УДК 513.88,513.836.

А. В. Марченко

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ ОТ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ КАК ИНДУКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этой статье строится специальная категория $\boldsymbol{A}$ локально-выпуклых пространств, приспособленная для построения и исследования различных пространств функций от бесконечного числа переменных. Эти функциональные пространства определяются как индуктивные пределы в категории $\boldsymbol{A}$ пространств функций от конечного числа переменных. В известных категориях непрерывное отображение линейных топологических пространств $j: X \to Y$ индуцирует отображение их топологий: окрестность нуля u в Y переходит в окрестность нуля $j^{-1}(u)$ в X. В категории $\boldsymbol{A}$ допускается некоторый произвол этого отображения, требуется лишь выполнение условия согласования (см. далее). В результате на индуктивном пределе локально-выпуклых пространств, рассматриваемом просто как линейное пространство, вводится топология, являющаяся, в некотором роде, проективным пределом топологий допредельных пространств. В частности, в пределе можно получить любую локально-выпуклую топологию, которая слабее или равна индуктивной.

Возникающие предельные пространства и их пополнения находят приложение в исследованиях дифференциальных операторов с бесконечным числом переменных (см. [2, 6—9]).

Излагаемая здесь схема построения пространств функций от бесконечного числа переменных в незаконченном и менее формальном виде опубликована в заметке автора [8]. В настоящей статье исправлены также некоторые неточности, содержащиеся в [8].

§ 1. Индуктивные пределы локально-выпуклых пространств в категории $\boldsymbol{A}$

Пусть X — локально-выпуклое линейное топологическое пространство (л. в. п.). Семейство A абсолютно выпуклых поглощающих подмножеств X порождает топологию в X, если множество всех подмножеств X вида

$$\varepsilon \bigcap_{k=1}^{n} a_k \quad (\varepsilon > 0,\ a_k \in A,\ n = 1, 2, \ldots) \tag{1.1}$$

является базисом окрестностей нуля в этой топологии. Любое семейство A абсолютно выпуклых поглощающих подмножеств X порождает в X некоторую локально-выпуклую топологию (слабейшую из топологий, в которых все элементы A являются окрестностями нуля в X) [10].

Предложение. *Пусть X и Y — линейные пространства, а j — линейный оператор из X в Y. Пусть далее u — абсолютно выпуклое подмножество X, а v — абсолютно выпуклое и поглощающее подмножество Y. Тогда $j(u)$ — абсолютно выпуклое подмножество Y, а $j^{-1}(v)$ — абсолютно выпуклое и поглощающее подмножество X.*

Перейдем к определению категории $\mathbf{A}$. Объектами категории $\mathbf{A}$ являются тройки (X, α, A), где X — линейное пространство, A — множество и α — отображение множества A в множество всех абсолютно выпуклых поглощающих подмножеств X. Морфизмом в $\mathbf{A}$ из (X, α, A) в (Y, β, B) по определению называется пара $(j, \bar{j})$, где $j: X \to Y$ — линейный оператор, а $\bar{j}: B \to A$ — отображение множеств, для которого выполнено следующее условие согласования: для всех $b \in B$

$$j(\alpha(\bar{j}b)) \subset \beta(b).$$

Композиция $(j, \bar{j}) \cdot (k, \bar{k})$ морфизмов $(j, \bar{j})$ и $(k, \bar{k})$ определяется как пара $(jk, \bar{k}\bar{j})$. Условие согласования проверяется непосредственно. Тождественным морфизмом объекта (X, α, A) является морфизм $(\mathrm{Id}_X, \mathrm{Id}_A)$.

Лемма 1. *Пусть $(j, \bar{j}) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}((X, \alpha, A), (Y, \beta, B))$, тогда j является непрерывным оператором из пространства X в пространство Y, которые считаются снабженными топологиями, порожденными семействами $\alpha(A)$ и $\beta(B)$ соответственно.*

Учитывая результат леммы 1, мы можем определить функтор Γ из категории $\mathbf{A}$ в категорию $\mathbf{V}$ всех л. в. п., положив для $(X, \alpha, A) \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{A}\, \Gamma(X, \alpha, A) = X$, причем X рассматривается в топологии, порожденной семейством $\alpha(A)$. Лемма 1 тогда означает, что для $(j, \bar{j}) \in \mathrm{Mor}_A((X, \alpha, A), (Y, \beta, B))$ оператор $\Gamma(j, \bar{j}) = j \in \mathrm{Mor}_V(X, Y)$. В дальнейшем мы будем всегда считать X наделенным этой топологией.

Обозначим функтор из $\mathbf{V}$ в категорию $\mathbf{L}$ всех линейных пространств, стирающий топологию в л. в. п., через Λ. По определению, $\Lambda(X) = X$ и $\Lambda(j) = j$.

Еще один стирающий функтор Θ действует из категории $\mathbf{A}^\circ$, дуальной для $\mathbf{A}$, в категорию всех множеств **Ens**. По определению $\Theta(X, \alpha, \mathrm{A}) = A$ и $\Theta(j, \bar{j}) = \bar{j}$.

В категориях **Ens**, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{L}$ существуют проективные (индуктивные) пределы любой проективной (индуктивной) системы (см. [4, 10]).

Введем следующие обозначения, которых будем придерживаться в дальнейшем. Пусть T — направленное множество и Φ — индуктивная система в $\mathbf{A}$ над T. Согласно определению категории $\mathbf{A}$, это означает, что для всех $t \in T$ заданы объекты

$\Phi(t)=(X, \alpha, A)_t$ и для $s \leqslant t$ морфизмы $\Phi(s, t)=(j, \bar{j})_s^t$, причем для $r \leqslant s \leqslant t$ $\Phi(r, t)=\Phi(s, t)\Phi(r, s)$. Индуктивный предел системы $\Gamma\cdot\Phi$ в $\boldsymbol{V}$ над T обозначим через $X_V=\varinjlim_T \Gamma\cdot\Phi$, индуктивный предел системы $\Lambda\cdot\Gamma\cdot\Phi$ в $\boldsymbol{L}$ над T (совпадающий с $\Lambda(X_V)$ обозначим через X_∞; наконец, проективный предел системы $\Theta\cdot\Phi^\circ$ в **Ens** над T обозначим через A_∞.

Определение. *Индуктивная система* Φ *в* $\boldsymbol{A}$ *над* T *называется индуктивной цепью (сокращенно и. ц.), если* $A_\infty \neq \varnothing$.

Вообще говоря, не любая индуктивная система в $\boldsymbol{A}$ является индуктивной цепью (см. [5]).

Теорема 1. *В категории* $\boldsymbol{A}$ *существует индуктивный предел* $(X, \alpha, A)_\infty=\varinjlim_T\Phi$ *любой индуктивной цепи* Φ.

Доказательство. Определим отображение α_∞ из A_∞ в множество подмножеств пространства X_∞, положив

$$\alpha_\infty(a)=\bigcup_{t\in T} j_t(\alpha_t(\bar{j}_t a)),$$

где $j_t: X_t \to X_\infty$ и $\bar{j}_t: A_\infty \to A_t$ — соответствующие универсальные отображения. Из предложения 1 сразу следует

Лемма 2. *Все элементы вида* $\alpha_\infty(a)$ *с* $a \in A_\infty$ *являются абсолютно выпуклыми и поглощающими подмножествами* X_∞.

Из леммы 2 следует, что тройка $(X_\infty, \alpha_\infty, A_\infty)=(X, \alpha, A)_\infty$ является объектом в категории $\boldsymbol{A}$. Проверим, что $(j_t, \bar{j}_t)\in \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Phi(t), (X, \alpha, A)_\infty)$ для $t\in T$. В самом деле, j_t — линейный оператор по определению X_∞ как индуктивного предела в $\boldsymbol{L}$; кроме того, если $a \in A_\infty$, то $j_t(\alpha_t\bar{j}_t a)\subset \bigcup_{s\in T} j_s(\alpha_s \bar{j}_s a)$, т. е. условие согласования выполнено.

Докажем, что система $(X, \alpha, A)_\infty$, $(j_t, \bar{j}_t)$ является индуктивным пределом и. ц. Φ в категории $\boldsymbol{A}$.

По определению универсальных отображений j_t и $\bar{j}_t$ имеем при $s\leqslant t$ равенство $(j_t, \bar{j}_t)\cdot(j, \bar{j})_s^t=(j_t\cdot j_s^t, \bar{j}_s^t\cdot\bar{j}_t)=(j_s, \bar{j}_s)$, т. е. условия коммутации выполнены.

Проверим универсальность объекта $(X, \alpha, A)_\infty$ и морфизмов $(j, \bar{j})_t$. Пусть задан объект $(Y, \beta, B)\in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{A}$ и система морфизмов $(k, \bar{k})_t \in \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Phi(t), (Y, \beta, B))$, коммутирующих с $(j, \bar{j})_s^t$. Тогда, по определению X_∞ и A_∞, определены морфизмы $k_\infty: X_\infty \to Y$ (в $\boldsymbol{L}$) и $\bar{k}_\infty$: $B \to A_\infty$ (в **Ens**), удовлетворяющие условиям $k_t=k_\infty\cdot j_t$ и $\bar{k}_t=\bar{j}_t\cdot\bar{k}_\infty$ для всех $t\in T$. Непосредственно проверяется, что пара $(k_\infty, \bar{k}_\infty)$ есть морфизм в $\boldsymbol{A}$, т. е. при любом $b \in B$ выполнено условие согласования $k_\infty(\alpha_\infty\bar{k}_\infty b)\subset\beta(b)$.

Используя универсальные свойства j_t и $\bar{j}_t$, имеем для $t\in T$ равенства $(k, \bar{k})_\infty\cdot(j, \bar{j})_t=(k_\infty\cdot j_t, \bar{j}_t\cdot\bar{k}_\infty)=(k_t, \bar{k}_t)$.

Таким образом, универсальное свойство тоже выполнено и $(X, \alpha, A)_\infty = \varinjlim_T \Phi$. Теорема доказана.

Пространство X_∞ с топологией, порожденной системой множеств $\alpha_\infty(A_\infty)$, мы обозначим через $X_A = \Gamma((X, \alpha, A)_\infty)$. Согласно лемме 1, все линейные операторы, участвующие в формулировке и доказательстве теоремы 1, непрерывны в пространствах, получаемых из соответствующих объектов A при помощи функтора Г.

В случае отделимости пространства X_A его можно пополнить (секвенциально, ограниченно пополнить). Пополнение X_A мы будем обозначать через $X = \varinjlim_\Phi X_t$.

Лемма 3. *Топология в пространстве X_A слабее или равна топологии в пространстве X_V.*

Доказательство следует немедленно из равенства $\Lambda(X_A) = \Lambda(X_V)$ и универсальных свойств пространства X_V.

Исследуем подробнее функтор Г.

Пусть Γ^{-1} — функтор из категории $\boldsymbol{V}$ в категорию $\boldsymbol{A}$, определенный следующим образом. Если X — л. в. п, то $\Gamma^{-1}(X) = (\Lambda(X), \mathrm{Id}_{A_X}, A_X)$, где A_X — множество всех абсолютно выпуклых окрестностей нуля в X. Положим далее для $j \in \mathrm{Mor}_V(X, Y)$ $\Gamma^{-1}(j) = (\Lambda(j), \bar{j})$, где $\bar{j}b = j^{-1}(b)$.

Проверим корректность этого определения. Согласно предложению, если $b \in \Theta\Gamma^{-1}(Y)$, то $j^{-1}(b)$ тоже абсолютно выпуклое поглощающее подмножество, а поскольку j — непрерывный оператор, то $j^{-1}(b)$ является окрестностью нуля в X, т. е. $\bar{j}(b) \in A_X = \Theta \cdot \Gamma^{-1}(X)$. Далее, по определению $j^{-1}(b)$, имеем $j(\mathrm{Id}_{A_X} \cdot \bar{j}b) = j(j^{-1}(b)) \subset b$, т. е. выполнено условие согласования и $(j, \bar{j}) \in \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Gamma^{-1}(X), \Gamma^{-1}(Y))$.

Легко видеть, что имеет место равенство $\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = 1_{\boldsymbol{V}}$. Для $X \in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{V}$ это следует из теоремы 2, гл. 1 [10], а для $j \in \mathrm{Mor}_V(X, Y)$ очевидно.

Лемма 4. *Во введенных выше обозначениях*

$$\Gamma(\varinjlim_T \Gamma^{-1} \cdot \Gamma \cdot \Phi) = \varinjlim_T \Gamma \cdot \Phi,$$

т. е. среди топологий, которые можно получить в предельном пространстве X_∞ при переходе к индуктивному пределу в категории $\boldsymbol{A}$, находится и обычная индуктивная топология.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом леммы 3 нам нужно показать, что топология в пространстве $X_A = \Gamma(\varinjlim_T \Gamma \cdot \Gamma^{-1} \cdot \Phi)$ не слабее индуктивной. Пусть u — окрестность нуля в индуктивной топологии в X_V, являющаяся абсолютно выпуклым поглощающим множеством. Тогда в силу предложения 1 и непрерывности универсального морфизма $j_t: X_t \to X_V$, множество $j_t^{-1}(u)$ является абсолютно выпуклой окрестностью нуля в X_t, т. е. $j^{-1}(u) \in A_X$. При $s \leqslant t$ имеет место равенство $(j_s^t)^{-1}(j_t)^{-1}(u) = j_s^{-1}(u)$, из которого следует, что набор окрестностей $j^{-1}(u)$ определяет элемент $a \in A_\infty$. Наконец, по определению отображения α_∞ имеем

$$\alpha_\infty(a) = \bigcup_t j_t(\mathrm{Id}_{A_t} \cdot \overline{j}_t a) = \bigcup_t j_t(j_t^{-1}(u)) = u.$$

Это равенство как раз и означает, что топология в $X_A = \Gamma(\underrightarrow{\lim}_T \Gamma^{-1} \cdot \Gamma \cdot \Phi)$ не слабее индуктивной. Лемма доказана.

Исследуем подробнее топологии, возникающие в пространстве X_∞ в результате предельного перехода в категории $\boldsymbol{A}$.

Теорема 2. *Пусть Ψ — произвольная индуктивная система в категории $\boldsymbol{V}$ над направленным множеством T. Для любой локально-выпуклой топологии τ в пространстве $X_\infty = \Lambda(\underrightarrow{\lim}_T \Psi)$, которая слабее или равна индуктивной (топологии в $X_V = \underrightarrow{\lim}_T \Psi$), найдется такая индуктивная цепь Φ в $\boldsymbol{A}$ над T, что*

$$\Gamma \cdot \Phi = \Psi$$

и топология в пространстве $X_A = \Gamma(\underrightarrow{\lim}_T \Phi)$ совпадает с τ.

Доказательство. Как и ранее, мы будем обозначать пространства $\Lambda\Psi(t)$ через X_t, отображения $\Lambda\Psi(s, t)$ при $s \leqslant t$ через j_s^t и универсальные отображения X_t в X_V — через j_t.

Пусть топология τ порождается семейством A абсолютно выпуклых окрестностей нуля в X_V, а топология в $\Psi(t)$ — семейством таких окрестностей B_t. Определим индуктивную систему Φ в $\boldsymbol{A}$ над T, положив

$$\Phi(t) = (X_t, \alpha_t, A_i),$$

где $A_t = A \cup (\bigcup_{t \leqslant s} B_s)$ и отображение α_t задано по правилу

$$\alpha_t(a) = \begin{cases} j_t^{-1}(a) & \text{при } a \in A \\ (j_t^s)^{-1}(a) & \text{при } a \in B_s. \end{cases}$$

Согласно предложению для всех $a \in A_t$ $\alpha_t(a)$ — абсолютно выпуклое поглощающее множество, поскольку a является таковым, значит $(X_t, \alpha_t, A_t) \in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{A}$.

Пусть далее $s, t \in T$ и $s \leqslant t$, положим

$$\Phi(s, t) = (j_s^t, \overline{j}_s^t),$$

где $\overline{j}_s^t: A_t \to A_s$ — естественные вложения. Условия согласования, очевидно, выполнены, значит $\Phi(s, t) \in \mathrm{Mor}_A(\Phi(s), \Phi(t))$.

По определению, $\alpha_t(a) = a$ при $a \in B_t$, а так как B_t порождает топологию в $\Psi(t)$, то и $\alpha_t(A_t) \supset \alpha_t(B_t) = B_t$ порождает топологию в $\Psi(t)$, значит

$$\Gamma \cdot \Phi = \Psi.$$

Вычислим $\varinjlim_T \Phi$. Поскольку $\Gamma \cdot \Phi = \Psi$,

$$\Lambda \cdot \Gamma(\varinjlim_T \Phi) = \Lambda(\varinjlim_T \Psi) = X_\infty.$$

Далее, $A_\infty = \varinjlim_T A_t = \bigcap A_t = A$, причем при $a \in A$

$$\alpha_\infty(a) = \bigcup_t j_t(\alpha_t \bar{j}_t a) = \bigcup_t j_t(j_t^{-1}(a)) = a,$$

ибо $\bigcup j_t X_t = X_\infty$ (как и ранее, $\bar{j}_t : A_\infty \to A_t$ — универсальное отображение). Таким образом, $\alpha_\infty = \mathrm{Id}_A$ и

$$\varinjlim_T \Phi = (X_\infty, \mathrm{Id}_A, A).$$

Топология в пространстве X_A порождается множеством $\alpha_\infty(A_\infty) = \mathrm{Id}_A A = A$, а значит совпадает с τ. Теорема доказана.

Замечание. Если множества A и T счетны, то можно построить и. ц. Φ в $\boldsymbol{A}$ над T, удовлетворяющую требованиям теоремы 2, и такую, что все отображения α_t будут инъективными. В этом случае A_t можно интерпретировать как множества абсолютно выпуклых окрестностей нуля в X_t, порождающие топологию в $\Psi(t)$.

Топология пространства X_A является в некотором смысле проективным пределом топологий допредельных пространств. Поясним это.

Пусть Φ — и. ц. в $\boldsymbol{A}$ над T, $X_A = \Gamma(\varinjlim_T \Phi)$ и $A_\infty = \Theta(\varinjlim_T \Phi)$. Введем такие обозначения: множество всех окрестностей нуля в X_A вида $u = \varepsilon \bigcap_1^n \alpha_\infty a_k$, где $a_k \in A_\infty$, обозначим через U; пространство $X_\infty = \Lambda(X_A)$ с топологией, порождаемой единственной окрестностью нуля $u \in U$, обозначим через X_u. Упорядочив множество U по включению (т. е. положив $u \leqslant v$ при $u \supset v$), мы получим направленное множество. При $u \leqslant v$ тождественное отображение пространства X_∞ в себя является в то же время непрерывным отображением X_v в X_u, т. е. определена проективная система Ψ в $\boldsymbol{V}$ над U с $\Psi(u) = X_u$ и $\Psi(u, v) = \mathrm{Id}_{X_\infty}$.

Теорема 3. *Во введенных выше обозначениях имеет место равенство*

$$\Gamma(\varinjlim_T \Phi) = \varprojlim_U \Psi \ (= X_\Psi).$$

Доказательство. По определению

$$\Lambda(X_A) = X_\infty = \Lambda(X_\Psi),$$

так как $\Lambda \cdot \Psi(u) = X_\infty$ и $\Lambda \cdot \Psi(u, v) = \mathrm{Id}_{X_\infty}$. Тождественный морфизм $\mathrm{I}_u : X_A \to X$ непрерывен, ибо $\mathrm{I}_u^{-1}(u) = u \in U$, т. е. прообраз окрестности нуля в X_u есть окрестность нуля в X_A. В силу универсального свойства проективного предела и равенства $\Lambda(\mathrm{I}_u) = \mathrm{Id}_{X_\infty}$ морфизм $\mathrm{I} = \varprojlim_U \mathrm{I}_u$ непрерывен из X_A в X_Ψ (топология в X_A не слабее топологии в X_Ψ). С другой стороны, гомоморфизм I^{-1} тоже непрерывен, ибо для $u \in U$ имеем $\mathrm{I}^{-1}(u) = u$, причем слева u есть окрестность нуля в X_A, а справа — в X_Ψ. Теорема доказана.

§ 2. Пространства функций от бесконечного числа переменных

В этом параграфе мы приведем несколько конкретных примеров, иллюстрирующих построения § 1. Большинство из них в той или иной форме уже встречались в разных работах (см., например, [2, 6]). Дополнительные примеры можно найти в [8].

В дальнейшем всегда в качестве множества T фигурирует множество натуральных чисел N с естественным порядком.

1. Пространства гладких функций. Классическим примером пространств функций от бесконечного числа переменных являются пополнения множества цилиндрических функций в разных топологиях. В наших терминах ситуация описывается следующим образом: в категории $\boldsymbol{V}$ над N задана индуктивная система Ψ, причем в качестве $\Psi(n)$ выбирается пространство m раз дифференцируемых функций от n переменных, а отображения $\Psi(l, n)$ определяются при $l < n$ равенством

$$\Psi(l, n)(f) = \left(j_l^n f\right)(x) = f(\pi x),$$

где π — естественная проекция $\boldsymbol{R}^n$ на $\boldsymbol{R}^l$:

$$\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_l).$$

Индуктивный предел этой системы — пространство m раз дифференцируемых цилиндрических функций на $\boldsymbol{R}^\infty = \bigoplus \boldsymbol{R}$ мы обозначим через $C^m_{\mathrm{ind}}(\boldsymbol{R}^\infty)$. Если пространства $\Psi(n)$ были отделимы и полны, то и $C^m_{\mathrm{ind}}(\boldsymbol{R}^\infty)$ будет отделимо и полно. Последнее обстоятельство обуславливает сравнительно малый запас функций в $C^m_{\mathrm{ind}}(\boldsymbol{R}^\infty)$, порой недостаточный для приложений.

Продемонстрируем, как с помощью конструкций § 1 можно получить в этом пространстве различные топологии (а после пополнения — пространства функций от бесконечного числа переменных). Для простоты мы ограничимся случаем $m = 1$.

Пусть на $\boldsymbol{R}^\infty$ заданы две нормы ν и ν', причем пополнения $\boldsymbol{R}^\infty$ в этих нормах — пространства B и B' — сопряжены относительно спаривания

$$\langle x, y \rangle = \sum_1^\infty x_k y_k$$

в $\boldsymbol{R}^\infty$. Это означает, что норма ν' равна функционалу Минковского поляры $b' = b^\circ$ единичного шара b относительно нормы ν, и наоборот.

Обозначим через $\sigma_k : R^k \to B$ вложения, заданные как

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots) \in \boldsymbol{R}^\infty \subset B.$$

Сопряженные проекции обозначим $\sigma_x' : B' \to \boldsymbol{R}^k$. При этом для $x \in \boldsymbol{R}^k$ и $y \in B'$ имеем $< \sigma_k x, y> = < x, \sigma_k' y>$. Ограничение ν на $\sigma_k(\boldsymbol{R}^k)$ превращает $\boldsymbol{R}^k$ в банахово пространство B_k с нормой $\nu_k = \nu \cdot \sigma_k$. Единичным шаром в B_k является множество $\sigma_k^{-1}(b) = b_k$. Единичный шар в сопряженном пространстве B_k' является проекцией $\sigma_k' b'$ шара b' на B_k'.

Построим индуктивную систему Φ_B в $\boldsymbol{A}$ над N. Именно, положим $\Phi_B(k) = (X_k, \mathrm{Id}_{A_k}, A_k)$, где $X_k = C^1(\boldsymbol{R}^k)$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций на $\boldsymbol{R}^k$ с равномерной топологией, $A_k = \{a_k\}$, а a_k — единичный шар в $C^1(\boldsymbol{R}^k)$ относительно нормы

$$\sup_x \max \{|f(x)|, \nu_k(df(x))\}.$$

Здесь $df(x) = \sum df/dx_i dx_i$ отождествлено с вектором $\{df/dx_i\}$ в пространстве B_k. Отметим, что это, конечно, не единственная норма в $C^1(\boldsymbol{R}^k)$, задающая топологию этого пространства.

Для $k < l$ определим морфизм $\Phi_B(k, l) = (j, \bar{j})_k^l$ равенствами

$$j_k^l(f)(x_1, \ldots, x_l) = f(\pi(x_1, \ldots, x_l))$$

и $\bar{j}_k^l(a_l) = a_k$. Выполнение условия согласования очевидно.

Перейдя к индуктивному пределу, мы получим объект $(X_\infty, \mathrm{Id}_A, \{a_\infty\})$. При этом, как легко видеть, $X_\infty = \Lambda(C^1_{\mathrm{ind}}(\boldsymbol{R}^\infty))$ и

$$a_\infty = \{f \in C^1_{\mathrm{ind}}(\boldsymbol{R}^\infty) : \sup_x \max\{|f(x)|, \nu(df(x))\} < 1\}.$$

Здесь df при помощи σ отождествлено с элементом $\{\partial f/\partial x_i\}$ пространства B.

Пространство $\Gamma(X_\infty, \mathrm{Id}_A, \{a_\infty\})$, очевидно, отделимо. Его пополнение мы обозначим через $C^1(B') = \overrightarrow{\lim}_{\Phi_B} C^1(\boldsymbol{R}^k)$.

Элементы предельного пространства $C^1(B')$ можно рассматривать как функции на пространстве B': для $f = j_k f_k$ и $x \in B'$ положим $f(x) = f_k(\sigma_k'(x))$ и по непрерывности продолжим это отождествление на все $C^1(B')$. Заметим, что если C любое другое банахово пространство, являющееся пополнением $\boldsymbol{R}^\infty$ и снабженное проекциями $\sigma_k' : C \to \boldsymbol{R}^k$, элементы $C^1(B')$ можно интерпретировать как функции на C.

Рассмотрим вопрос о гладкости этих функций. Очевидно, функции из $C^1(B')$ дифференцируемы вдоль всех векторов из $\boldsymbol{R}^\infty$

(т. е. имеющих вид $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$). Для того, чтобы функция $f \in C^1(B')$ была дифференцируема вдоль направления, задаваемого вектором $x \in C$, нужно, чтобы дифференциал df был определен как линейный функционал на векторе x. Точнее говоря, пусть $f = \lim\limits_{n\to\infty} j_n(f_n)$, тогда

$$dj_n(f_n) = df_n \cdot d\sigma_n' = d\sigma_n(df_n) \in \boldsymbol{R}^\infty \subset B$$

и при $n, l \to \infty$ имеем

$$\nu(d\sigma_n(df_n) - d\sigma_l(df_l)) \to 0,$$

откуда

$$df = \lim_{n\to\infty} d\sigma_n(df_n) \in B.$$

Значит, если $B' \supset C$, то функции из $C^1(B')$ дифференцируемы вдоль всех направлений из C, в противном случае — нет, хотя и непрерывны на C. Поэтому естественно считать функции из $C^1(B')$ определенными именно на B' и писать $C^1(B')$.

Отметим, однако, что ситуация с $B' \not\supset C$ довольно часто встречается в исследованиях дифференциальных операторов с бесконечным числом переменных (ср. [6, 7, 9]).

Путем рассмотрения тензорных степеней B в разных топологиях можно получить и различные пространства типа $C^m(B')$ с $m > 1$.

2. Гильбертовы пространства. Пусть при $k \in N$ заданы гильбертовы пространства X_k с единичными шарами $b_k \subset X_k$ и изометрические вложения $j_k^{k+1}: X_k \to X_{k+1}$, при $k < l$ положим $j_k^l = j_{l-1}^l \cdot \ldots \cdot j_k^{k+1}$. Индуктивной изометрической цепью гильбертовых пространств (и. и. ц.) называется индуктивная цепь в $\boldsymbol{A}$ над N, заданная равенствами $\Phi(k) = (X_k, \mathrm{Id}_{\{b_k\}}, \{b_k\})$ при $k \in N$ и $\Phi(k,l) = (j, \bar{j})_k^l$ с $\bar{j}_k^l b_l = b_k$ при $k < l$. Для ее определения достаточно задавать пространства X_k и изометрические вложения j_k^{k+1}, по которым однозначно восстанавливается вся и. и. ц. Впредь мы будем ограничиваться заданием X_k и j_k^{k+1}, т. е. индуктивной системы над N в категории $\boldsymbol{H}$ гильбертовых пространств. Индуктивный предел и. и. ц. — тройка $(X_\infty, \mathrm{Id}_{\{b_\infty\}}, \{b_\infty\})$ определяет предгильбертово пространство $X_{\boldsymbol{A}} = \Gamma(X_\infty, \mathrm{Id}_{\{b_\infty\}}, \{b_\infty\})$, равное после пополнения индуктивному пределу соответствующей системы в категории $\boldsymbol{H}$. Это пространство мы обозначаем через $X = \varinjlim_\Phi X_k$.

Классическим примером такой ситуации является сепарабельное подпространство полного тензорного произведения гильбертовых пространств. Именно, пусть H_k — гильбертово пространство (сепарабельное) с нормой $|\cdot|_k$, $e_k \in H_k$ и $|e_k|_k = 1$. Положим $X_k = \bigotimes_1^k H_l$ в естественной гильбертовой кросснорме $\|\cdot\|_k$. Зададим теперь и. и. ц., положив по определению $\Gamma \cdot \Phi(k) = X_k$ и $j_k^{k+1} f = f \otimes e_{k+1}$. Отображение j_k^{k+1} изометрично, ибо $\| f \otimes e_{k+1} \|_{k+1} = \| f \|_k \cdot |e_{k+1}|_{k+1} = \| f \|_k$. Индуктивный предел полученной и. и. ц. определяет пространство $X = \underset{\to}{\lim}_\Phi \overset{1}{\underset{k}{\otimes}} H_i$ (в обозначениях статьи [3] $X = \otimes_{\{e_k\}} H_k$).

Эту конструкцию несложно обобщить на случай пространств H_k с топологией, задаваемой системой гильбертовых норм $|\cdot|_\omega^k$ с $\omega \in \Omega_k$. Заменяя систему норм на эквивалентную, можно считать, что $|\cdot|_\omega^k \neq |\cdot|_{\omega'}^k$ при $\omega \neq \omega'$ и $|e_k|_\omega^k \equiv 1$ для всех $\omega \in \Omega_k$. Введем такие обозначения: $A_n = \Pi_1^n \Omega_k$, $\pi_n : A_m \to A_n\ (m > n)$ — естественная проекция. Каждому элементу $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A_n$ сопоставим гильбертову кросснорму ν_a^n на $X_n = \overset{n}{\underset{1}{\otimes}} H_i$, положив

для $f = \overset{n}{\underset{1}{\otimes}} f_k$ $\nu_a^n(f) = \Pi\, |f_k|_{a_k}^k$.

Определение ν_a^n корректно и в случае $n = \infty$, ибо тогда при k больших некоторого $K(f)$ все $f_k = e_k$ и $|e_k|_{a_k}^k = 1$, а значит $\nu_a^\infty(f) = \overset{K}{\underset{1}{\Pi}} |f_k|_{a_k}^k$.

Пусть $a \in A_\infty$, норма ν_a^∞ индуцирует на $X_m\ (m < \infty)$ норму $\nu_{\pi_m(a)}^m$ по правилу

$$\nu_{\pi_m(a)}^m (f_1 \otimes \ldots \otimes f_m) = \nu_a^\infty (f_1 \otimes \ldots \otimes f_m \otimes e_{m+1} \otimes \ldots)$$

(все нормы гильбертовы). Заметим теперь, что если для каждого $m > 0$ задана норма $\nu_{a(m)}^m$ с $a(m) \in A_m$, причем $\nu_{a(m)}^m = \nu_{\pi_m(a(n))}^m$ при $n > m$, то найдется такой элемент $a \in A_\infty$, что $\nu_{a(m)}^m = \nu_{\pi_m(a)}^m$. Для доказательства достаточно положить $a = (a_1, a_2, \ldots$ с $a_m = a(m)_m$. Корректность определения a следует из того, что для $\omega, \omega' \in \Omega_k$ $|\cdot|_{\omega'}^k \neq |\cdot|_{\omega'}^k$ при $\omega \neq \omega'$, а значит из $\nu_{a(m)}^m = \nu_{\pi_m(a(n))}^m$ следует, что $a(m) = \pi_m(a(n))$.

Пусть b_a^m — единичный шар в X_m в смысле нормы $\nu_a^m a \in A_m$. Определим и. ц. в A над N, положив

$$\Phi(m) = (X_m,\ \alpha_m,\ A_m)\ \ (\alpha_m(a) = b_a^m).$$

Топология в пространстве X_m задается при помощи гильбертовых норм $\nu_a^m\ (a \in A_m)$, являющихся функционалами Минковского множеств b_a^m. Положим далее

$$\Phi(m,\ m+1) = (j_m^{m+1},\ \bar{j}_m^{m+1}),$$

где $j_m^{m+1} f = f \otimes e_{m+1}$ и $\bar{j}_m^{m+1} b_a^{m+1} = b_{\pi_m(a)}^m$.

Индуктивный предел этой и. ц. — объект

$$(\bigotimes_1^\infty {}_{\{e_i\}} H_i,\ \alpha_\infty,\ A_\infty) \in \mathrm{Ob}\boldsymbol{A}.$$

Отделимость топологии в $\Gamma(\bigotimes_{\{e_i\}} H_i,\ \alpha_\infty,\ A_\infty)$ следует из отделимости топологий в пространствах $\bigotimes_1^m H_i = X_m$ и, в конечном счете, из отделимости H_i.

Еще одним важным обобщением является взвешенное тензорное произведение (см. [2, 3]).

Рассмотрим сначала случай гильбертовых пространств. Пусть H_k — гильбертовы пространства с нормами $|\cdot|_k$, e_k — единичные векторы в них, и пусть $d = (d_1, \ldots, d_n, \ldots)$ — последовательность чисел $d_k \geqslant 1$. Введем в пространство $X_m = \bigotimes_1^m H_i$ две нормы. Одна из них — описанная выше гильбертова норма, $\|\cdot\|_m$, порожденная в X_m нормами $|\cdot|_i$. Вторую норму $\nu^m(d)$ определим по индукции. Для этого обозначим через p_i ортопроектор на вектор e_i в H_i и через P_i оператор $1_{H_1} \otimes \ldots \otimes 1_{H_{i-1}} \otimes p_i$. Положим $q_i = 1_{H_i} - p_i$ и $Q_i = 1_{X_i} - P_i$. Зададим теперь норму $\nu^1(d)$ равной $d_1^{-1/2} \|\cdot\|_1$ (в H_1) и для $m > 1$ по индукции определим

$$[\nu^m(d)(f)]^2 = [\nu^{m-1}(d)((j_{m-1}^m)^{-1} P_m f)]^2 + d_m^{-1} \| Q_m f \|_m^2. \qquad (2.1)$$

Предгильбертово пространство $\bigotimes_1^m H_i$ в смысле нормы $\nu^m(d)$ мы обозначим через Y_m. Отображение $j_m^{m+1} : f \mapsto f \otimes e_{m+1}$ является изометрическим вложением Y_m в Y_{m+1}, а потому задает и. и. ц, Φ. Ее предел определяет предгильбертово пространство $\Gamma(\varinjlim_N \Phi)$, пополнение которого обозначается через $\bigotimes_1^\infty {}_{\{e_i\},\ \{d_i\}} H_i = \varinjlim_\Phi Y_i$ и называется взвешенным тензорным произведением пространств H_i с весом d (см. [2]).

Наконец, рассмотрим общую ситуацию, когда топология в H_i задается системой гильбертовых норм $|\cdot|_\omega^i$ с $\omega \in \Omega_i$, а d пробегает множество D всех последовательностей $d = (d_1, \ldots, d_n, \ldots)$ с $d_i \geqslant 1$. Этот случай исследован в [3], где предельное пространство $\bigotimes_{\{e_i\},\ D} H_i$ было определено как проективный предел (пересечение) всех гильбертовых пространств вида $\bigotimes_{\{e_i\},\ \{d_i\}} h_{a_i}$, где $\{d_i\} \in D$, а h_{a_i} — пополнение H_i в норме $|\cdot|_{a_i}^i$ (a_i — фиксированная для данного пространства последовательность норм в H_i). Там же доказано, что $\Lambda(\bigotimes_{\{e_i\},\ D} H_i) = X_\infty$ и сходимость в $\bigotimes_{\{e_i\},\ D} H_i$ на последовательностях совпадает с индуктивной.

Проверим, что для индуктивной цепи в $\boldsymbol{A}$, соответствующей этой ситуации мы получим тот же ответ. Итак, пусть нам задана индуктивная система Φ с

$$\Phi(m) = (\bigotimes_1^m H_i,\ \alpha_m,\ A_m \times D_m)\ (\alpha_m(a,\ d) = b_a^m(d)),$$

$$\Phi(m,\ m+1) = (j_m^{m+1},\ \bar{j}_m^{m+1}).$$

Здесь приняты такие обозначения: $D_m = \prod_1^m [1,\ \infty)$, $b_a^m(d)$ единичный шар в $X_m = \otimes_1^m H_i$ относительно нормы $\nu_a^m(d)$, определенной в X_m при помощи норм $|\cdot|_{a_i}^i$ в H_i и веса $d = (d_1,\ \ldots,\ d_m)$. Топология в X_m задается при помощи этой системы шаров. Отображения j_m^{m+1} и $\bar{j}_m^{m+1}$ определены, как и ранее, по правилу

$$j_m^{m+1} f = f \otimes e_{m+1}$$

и

$$\bar{j}_m^{m+1} b_a^{m+1}(d) = b^m_{\pi_m(a)}(d(m)),$$

где $d(m) = (d_1,\ \ldots,\ d_m)$ — отрезок последовательности d. Легко видеть, что Φ — индуктивная цепь. Ее предел — тройка

$$(\bigotimes_{1\ \{e_i\}}^{\infty} H_i,\ \alpha_\infty,\ A_\infty \times D) = \underrightarrow{\lim}_N \Phi,$$

где $\alpha_\infty(a,\ d) = b_a^\infty(d)$ — единичный шар, построенный по норме определенной по индукции по правилу (2.1) для последовательности норм $|\cdot|_{a_k}^k$ и последовательности чисел $d \in D$.

В [3] доказано, что

$$\Lambda(\bigotimes_{1\ \{e_i\},\ D}^{\infty} H_i) = X_\infty = \Lambda\Gamma(\underrightarrow{\lim}_N \Phi).$$

Для доказательства равенства

$$\bigotimes_{1\ \{e_i\},\ D}^{\infty} H_i = X_A.$$

нам остается сослаться на теорему 3, условия которой, очевидно, выполнены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авербух В. И., Смолянов О. Г. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах. — УМН, 1968, т. XXII, вып. 6, с. 201—260.
2. Березанский Ю. М., Гали И. М. Положительно определенные функции бесконечного числа переменных в слое. — УМЖ, 1972, т. 24, № 4, с. 435—464.
3. Березанский Ю. М., Самойленко Ю. С. Ядерные пространства функций бесконечного числа переменных. — УМЖ, 1973, т. 25, № 6, с. 723—737.

4. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М., «Мир», 1972. 259 с.
5. Бурбаки Н. Теория множеств. М., «Мир», 1965. 455 с.
6. Вишик М. И., Марченко А. В. Краевые задачи для эллиптических и параболических операторов второго порядка на бесконечномерных многообразиях с краем. — «Мат. сб.», 1973, т. 90 (132), № 3, с. 331—371.
7. Далецкий Ю. Л. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения. — УМН, 1967, т. XXII, вып. 4, с. 3—54.
8. Марченко А. В. Об индуктивных пределах линейных пространств и операторов и об их приложениях. — «Вестник МГУ», 1974, № 2, с. 26—33.
9. Фролов Н. Н. О задаче Дирихле для эллиптического оператора в цилиндрической области гильбертова пространства. — «Мат. сб.», 1973, т. 92 (134), № 3, с. 430—445.
10. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1967. 257 с.