УДК 517.53

Н. И. Нагнибида

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Через A_R $(\overline{A}_R)$, $0 < R \leqslant \infty$[1] обозначим пространство всех однозначных и аналитических в круге $|z| < R$ $(|z| \leqslant R)$ функций с обычной топологией (т. е. топологией компактной сходимости). Определим в этом пространстве оператор Δ (очевидно, линейный и непрерывный), полагая $\Delta f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$ для $f(z) \in A_R$. В нашей работе [1] показано (см. теорему 1 при $\alpha_k = 1$, $k = 0, 1, \ldots$), что линейный оператор T в A_R является непрерывным оператором, перестановочным с Δ^n (n, $n \geqslant 1$ — фиксированное натуральное), тогда и только тогда, когда

$$1)\quad T = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} t_{l,\, sn+q} \Delta^{sn+q-l} P_q, \tag{1}$$

где $P_q f(z) = P_q\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn+q} z^{kn+q}$ $(q = 0, 1, \ldots, n-1)$, а при $s = 0$ и $q < l$ $\Delta^{q-l} = U^{l-q}$ $(Uf(z) = zf(z))$;

2) для всякого $\rho < R$ существуют такие $r = r(\rho) < R$ и $C = C(\rho) \geqslant 0$, что

$$|t_{l, mn+q}| \leqslant C \frac{r^{(m+s)n+q}}{\rho^{sn+l}} \tag{2}$$

$$(s,\ m = 0, 1, \ldots;\ l,\ q = 0, 1, \ldots, n-1).$$

---

[1] При $R = \infty$ пространство $\overline{A}_{\frac{1}{R}}$ совпадает с пространством $\overline{A}_0$ функций, однозначных и аналитических в точке $z = 0$.

В настоящей заметке мы находим общий вид изоморфизмов T пространства A_R, перестановочных с Δ^n, а также рассматриваем вопрос о полноте в A_R некоторых систем функций, построенных с помощью оператора Δ.

§ 1. Изоморфизмы пространства A_R, перестановочные с Δ^n, $n \geqslant 1$

Прежде чем перейти к описанию класса указанных выше изоморфизмов пространства A_R, мы сперва упростим условие (2), являющееся, как показано в [1], необходимым и достаточным для непрерывности соответствующего оператора T. Справедлива следующая

Лемма. *Условие (2) равносильно тому, что характеристические функции* $\psi_{l,q}(\lambda)$, $\psi_{l,q}(\lambda) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} t_{l,\, sn+q}\lambda^{sn}$ $(l, q = 0, 1, \ldots, n - 1)$, *оператора T принадлежат пространству* $\overline{A}_{\frac{1}{R}}$.

Доказательство. Фиксируя произвольное ρ, $\rho < R$ и полагая в (2) $s = 0$, мы убеждаемся в том, что характеристические функции непрерывного оператора принадлежат $\overline{A}_{\frac{1}{R}}$, так как

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|t_{l,m}|} \leqslant r_0 < R \quad (l = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{3}$$

для некоторого r_0.

Если же выполнено условие (3) $\left(\text{т. е. } \psi_{l,q}(\lambda) \text{ принадлежат } \overline{A}_{\frac{1}{R}}\right)$, то, взяв произвольное ρ, $r_0 < \rho < R$, достаточно положить $r(\rho) = \rho$, как будет выполнено и условие (2).

Таким образом, верна

Теорема 1. *Для того чтобы линейный оператор T был непрерывным оператором в A_R, перестановочным с Δ^n, $n \geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид (1) и его характеристические функции $\psi_{l,q}(\lambda)$ принадлежали пространству* $\overline{A}_{\frac{1}{R}}$.

Рассмотрим теперь функцию $\varphi(\lambda, z) = \frac{1}{1 - \lambda z}$ $\left(|\lambda| \leqslant \frac{1}{R},\ |z| < R\right)$ и положим

$$\varphi_q(\lambda, z) = \frac{z^q}{1 - \lambda^n z^n}, \quad q = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Если теперь T — изоморфизм пространства A_R, перестановочный с Δ^n, то после очевидных преобразований (учитывая вид (1) для T) мы получим

$$T\varphi_q(\lambda, z) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1} t_{l,\, sn+q}\Delta^{sn+q-l}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{kn}z^{kn+q} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1} t_{l,\, sn+q}\lambda^{sn}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{kn}z^{kn+l} = \sum_{l=0}^{n-1}\psi_{l,\, q}(\lambda)\,\varphi_l(\lambda, z).$$

$$(q = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Но так как существует непрерывный оператор T^{-1}, то он, будучи, очевидно, перестановочным с Δ^n, также имеет вид (1) и его характеристические функции $\tilde{\psi}_{l,\, q}(\lambda)$ принадлежат $\overline{A}_{\frac{1}{R}}$. Следовательно,

$$T^{-1}\varphi_q(\lambda, z) = \sum_{l=0}^{n-1}\tilde{\psi}_{l,\, q}(\lambda)\,\varphi_l(\lambda, z).$$

Поэтому

$$\varphi_q(\lambda, z) = T^{-1}T\varphi_q(\lambda, z) = \sum_{s=0}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{n-1}\psi_{l,\, q}(\lambda)\,\tilde{\psi}_{s,\, l}(\lambda)\right)\varphi_s(\lambda, z)$$

и

$$\varphi_q(\lambda, z) = TT^{-1}\varphi_q(\lambda, z) = \sum_{s=0}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{n-1}\tilde{\psi}_{l,\, q}(\lambda)\,\psi_{s,\, l}(\lambda)\right)\varphi_s(\lambda, z).$$

Учитывая далее линейную независимость (при каждом фиксированном λ, $|\lambda| \leqslant \frac{1}{R}$) функций системы $\{\varphi_q(\lambda, z)\}_{q=0}^{n-1}$, мы должны заключить, что

$$\sum_{l=0}^{n-1}\tilde{\psi}_{s,\, l}(\lambda)\,\psi_{l,\, q}(\lambda) = \delta_{s,\, q}$$

и

$$\sum_{l=0}^{n-1}\psi_{s,\, l}(\lambda)\,\tilde{\psi}_{l,\, q}(\lambda) = \delta_{s,\, q}\ \ (s,\ q = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Значит, принадлежащие пространству $\overline{A}_{\frac{1}{R}}$ функции

$$\det\|\psi_{s,\, l}(\lambda)\|_{s,\, l=0}^{n-1} \text{ и } \det\|\tilde{\psi}_{l,\, q}(\lambda)\|_{l,\, q=0}^{n-1}$$

не имеют в круге $|\lambda| \leqslant \frac{1}{R}$ нулей, так как их произведение равно тождественно единице.

Проведя теперь аналогичные рассуждения в обратном порядке, а также учитывая полноту системы $\{\varphi(\lambda, z)\}_{|\lambda| < \frac{1}{R}}$ в пространстве A_R и соотношение $\sum_{q=0}^{n-1} \lambda^q \varphi_q(\lambda, z) = \varphi(\lambda, z)$, мы легко убеждаемся в том, что верна

Теорема 2. *Для того чтобы линейный оператор T был изоморфизмом пространства A_R, перестановочным с Δ^n, $n \geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$1)\quad T = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} t_{l,\ sn+q} \Delta^{sn+q-l} P_q;$$

$$2)\quad \psi_{l,\ q}(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} t_{l,\ sn+q} \lambda^{sn} \in \overline{A}_{\frac{1}{R}} \quad (l,\ q = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1);$$

$$3)\quad \det \| \psi_{l,\ q}(\lambda) \|_{l,\ q=0}^{n-1} \neq 0 \ \textit{при} \ \ |\lambda| \leqslant \frac{1}{R}.$$

Сформулируем теперь некоторые следствия для $n = 1$.

Следствие 1. *Для каждой рациональной функции $\varphi(z) \in A_R$ существует такой линейный непрерывный оператор T, перестановочный с Δ, что $T\varphi(z) = 0$.*

Доказательство. Пусть $T = \psi(\Delta)$ и $\psi(\lambda) \in \overline{A}_{\frac{1}{R}}$. Так как

$$\Delta^m \frac{1}{1 - \lambda z} = \frac{\lambda^m}{1 - \lambda z} \left(m = 0,\ 1,\ \ldots;\ |\lambda| \leqslant \frac{1}{R} \right),$$

то

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\frac{\lambda^{m+k}}{1 - \lambda z} \right) = \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\Delta^{m+k} \frac{1}{1 - \lambda z} \right) = \Delta^{k+m} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\frac{1}{1 - \lambda z} \right) =$$

$$= \Delta^{m+k} \frac{k! z^k}{(1 - \lambda z)^{k+1}} = k! \Delta^m \frac{1}{(1 - \lambda z)^{k+1}}$$

при всех $m,\ k = 0,\ 1,\ \ldots$

Поэтому

$$\psi(\Delta) \frac{1}{(1 - \lambda z)^{k+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \Delta^m \frac{1}{(1 - \lambda z)^{k+1}} = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\frac{\lambda^{k+m}}{1 - \lambda z} \right) =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\frac{\lambda^k \psi(\lambda)}{1 - \lambda z} \right),\ k = 0,\ 1,\ \ldots$$

Следовательно, если точка $\lambda_0 \neq 0$, $|\lambda_0| \leqslant \frac{1}{R}$ является для функции $\psi(\lambda)$ нулем кратности p, $p \geqslant k + 1$, то

$$\psi(\Delta) \frac{1}{(1 - \lambda_0 z)^{k+1}} = 0.$$

Кроме того, $\Delta^{m+1} z^k = 0$ при всех $0 \leqslant k \leqslant m < \infty$.

Пусть теперь

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k + \sum_{j=1}^{\nu}\left[\frac{c_{\beta_j}^{(j)}}{(1-\lambda_j z)^{\beta_j}} + \ldots + \frac{c_1^{(j)}}{1-\lambda_j z}\right],$$

$|\lambda_j| \leqslant \frac{1}{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$, k — фиксированное.

Оператор

$$T = \Delta^{k+1} \prod_{j=1}^{\nu} (\lambda_j E - \Delta)^{\beta_j},$$

где E — оператор тождественного преобразования, является, очевидно, линейным непрерывным оператором в A_R, перестановочным с Δ. Учитывая далее перестановочность (между собой) всех сомножителей оператора T, мы легко убеждаемся в том, что $T\varphi(z) = 0$, и тем самым в справедливости нашего утверждения.

Следствие 2. *Каждое решение уравнения $T\varphi(z) = 0$ в пространстве A_R, где T — линейный непрерывный оператор, перестановочный с Δ, является рациональной функцией.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ — все нули характеристической функции $\psi(\lambda)$ оператора T и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ — их (соответственно) кратности. Тогда

$$\psi(\lambda) = \psi_1(\lambda) \prod_{j=1}^{\nu} (\lambda_j - \lambda)^{\beta_j},$$

где $\psi_1(\lambda) \neq 0$ в круге $|\lambda| \leqslant \frac{1}{R}$.

Поэтому

$$T = T_1 \prod_{j=1}^{\nu} (\lambda_j E - \Delta)^{\beta_j},$$

где T_1 — изоморфизм пространства A_R, перестановочный с Δ. Если теперь $T\varphi(z) = 0$, то и $\prod_{j=1}^{\nu} (\lambda_j E - \Delta)^{\beta_j} \varphi(z) = 0$. Последнее же уравнение просто решается и мы убеждаемся в том, что $\varphi(z)$ — рациональная функция.

§ 2. О полноте некоторых систем функций в пространстве A_R

Пусть $\{\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z)\}$ — произвольная система функций в пространстве A_R.

Теорема 3. *Система функций*

$$\left\{\Delta^{kn}(\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z))\right\}_{k=0}^{\infty} \tag{4}$$

полна в пространстве A_R тогда и только тогда, когда функции $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z)$ не являются одновременно решениями некоторого уравнения $T\varphi(z) = 0$ $(T \neq \Theta$, Θ — нулевой оператор$)$, *где T — линейный непрерывный оператор в A_R, перестановочный с Δ^n.*

Доказательство. Если система (4) полна в A_R и в то же время $T\varphi_j(z) = 0$ ($j = 0, 1, \ldots, n-1$), где T — линейный непрерывный оператор, перестановочный с Δ^n, то, очевидно, $Tf(z) = 0$ для любой функции $f(z)$ из A_R. Следовательно, $T = \Theta$.

Пусть, наоборот, система (4) не является полной в A_R. Тогда (на основании известного критерия С. Банаха полноты) существуют такая аналитическая при $|z| \geqslant R$ функция $\gamma(z)$ ($\gamma(\infty) = 0$, но $\gamma(z) \not\equiv 0$) и окружность $|z| = r < R$, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \Delta^{kn}\varphi_j^{(z)}\gamma(z)\,dz = 0 \tag{5}$$

$$(k = 0, 1, \ldots; \; j = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Если $\varphi_j(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m^{(j)} z^m$ и $\gamma(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{z^{m+1}}$, то соотношения (5) можно, очевидно, записать в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{kn+m}^{(j)} c_m = 0 \;\; (k = 0, 1, \ldots; \; j = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Рассмотрим теперь оператор T ($T \neq \Theta$), полагая

$$T = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} c_{sn+q} \Delta^{sn+q-l} P_q,$$

являющийся линейным непрерывным оператором в A_R, перестановочным с Δ^n, так как его характеристические функции $\psi_{l,q}(\lambda) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} c_{sn+q}\lambda^{sn}$ ($l, q = 0, 1, \ldots, n-1$) принадлежат пространству $\overline{A}_{\frac{1}{R}}$.

Учитывая далее вид оператора T и соотношения (6), получаем

$$T\varphi_j(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} c_{sn+q} \Delta^{sn+q-l} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn+q}^{(j)} z^{mn+q} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} c_{sn+q} \sum_{m=0}^{\infty} a_{(m+s)n+q}^{(j)} z^{mn+l} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} c_{sn+q} a_{(m+s)n+q}^{(j)} \right) z^{mn+l} = 0.$$

Таким образом, теорема 3 доказана полностью.

Замечание 1. При $n = 1$ мы получаем известную теорему Ю. А. Казьмина из [2] о том, что система $\{\Delta^k f(z)\}_{k=0}^{\infty}$ полна в A_R тогда и только тогда, когда $f(z)$ отлична от рациональной.

В случае $n = 1$ имеет место более общая

Теорема 4. *Пусть A — линейный непрерывный оператор в A_R, для которого*

$$\frac{D^s A^k f(z)}{s!}\bigg|_{z=0} = \alpha_s \frac{D^k A^s f(z)}{k!}\bigg|_{z=0},\ D = \frac{d}{dz},\ s,\ k = 0,\ 1,\ \ldots \tag{7}$$

($f(z)$, $f(z) \in A_R$, — произвольная; $\alpha_s \neq 0$ для всех s). Тогда система $\{A^k f(z)\}_{k=0}^{\infty}$ полна в A_R в том и только том случае, когда функция $f(z)$ не удовлетворяет ни одному уравнению вида $Bf(z) = 0$, где $B = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ — линейный непрерывный оператор в A_R, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \times$ $\times\, c_k \lambda^k \in \bar{A}_{\frac{1}{R}}$ и $B \neq \Theta$.

Доказательство этого утверждения почти полностью совпадает с доказательством теоремы 3 и поэтому мы его не приводим.

Пример. Пусть $\varphi_1(x) \in L(0,\ 1)$, $R \leqslant 1$ и $\varphi(z) = \int\limits_0^1 \frac{\varphi_1(x)\,dx}{1 - xz}$, причем $\varphi_1(x) \neq 0$ на множестве e, $\operatorname{mes} e > 0$. Тогда система $\{\Delta^k \varphi(z)\}_{k=0}^{\infty}$ полна в A_R. Это утверждение становится очевидным, так как легко проверить, что $\varphi(z)$ не удовлетворяет ни одному уравнению $T\varphi(z) = 0$, где $T = \psi(\Delta)$ и $\psi(\lambda) \in \bar{A}_{\frac{1}{R}}$. Действительно, если $T\varphi(z) = 0$, то

$$\psi(\Delta)\,\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Delta^k \int\limits_0^1 \frac{\varphi_1(x)\,dx}{1 - xz} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int\limits_0^1 \psi(x)\,\varphi_1(x)\,x^m dx \right) z^m = 0,$$

что невозможно, если $T \neq \Theta$.

Более того, если $\{\mu_m\}_{m=0}^{\infty}$ ($\mu_0 = 0$) — некоторая подпоследовательность натуральных чисел и некоторый линейный непрерывный функционал Γ аннулируется на $\{\Delta^{\mu_m} \varphi(z)\}$, то (см. доказательство теоремы 3)

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \gamma(z)\,\Delta^{\mu_m} \varphi(z)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \int\limits_0^1 \varphi_1(x)\,x^{k+\mu_m} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x \varphi_1(x)\,\gamma\left(\frac{1}{x}\right) x^{\mu_m} dx = 0$$

$\left(\text{здесь } \gamma(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{z^{k+1}} \text{ — аналитическая при } |z| \geqslant R\right)$. Поэтому, в случае расходимости ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m}$, на основании известной теоремы Мюнтца (см. [5, с. 103]) о полноте системы $\{x^{\mu_m}\}$ в пространстве $C(0,\ 1)$ мы должны заключить, что система $\{\Delta^{\mu_m}\varphi(z)\}_{m=0}^{\infty}$ также полна в A_R.

§ 3. Некоторые замечания о полноте систем в A_R

На основании полученных выше результатов можно формулировать соответствующие теоремы о полноте также и для более сложных систем функций, как это сделано, например, в работе [3]. Сделать это позволяет следующая

Теорема 5. *Если линейный непрерывный оператор K, отображающий A_{R_1} в A_{R_2}, переводит одну полную (в A_{R_1}) систему в полную (в A_{R_2}), то он обладает этим свойством и для любой другой системы функций из A_{R_1}.*

Действительно, пусть $\{\varphi_m(z)\}$ и $\{\psi_m(z)\}$ полны в A_{R_1}, а $\{K\varphi_m(z)\}$ — в A_{R_2}. Через $\overline{L}_\varphi$, $\overline{L}_\psi$ и $\overline{L}_{K\varphi}$ обозначим соответственно замкнутые линейные оболочки этих систем (две первые из них совпадают с A_{R_1}, третья — с A_{R_2}). Если $\overline{L}_{K_\psi}$ — замкнутая линейная оболочка системы $\{K\psi_m(z)\}$, то для любой функции $\varphi_m(z)$, $\varphi_m(z)\in\overline{L}_\psi$ имеем

$$K\varphi_m(z)\in K\overline{L}_\psi\subset\overline{K}_{K_\psi}\subset A_{R_2}.$$

Поэтому, учитывая полноту системы $\{K\varphi_m(z)\}$ в A_{R_2}, мы заключаем, что $\overline{L}_{K\psi}=A_{R_2}$.

Следствие 3. *Если $T=\psi(\Delta)\neq\Theta$ и $\psi(\lambda)\in\overline{A}_{\frac{1}{R}}$, то система $\{Tf_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ полна в A_R, если только полной в нем является система $\{f_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$.*

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 5, если только учесть, что в случае $T\neq\Theta$ система $\{Tz^m\}_{m=0}^{\infty}$ полна в A_R.

Следствие 4. *Если $T=\psi(\Delta)\neq\Theta$ и $\psi(\lambda)\in\overline{A}_{\frac{1}{R}}$, то система $\{T\Delta^m f(z)\}_{m=0}^{\infty}$ полна в A_R тогда и только тогда, когда $f(z)$ отлична от рациональной.*

Это утверждение следует из следствия 3, уже упоминавшейся теоремы Ю. А. Казьмина из [2] и критерия полноты С. Банаха.

Следствие 5 (теорема С. Я. Альпера [4]). *Если функции $f_m(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{mk}z^k$, $m=0,\ 1,\ \ldots$, аналитичны в круге $|z|<R_1$, а $\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k$ — в круге $|z|<R_2$, причем $b_k\neq0$, $k=0,\ 1,\ \ldots$, и система $\{f_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ полна в A_{R_1}, то система $\left\{\sum_{k=0}^{\infty}a_{mk}b_kz^k\right\}_{m=0}^{\infty}$ является полной в $A_{R_1R_2}$.*

Замечание 2. Воспользовавшись естественным изоморфизмом (заменой переменного) между пространствами A_R и $A(|z| > R)$, теоремы о полноте, аналогичные приведенным выше, можно формулировать также и в пространстве $A(|z| > R)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нагнибида Н. И. О линейных непрерывных операторах в аналитическом пространстве, перестановочных с оператором дифференцирования. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 2, Харьков, 1966, с. 160—164.
2. Казьмин Ю. А. О последовательных остатках ряда Тейлора. — «Вестник МГУ», 1963, № 5, с. 35—46.
3. Казьмин Ю. А. Полнота некоторых типов последовательностей аналитических функций. — «Сиб. матем. журн.», 1966, т. 7, № 1, с. 70—82.
4. Альпер С. Я. О полноте систем аналитических функций. — ДАН СССР, 1949, т. 66, № 6, с. 1029—1032.
5. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., ИЛ, 1959. 105 с.