УДК 517.522.2

Нгуен Тхыонг Уен

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПЛОСКОСТИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА И НОРМАЛЬНОГО ТИПА

Эта статья примыкает к предыдущей статье [1], в которой были установлены условия необходимые и условия достаточные для того, чтобы данная последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, \mathrm{Jm}\,\lambda_n > 0$ обладала следующим свойством: для каждой последовательности чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \ln |a_n|}{\ln |\lambda_n|} \leqslant \rho,$$

существует функция $f(z)$ голоморфная и порядка $\leqslant \rho$ в полуплоскости $\mathrm{Jm}\,z > 0$, решающая интерполяционную задачу $f(\lambda_n) = a_n$.

Здесь мы рассматриваем несколько более тонкую задачу об интерполяции с помощью функций порядка меньшего, чем ρ, или порядка равного ρ $(\rho > 1)$ и типа не высшего, чем нормальный в полуплоскости $\mathrm{Jm}\,z > 0$. Этот класс функций мы будем обозначать $[\rho, \infty)^+$.

Последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\mathrm{Jm}\,\lambda_n > 0$ мы будем называть интерполяционной в классе $[\rho, \infty)^+$, если для каждой последовательности комплексных чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{|\lambda_n|^\rho} < \infty,$$

можно построить функцию $f(z) \in [\rho, \infty)^+$, решающую интерполяционную задачу $f(\lambda_n) = a_n \ (n = 1, 2, \ldots)$.

Для целых функций класса $[\rho, \infty)$ подобная задача была изучена в работах А. Ф. Леонтьева [2, 3]; затем О. С. Фирсаковой [4]; И. Ф. Лохина [5] и других авторов[1].

А. Ф. Леонтьев [2] показал для случая целых функций, что при нецелом ρ для того, чтобы последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ была интерполяционной в классе $[\rho, \infty)$, необходимо и достаточно выполнения двух условий:

$$1) \quad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r)}{r^\rho} < \infty,$$

$$2) \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|^\rho} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} < \infty,$$

где $L(z)$ есть каноническое произведение, отвечающее последовательности Λ, а $n(r)$ — число точек $\lambda_n \in \Lambda$ в круге $|z| < r$.

Случай целого порядка существенно сложнее. А. Ф. Леонтьев [3] и О. С. Фирсакова [4] независимо друг от друга нашли и в этом случае необходимые и достаточные условия интерполяционности последовательности Λ.

В нашей статье мы переносим эти результаты на функции, голоморфные в полуплоскости. При этом мы ограничиваемся случаем $\rho > 1$.

Заметим, что полное решение задачи об интерполяционности последовательности Λ в классе функций, аналитических и ограниченных в полуплоскости $\operatorname{Jm} z > 0$, было дано Л. Карлесоном [6]. Изложение и библиография есть в книге [7].

Для формулировки результата нам понадобятся некоторые факты из теории аналитических функций конечного порядка в полуплоскости, установленные Н. В. Говоровым в его диссертации [8] и в статьях [9, 10].

Введем определения: пусть $f(z)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости и $\lambda_n = r_n e^{i\theta_n}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ — ее корни. Определим следующие функции:

$$C(r) = \sum_{r_n \leqslant r} \sin\theta_n; \quad S_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int_1^r \ln|f(x) f(-x)|\, dx;$$

$$S_2(r) = \frac{1}{2\pi}\int_1^r d\{\varphi(x) - \varphi(-x)\}; \quad S_3(r) = \sum_{r_n \leqslant r} r_n \sin\theta_n,$$

[1] Другие литературные ссылки см. в статье [1].

где $\varphi(x)$ — сингулярная часть граничной функции для $f(z)$, т. е

$$\varphi(t_2)-\varphi(t_1)=\lim_{y\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\ln|f(x+iy)|\,dx-\int_{t_1}^{t_2}\ln|f(x)|\,dx.$$

Введем еще следующие величины:

$$T_1(\alpha)=\sum_{r_n>1} r_n^{-\alpha}\sin\theta_n,$$

$$T_2(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|d\varphi(t)|}{1+|t|^{\alpha+1}},$$

$$T_3(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u(t)|\,dt}{1+|t|^{\alpha+1}},$$

где $u(t)=\ln|f(t)|$ почти всюду при $-\infty<t<\infty$. Кроме того, мы будем пользоваться следующим обозначением:

$$E_p(u,v)=\left(1-\frac{u}{v}\right)\left(1-\frac{u}{\bar v}\right)^{-1}\exp\sum_{j=1}^{p}\frac{u^j}{j}\left(\frac{1}{v^j}-\frac{1}{\bar v^j}\right).$$

Теорема (Н. В. Говоров [8, 9]). *Всякая функция $f(z)$ аналитическая и порядка*[1] $\rho\geqslant 0$ *в полуплоскости* $\mathrm{Jm}\,z>0$ *представима в виде*

$$f(z)=z^m e^{i\sum\limits_{j=1}^{p}a_jz^j}\prod_{r_n\leqslant 1}\frac{z-\lambda_n}{z-\bar\lambda_n}\prod_{r_n>1}E_p(z,\lambda_n);\tag{1}$$

$$\exp\frac{1}{\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(tz+1)^{p+1}u(t)\,dt}{(t^2+1)^{p+1}(t-z)}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(tz+1)^{p+1}}{(t^2+1)^{p+1}}\frac{d\varphi(t)}{(t-z)}\right\},$$

где $p=[\rho]$; a_j — *вещественные числа;*

$\lambda_n=r_ne^{i\theta_n}$ — *нули функции* $f(z)$, *лежащие в полуплоскости* $\mathrm{Jm}\,z>0$.

Кроме того, при любом $\varepsilon>0$ *справедливы соотношения*

$$T_j(\mu+\varepsilon)<\infty,\ j=1,2,3.$$

Здесь

$$\mu=\max(\rho;\ 1)\tag{2}$$

---

[1] Понятие порядка функции в полуплоскости дано в [8, 9] и [13]. Мы приводим его в нашей предыдущей статье [1].

Лемма 1.[1] *Если* $f(z)$ — *аналитическая функция нормального типа при порядке* $\rho > 1$ *в полуплоскости* $\operatorname{Jm} z > 0$, *то*

$$C(r) < K_1 r^\rho; \quad \int_1^r \frac{1}{x} \left| d\{\varphi(x) - \varphi(-x)\} \right| < K_2 r^\rho. \tag{3}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\sigma(r) = S_3(r) - S_1(r) - S_2(r).$$

Тогда формулу Карлемана [8] можно написать в виде

$$\int_1^r \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right) d\sigma(x) = \frac{1}{\pi r} \int_0^\pi \ln |f(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta + 0(1), \quad (r \to \infty).$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_1^r \frac{\sigma(x)\, dx}{x^3} = \frac{1}{2\pi r} \int_0^\pi \ln |f(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta + 0(1),$$

или иначе

$$\int_1^r \frac{S_3(x) - S_2(x)}{x^3} dx = \frac{1}{2\pi r} \int_0^\pi \ln |f(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_1^r \frac{1}{x^3} \left\{ \int_1^x \ln |f(t) f(-t)| \, dt \right\} dx + 0(1).$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$\int_1^r \frac{S_3(x) - S_2(x)}{x^3} dx \leqslant \frac{\sigma_f + \varepsilon}{\pi} \frac{\rho}{\rho - 1} r^{\rho-1} + 0(1) < K r^{\rho-1}.$$

Так как $-S_2(x) > 0$, то из этого неравенства получаем

$$\int_1^r \frac{S_3(x)}{x^3} dx < K r^{\rho-1}; \quad - \int_1^r \frac{S_2(x)}{x^3} dx < K r^{\rho-1}.$$

Из первого неравенства следует, что при $r \geqslant 2$ имеет место соотношение

$$\int_{r/2}^r \frac{S_3(x)}{x^3} dx < K r^{\rho-1}.$$

---

[1] Эта лемма была доказана Н. В. Говоровым для $\rho > 0$ и функции $f(z)$ вполне регулярного роста. Оказывается при $\rho > 1$ условие, чтобы функция $f(z)$ была функцией вполне регулярного роста, можно отбросить.

В силу монотонности функции $S_3(x)$ получим

$$S_3\left(\frac{r}{2}\right) < Kr^{\rho+1}.$$

Функция $C(r)$ может быть представлена в форме

$$C(r) = \int_1^r \frac{dS_3(t)}{t}.$$

Интегрирование правой части этого равенства по частям показывает, что

$$C(r) < K_1 r^\rho.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_1^r \frac{1}{x} \left| d\{\varphi(x) - \varphi(-x)\} \right| < K_2 r^\rho.$$

Тем самым наша лемма доказана.

Теорема 1. *Если последовательность* $\{\lambda_n\}$ *обладает тем свойством, что при нецелом* ρ

$$C(r) = 0(r^\rho) \quad (r \to \infty), \tag{4}$$

а при целом ρ

$$C(r) = 0(r^\rho) \quad (r \to \infty), \tag{5а}$$

$$\left| \sum_{r_n \leqslant r} \frac{\sin \rho\theta_n}{r_n^\rho} \right| = 0(1) \quad (r \to \infty), \tag{5б}$$

то функция

$$E(z) = \prod_{r_n \leqslant 1} \frac{z - \lambda_n}{z - \bar{\lambda}_n} \prod_{r_n > 1} E_p(z, \lambda_n) \tag{6}$$

принадлежит классу $[\rho, \infty]^+$.

Доказательство. Представим $E(z)$ в виде

$$E(z) = E^{(1)}(z)\, E^{(2)}(z)\, E^{(3)}(z),$$

где

$$E^{(1)}(z) = \prod_{r_n \leqslant 1} \frac{z - \lambda_n}{z - \bar{\lambda}_n},$$

$$E^{(2)}(z) = \prod_{1 < r_n \leqslant 2r} E_p(z, \lambda_n); \quad E^{(3)}(z) = \prod_{r_n > 2r} E_p(z, \lambda_n).$$

Далее имеем

$$\ln E^{(3)}(z) = \sum_{r_n > 2r} \left\{ \ln\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) - \ln\left(1 - \frac{z}{\bar{\lambda}_n}\right) + \sum_{j=1}^{p} \frac{z^j}{j} \left(\frac{1}{\lambda_n^j} - \frac{1}{\bar{\lambda}_n^j}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{r_n > 2r} \sum_{j=p+1}^{\infty} \frac{z^j}{j} \left(\frac{1}{\bar{\lambda}_n^j} - \frac{1}{\lambda_n^j}\right).$$

Следовательно, $\ln E^{(3)}(z)$ допускает оценку

$$|\ln E^{(3)}(z)| \leqslant 2 \sum_{r_n > 2r} \sum_{j=p+1}^{\infty} \frac{r^j}{j} \frac{|\sin j\theta_n|}{r_n^j}.$$

Поскольку $|\sin j\theta| \leqslant j \sin\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, то имеем

$$|\ln E^{(3)}(z)| \leqslant 2 \sum_{r_n > 2r} \frac{r^{p+1}}{r_n^{p+1}} \sin\theta_n \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^j <$$

$$< 4 \sum_{r_n > 2r} \frac{r^{p+1}}{r_n^{p+1}} \sin\theta_n = 4r^{p+1} \int_{2r}^{\infty} \frac{dC(t)}{t^{p+1}} <$$

$$< 4(p+1) r^{p+1} \int_{2r}^{\infty} \frac{C(t)\,dt}{t^{p+2}} < \frac{2^{\rho+1-p}(p+1)}{p+1-\rho} K r^{\rho}.$$

Итак, мы показали, что справедлива оценка

$$|\ln E^{(3)}(z)| < K_1 r^{\rho}. \tag{7}$$

Теперь получим оценку для $E^{(2)}(z)$. Имеем

$$\ln E^{(2)}(z) = \sum_{1 < r_n \leqslant 2r} \ln\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)\left(1 - \frac{z}{\bar{\lambda}_n}\right)^{-1} + \ln E_1^{(2)}(z),$$

где

$$\ln E_1^{(2)}(z) = \sum_{1 < r_n \leqslant 2r} \sum_{j=1}^{p} \frac{z^j}{j} \left(\frac{1}{\lambda_n^i} - \frac{1}{\bar{\lambda}_n^j}\right).$$

$\ln E_1^{(2)}(z)$ допускает следующую оценку сверху:

$$|\ln E_1^{(2)}(z)| \leqslant \sum_{j=1}^{p} \left| 2r^j \sum_{1 < r_n \leqslant 2r} \frac{\sin j\theta_n}{j r_n^j} \right| = \sum_{j=1}^{p} J_j.$$

Рассматриваем каждое слагаемое J_j. Если $j < p$, то

$$J_j \leqslant 2r^j \sum_{1 < r_n \leqslant 2r} \frac{\sin\theta_n}{r_n^j} = 2r^j \int_1^{2r} \frac{dC(t)}{t^j} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-j} C(2r) + 2jr^j \int_1^{2r} \frac{C(t)}{t^{j+1}} dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-j} C(2r) + \frac{jK}{\rho - j} r^\rho \leqslant M_j r^\rho. \tag{8}$$

Если ρ нецелое, $p < \rho$, то аналогично проведенному рассуждению получим $J_p \leqslant M_p r^\rho$. Если же $\rho = p$, то в силу условия (5) имеем

$$J_p = \frac{2r^p}{p} \left| \sum_{1 < r_n \leqslant 2r} \frac{\sin p\theta_n}{r_n^p} \right| \leqslant N_p r^p. \tag{9}$$

Из оценок (8) и (9) следует, что

$$|\ln E_1^{(2)}(z)| < Mr^\rho. \tag{10}$$

Кроме того, имеем

$$\sum_{1 < r_n \leqslant 2r} \ln \left| \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)\left(1 - \frac{z}{\bar\lambda_n}\right)^{-1} \right| \leqslant 0$$

и, следовательно,

$$\ln |E^{(2)}(z)| \leqslant Mr^\rho. \tag{11}$$

Поскольку

$$|E^{(1)}(z)| \leqslant 1, \tag{12}$$

то из (7) и (11) вытекает принадлежность $E(z)$ классу $[\rho, \infty)^+$, что и требовалось доказать.

Для дальнейшего введем в рассмотрение функцию

$$E_n(z) = \frac{\lambda_n}{\bar\lambda_n} \frac{\bar\lambda_n - z}{\lambda_n - z} E(z).$$

Для этой функции справедлива следующая

Лемма 2. *Если последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию теоремы 1, то функции $E_n\{z\}$ допускают оценку сверху, не зависящую от n, т. е. при некоторых постоянных M и N всюду в верхней полуплоскости справедливо неравенство*

$$|E_n(z)| \leqslant N \exp Mr^\rho. \tag{13}$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости неравенства (13), достаточно заметить, что при делении $E(z)$ на множитель $\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)\left(1 - \frac{z}{\bar\lambda_n}\right)^{-1}$ меняется только одна из величин $E^{(1)}(z)$, $E^{(2)}(z)$, $E^{(3)}(z)$. Если $r_n \leqslant 2r$, то меняется $E^{(1)}(z)$ или

$E^{(2)}(z)$. При этом оценки (10), (11) и (12) остаются в силе, а $E^{(3)}$ не изменится. Если же $r_n > 2r$, то имеем

$$\ln|E_n(z)| \leqslant \ln|E(z)| + \ln 3,$$

тем самым лемма доказана.

Теорема (А. Ф. Гришин [11]). *Пусть* $\mu(\zeta)$ — *мера в замкнутой полуплоскости* $\operatorname{Jm}\zeta \geqslant 0$ *и*

$$\int\limits_{\operatorname{Jm}\zeta \geqslant 0} d\mu(\zeta) = S.$$

Тогда существует такая абсолютная постоянная B, *что*

$$\int\limits_{\operatorname{Jm}\zeta \geqslant 0} \frac{1}{\sin\theta} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| d\mu(\zeta) > -BMS$$

при всех z, *не принадлежащих системе кружков* $\{c_n\}$ *с радиусами* γ_n *и центрами в некоторых точках* λ_n *такими, что*

$$\frac{1}{r}\sum_{r_n \leqslant n} \gamma_n < \frac{1}{M}.$$

Теорема 2. *Пусть последовательность точек* $\Lambda = \{\lambda_n\}$ *в верхней полуплоскости удовлетворяет условию теоремы 1. Тогда существует постоянная* C *такая, что для всех* z *в полуплоскости* $\operatorname{Jm} z \geqslant 0$, *но вне системы кружков, верхняя линейная плотность которой не превосходит* $\frac{1}{M}$, *выполняется неравенство*[1]

$$|E(z)| > \exp(-MCr^{\rho}). \tag{14}$$

Доказательство. Из оценок (7) и (10) следует, что имеет место неравенство во всей полуплоскости $\ln|\pi| \geqslant -|\ln|\pi|| \geqslant$

$$\ln|E(z)| \geqslant \sum_{r_n \leqslant 2r} \ln\left|\frac{z-\lambda_n}{z-\bar{\lambda}_n}\right| - Kr^{\rho}.$$ $\geqslant -(|\ln|\pi_n|| + |\ln$

В силу теоремы А. Ф. Гришина имеем, что неравенство

$$\ln|E(z)| > -Kr^{\rho} - M_1 BC(2r) \tag{15}$$

выполняется в той же области, но вне таких исключительных кружков c_n с радиусами γ_n и центрами в точках λ_n, что

$$\frac{1}{2r}\sum_{r_n \leqslant 2r} \gamma_n < \frac{1}{M_1}.$$

При этом исключительные кружки зависят от величины r. Покажем, что можно освободиться от этой зависимости. Выберем последовательность $R_i = 2^i R$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Построим в каждом

[1] Это утверждение по сути дела было доказано в статье А. Ф. Гришина [11, с. 83—84]. Однако оно там не выделено и поэтому мы проводим независимое доказательство.

полукруге $\{|z| \leqslant R_i;\ \mathrm{Jm}\, z \geqslant 0\}$ соответствующую систему кружков $c_n^{(i)}$. Через $\{c_n\}$ обозначим систему кружков $c_n^{(i)}$, центры которых попали в полукольцо $\{R_{i-1} \leqslant |z| < R_i;\ \mathrm{Jm}\, z \geqslant 0\}$. Убеждаемся в том, что $\{c_n\}$ является искомой системой кружков. Действительно, для любого r существует такое i, что $R_i \leqslant r < R_{i+1}$

$$\frac{1}{r}\sum_{r_n \leqslant r} \gamma_n = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{R_j \leqslant r_n < R_{j+1}} \gamma_n^{(j+1)} + \frac{1}{r}\sum_{R_i \leqslant r_n \leqslant r} \gamma_n^{(i+1} <$$

$$< \frac{1}{M_1}\sum_{j=0}^{i} 2^{-j} + \frac{2}{M_1} < \frac{5}{M_1}.$$

Положим $M = \frac{M_1}{5}$, тогда справедливо такое неравенство:

$$\ln |E(z)| > -Kr^\rho - 5BMC(2r)$$

или

$$|E(z)| > \exp(-MCr^\rho)$$

вне системы кружков, верхняя линейная плотность которой меньше $\frac{1}{M}$. Теорема доказана.

Для дальнейшего отметим также, что при вещественных значениях $z = x$ имеем

$$|E(x)| = 1.$$

Введем некоторые определения. Мы будем говорить, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ точек в верхней полуплоскости имеет конечную верхнюю плотность при порядке ρ, если имеет место соотношение

$$C(r) = \sum_{r_n \leqslant r} \sin\theta_n = 0(r^\rho),\ (r \to \infty).$$

Мы будем называть функцию $f(z) \in [\rho, \infty)^+$ присоединенной функцией последовательности Λ, если функция $f(z)$ имеет в точках $\lambda_n \in \Lambda$ простые корни и кроме того множество $\Xi = \{\mu_n\}$ остальных корней удовлетворяет условиям

а) $d(\Xi; \lambda_n) > \delta r_n^{1-\rho},\ \delta > 0;$

б) $\tau_{n+1} - \tau_n > \alpha\tau_n^{1-\rho};\ \alpha > 0;$

в) $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{C(r, \Xi)}{r^\rho} < \infty;$

г) при целом ρ: $\left|\sum\limits_{r_n \leqslant r} \frac{\sin\rho\theta_n}{r_n^\rho} + \sum\limits_{r_n \leqslant r} \frac{\sin\rho\vartheta_n}{\tau_n^\rho}\right| = 0(1),\ (r \to \infty),$

где $\mu_n = \tau_n e^{i\vartheta_n}$; $d(\Xi, \lambda)$ — расстояние между множеством Ξ и точкой λ;

$$C(r, \Xi) = \sum_{r_n \leqslant r} \sin \vartheta_n.$$

Существование присоединенной функции утверждает следующая

Теорема 3. *Для всякой последовательности точек Λ в верхней полуплоскости, имеющей конечную верхнюю плотность при порядке $\rho > 1$ существует присоединенная функция.*

Доказательство. Утверждение теоремы содержательно только в том случае, когда Λ имеет конечную верхнюю плотность при целом порядке $\rho > 1$ и не удовлетворяет условию (5б). В противном случае в силу теоремы 1 за присоединенную функцию можно принять функцию $E(z)$, определенную равенством (6).

Рассмотрим подмножество Λ_1 последовательности Λ такое, что

$$\Lambda_1 = \left\{\lambda_n \in \Lambda;\ \theta_n \in \left(\frac{\pi}{\rho^3},\ \pi\left(1 - \frac{1}{\rho^3}\right)\right)\right\}.$$

Из того, что

$$C(r) \leqslant Cr^\rho, \tag{16}$$

следует, что

$$n(r, \Lambda_1) \leqslant C_1 r^\rho. \tag{17}$$

Определим множество E_δ на положительной полуоси таким способом:

$$E_\delta = \bigcup_{\lambda_n \in \Lambda_1} I_\delta(\lambda_n),$$

где

$$I_\delta(\lambda_n) = \{r > 0 : |r - r_n| \leqslant \delta r_n^{1-\rho}\}.$$

Мы назовем $I_\delta(\lambda_n)$ исключительными интервалами. Найдем верхнюю линейную плотность множества E_δ:

$$\operatorname{mes}\{E_\delta \cap [0, r]\} \leqslant \delta \sum_{\substack{\lambda_n \in \Lambda_1 \\ r_n \leqslant r+\delta}} r_n^{1-\rho} = \delta \int_0^{r+\delta} t^{1-\rho} dn(t, \Lambda_1) =$$

$$= \delta n(r+\delta, \Lambda_1)(r+\delta)^{1-\rho} + \delta(\rho - 1)\int_0^{r+\delta} \frac{n(t, \Lambda_1)\, dt}{t^\rho} \leqslant$$

$$\leqslant \delta\rho C_1(r+\delta) \leqslant 2\delta\rho C_1 r.$$

Итак, мы показали, что

$$\frac{\operatorname{mes}\{E_\delta \cap [0, r]\}}{r} \leqslant 2\delta\rho C_1. \tag{18}$$

Обозначим

$$T_n = q^n, \ (n = 1, 2, \ldots),$$

q — некоторое целое число, больше чем 1,

$$E_\delta^n = E_\delta \cap [T_n, \ T_{n+1}].$$

Из оценки (18) следует, что

$$\operatorname{mes} E_\delta^n \leqslant 4\delta\rho C_1 (T_{n+1} - T_n).$$

Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ можно взять такое число $\delta > 0$, чтобы выполнялось при всех $n = 1, 2, \ldots$ неравенство

$$\operatorname{mes} E_\delta^n \leqslant \varepsilon (T_{n+1} - T_n). \tag{19}$$

Каждый интервал $[T_n, T_{n+1}]$ мы разобьем на подинтервалы одинаковой длины $\beta T_{n+1}^{1-\rho}$,

где
$$\beta = \frac{q}{16(q-1)} \{[C(\rho, q)] + 1\}^{-1}; \tag{20}$$

$$C(\rho, q) = \rho C \ln (e q^\rho).$$

Очевидно, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ среди $(T_{n+1} - T_n) : \beta T_{n+1}^{1-\rho}$ подинтервалов имеется $\{(T_{n+1} - T_n) : 2\beta T_{n+1}^{1-\rho} + 2\}$ подинтервалов, содержащих точки, которые не принадлежат множеству E_δ. Из этих $\{(T_{n+1} - T_n) : 2\beta T_{n+1}^{1-\rho} + 2\}$ подинтервалов отбросим начальный и конечный, а из остальных выберем $N_n = (T_{n+1} - T_n) : 4\beta T_{n+1}^{1-\rho}$ таких подинтервалов, чтобы никакие два из них не были соседними. На каждом подинтервале этого семейства выделим одну точку $\eta_{k,n}$, $1 \leqslant k \leqslant N_n$, не принадлежащую E_δ.

Пусть

$$\{\eta_j\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\eta_{k,n}\}_{k=1}^{N_n}.$$

Покажем, что

$$\eta_{n+1} - \eta_n > \alpha \eta_n^{1-\rho}, \tag{21}$$

где

$$\alpha = \beta q^{1-\rho}.$$

Действительно, если η_n и η_{n+1} принадлежит одному и тому же интервалу $[T_k, T_{k+1}]$, то

$$\eta_{n+1} - \eta_n > \beta T_{k+1}^{1-\rho} = \alpha T_k^{1-\rho} > \alpha \eta_n^{1-\rho}.$$

А если

$$\eta_n \in [T_k, \ T_{k+1}] \text{ и } \eta_{n+1} \in [T_{k+1}, \ T_{k+2}],$$

то

$$\eta_{n+1}-\eta_n > T_{k+1}+\beta T_{k+2}^{1-\rho}-T_{k+1}+\beta T_{k+1}^{1-\rho} > \beta T_{k+1}^{1-\rho} > \alpha\eta_n^{1-\rho}.$$

Тем самым соотношение (21) доказано.

Рассмотрим следующую сумму:

$$\sum_{T_n<\eta_k<T_{n+1}} \frac{1}{\eta_k^\rho} > \frac{N_n}{T_{n+1}^\rho} = 4\{C(\rho,\ q)]+1\}. \tag{22}$$

Теперь мы можем приступить к построению последовательности Ξ, удовлетворяющей условиям *а*, *б*, *в* и *г*. Пусть уже построены точки μ_k такие, что $|\mu_k| \leqslant T_n$. Покажем, как построить следующие точки μ_k; $T_n < |\mu_k| \leqslant T_{n+1}$.

Пусть для определенности выполняется неравенство

$$h_n = \mathrm{Im} \sum_{r_k \leqslant T_{n+1}} \frac{1}{\lambda_k^\rho} + \mathrm{Im} \sum_{\tau_k \leqslant T_n} \frac{1}{\mu_k^\rho} > 0.$$

В силу неравенства (22) и следующей оценки:

$$\left| \sum_{T_n \leqslant r_k \leqslant T_{n+1}} \frac{\sin\rho\theta_k}{r_k^\rho} \right| \leqslant \rho \int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \frac{dc(t)}{t^\rho} \leqslant C(\rho,\ q)$$

имеется число M_n такое, что $1 \leqslant M_n < N_n$

$$h_n + \sum_{j=1}^{M_n} \mathrm{Im}\frac{1}{\zeta_j^\rho} \geqslant 0$$

и

$$h_n + \sum_{j=1}^{M_n+1} \mathrm{Im}\frac{1}{\zeta_j^\rho} < 0,$$

где

$$\zeta_j = \eta_{j,\,n} e^{i\frac{\pi}{2\rho}}.$$

Итак, мы построили точки ζ_j, которые обозначим через μ_k, $\tau_k = |\mu_k| \in (T_n,\ T_{n+1}]$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность $\Xi = \{\mu_n\}$.

Отметим, что точки последовательности Ξ лежат только на двух лучах $\theta = \frac{\pi}{2\rho}$ и $\theta = \frac{3\pi}{2\rho}$. Очевидно, что последовательность Ξ удовлетворяет требованиям *а* и *б*. Покажем, что она также удовлетворяет условиям *в* и *г*. В силу неравенства (22) $n(r,\ \{\eta_j\})$ допускает оценку сверху при $r \in (T_n,\ T_{n+1}]$

$$n(r,\ \{\eta_j\}) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} N_k + 4\{[C(\rho,\ q)]+1\}\ T_{n+1}^\rho =$$

$$= 4q^\rho\{[C(\rho,\ q)]+1\}\ \frac{q^{\rho(n+1)}-q^\rho}{q^\rho-1}.$$

Следовательно, имеет место следующая оценка сверху:

$$n(r, \{\eta_j\}) \leqslant \frac{4q^{2\rho}}{q^\rho - 1}(C(\rho, q) + 1) r^\rho.$$

Из последнего неравенства следует, что *в* имеет место. Нам, остается показать, что *г* также справедливо. Действительно, для любого r найдется n такое, что $r \in [T_n, T_{n+1})$,

$$\left| \sum_{r_j \leqslant r} \frac{\sin \rho\theta_j}{r_j^\rho} + \sum_{\tau_j \leqslant r} \frac{\sin \rho\vartheta_j}{\tau_j^\rho} \right| \leqslant |h_{n-1}| + \sum_{T_n \leqslant r_j \leqslant T_{n+1}} \frac{|\sin \rho\theta_j|}{r_j^\rho} +$$

$$+ \sum_{T_n \leqslant \tau_j \leqslant T_{n+1}} \frac{|\sin \rho\vartheta_j|}{\tau_j^\rho} \leqslant \frac{q^\rho}{r^\rho} + 5(C(\rho, q) + 1) < K.$$

Искомой присоединенной функцией последовательности Λ является каноническое произведение последовательностей Λ и Ξ, т. е.

$$\hat{E}(z) = E(z) \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z, \mu_n). \qquad (23)$$

Теорема доказана.

В дальнейшем нам нужно построить целую функцию $G(z)$ нормального типа при порядке ρ, множество корней которой содержит последовательность Ξ, построенную в доказательстве теоремы 3. Мы построим последовательность $\{\mu_n'\}$ точек в нижней полуплоскости таким образом: если $\rho = 2\nu + 1$, то положим $\mu_n' = -\mu_n$, если же $\rho = 2\nu$, то положим

$$\mu_n' = \mu_n \exp i\left(1 + \frac{1}{\rho}\right)\pi.$$

За функцию $G(z)$ принимаем каноническое произведение точек $г\mu_n$ и μ_n', т. е.

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{\mu_n}, \rho\right) G\left(\frac{z}{\mu_n'}, \rho\right), \qquad (24)$$

где

$$G\left(\frac{z}{\zeta}, \rho\right) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \sum_{j=1}^{\rho} \frac{z^j}{j\zeta^j}.$$

Имеет место следующая

Лемма 3. *В точках $\lambda_n \in \Lambda$ функции $G(z)$ допускает оценку снизу*

$$\ln |G(\lambda_n)| > -N r_n^\rho, \qquad (25)$$

где N — константа, зависящая лишь от типа функции $G(z)$ и ρ.

Доказательство. Мы будем пользоваться такой оценкой (см. [12, с. 164]):

$$|\ln|F_\delta(z)||< C_\delta n_z(\delta r) + \int_0^{\delta r} \frac{n_z(t)\,dt}{t}, \qquad (26)$$

где

$$F_\delta(z) = \prod_{|a_n - z| \leqslant \delta r} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right); \quad r = |z|; \quad 0 < \delta < \frac{1}{2};$$

$a_n \in \{\mu_n\} \cup \{\mu_n'\}$; $n_z(t)$ — число точек a_n в круге радиуса t с центром в точке z; C_δ — положительная постоянная, зависящая только от δ.

Сравнивая диаметры круга $|\lambda_n - \zeta| < t \leqslant \delta r_n$ и исключительных кружков $|z - \mu_n| \leqslant \alpha r_n^{1-\rho}$, мы получим в силу условия *в* неравенство

$$n_z(t) < \frac{2t\,(r_n + t)^\rho}{\alpha\,|\tau_n - t|},$$

и при достаточно больших r_n

$$n_z(t) < C r_n^{\rho-1} t,$$

где

$$C = \frac{4\,(1+\delta)^\rho}{\alpha\,(1-\delta)}.$$

Из оценки (26) получаем при $\delta = \frac{1}{4}$

$$\ln\left|F_{\frac{1}{4}}(\lambda_n)\right| > -C_1 r_n^\rho. \qquad (27)$$

Поскольку функция $G(z)$ имеет нормальный тип при порядке ρ, то асимптотически выполняется

$$\ln|G(z)| < (\sigma_G + \varepsilon)\, r^\rho.$$

С другой стороны, по оценке модуля голоморфной функции снизу (см. [12, с. 33]) при $G(0) = 1$ для любого положительного числа $\eta \leqslant \frac{3e}{2}$ внутри круга $|z| \leqslant r$, но вне исключительных кружков, содержащих корни, с общей суммой радиусов, меньшей чем $4\eta r$, справедливо неравенство

$$\ln|G(z)| \geqslant -H(\eta)\,(\sigma_G + \varepsilon)\, r^\rho, \qquad (28)$$

где

$$H(\eta) = 2 + \ln\frac{3e}{2\eta}.$$

Точки μ_n и μ_n, содержащиеся в круге $|z|<r$, $T_n \leqslant r < T_{n+1}$, окружим кружками радиуса $\delta T_{n+1}^{1-\rho}$. Очевидно, что сумма радиусов t_s этих исключительных кружков меньше, чем $C\delta T_n$. Если $\delta > 0$ выбрать достаточно малым и если n достаточно велико, то в круге $|z-\lambda_n| < \frac{1}{4} r_n$ найдется контур, охватывающий точку λ_n, на котором выполняется неравенство (28). Так как $\left|F_{\frac{1}{4}}(\lambda_n)\right| < \exp C_2 r_n^{\rho}$, то на этом контуре имеет место оценка

$$\ln \left| \frac{G(z)}{F_{\frac{1}{4}}(z)} \right| > -\{H(\eta)(\sigma_G+\varepsilon)+C_2\} r_n^{\rho}. \tag{29}$$

Функция $\ln \left| G(z)/F_{\frac{1}{4}}(z) \right|$ — гармоническая внутри контура и на нем допускает оценку снизу (29). Из принципа минимума для гармонической функции следует, что оценка (29) имеет место и внутри этого контура, и, в частности, справедливо неравенство

$$\ln \left| \frac{G(\lambda_n)}{F_{\frac{1}{4}}(\lambda_n)} \right| > -\{H(\eta)(\sigma_G+\varepsilon)+C_2\} r_n^{\rho}.$$

Последнее неравенство вместе с (27) доказывает нашу лемму.

Лемма 4. *Пусть имеется присоединенная функция $L(z)$ последовательности Λ конечной верхней плотности при порядке $\rho > 1$. Тогда если последовательность Λ удовлетворяет условиям теоремы* 1, *то имеет место асимптотическое неравенство*

$$|L'(\lambda_n)| \leqslant |E'(\lambda_n)| \exp C r_n^{\rho}, \tag{30}$$

если же условие симметрии (5б) *нарушается, то справедливо следующее асимптотическое неравенство:*

$$|L'(\lambda_n)| \leqslant |\hat{E}'(\lambda_n)| \exp C r_n^{\rho}, \tag{31}$$

где функции $E(z)$ и $\hat{E}(z)$ определяются соответственно соотношениями (6) *и* (23).

Доказательство. Мы докажем оценку (31), а оценка (30) доказывается аналогично. Введем в рассмотрение функцию

$$\Omega(z) = \frac{L(z)\,G(z)}{\hat{E}(z)}, \tag{32}$$

где функция $G(z)$ была введена в (24). Функция $\Omega(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости. Покажем, что она принадлежит классу $[\rho, \infty)^+$. Из неравенства (14) следует, что $\Omega(z)$

допускает вне исключительного множества кружков с верхней линейной плотностью, меньшей чем $\frac{1}{M}$, следующую оценку:

$$|\Omega(z)| < N \exp(K + MC) r^{\rho}. \qquad (33)$$

Покажем, что соотношение (33) справедливо всюду. Исключительные кружки могут образовать области D_n, однако в силу того, что верхняя линейная плотность множества исключительных кружков меньше чем $\frac{1}{M}$, можно утверждать, что при $M > 2$ отношение диаметра d_n области D_n к максимальному удалению ее точек от нуля R_n удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{d_n}{R_n} < \frac{2}{M}.$$

Таким образом, при $R_n > R$ будем иметь $d_n < \frac{2}{M} R_n$. Граница исключительной области D_n состоит из дуг исключительных окружностей и отрезков вещественной оси. На вещественной оси имеем $|\hat{E}(x)| = 1$ и поэтому оценка (33) имеет место на всей границе области D_n. По принципу максимума модуля аналитической функции отсюда следует, что всюду внутри каждой исключительной области справедливо неравенство

$$|\Omega(z)| \leqslant N \exp\left\{(K + MC)\left(\frac{M}{M-2}\right)^{\rho} r^{\rho}\right\} = N \exp M_{\rho} r .$$

Тем самым мы показали, что $\Omega(z) \in [\rho, \infty)^{+}$.

В силу определения функции $\Omega(z)$ имеем

$$E'(\lambda_n)\,\Omega(\lambda_n) = L'(\lambda_n)\,G(\lambda_n).$$

Из принадлежности $\Omega(z)$ к классу $[\rho, \infty)^{+}$ и оценки снизу (25) для функции $G(z)$ в точках λ_n следует неравенство (31). Доказательство асимптотической оценки (30) несколько проще, поскольку нет необходимости пользоваться леммой 3.

Наш основной результат может быть сформулирован так.

Теорема 4. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\operatorname{Im}\lambda_n > 0$ — *последовательность точек в верхней полуплоскости. Тогда для того чтобы последовательность* Λ *была интерполяционной в классе* $[\rho, \infty)^{+}$, *где* $\rho > 1$, *необходимо, чтобы имели место следующие соотношения:*

А) *последовательность* Λ *имеет конечную верхнюю плотность при порядке* ρ;

Б) *существует хотя бы одна присоединенная функция* $L(z)$ *последовательности* Λ *такая, что справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{r_n^{\rho}} \ln \frac{1}{\operatorname{Im}\lambda_n\,|L'(\lambda_n)|} < \infty,$$

и достаточно, чтобы выполнялись условие А и

В) *хотя бы для одной присоединенной функции $L(z)$ последовательности Λ имело место соотношение*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{r_n^{\rho}} \ln \frac{1}{(\operatorname{Im} \lambda_n)^2 |L'(\lambda_n)|} < \infty.$$

Для доказательства этой теоремы мы несколько усовершенствуем метод О. С. Фирсаковой, который основан на следующей теореме (см. 4).

Теорема (О. С. Фирсакова 4). *Пусть последовательность $\{\beta_n\}$ имеет единственную точку сгущения на бесконечности и удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\beta_n|^{\rho}} < \infty.$$

Тогда можно построить целую функцию $\omega(z)$ порядка ρ и нормального типа с таким индикатором $h_\omega(\theta)$, что $h_\omega(\theta) \geqslant C$, где C — любое положительное заданное число, корни которой образуют R-множество[1] *и исключительные кружки, заключающие ее корни, не покрывают точек последовательности $\{\beta_n\}$. Для этой функции $\omega(z)$ имеет место следующая оценка снизу вне исключительных кружков:*

$$\ln |\omega(z)| > \frac{h_\omega}{16} r^{\rho},$$

где $h_\omega = \min\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} h_\omega(\theta)$ — положительная постоянная.

Заметим, кроме того, что корни функции $\omega(z)$ лежат на конечном числе лучей.

Перед доказательством теоремы 4 мы заметим, что можно считать, что $r_n = |\lambda_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$. Действительно, при $r_n \leqslant R < < \infty$ последовательность $\{a_n\}$ ограничена. В этом случае полное решение задачи об интерполяционности последовательности Λ было дано Л. Карлесоном (см. [6, 7]).

Доказательство теоремы 4. *Необходимость.* Сначала докажем необходимость условия *А*. Пусть существует функция $f(z) \in [\rho, \infty)^+$ такая, что $f(\lambda_1) = 1$, $f(\lambda_n) = 0$, $(n = 2, 3, \ldots)$. Тогда необходимость условия *А* немедленно следует из леммы 1. Доказательство необходимости условия *Б* несколько более сложное. Мы будем рассматривать два случая в отдельности. В первом случае последовательность Λ удовлетворяет условиям теоремы 1. Во втором случае последовательность имеет конечную верхнюю плотность при целом порядке ρ, но она не обладает свойством симметрии (5б).

---

[1] Определение R-множества дано в [12, с. 126].

Рассмотрим первый случай. Докажем условие *Б* от противного. Допустим, что для всех присоединенных функций последовательности справедливо равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{r_n^{\rho}}\ln\frac{1}{\operatorname{Im}\lambda_n\,|L'(\lambda_n)|}=\infty.$$

В частности, найдется подпоследовательность $\{\nu_n\}\subset\Lambda$ такая, что $|\nu_n|>1$; $|\nu_{n+1}|>4|\nu_n|$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\nu_n|^{\rho}}\ln\frac{1}{\operatorname{Im}\nu_n\,|E'(\nu_n)|}=\infty, \tag{34}$$

где $E(z)$ определяется равенством (6).

Пусть $f(z)$ — функция класса $[\rho,\ \infty)^+$ такая, что

$$f(\lambda_n)=0,\quad \lambda_n\in\{\nu_n\};\quad f(\nu_n)=1,\ (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Из представления

$$f(z)=z^m e^{i\sum\limits_{j=1}^{p}a_jz^j}\prod_{|\mu_n|\leqslant 1}\frac{z-\mu_n}{z-\bar{\mu}_n}\prod_{|\mu_n|>1}E_p(z,\ \mu_n),$$

$$\exp\frac{1}{\pi i}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(tz+1)^{p+1}\ln|f(t)\,dt}{(t^2+1)^{p+1}(t-z)}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(tz+1)^{p+1}d\varphi(t)}{(t^2+1)^{p+1}(t-z)}\right\}$$

следует, что функция

$$\Omega(z)=\frac{f(z)\,H(z)}{E(z)},$$

где

$$H(z)=e^{i\sum\limits_{j=1}^{p}\alpha_jz^j}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\nu_n}\right)\left(1-\frac{z}{\bar{\nu}_n}\right)^{-1};\quad \alpha_j=\frac{2}{j}\sum_{j=1}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{1}{\nu_n^j}$$

является аналитической функцией в верхней полуплоскости. Тем же методом, который проводился в доказательстве леммы 4, можно показать, что $\Omega(z)$ принадлежит классу $[\rho,\ \infty)^+$.

Поскольку $f(\lambda_n)=1$, то

$$\frac{1}{E'(\nu_n)}=\frac{\Omega(\nu_n)}{H'(\nu_n)}. \tag{35}$$

Мы имеем

$$H'(\nu_n)=\frac{\bar{\nu}_n}{\nu_n(\nu_n-\bar{\nu}_n)}e^{i\sum\limits_{j=1}^{p}\alpha_j\nu_n^j}\prod_{k\neq n}\left(1-\frac{\nu_n}{\nu_k}\right)\left(1-\frac{\nu_n}{\bar{\nu}_k}\right)^{-1}$$

и получаем отсюда оценку

$$|H'(\nu_n)| > \frac{e^{-K|\nu_n|^\rho}}{2\operatorname{Im}\nu_n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{4^{n-k}-1}{4^{n-k}+1}\prod_{k=n+1}^{\infty}\frac{1-4^{n-k}}{1+4^{n-k}} \geqslant \frac{C}{\operatorname{Im}\nu_n}e^{-K|\nu_n|^\rho}, \qquad (36)$$

где C и K — абсолютные константы, не зависящие от n. Из соотношения (35) и оценки (36) следует, что

$$\frac{1}{\operatorname{Im}\nu_n|E'(\nu_n)|} \leqslant C_1|\Omega(\nu_n)|\exp K|\nu_n|^\rho.$$

Следовательно, в силу принадлежности $\Omega(z)$ к классу $[\rho, \infty)^+$ имеем

$$\frac{1}{\operatorname{Im}\nu_n|E'(\nu_n)|} \leqslant C_1\exp K_1|\nu_n|^\rho.$$

Это неравенство противоречит (34). Тем самым первый случай рассмотрен.

Во втором случае, если последовательность Λ не удовлетворяет условию *Б*, то найдется подпоследовательность $\{\nu_n\} \subset \Lambda$ такая, что $|\nu_n| > 1$; $|\nu_{n+1}| > 4|\nu_n|$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\nu_n|^\rho}\ln\frac{1}{\operatorname{Im}\nu_n|\hat{E}'(\nu_n)|} = \infty, \qquad (37)$$

где $\hat{E}(z)$ определяется соотношением (23).

Пусть $f \in [\rho, \infty)^+$ такая, что $f(\lambda_n) = 0$ при $\lambda_n \in \{\lambda_n\}$ и $f(\nu_n) = 1$ ($n = 1, 2, \ldots$). Введем в рассмотрение функцию

$$\Omega(z) = \frac{f(z)H(z)G(z)}{\hat{E}(z)},$$

где $G(z)$ — целая функция, фигурирующая в (24), а $H(z)$ определяем как и в первом случае. Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 4, можно убедиться в том, что $\Omega(z) \in [\rho, \infty)^+$. В силу того что $f(\nu_n) = 1$ ($n = 1, 2, \ldots$), имеем

$$\frac{1}{\hat{E}'(\nu_n)} = \frac{\Omega(\nu_n)}{G(\nu_n)H'(\nu_n)}.$$

Последнее равенство вместе с оценками (25) и (36) показывает, что справедливо неравенство

$$\frac{1}{\operatorname{Im}\nu_n|\hat{E}'(\nu_n)|} \leqslant C|\Omega(\nu_n)|\exp M|\nu_n|^\rho.$$

Следовательно, в силу того что $\Omega(z)$ принадлежит $[\rho, \infty)^+$, получаем следующее неравенство:

$$\frac{1}{\operatorname{Im} \nu_n |\hat{E}'(\nu_n)|} \leqslant C_1 \exp M_1 |\nu_n|^\rho.$$

Тем самым мы пришли к противоречию соотношения (37). Итак, мы доказали необходимость условия *Б* полностью.

Достаточность. Лемма 4 показывает, что если найдется хотя одна присоединенная функция $L(z)$ последовательности Λ, удовлетворяющая условию *В*, то одна из двух функций $E(z)$ и $\hat{E}(z)$ должна удовлетворять тому же условию *В*. Поэтому за функцию $L(z)$ можно принять $E(z)$ или $\hat{E}(z)$ в зависимости от того, что последовательность Λ удовлетворяет условиям теоремы 1 или она имеет конечную верхнюю плотность при целом порядке, но не обладает свойством симметрии (5б). Итак, в дальнейшем мы будем считать, что функция $L(z)$ в *В* есть одна из функций $E(z)$ и $\hat{E}(z)$.

По условию *В* существует константа α такая, что

$$\left|\frac{a_n}{L'(\lambda_n)}\right| < (\operatorname{Im} \lambda_n)^2 \exp(\alpha r_n^\rho). \tag{38}$$

При фиксированном сколько угодно малом $\delta > 0$ выделим подмножество Λ_δ из последовательности Λ так, что

$$\Lambda_\delta = \{\lambda_n \in \Lambda : \theta_n \in [\delta, \ \pi - \delta]\}.$$

Очевидно, что в силу существования конечной верхней плотности при порядке ρ последовательности Λ имеем

$$n(r, \Lambda_\delta) = 0(r^\rho), \quad (r \to \infty).$$

Применяя теорему О. С. Фирсаковой, можно построить целую функцию вполне регулярного роста при порядке ρ с индикатором, большим $K = K_1 + \alpha$, где α определяется в (38), а K_1 — фиксированное положительное число. Множество корней этой функции образует R-множество. Кроме того, исключительные кружки, содержащие корни этой функции, не покрывают точки множества Λ_δ. Эту функцию можно построить так, чтобы ее корни лежали вне углов $[0, \delta[$ и $[\pi - \delta, \pi]$. Обозначим эту функцию через $\omega(z)$[1].

Пусть вне исключительного множества $\omega(z)$ допускает оценку снизу

$$|\omega(z)| > \exp K r^\rho.$$

[1] Мы уже заметили, что в построении О. С. Фирсаковой корни функции $\omega(z)$ лежат на конечном числе лучей. Сделав преобразование поворота, мы можем расположить эти лучи вне углов $[0, \delta]$ и $[\pi - \delta, \pi]$.

Положим

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\omega(z)\dot{L}(z)}{L'(\lambda_n)\,\omega(\lambda_n)(z-\lambda_n)}. \tag{39}$$

Покажем, что $f(z)$ есть решение нашей задачи. Очевидно, что формальный ряд удовлетворяет условию $f(\lambda_n)=a_n$ $(n=1,\ 2\ldots)$. Нам остается показать, что этот ряд равномерно сходится на каждом компакте в верхней полуплоскости. Кроме того, покажем, что определенная им аналитическая функция принадлежит классу $[\rho,\ \infty)^+$. Перепишем $f(z)$ в виде

$$f(z)=\omega(z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\lambda}_n}{\lambda_n}\frac{a_nL_n(z)}{L'(\lambda_n)\,\omega(\lambda_n)\,(z-\bar{\lambda}_n)},$$

где под $L_n(z)$ понимается соответственно $E_n(z)$ в лемме 2 или

$$\frac{z-\bar{\lambda}_n}{z-\lambda_n}\frac{\lambda_n}{\bar{\lambda}_n}\hat{E}(z).$$

В силу теоремы 1 и леммы 2, $L(z)$ и $L_n(z)$ принадлежат классу $[\rho,\ \infty)^+$, кроме того, $L_n(z)$ допускает оценку сверху в полуплоскости $\operatorname{Im} z\geqslant 0$

$$|L_n(z)|<M\exp Nr^{\rho},$$

в которой постоянные M и N не зависят от n. Следовательно, для $f(z)$ асимптотически выполняется первенство

$$|f(z)|\leqslant e^{Ar^{\rho}}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{L'(\lambda_n)\,\omega(\lambda_n)\,(z-\bar{\lambda}_n)}\right|\leqslant e^{Ar^{\rho}}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}\lambda_n e^{-K_1r_n^{\rho}}.$$

Последний ряд сходится в силу (2). Таким образом, интерполяционный ряд (39) равномерно сходится на любом компакте и его сумма $f(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z)|<Be^{Ar^{\rho}},$$

что и требовалось доказать.

Замечание к теореме 4. Условие B несколько более жесткое, чем условие $Б$. Однако если на быстроту убывания $\operatorname{Im}\lambda_n$ наложить некоторые ограничения, то условия $Б$ будут эквивалентными. Так, например, будет при выполнении асимптотического неравенства

$$\operatorname{Im}\lambda_n>e^{-Kr_n^{\rho}}$$

или при сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-C r_n^{\rho}} \quad e^{-c r_n^{\rho}}$$

и, следовательно, при одном из этих дополнительных требований на узлы интерполяции условия A и $Б$ являются необходимым и достаточным для интерполяционности последовательности Λ. В частности, это будет иметь место при $\operatorname{Im} \lambda_n \geqslant h > 0$. Мы не знаем, являются ли условия A и $Б$ достаточными в общем случае.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Б. Я. Левину за предложенную тему и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Я. и Нгуен Тхыонг Уен. Об интерполяционной задаче в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка. —Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 22, Харьков, 1975, с. 77—85.
2. Леонтьев А. Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа. — ДАН СССР, 1949, т. 66, № 2, с. 153—156.
3. Леонтьев А. Ф. К вопросу об интерполировании в классе целых функций конечного порядка.—«Матем. сб.», 1957, т. 41, № 83, вып. 1. с. 81—96.
4. Фирсакова О. С. Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций.—ДАН СССР, 1958, т. 120, № 3, с. 477—480.
5. Лохин И. Ф. Об одной интерполяционной задаче для целых функций.— «Матем. сб.», 1954, т 35, № 77, вып. 3, с. 223—230.
6. Carleson L. On bounded analytic functions and closure problems.— «Arh. for. Mat.», 1952, vol. 5, p. 12—15.
7. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций.—М., ИЛ, 1963. 311 с.
8. Говоров Н. В. О функциях вполне регулярного роста в полуплоскости.— Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. физ.—мат. наук. Ростов н/Д, 1970.
9. Говоров Н. В. Об индикаторе функций нецелого порядка и вполне регулярного роста в полуплоскости.—ДАН СССР, 1965, т. 162, № 3, с. 495—498.
10. Говоров Н. В. Об индикаторе функций целого порядка и вполне регулярного роста в полуплоскости.—ДАН СССР, 1967, т. 172, № 4, с. 763—766.
11. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций, III.— Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 7, Харьков, 1968, с. 59—84.
12. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М., Физматгиз, 1956. 632 с.
13. Титчмарш Е. Теория функций. М., Гостехиздат, 1951. 506 с.