УДК 517.54

М. Б. Левин

ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНОЙ ОТ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Известна следующая классическая теорема С. Н. Бернштейна [1].

Если целая функция экспоненциального типа σ ограничена на вещественной оси, то

$$|f'(x)| \leqslant \sigma \sup |f(x)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

причем равенство достигается лишь для функций вида $f(x) = A\sin(x\sigma + \varphi)$.

Эта теорема неоднократно обобщалась в различных направлениях. Отметим среди этих обобщений работу И. И. Привалова [2], в которой дается оценка производной тригонометрического полинома $P_n(x)$ на множестве E, состоящем из конечного числа интервалов при том условии, что $|P_n(x)| \leqslant 1$ на этом множестве. А. Шеффер [3] дальше обобщил этот результат, заменив тригонометрические полиномы целыми функциями экспоненциального типа и конечную систему интервалов замкнутыми множествами весьма общего характера.

Н. И. Ахиезер и Б. Я. Левин в [4] вместо целых функций изучали функции, аналитические в области G_E, полученной выбрасыванием из плоскости множества E, состоящего из отрезков действительной оси. В таких областях определяется класс K, состоящий из аналитических (вообще говоря, многозначных) функций, имеющих угловые предельные значения на E, и таких, что для $f(z) \in K$ существует функция $\hat{f}(z)$, имеющая в точках множества угловые предельные значения, комплексно-сопряженные предельным значением функции $f(z)$. Кроме того, предполагается, что функции класса K не слишком быстро растут (аналог экспоненциального типа). Оказывается, что существует такая мажоранта $\omega(z)$, определенная при $z \in G_E$, которая строится с помощью специального конформного отображения, зависящего лишь от множества E, и обладающая тем свойством, что если $f(z) \in K$ и $|f(x)| \leqslant 1$ при $x \in E$, то $|f(z)| \leqslant |\omega(z)|$ при $z \in G_E$ и отсюда получается точное неравенство $|f'(x)| \leqslant |\omega'(x)|$, имеющее место во всех тех точках множества E, в которых существует производная $f'(x)$ от функции $f(x)$, рассматриваемой как функция на множестве E. Н. Н. Мейман [5] обобщил этот результат, заменив область G_E областью, ограниченной спрямляемыми жордановыми дугами. Кроме того, вместо мажоранты, построенной по конформному отображению, он рассмотрел более общие мажоранты, названные им мажорантами класса HB, причем сразу предполагается, что $|f(z)| \leqslant |\omega(z)|$ во всей области. Здесь мы обобщаем результаты работ [4] и [5] на более широкий класс областей. При этом мы не будем требовать, чтобы функция $f(z)$ была дифференцируема вдоль границы.

С помощью отображения универсальной накрывающей области на круг задача сводится к оценке производной от функции, относящейся к некоторому классу мероморфных в единичном круге функций. Первый параграф этой статьи мы полностью посвятим изучению нужных нам специальных классов функций, мероморфных в круге.

§ 1. Классы функций мероморфных в круге

Определение 1. *Мероморфная в единичном круге функция $f(z)$, имеющая почти всюду на окружности $|\zeta| = 1$ угловые предельные значения $f(\zeta)$, называется функцией класса KM, если существует мероморфная в этом круге функция $\hat{f}(z)$, также имеющая угловые предельные значения почти всюду на окружности $|\zeta| = 1$, причем такие, что*

$$\hat{f}(\zeta) = \overline{f(\zeta)} \tag{1}$$

на множестве полной меры. Такая функция единственна по теореме Лузина [10, с. 289].

Если функции $f(z)$ и $\hat{f}(z)$ голоморфны внутри единичного круга, то $f(z)$ называется функцией класса K. Очевидно, что функции класса KM представляются в виде

$$f(z) = P(z) + iQ(z), \tag{2}$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — мероморфные в единичном круге функции, имеющие почти всюду вещественные предельные значения.

Назовем отражением функции $f(z)$, мероморфной в единичном круге и имеющей угловые предельные значения почти всюду на окружности, функцию $\varphi(z)$, мероморфную во внешности единичного круга $|z| > 1$, имеющую угловые предельные значения почти всюду на окружности $|\zeta| = 1$, такие, что $\varphi(\zeta) = f(\zeta)$ почти всюду [1].

Можно дать теперь эквивалентное определение класса KM, использующее понятие отражения.

Определение 1'. *Мероморфная в единичном круге функция $f(z)$, для которой существует отражение $\varphi(z)$, называется функцией класса KM.*

---

[1] Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ голоморфны, то $\varphi(z)$ есть псевдопродолжение в смысле Г. Шапиро [6] функции $f(z)$ на всю область $|z| < 1$.

Функция $\hat{f}(z)$ связана с отражением $\varphi(z)$ функции $f(z)$ следующим соотношением:

$$\hat{f}(z) = \overline{\varphi(z^*)}, \tag{3}$$

где $z^* = \frac{1}{\bar{z}}$, $|z| < 1$.

В классе KM выделим некоторые подклассы.

1. Класс $K^{(1)}M(\Gamma)$. Пусть Γ — некоторое множество точек единичной окружности, $f(z)$ — функция класса KM и $\varphi(z)$ — ее отражение. Будем говорить, что

$$f(z) \in K^{(1)}M(\Gamma),$$

если:

а) в любой точке $\zeta \in \Gamma$ имеем $f(\zeta) = \varphi(\zeta)$;

б) для некоторой некасательной последовательности существуют конечные пределы

$$f'_{\{z_n\}}(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\zeta) - f(z_n)}{\zeta - z_n}; \quad \varphi'_{\{z_n^*\}}(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_n^*)}{\zeta - z_n^*},$$

равные друг другу, т. е.

$$\varphi'_{\{z_n^*\}}(\zeta) = f'_{\{z_n\}}(\zeta). \tag{4}$$

Заметим, что в этом случае

$$\hat{f}'_{\{z_n\}}(\zeta) = -\overline{f'_{\{z_n\}}(\zeta)\,\zeta^2}.$$

Это легко получить из равенства (3) и (4). При этом «некасательной» мы называем последовательность, расположенную внутри угла, образованного двумя хордами, исходящими из точки ζ.

2. Класс HBM. Функция $\omega(z)$ класса KM называется принадлежащей классу HBM, если

$$|\hat{\omega}(z)| \leqslant |\omega(z)| \qquad (|z| < 1).$$

3. Класс $HB^{(1)}M(\Gamma)$. Этот класс определяется как пересечение классов HBM и $K^{(1)}M(\Gamma)$:

$$HB^{(1)}M(\Gamma) = HBM \cap K^{(1)}M(\Gamma).$$

Замечание. Аналогично этим классам выделяются подклассы $K^{(1)}(\Gamma)$, HB и $HB^{(1)}(\Gamma)$ в классе K.

Класс K есть естественное обобщение класса K, рассмотренного Н. И. Ахиезером и Б. Я. Левиным [4]. Определение класса HB дано Н. Н. Мейманом [7] для целых функций и здесь несколько модифицировано.

Приведем теперь некоторые примеры функций из определенных здесь классов.

1. Всякая функция вида $f\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)$, где $f(z)$ — целая (или мероморфная) функция, а ζ — фиксированная точка единичной окружности, принадлежит классу $K^{(1)}(\Gamma)$ (или $K^{(1)}M(\Gamma)$), где $\Gamma = C \setminus \{\zeta\}$ и C — единичная окружность.

2. Функция $f(z)$, мероморфная во всей расширенной плоскости за исключением некоторого множества Δ, лежащего на окружности $|\zeta| = 1$, нигде не плотного на ней и имеющего нулевую линейную меру, принадлежит классу $K^{(1)}M(\Gamma)$, где $\Gamma = C \setminus (\Delta \cup N)$, N — множество полюсов $f(z)$.

3. Функция, представленная интегралом типа Коши-Стильтьеса:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z} d\sigma(\varphi) \tag{5}$$

принадлежит классу K, если $\sigma(\varphi)$ есть сингулярная функция, т. е. такая, что $\sigma'(\varphi) = 0$ на интервале $(-\pi, \pi)$ вне некоторого множества Δ меры ноль. Кроме того, $f(z) \in K^{(1)}(C \setminus \overline{\Delta})$. В самом деле, разность внешних и внутренних угловых предельных значений функции $f(z)$, представленной в виде (5), как известно, равна $\sigma'(\varphi)$:

$$f_+(e^{i\varphi}) - f_-(e^{i\varphi}) = \sigma'(\varphi)$$

и, следовательно, равна нулю на множестве $C \setminus \Delta$. (По теореме о стирании особенностей функция $f(z)$ аналитически продолжается через любой интервал, принадлежащий множеству $C \setminus \overline{\Delta}$, и потому принадлежит $K^{(1)}(C \setminus \overline{\Delta})$).

4. Всякая внутренняя функция принадлежит классу KM. Напомним, что голоморфная в единичном круге функция $\omega(z)$ называется внутренней, если $|\omega(z)| \leqslant 1$ в круге и $|\omega(\zeta)| = 1$ почти всюду на окружности $|\zeta| = 1$. В этом случае функция $\hat{\omega}(z)$ строится по формуле: $\hat{\omega}(z) = \frac{1}{\omega(z)}$.

Отсюда видно, что внутренняя функция без нулей принадлежит классу K. Заметим еще, что функция $f(z) = \frac{1}{\omega(z)}$ принадлежит классу HBM. В самом деле, $\left|\frac{\hat{f}(z)}{f(z)}\right| = |\omega(z)|^2 \leqslant 1$. Например, функция $f(z) = e^{\frac{1+z}{1-z}}$ принадлежит классу $HB^{(1)}(C \setminus \{1\})$. Однако существуют внутренние функции, не принадлежащие классу $K^{(1)}M(\Gamma)$ ни при каком Γ. При построении примера такой функции мы будем пользоваться следующей теоремой Жюлиа-Каратеодори.

Если функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет неравенству $|f(z)| \leqslant 1$, то в любой точке границы круга, в которой существует угловое предельное значение функции $f(\zeta)$

и $|f(\zeta)|=1$, существует и производная $f'(\zeta)$ (конечная или бесконечная) по любой некасательной последовательности z_n. Если эта производная конечна, то:

1) Существует угловое предельное значение производной $\lim\limits_{z\to\zeta} f'(z)$ и этот предел равен $f'(\zeta)$.

2) Модуль $|f'(\zeta)|$ имеет следующий геометрический смысл: Образ орицикла радиуса r, касательного к окружности $|\zeta|=1$ в точке ζ_0, лежит в орицикле радиуса $r|f'(\zeta_0)|$, касательного к окружности $|\zeta|=1$ в точке $f(\zeta_0)$.

3) При $f'(\zeta_0)\neq 0$ верно равенство

$$\arg f'(\zeta_0)=\arg f(\zeta_0)-\arg\zeta_0.$$[1]

Мы часто будем использовать в дальнейшем следствие из этой теоремы.

Следствие. *Если $f'(\zeta_0)=0$ хотя бы в одной точке единичной окружности, то $f(z)\equiv f(\zeta_0)$.*

Для построения примера рассмотрим последовательность окружностей с центром в нуле радиуса

$$r_n=1-\frac{1}{2^n n^2},\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

и на каждой такой окружности выберем совокупность точек

$$z_{n,k}=r_n e^{i\frac{2\pi k}{n}},\ k=0,\ 1,\ 2^n-1.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1}(1-|z_{n,k}|)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty,$$

то по точкам $z_{n,k}$ можно построить сходящееся произведение Бляшке $b(z)$.

Проверим, что в каждом орицикле содержится хотя бы один ноль функции $b(z)$, т. е. точка $z_{n,k}$. В самом деле, если через $\varphi_{r,n}$ обозначить центральный угол, соответствующий дуге окружности радиуса r_n, содержащейся в орицикле радиуса r, то легко установить, что

$$\cos\frac{\varphi_{r,n}}{2}=\frac{1+r_n^2-2r}{2(1-r)}=1-\frac{1-r_n^2}{2(1-r)}.$$

Отсюда видно, что $\varphi_{r,n}=O(\sqrt{1-r_n})$ и, следовательно, при достаточно больших значениях n величина $\varphi_{r,n}$ больше углового расстояния между соседними точками $z_{n,k}$ и $z_{n,k+1}$. Отсюда и из теоремы Жюлиа — Каратеодори можно заключить, что производная $b'(\zeta)$ бесконечна для любой точки ζ, в которой $|b(\zeta)|=1$, и любой некасательной последовательности $z_n\to\zeta$. В самом деле,

[1] Доказательство этой теоремы см., например, [8, с. 59].

образ любого орицикла содержит ноль, следовательно, не содержится в орицикле радиуса менее $\frac{1}{4}$, т. е. $|b'(\zeta)| > \frac{1}{4r}$ при любом r. Таким образом, производная бесконечна почти всюду на единичной окружности.

Заметим, что для принадлежности внутренней функции $f(z)$ классу $K^{(1)}M(\zeta)$ необходимо и достаточно, чтобы призводная $f'(\zeta)$ была конечна. Необходимость следует из определения класса $K^{(1)}M(\zeta)$, а достаточность — из третьего утверждения теоремы Жюлиа — Каратеодори и соотношения: $\hat{f}(z) = \frac{1}{f(z)}$. Известно, что всякая внутренняя функция представляется в виде

$$\omega(z) = b(z)\,\varphi(z),$$

где $b(z)$ — произведение Бляшке, а

$$\varphi(z) = e^{-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\,d\sigma(\Theta)}, \tag{6}$$

причем $\sigma(\theta)$ — ограниченная, монотонно возрастающая функция с производной, равной нулю почти всюду.

Необходимое и достаточное условие принадлежности функции $\omega(z)$ классу $K^{(1)}M(\zeta)$ можно сформулировать так:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-|z_k|^2}{|\zeta-z_k|^2}<\infty, \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|e^{i\Theta}+\zeta|^2}{|e^{i\Theta}-\zeta|^2}\,d\sigma(\Theta)<\infty, \tag{7}$$

где z_k — нули функции $b(z)$.

Первая часть условия (7) представляет собой содержание теоремы Фростмана [9],[1] относящейся к произведению Бляшке. Второе условие является необходимым и достаточным для принадлежности классу $K^{(1)}M(\zeta)$ функций вида (6). Его можно проверить, взяв производную $\varphi'(z)$ в круге и перейдя к пределу при $z \to \zeta$. (Этот переход возможен в силу теоремы Жюлиа — Каратеодори, т. е. если существует $\varphi'(\zeta)$, то $\varphi'(\zeta) = \lim\limits_{z\to\zeta}\varphi'(z)$. Очевидно, что выполнение обоих условий достаточно для существования ограниченной производной функции $\omega(z)$ в точке ζ.

Покажем необходимость условий (7). Для этого предположим, что первое из них не выполняется, т. е.

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1-|z_k|^2}{1-|z_k|^2} = +\infty.$$

---

[1] Формулировка теоремы Фростмана такова: чтобы существовал $\lim\limits_{z\to\zeta} b'(z)$, необходимо и достаточно выполнения первого из условий (7).

(Мы считаем, что $\zeta = 1$ и $b(\zeta) = \varphi(\zeta) = \omega(\zeta) = 1$). Через $b_n(z)$ обозначим конечное произведение Бляшке: $b_n(z) = \prod\limits_1^n \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \frac{z - z_k}{1 - z\bar{z}_k}$.

Оценим радиальную производную от $\ln|b(z)|$ в точке $\zeta = 1$. Имеем:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\ln|b(x)|}{x-1} \geqslant \lim_{x \to 1-0} \frac{\ln|b_n(x)|}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} \sum_1^n \ln \frac{|x - \bar{z}_k|^2}{|1 - x\bar{z}_k|^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} \sum_1^n \ln \left[1 + \left(\frac{x^2 + r_k^2 - 2xr_k \cos\Theta_k}{1 + (xr_k)^2 - 2xr_k \cos\Theta_k} - 1\right)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \sum_1^n \lim_{x \to 1-0} \frac{(x+1)(1 - |z_k|^2)}{|1 - z_k|^2} = \sum_1^n \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - z_k|^2}. \quad (z_k = r_k e^{i\Theta_k})$$

Так как последняя сумма может быть сделана сколь угодно большой за счет выбора n, то $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{\ln|b(x)|}{x-1} = +\infty$.

Так как $\ln|\omega(z)| = \ln|b(z)| + \ln|\varphi(z)| \leqslant \ln|b(z)| < 0$, то $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln|\omega(x)|}{x-1} = +\infty$. Отсюда легко получить, что $\omega'(1) = \infty$.

Для произвольной функции класса KM можно дать достаточное условие принадлежности ее классу $K^{(1)}M(\Gamma)$, где Γ — открытая дуга единичной окружности. Справедлива

Лемма 1. *Пусть Γ — открытая дуга единичной окружности, т. е.*

$$\Gamma = \{e^{i\varphi} : -\pi \leqslant \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 \leqslant \pi\}.$$

Если для функции $f(z)$ класса KM выполняются такие условия:

$$(A1) \quad \overline{\lim_{r \to 1-0}} \int_{\varphi_1+h}^{\varphi_2-h} |f(re^{i\theta}) d\theta < \infty,$$

$$(A2) \quad \overline{\lim_{r \to 1-0}} \int_{\varphi_1+h}^{\varphi_2-h} |\hat{f}(re^{i\theta})| d\theta < \infty$$

при всех $h > 0$, то функция $f(z)$ аналитически продолжается через дугу Γ.

Доказательство. Дугу окружности $\varphi_1 + h \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 - h$ обозначим через Γ_h. Из условий $(A1)$ и $(A2)$ следует, что функции $f(z)$ и $\hat{f}(z)$ не имеют полюсов в некоторой окрестности дуги

Γ_h. Обозначая отражение функции $f(z)$ через $\varphi(z)$ и вспоминая, что $\overline{\varphi(z^*)} = \hat{f}(z)$, перепишем условие ($A2$) в виде

$$\overline{\lim_{r \to 1+0}} \int_{\varphi_1+h}^{\varphi_2-h} |\varphi(re^{i\theta})| \, d\theta < \infty.$$

Докажем, что $\varphi(z)$ есть аналитическое продолжение функции $f(z)$ через дугу Γ. Для этого зафиксируем достаточно малое $h > 0$ и возьмем контур C, ограничивающий область G, содержащую дугу Γ_h, не содержащую полюсов функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ и ни одного из концов дуги Γ.

Дуга Γ разбивает область, ограниченную контуром C, на две области G_+ и G_-, лежащие внутри и вне единичного круга. Из условия ($A1$) следует, что функция $f(z)$ принадлежит классу E_1 в области G_+, т. е. найдется последовательность кривых γ_n, сходящаяся к границе области ∂G_+, такая, что

$$\int_{\gamma_n} |f(z)| \, |dz| < M.$$

А как известно [10, с. 203], функции класса E_1 представляются интегралом Коши по своим граничным значениям:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \tag{8}$$

и точно так же функция $\varphi(z)$ представляется в области G_- в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_-} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta. \tag{8'}$$

Следовательно, по теореме о стирании особенностей функция $\varphi(z)$ есть аналитическое продолжение функции $f(z)$ через дугу Γ, и лемма 1 доказана.

Заметим, что условие аналитической продолжаемости через Γ не является необходимым для принадлежности классу $K^{(1)}M(\Gamma)$. Например, произведение Бляшке, построенное по последовательности $z_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) e^{\frac{i}{n}}$, принадлежит классу $K^{(1)}M(C)$, где C — вся окружность, так как условие (7) выполняется для этого произведения в любой точке. Тем не менее это произведение не продолжается аналитически ни через одну дугу, содержащую точку $\zeta = 1$.

§ 2. Неравенство для производных на границе круга

Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть*

$$f(z) \in K^{(1)}M(\xi_0), \quad \omega(z) \in HB^{(1)}M(\zeta_0)$$

и выполняются следующие условия:

$$(\text{Б}1)\quad |f(z)| \leqslant |\omega(z)| \quad (|z|<1),$$

$$(\text{Б}2)\quad |\hat{f}(z)| \leqslant |\omega(z)| \quad (|z|<1).$$

Тогда, если найдется такая последовательность z_n, *что равенство* (4) *выполняется сразу для обеих функций* $f(z)$ и $\omega(z)$, *то справедливо неравенство:*

$$\left|f'_{\{z_n\}}(\zeta_0)\right| \leqslant \left|\omega'_{\{z_n\}}(\zeta_0)\right|. \tag{9}$$

При этом в (9) *возможен знак равенства только при выполнении какого-нибудь из двух условий: либо* $\omega(\zeta_0)=0$, *либо*

$$f(z)=c_1\omega(z)+c_2\hat{\omega}(z),\quad |c_1|+|c_2|=1. \tag{10}$$

Доказательству теоремы мы предпошлем лемму.

Лемма 2. *Пусть* $f(z)\in KM$, $\omega(z)\in HBM$. *Если выполняются условия* (Б1) *и* (Б2), *то функция* $A_L(z)=f(z)+Le^{i\gamma}\omega(z)$ *принадлежит классу* HBM *при любом вещественном* γ *и любом* $L\geqslant 1$.

Доказательство. Сначала предположим, что $L>1$ Рассматривая функцию $\dfrac{\hat{A}_L(z)}{A_L(z)}$, заметим, что она ограничена. Действительно,

$$\left|\frac{\hat{A}_L(z)}{A_L(z)}\right|=\left|\frac{\hat{f}(z)+Le^{-i\gamma}\hat{\omega}(z)}{f(z)+Le^{i\gamma}\omega(z)}\right|\leqslant\frac{L\left|\dfrac{\hat{\omega}(z)}{\omega(z)}\right|+\left|\dfrac{\hat{f}(z)}{\omega(z)}\right|}{L-\left|\dfrac{f(z)}{\omega(z)}\right|}\leqslant\frac{L+1}{L-1}.$$

Кроме того, на границе $|\zeta|=1$ почти всюду имеем

$$\left|\frac{\hat{A}_L(\zeta)}{A_L(\zeta)}\right|=\left|\frac{\overline{A_L(\zeta)}}{A_L(\zeta)}\right|=1.$$

Таким образом, частное $\dfrac{\hat{A}_L(z)}{A_L(z)}$ есть ограниченная, (а следовательно, голоморфная) функция, предельные значения которой не превосходят единицы. А так как голоморфная, ограниченная в круге функция представляется интегралом Пуассона через свои граничные значения (см., например, [10]), то $\left|\dfrac{\hat{A}_L(z)}{A_L(z)}\right|\leqslant 1$ при всех

$|z| < 1$. Значит, $A_L(z) \in HBM$ при $L > 1$. Если же $L = 1$, то

$$\left|\frac{\hat{A}_1(z)}{A_1(z)}\right| = \lim_{L\to 1+0}\left|\frac{\hat{A}_L(z)}{A_L(z)}\right| \leqslant 1,$$

и лемма 2 доказана.

Примечание. Если $f(z) \in K^{(1)}M(\zeta_0)$ и $\omega(z) \in HB^{(1)}M(\zeta_0)$ при некоторой последовательности $\{z_n\}$, то, очевидно, при той же последовательности $\{z_n\}$ будет верно $A_L(z) \in HB^{(1)}M(\zeta_0)$ при всех $L \geqslant 1$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала тот случай, когда $\omega(\zeta_0) = 0$. В силу условия ($Б1$) имеем

$$\left|\frac{f(z_n) - f(\zeta_0)}{z_n - \zeta_0}\right| \leqslant \left|\frac{\omega(z_n) - \omega(\zeta_0)}{z_n - \zeta_0}\right|, \tag{11}$$

так как $f(\zeta_0) = \omega(\zeta_0) = 0$. Переходя к пределу в неравенстве (11), получим (9).

Если $\omega(\zeta_0) \neq 0$, то доказательство будем вести от противного. А именно, предположим, что

$$\left|f'_{\{z_n\}}(\zeta_0)\right| > \left|\omega'_{\{z_n\}}(\zeta_0)\right|.$$

Тогда существуют: вещественное число γ и число $M > 1$, такие, что

$$f'_{\{z_n\}}(\zeta_0) + Me^{i\gamma}\omega'_{\{z_n\}}(\zeta_0) = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$A_{M,\gamma}(z) = f(z) + Me^{i\gamma}\omega(z).$$

Эта функция (будем ее обозначать для простоты $A(z)$) принадлежит классу $HB^{(1)}M(\zeta_0)$ в силу леммы 2. Кроме того, $A'_{\{z_n\}}(\zeta_0) = 0$ и, из определения класса $K^{(1)}M(\zeta_0)$, $\hat{A}'_{\{z_n\}}(\zeta_0) = 0$.

Рассмотрим функцию $F(z) = \dfrac{\hat{A}(z)}{A(z)}$. Это внутренняя функция, так как $A \in HBM$ и $|F(\zeta_0)| = 1$, в силу того что $A(\zeta_0) \neq 0$. Следовательно, по теореме Жюлиа—Каратеодори функция $F(z)$ имеет в точке ζ_0 производную по любому некасательному направлению и эта производная равна нулю, потому что

$$F'(\zeta_0) = F'_{\{z_n\}}(\zeta_0) = \frac{\hat{A}'_{\{z_n\}}(\zeta_0)\,A(\zeta_0) - \hat{A}(\zeta_0)\,A'_{\{z_n\}}(\zeta_0)}{A^2(\zeta_0)}.$$

Таким образом, $F'(\zeta_0) = 0$. Отсюда, используя следствие теоремы Жюлиа—Каратеодори, получаем

$$F(z) \equiv F(\zeta_0) = e^{2i\alpha},$$

где α — некоторое вещественное число. Иначе говоря,

$$\hat{f}(z) + Me^{-i\gamma}\hat{\omega}(z) \equiv e^{2i\alpha}[f(z) + Me^{i\gamma}\omega(z)]$$

или

$$\hat{f}(z)\, e^{-i\alpha} - f(z)\, e^{i\alpha} = M[\omega(z)\, e^{i\beta} - \hat{\omega}(z)\, e^{-i\beta}], \tag{12}$$

где $\beta = \alpha + \gamma$.

Из (12) следует верное почти всюду равенство для предельных значений:

$$\operatorname{Im}[f(\zeta)\, e^{-i\alpha}] = -M \operatorname{Im}[\omega(\zeta)\, e^{i\beta}]. \tag{12'}$$

Разделив обе части (12) на $\omega(z)\, e^{i\beta}$, получим

$$\left|\frac{\hat{f}(z)}{\omega(z)}\right| + \left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\right| \geqslant M\left|1 - \frac{\hat{\omega}(z)}{\omega(z)}e^{-2i\beta}\right|. \tag{13}$$

Левая часть (13) допускает, в силу условий ($Б1$) и ($Б2$) при всех z, $|z| < 1$ оценку

$$\left|\frac{\hat{f}(z)}{\omega(z)}\right| + \left|\frac{\hat{f}(z)}{\omega(z)}\right| \leqslant 2.$$

Что же касается правой части, то она может быть сделана больше, чем $M(2 - \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, так как $\frac{\hat{\omega}(z)}{\omega(z)}e^{-2i\beta}$ есть внутренняя функция, а непостоянная внутренняя функция принимает все значения из единичного круга, кроме, может быть, множества емкости ноль[1]. Так как $M > 1$, то и получается, что предположение

$$|f'_{\{z_n\}}(\zeta_0)| > |\omega'_{\{z_n\}}(\zeta_0)|$$

ведет к противоречию. Таким образом, неравенство (9) доказано[2].

Докажем теперь, что если в неравенстве (9) имеет место знак равенства, и $\omega(\zeta_0) \neq 0$, то справедливо тождество (10).

Построим снова функцию $A(z) = f(z) + e^{i\gamma}\omega(z)$ такую, что $A'_{\{z_n\}}(\zeta_0) = 0$. Рассмотрим две возможности:

1) $A(\zeta_0) = 0$.

Построим функцию $c(z) = \frac{f(z)}{\omega(z)}$ и заметим, что в силу ($Б1$) верно $|c(z)| < 1$ и, кроме того, $c(\zeta_0) = e^{-i\gamma}$. Следовательно, $c(z)$ удовлетворяет условиям теоремы Жюлиа—Каратеодори в точке

[1] Этот факт составляет содержание одной теоремы Фростмана (см., например, [11, с. 56]).

[2] Если $\frac{\hat{\omega}(z)}{\omega(z)} = \text{const}$, то $\left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\right| \leqslant 1$ и $\left|\frac{\hat{f}(z)}{\omega(z)}\right| \leqslant 1$, тогда $\frac{\hat{f}(z)}{\omega(z)} + \frac{f(z)}{\omega(z)}$ есть функция ограниченная и на границе п. в с. вещественна, следовательно, $f(z) = \text{const}$.

ζ_0, т. е. имеет там некасательную производную. Вычисляя ее по последовательности $\{z_n\}$ и учитывая, что $f(\zeta_0) = -e^{-i\gamma}\omega(\zeta_0)$,

$$f'_{\{z_n\}}(\zeta_0) = -e^{-i\gamma}\omega'_{\{z_n\}}(\zeta_0),$$

имеем $c'(\zeta_0) = 0$, следовательно, $c(z) = e^{-i\gamma}$, или $f(z) \equiv -e^{-i\gamma}\omega(z)$, что и требуется.

2) $A(\zeta_0) \neq 0$.

Рассуждая как при доказательстве неравенства (9), получим тождества (12) и (12') при $M = 1$. Построим такое семейство функций:

$$c_\varepsilon(z) = \frac{f(z)e^{i\alpha} + \hat{f}(z)e^{-i\alpha}}{(1+\varepsilon)\,\omega(z)e^{i\beta} + \overset{\wedge}{\omega}(z)e^{-i\beta}}.$$

Функция $c_\varepsilon(z)$ допускает такую оценку:

$$|c_\varepsilon(z)| \leqslant \frac{\left|\dfrac{f(z)}{\omega(z)}\right| + \left|\dfrac{\hat{f}(z)}{\omega(z)}\right|}{1+\varepsilon - \left|\dfrac{\overset{\wedge}{\omega}(z)}{\omega(z)}\right|} \leqslant \frac{2}{\varepsilon}. \tag{14}$$

На границе круга $|\zeta| = 1$ функция $c_\varepsilon(z)$ может быть записана в виде

$$c_\varepsilon(\zeta) = \frac{2\operatorname{Re}[f(\zeta)e^{i\alpha}]}{(2+\varepsilon)\operatorname{Re}[\omega(\zeta)e^{i\beta}] + i\varepsilon\operatorname{Im}[\omega(\zeta)e^{i\beta}]}. \tag{15}$$

В силу (12') имеем почти всюду при $|\zeta| = 1$

$$|\operatorname{Im}[f(\zeta)e^{i\alpha}]| = |\operatorname{Im}[\omega(\zeta)e^{i\beta}]|,$$

а так как

$$|f(z)e^{i\alpha}| \leqslant |\omega(z)e^{i\beta}|,$$

то почти всюду при $|\zeta| = 1$ верно неравенство

$$|\operatorname{Re}[f(\zeta)e^{i\alpha}]| \leqslant |\operatorname{Re}[\omega(\zeta)e^{i\beta}]|.$$

Отсюда, используя (15), получаем оценку

$$|c_\varepsilon(\zeta)| \leqslant \frac{2}{2+\varepsilon} < 1,$$

и, соединив ее с оценкой (14), мы получим, что $|c_\varepsilon(z)| < 1$ при любом $\varepsilon > 0$ в круге $|z| < 1$.

Обозначая $c(z) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} c_\varepsilon(z)$, мы получим, что $|c(z)| \leqslant 1$. Кроме того, функция $c(z)$ голоморфна внутри единичного круга, так как

$$c(z) = \frac{f(z)e^{i\alpha} + \hat{f}(z)e^{-i\alpha}}{\omega(z)e^{i\beta} + \overset{\wedge}{\omega}(z)e^{-i\beta}}.$$

Наконец, предельные значения этой функции $c(\zeta)$ вещественны почти для всех ζ, $|\zeta| = 1$, так как

$$c(\zeta) = \frac{\operatorname{Re}[f(\zeta) e^{i\alpha}]}{\operatorname{Re}[\omega(\zeta) e^{i\beta}]}$$

почти всюду.

Ограниченная аналитическая функция $c(z)$ представляется интегралом Пуассона по своим граничным значениям, а так как они почти всюду вещественны, то $c(z)$ вещественна в единичном круге, а следовательно, постоянна:

$$\frac{f(z) e^{i\alpha} + \hat{f}(z) e^{-i\alpha}}{\omega(z) e^{i\beta} + \hat{\omega}(z) e^{-i\beta}} \equiv c. \tag{16}$$

Из (12) и (16) легко следует тождество (10), и теорема 1 полностью доказана.

Замечание к теореме 1. Если для функции $\omega(z)$ существует конечная производная в точке ζ_0 по всем некасательным последовательностям, то существует угловая производная от функции $f(z)$ в точке ζ_0, совпадающая с производной от ее отражения. Очевидно, что неравенство (9) справедливо для таких производных.

Доказательство. Прежде всего проверим, что существует производная $\hat{\omega}'(\zeta_0)$ по всем некасательным последовательностям. Рассмотрим внутреннюю функцию $\lambda(z) = \frac{\hat{\omega}(z)}{\omega(z)}$. У нее существует, в силу теоремы Жюлиа—Каратеодори, производная $\lambda'(\zeta_0)$, равная производной по последовательности $\{z_n\}$, а эта производная конечна в силу условий теоремы 1. Отсюда следует существование производной $\hat{\omega}'_{\{z_n\}}(\zeta_0)$, одной и той же по всем некасательным последовательностям. Вычислим производную в точке ζ_0 от функции

$$F(z) = \frac{\hat{A}_{M,\gamma}(z)}{A_{M,\gamma}(z)}$$

$$F'(\zeta_0) = \frac{1}{A^2(\zeta_0)} \lim_{z \to \zeta_0} \left[\frac{\hat{A}(\zeta_0) - \hat{A}(z)}{\zeta_0 - z} A(\zeta_0) - \frac{A(\zeta_0) - A(z)}{\zeta_0 - z} \hat{A}(\zeta_0) \right]. \tag{17}$$

Так как $F'_{\{z_n\}}(\zeta_0) = \lambda$, $|\lambda| < \infty$, а $F(z)$ — внутренняя функция, то предел в правой части (17) существует и конечен. Выбирая γ_1 так, что $\operatorname{Im}[A_{M,\gamma_1}(\zeta_0)] = 0$, и γ_2 так, что $\operatorname{Re}[A_{M,\gamma_2}(\zeta_0)] = 0$, получим существование конечных пределов:

$$\lim_{z \to \zeta_0} \frac{[\hat{A}_{M,\gamma_1}(\zeta_0) - A_{M,\gamma_1}(\zeta_0)] - [\hat{A}_{M,\gamma_1}(z) - A_{M,\gamma_1}(z)]}{\zeta_0 - z} \tag{18}$$

и

$$\lim_{z\to\zeta_0}\frac{[\hat{A}_{M,\gamma_2}(\zeta_0)+A_{M,\gamma_2}(\zeta_0)]-[\hat{A}_{M,\gamma_2}(z)+A_{M,\gamma_2}(z)]}{\zeta_0-z}.$$

Вспоминая, что

$$A_{M,\gamma}(z)=f(z)+Me^{i\gamma}\omega(z),$$

получим из (18) существование пределов:

$$\lim_{z\to\zeta_0}\frac{[f(\zeta_0)+\hat{f}(\zeta_0)]-[f(z)+\hat{f}(z)]}{\zeta_0-z}$$

и

$$\lim_{z\to\zeta_0}\frac{[f(\zeta_0)-\hat{f}(\zeta_0)]-[f(z)-\hat{f}(z)]}{\zeta_0-z}.$$

Иначе говоря, существуют производные $f'(\zeta_0)$ и $\hat{f}'(\zeta_0)$ по любой некасательной последовательности. Конечно, все эти производные совпадают. Точно также существуют производные по всем некасательным последовательностям от функции $\varphi(z)=\overline{\hat{f}(z^*)}$ в точке ζ_0. Так как по условию теоремы 1 существует последовательность z_n такая, что

$$f'_{\{z_n\}}(\zeta_0)=\varphi'_{\{z_n^*\}}(\zeta_0),$$

то, по доказанному, имеем

$$f'(\zeta_0)=\varphi'(\zeta_0),$$

где производная от функции $f(z)$ вычисляется по любой внутренней, а от функции $\varphi(z)$ — по любой внешней некасательной последовательности.

Приведем несколько примеров к теореме 1.

1. Пусть $f(z)$ и $\hat{f}(z)$ таковы, что их отношение есть функция ограниченного вида:

$$\frac{f(z)}{\hat{f}(z)}=\frac{\sigma_1(z)}{\sigma_2(z)},$$

где $\sigma_1(z)$ и $\sigma_2(z)$ — внутренние функции.

Рассмотрим функцию

$$\omega(z)=\frac{f(z)}{\sigma_1(z)\,\sigma_2(z)}.$$

Это функция класса HBM, так как

$$\hat{\omega}(z)=\hat{f}(z)\,\sigma_1(z)\,\sigma_2(z)\ \text{ и }\ \frac{\hat{\omega}(z)}{\omega(z)}=\sigma_1(z)\,\sigma_2(z).$$

Кроме того, для функций $f(z)$ и $\omega(z)$ выполняются условия ($Б1$) и ($Б2$):

$$\frac{f(z)}{\omega(z)} = \sigma_1(z)\,\sigma_2(z), \quad \frac{\hat{f}(z)}{\omega(z)} = \sigma_2^2(z).$$

Следовательно, граничная производная функции $f(z)$ может быть оценена по теореме 1.

(Заметим, что если для функций $\hat{f}(z)$ и $f(z)$ выполняются условия ($Б1$) и ($Б2$) при какой-нибудь функции $\omega(z)$, то функция $\hat{f}(z)/f(z)$ есть отношение двух ограниченных функций: $\frac{\hat{f}(z)}{\omega(z)}$ и $\frac{f(z)}{\omega(z)}$, т. е. функция ограниченного вида).

2. Пусть $f(z) = F\left(i\,\frac{1+z}{1-z}\right)$, где $F(z)$ есть целая функция экспоненциального типа σ, ограниченная на вещественной оси единицей. Тогда, положив $\omega(z) = e^{\sigma\frac{1+z}{1-z}}$, получим оценку

$$|f'(\zeta)| \leqslant \frac{2\sigma}{|1-\zeta|^2}$$

при всех $\zeta \neq 1$, $|\zeta| = 1$. Эта оценка, очевидно, эквивалентна теореме Бернштейна.

3. Пусть $f(z)$ есть функция, голоморфная во всей расширенной плоскости, за исключением множества Δ меры ноль, лежащего на единичной окружности. Если функция $f(z)$ допускает оценку

$$\max\left(|f(re^{i\theta})|,\ \left|f\left(\frac{1}{r}\,e^{i\theta}\right)\right|\right) \leqslant \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)\,d\sigma(\varphi)}{1+r^2+2r\cos(\varphi-\theta)}\right),$$

$r < 1$, где $\sigma(\varphi)$ — неубывающая функция и $\sigma'(\varphi) = 0$ вне Δ, то

$$|f'(\zeta)| \leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\varphi}}{(e^{i\varphi}-\zeta)^2}\,d\sigma(\varphi)\right|$$

при всех $\zeta \overline{\in} \Delta$, $|\zeta| = 1$.

§ 3. Оценка производных на границе области общего вида

Наши дальнейшие рассуждения будут использовать граничные свойства функции $\varphi(z)$, отображающей единичный круг на универсальную накрывающую $\widetilde{G}$ области G, поэтому на границу этой области ∂G придется наложить некоторые условия.

Определение 2. *Область G называется допустимой, если ее граница может быть представлена в виде объединения:* $\partial G =$

$= A \cup B$, *где емкость множества A равна нулю, а множество B представляет собой сумму не более чем счетного числа свободных континуумов B_i, причем все предельные точки любой последовательности ζ_i, такой что $\zeta_i \in B_i$, принадлежат множеству A.*

Легко проверить, что если допустимую область G компактифицировать по Каратеодори, то при отображении $\varphi(z)$ множеству всех простых концов в смысле Каратеодори, принадлежащих континууму B_i при любом i, будет соответствовать система дуг единичной окружности, на каждой дуге это соответствие непрерывно и взаимно-однозначно, и сумма длин этих дуг по i равна 2π.

В дальнейшем под словами «точка множества B_i» будем подразумевать всюду простой конец, принадлежащий множеству B_i.

Разрезанной окрестностью множества B_i назовем область, ограниченную множеством B_i, каким-либо контуром, отделяющим B_i от других точек границы, и разрезом, соединяющим этот контур с множеством B_i.

Определение 3. *Мероморфная, вообще говоря, многозначная функция $f(z)$ в допустимой области G называется функцией класса KM_G, если:*

а) при продолжении любого ее элемента в произвольную разрезанную окрестность любого континуума B_i получившаяся однозначная функция непрерывна на множестве B_i всюду, кроме, быть может, конечного числа точек;

б) найдется такая мероморфная, быть может, многозначная в области G функция $\hat{f}(z)$, удовлетворяющая условию а, причем для любого элемента $f(z)$ можно подобрать элемент $\hat{f}(z)$, такой, что для однозначных ветвей функций $f(z)$ и $\hat{f}(z)$, получающихся при одновременном продолжении этих элементов в любую разрезанную окрестность произвольного континуума B_i, их предельные значения комплексно сопряжены друг другу во всех их общих точках непрерывности, принадлежащих B_i:

$$\hat{f}(\zeta) = \overline{f(\zeta)}. \tag{19}$$

Если же для упомянутых элементов $f(z)$ и $\hat{f}(z)$, кроме этих условий, выполняется условие

$$\left| \frac{\hat{f}(z)}{f(z)} \right| < 1, \tag{20}$$

сохраняющееся при любых одновременных продолжениях элементов $f(z)$ и $\hat{f}(z)$, то функция $f(z)$ принадлежит классу HBM_G.

Определение 4. *Допустимая область G называется обладающей c-свойством в точке $\zeta \in B_i$, если найдется такая последовательность точек $w_n \in G$ и последовательность их прообразов*

$z_n = \varphi^{-1}(w_n)$ *такая, что* $z_n \to \zeta_0$, *где* ζ_0 — *точка единичной окружности, причем производная функции* $\varphi(z)$ *по последовательности* z_n *существует, конечна и не равна нулю:*

$$\varphi'_{\{z_n\}}(\zeta_0) \neq 0, \ \infty.$$

Последовательность w_n будем называть *c*-последовательностью.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(z)$ *принадлежит классу* KM_G, *а функция* $\omega(z)$ — *классу* HBM_G. *Если в какой-либо разрезанной окрестности континуума* B_i *выполняются условия* (*Б*1) *и* (*B*2) *для ветвей функции* $f(z)$ *и* $\hat{f}(z)$, *удовлетворяющих равенству* (19), *и какой-либо ветви функции* $\omega(z)$, *то в любой точке* $w_0 \in B_i$, *в которой функции* $f(z)$, $\hat{f}(z)$, $\omega(z)$ и $\hat{\omega}(z)$ *непрерывны, а область G обладает c-свойством, выполняется неравенство:*

$$\left| f'_{\{w_n\}}(w_0) \right| \leqslant \left| \omega'_{\{w_n\}}(w_0) \right|, \tag{21}$$

где w_n — *произвольная c-последовательность, а производные берутся от тех ветвей функций* $f(z)$ и $\omega(z)$, *которые участвуют в формулировке теоремы.*

Доказательство. Рассмотрим функции $F(z)$ и $\Omega(z)$, мероморфные в единичном круге, определенные следующим образом:

$$F(z) = f[\varphi(z)], \ \Omega(z) = \omega[\varphi(z)].$$

Функция $F(z)$ принадлежит классу KM, а функция $\omega(z)$ — классу HBM. Действительно, существуют функции

$$\hat{F}(z) = \hat{f}[\varphi(z)], \ \hat{\Omega}(z) = \hat{\omega}[\varphi(z)]$$

такие, что

$$\hat{F}(\zeta) = \overline{F(\zeta)}, \quad \hat{\Omega}(\zeta) = \overline{\Omega(\zeta)}$$

в каждой точке дуги, являющейся прообразом какого-нибудь множества B_i, кроме, быть может, конечного числа таких точек, а сумма длин всех этих дуг равняется 2π. Очевидно также, что

$$|\hat{\Omega}(z)| \leqslant |\Omega(z)|$$

при всех $z: |z| < 1$.

Кроме того, так как предельные значения этих функций на каждой дуге $\varphi^{-1}(B_i)$ имеют не более конечного числа точек разрыва, то $F(z) \in K^{(1)}M(\zeta_0)$, а $\Omega(z) \in HB^{(1)}M(\zeta_0)$, где ζ_0 — точка непрерывности предельных значений. Этот факт непосредственно следует из леммы 1.

Поскольку для функций $F(z)$ и $\Omega(z)$ выполняются условия (*Б*1) и (*Б*2), то из теоремы 1 заключаем, что

$$\left| F'_{\{z_n\}}(\zeta_0) \right| \leqslant \left| \Omega'_{\{z_n\}}(\zeta_0) \right|, \tag{22}$$

где

$$\zeta_0 = \varphi^{-1}(w_0),$$

Но

$$f'_{\{w_n\}}(w_0) = F'_{\{z_n\}}(\zeta_0)/\varphi'_{\{z_n\}}(\zeta_0),$$

$$\omega'_{\{w_n\}}(w_0) = \Omega'_{\{z_n\}}(\zeta_0)/\varphi'_{\{z_n\}}(\zeta_0).$$

Теперь из неравенства (22) и того, что $\varphi'_{\{z_n\}}(\zeta_0) = 0$ (так как w_n — c — последовательность), получаем неравенство (19) и теорема 2 доказана.

Заметим, что неравенство (22), как и (9), является точным, причем знак равенства достигается лишь для функций вида

$$f(z) = c_1\omega(z) + c_2\hat{\omega}(z), \quad |c_1| + |c_2| = 1$$

(функции $f(z)$, $\hat{f}(z)$ и $\omega(z)$ следует рассматривать как однозначные функции на универсальной накрывающей области G). Очевидно, что если допустимая область ограничена гладкими кривыми, то она обладает c-свойством в каждой точке. В частности, область G_E, рассмотренная в [4], этим свойством обладает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н. Sur une propriété des fonctions entièrs — C. R. Ac.—sci Paris, 1923, vol. 176, p. 1603—1605.
2. Привалов И. И. Sur la convergence des series trigonometriquer conjugeés — C. R. Ac.—sci Paris, vol. 162, p. 123—126.
3. Shaeffer A. C. Entiere functions and trigonometric polinomials — Duke Math. Journ. 1953, vol. 20, p. 77—88.
4. Ахиезер Н. И., Левин Б. Я. Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для произвольных целых функций. Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М., ГИЗ ФМЛ, 1960, с. 111—165.
5. Мейман Н. Н. Принцип монотонности аргумента и дифференцирование неравенств.—ДАН, СССР, 1958, т. 120, № 6, с. 1191—1193.
6. Шапиро Г. С. Полиноминальное приближение с весом и граничные свойства аналитических функций. Современные проблемы теории аналитических функций. М., «Наука», 1958. 111 с.
7. Мейман Н. Н. К вопросу о распределении нулей целой функции.— ДАН СССР, 1943, т. 40, № 2 и № 5, с. 55—58.
8. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М.—Л, ОГИЗ, 1941. 388 с.
9. Ahern, Klark. Radial N-th derivatives of Blaschke products—Math. Scand. 1971, vol. 28, N 1, p. 189—201.
10. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.—Л., ГТТИ, 1950. 336 с.
11. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. М., «Мир», 1971. 312 с.