sum_{n=1}^{q-\mu} m(r, 0, \Phi_{\nu_n}) \leqslant \sum_{n=1}^{q-\mu} m(r, 0, \hat{\Phi}_{\nu_n}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{q-\mu} m(r, 0, \hat{\alpha}_{\nu_n}) + C \cdot \frac{r}{R} \cdot T(2R, \vec{G}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{q-\mu} T(r, \hat{\alpha}_{\nu_n}) - \sum_{n=1}^{q-\mu} N(r, 0, \hat{\alpha}_{\nu_n}) + \tag{2.14}$$

$$+C\cdot\frac{r}{R}\cdot T(2R,\vec{G})\leqslant\sum_{n=1}^{q-\mu}\int_0^R N(t,\vec{a}_{\nu n},\vec{G})\cdot P(t,r,\beta_{\nu_n})\,\mathrm{dt}+$$

$$+C\cdot\frac{r}{R}\cdot T(2R,\vec{G})+C\cdot\ln r-\sum_{n=1}^{q-\mu}N(r,0,F_{\nu_n})\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{q-\mu}(1+\varepsilon-\delta(\vec{a}_{\nu_n}))\int_{r_0}^R T(t,\vec{G})\cdot P(t,r,\beta_{\nu_n})\,\mathrm{dt}+$$

$$+C\cdot\varepsilon^{1-\gamma}\cdot T(r,\vec{G})+C\cdot\ln r+C-\sum_{n=1}^{q-\mu}N(r,0,F_{\nu_n}).$$

Используем далее такую оценку (см. [6, с. 303]) (у нас $\gamma<$ $<0,5+\varepsilon_1$):

$$\int_{r_0}^R T(t,\vec{G})\cdot P(t,r,\beta_{\nu_n})\,\mathrm{dt}\leqslant T(r,\vec{G})\int_{r_0}^R\left(\frac{t}{r}\right)^{\gamma}\cdot P(t,r,\beta_{\nu_n})\,\mathrm{dt}\leqslant$$

$$\leqslant T(r,\vec{G})\cdot\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{r}\right)^{\gamma}\cdot P(t,r,\beta_{\nu_n})\,\mathrm{dt}= \qquad (2.15)$$

$$=T(r,\vec{G})\cdot\frac{\sin(\pi-\beta_{\nu_n})\gamma}{\sin\pi\gamma}\leqslant(1+\varepsilon)\cdot T(r,\vec{G}).$$

Замечая, что при $r>r_0(q)$

$$[1+\varepsilon-\delta(\vec{a}_k,\vec{G})]\cdot T(r,\vec{G})\geqslant N(r,0,F_k),$$

мы из (2.14) и (2.15) получаем

$$\sum_{n=1}^{q-\mu}m(r,0,F_{\nu_n})\leqslant\sum_{n=1}^{q}(1+\varepsilon)(1+\varepsilon-\delta(\vec{a}_n,\vec{G}))\cdot T(r,\vec{G})+$$

$$+C\cdot\varepsilon^{1-\gamma}\cdot(T)r,\vec{G})+C\cdot\ln r+C-\sum_{n=1}^{q}N(r,0,F_n). \qquad (2.16)$$

Из (2.7), (2.13) и (2.16) находим ($r=r_k>r_0$ фиксировано)

$$(q-p+1)\cdot T(r,\vec{G})\leqslant\sum_{n=1}^{q}(1+\varepsilon)\cdot(1+\varepsilon-\delta(\vec{a}_n,\vec{G}))\cdot T(r,\vec{G})+$$

$$+C\cdot\varepsilon^{1-\gamma}\cdot T(r,\vec{G})+C\cdot\ln r.$$

Разделив это соотношение на $T(r,\vec{G})$, а затем устремив $r=r_k$ к ∞ и ε к 0, получаем теорему для целой кривой нерегулярного роста.

Проведем теперь доказательство теоремы для целых кривых регулярного роста, т. е. с $\lambda=\rho\leqslant 0,5$. Пусть целая функция $F_k(z)$ определена соотношением (2.1), $\{a_n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ $(a_n(k)\neq 0)$, поледовательность ее корней и γ_k — кратность корня в нуле. Рассмотрим целую функцию

$$\Phi_k(z) = z^{\gamma_k} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n(k)}\right),$$

(сходимость произведения вытекает из того, что

$$N(r, 0, F_k) \leqslant T(r, \vec{G}) + C).$$

Таким образом, функция

$$S_k(z) = \frac{F_k(z)}{\Phi_k(z)}$$

целая функция без корней. Из соотношения (см. [1, с. 294, $k = 2, 3, 4, \ldots, q$)

$$T\left(r, \frac{S_k}{S_1}\right) \leqslant T\left(r, \frac{F_k}{F_1}\right) + T\left(r, \frac{\Phi^1}{\Phi_k}\right) \leqslant$$

$$\leqslant T(r, \vec{G}) + T(r, \Phi_k) + T(r, \Phi_1) + O(1)$$

легко следует, что порядок целой функции без корней $\frac{S_k(z)}{S_1(z)}$ меньше единицы, значит, при $k = 2, 3, 4, \ldots, q$

$$S_k(z) = C_k \cdot S_1(z) = C_k \cdot \exp g(z).$$

Таким образом, для выбранной системы векторов $\{\vec{a}_k\}_{k=1}^{q}$ имеем

$$F_k(z) = C_k \cdot z^{\gamma_k} \cdot \exp g(z) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n(k)}\right),$$

где $g(z)$ целая функция.

Рассмотрим аналогично, как и выше, вспомогательную целую кривую

$$\vec{G}_0(z) = \left\{\frac{g_1(z)}{S_1(z)}, \ldots, \frac{g_p(z)}{S_1(z)}\right\}.$$

Легко проверить справедливость таких соотношений:

$$T(r, \vec{G}) = T(r, \vec{G}_0),\ m(r, \vec{a}_k, \vec{G}) = m(r, \vec{a}_k, \vec{G}_0),$$

$$F_k(z) = (\vec{G}(z) \cdot \vec{a}_k) = \exp g(z) \cdot (\vec{G}_0(z)\, \vec{a}_k) =$$

$$= \exp g(z) \cdot \Phi_k(z),\ N(r, \vec{a}_k, \vec{G}) = N(r, \vec{a}_k, \vec{G}_0),$$

$$\delta(\vec{a}_k, \vec{G}) = \delta(\vec{a}_k, \vec{G}_0).$$

Следовательно, достаточно ограничиться исследованием величин дефектов целой кривой $\vec{G}_0(z)$. Аналогично, как и при доказательстве соотношения (2.7), получаем

$$(q-p+1)\cdot T(r,\ \vec{G}_0) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{q} N(r,\ \vec{a}_k,\ \vec{G}_0) + \sum_{k=1}^{q} m(r,\ 0,\ \Phi_k) + C. \tag{2.17}$$

Для исследования роста функций $m(r,\ 0,\ \Phi_k)$ нам понадобится такое утверждение (см. [6, с. 299]).

Лемма 2.3 *Пусть целая кривая* $\vec{G}_0(z)$ *имеет конечный порядок* ρ. *Для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *найдется неограниченная последовательность значений* $r = r_k$ *такая, что*

$$T(t,\ \vec{G}_0) \leqslant \left(\frac{t}{r_k}\right)^{\rho-\varepsilon} \cdot T(r_k,\ \vec{G}_0), \quad 1 \leqslant t \leqslant r_k;$$

$$T(t,\ \vec{G}_0) \leqslant \left(\frac{t}{r_k}\right)^{\rho+\varepsilon} \cdot T(r_k,\ \vec{G}_0), \quad r_k \leqslant t < \infty. \tag{2.18}$$

Положим при $k = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ q$

$$\hat{\Phi}_k(z) = \prod_{0<|a_n(k)|} \left(1 - \frac{z}{|a_n(k)|}\right).$$

Пусть для фиксированного r_k ($r_k > r_0$) из неограниченной последовательности значений r, определенной соотношением (2.18), имеется $\mu = \mu(r_k)$, $(0 \leqslant \mu \leqslant q)$ функций

$$\hat{\Phi}_{\theta_1}(\zeta), \ldots, \hat{\Phi}_{\theta_\mu}(\zeta),$$

для которых при $|\zeta| = r_k = r$ выполняется соотношение

$$T(r,\ \hat{\Phi}_{\theta_\nu}) = N(r,\ o,\ \hat{\Phi}_{\theta_\nu}). \tag{2.19}$$

Из (2.19) получаем ($r = r_k$ фиксировано)

$$m(r,\ o,\ \Phi_{\theta_\nu}) \leqslant m(r,\ o,\ \hat{\Phi}_{\theta_\nu}) = O.$$

Таким образом, для этого фиксированного значения $r = r_k$ ($r_k > r_0$) соотношение (2.17) принимает вид

$$(q-p+1)\cdot T(r,\ \vec{G}_0) \leqslant \sum_{k=1}^{q} N(r,\ \vec{a}_k,\ \vec{G}_0) + C +$$

$$+ \sum_{n=1}^{q-\mu} m(r,\ 0,\ \Phi_{\nu_n}).$$

Для оставшихся $q-\mu$ функций $\{\Phi_{\nu_n}(z)\}_{n=1}^{q-\mu}$ при выбраннном $r=r_k$ соотношение (2.19) не выполняется. В этом случае соотношение (2.11) дает

$$T(r, \hat{\Phi}_{\nu_n}) = \int_0^\infty N(t, o, \hat{\Phi}_{\nu_n}) \cdot P(t, r, \beta_{\nu_n})\,\mathrm{dt}.$$

Поэтому (см. [7, с. 173]) при $\rho \leqslant 0{,}5$, $r=r_k>r_0$

$$\sum_{n=1}^{q-\mu} m(r, o, \Phi_{\nu_n}) \leqslant \sum_{n=1}^{q-\mu} m(r, o, \hat{\Phi}_{\nu_n}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{q-\mu} T(r, \hat{\Phi}_{\nu_n}) - \sum_{n=1}^{q-\mu} N(r, o, \hat{\Phi}_{\nu_n}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{q-\mu} \int_0^\infty N(t, o, \hat{\Phi}_{\nu_n}) P(t, r, \beta_{\nu_n})\,\mathrm{dt} -$$

$$- \sum_{n=1}^{q-\mu} N(r, o, \hat{\Phi}_{\nu_n}) \leqslant - \sum_{n=1}^{q-\mu} N(r, o, \Phi_{\nu_n}) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{q-\mu} \int_{t_0}^\infty N(t, o, \Phi_{\nu_n}) \cdot P(t, r, \beta_{\nu_n})\,\mathrm{dt} +$$

$$+ C \cdot \ln r + \sum_{n=1}^{q-\mu} \int_0^{t_0} N(t, o, \Phi_{\nu_n}) \cdot P(t, r, \beta_{\nu_n})\,\mathrm{dt} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{q-\mu} [1+\varepsilon-\delta(\vec{a}_{\nu_n}, \vec{G}_0)] \cdot \int_{t_0}^\infty T(t, \vec{G}_0) \cdot P(t, r, \beta_{\nu_n})\,\mathrm{dt} -$$

$$- \sum_{n=1}^{q-\mu} N(r, o, \Phi_{\nu_n}) + C \cdot \ln r \leqslant C \cdot \ln r +$$

$$+ \sum_{n=1}^{q-\mu} (1+\varepsilon)[1+\varepsilon-\delta(\vec{a}_{\nu_n}\vec{C}_0] \cdot T(r, \vec{G}_0) - \sum_{n=1}^{q-\mu} N(r, o, \Phi_{\nu_n}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{q} (1+\varepsilon)[1+\varepsilon-\delta(\vec{a}_n, \vec{G}_0)] \cdot T(r, \vec{G}_0) -$$

$$- \sum_{n=1}^{q} N(r, o, \Phi_n) + C \ln r.$$

Из этого соотношения аналогично, как и выше, получаем теорему 1 в случае $\lambda=\rho\leqslant 0{,}5$.

Теорема 1 доказана полностью.

В заключение приведем следующую теорему, которая доказывается предыдущим методом.

Теорема 2. *Если нижний порядок p-мерной целой криоой $\vec{G}(z)$ $0{,}5 < \lambda < 1$, то для любых p векторов из допустимой системы A справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{p} \delta(\vec{a}_k, \vec{G}) \leqslant p - \sin \pi\lambda. \tag{2.20}$$

Оценка (2.20) также точная.

Замечание. При $\lambda = 0$ оценка (1.3) следует из результатов работ [3] и [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдберг А. А. Некоторые вопросы теории распределения значений. Дополнение к книге Г. Виттиха «Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., Физматгиз, 1960. 630 с.
2. Петренко В. П., Хуссайн М. О росте целых кривых. — «Изв. АН СССР», сер. матем., 1973, т. 37, № 2, с. 466—477.
3. Петренко В. П. О величинах отклонений целых кривых нижнего порядка $\lambda < 1$. — ДАН СССР, 1972, т. 207, № 3, с. 538—540.
4. Cartan H. Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes donnes. — «Mathematica», 1933, vol. 7, p. 5—33.
5. Хуссайн М. О дефектах и величинах отклонений целых кривых. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 20, Харьков, 1974, с. 161—171.
6. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.
7. Хейман У. Мероморфные функции. М., «Мир», 1966. 287 с.
8. Toda N. Sur la croissance de fonctions algébroïdes a valeurs déficientes. — «Kodai Math. Semin. Repts», 1970, vol. 22, № 3, p. 324—337.