УДК 519.9+575.1

А. А. Крапивин

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Отображение $\tilde{V}: R^n \to R^n$ $(n \geqslant 2)$ называется квадратичным оператором, если оно в координатах имеет вид

$$x'_j = \sum_{i,\, k=1}^{n} p_{ik,\, j} x_i x_k \ (j = 1, \ldots, n;\ p_{ik,\, j} = p_{ki,\, j}). \tag{1}$$

Ниже мы будем рассматривать только такие квадратичные операторы $\tilde{V}$, для которых

$$p_{ik,\, j} \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{n} p_{ik,\, j} = 1. \tag{2}$$

Тогда $\tilde{V}$ сохраняет базисный симплекс

$$\Delta^{n-1} = \left\{ x \in R^n \mid x_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

и можно рассмотреть его ограничение $V = \tilde{V} \mid \Delta^{n-1}$. По теореме Брауэра оператор V имеет в симплексе Δ^{n-1} хотя бы одну неподвижную точку. Очевидно, что множество F_V неподвижных точек оператора V полуалгебраично. Ю. И. Любич в работе [1] поставил вопрос о вычислении размерности множества F_V и высказал гипотезу, что если все $p_{ik,\, j} > 0$, то F_V конечно. Мы покажем, что в низших размерностях $n = 2, 3, 4$ эта гипотеза верна даже при более слабом предположении, а именно при условии положительности диагональных коэффициентов

$$p_{ii,\, j} > 0 \ (i, \ j = 1, \ \ldots, \ n), \tag{II}$$

разумеется, с сохранением неотрицательности всех остальных коэффициентов. Условие (II) обеспечивает неравенство $x'_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Предложение 1. *Если* $n = 2$, *то при условии* (II) *множество F_V состоит из одной точки.*

Доказательство. Множество F_V определяется одним квадратным уравнением

$$p_{11,1} x_1^2 + 2p_{12,1}\, x_1 (1 - x_1) + p_{22,2}\, (1 - x_1)^2 - x_1 = 0.$$

Левая часть уравнения при $x_1 = 0$ обращается в $p_{22,1} > 0$, а при $x_1 = 1$ — в $p_{11,1} - 1 = -p_{11,2} < 0$. Поэтому F_V состоит из одной точки.

Отметим следующие свойства квадратичных операторов с положительными диагональными коэффициентами.

a) $F_V \cap \partial\Delta^{n-1} = \varnothing$. Действительно, если $x \in F_V$, то

$$x_j = \sum_{i,\, k=1}^{n} p_{ik,\, j},\ x_i x_k > 0 \ (j = 1,\ \ldots,\ n).$$

b) На каждой прямой, проходящей через какую-нибудь вершину $e_j = (\delta_{ij})_{i=1}^{n}$ симплекса, лежит не более одной неподвижной точки. В самом деле, пусть прямая пересекает грань $x_j = 0$ в некоторой точке x (если прямая не пересекает грани $x_j = 0$, то она лежит на границе симплекса, где в силу a вообще нет неподвижных точек). Для неподвижных точек, лежащих на прямой, выполнено квадратное уравнение

$$\sum_{i,\, k=1}^{n} p_{ik,\, j} (tx_i + \delta_{ij}(1-t))(tx_k + \delta_{kj}(1-t)) = 1 - t.$$

Его левая часть при $t = 0$ обращается в $p_{jj,\, j} - 1 < 0$, а при $t = 1$ — в $x_j' > 0$.

Предложение 2. *Если* $n = 3$, *то при условии* (II) *множество* F_V *содержит не более четырех точек.*

Доказательство. Теперь множество F_V определяется системой двух уравнений 2-й степени с двумя неизвестными, получающихся подстановкой $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ в уравнения

$$x_j = \sum_{i,\, k=1}^{3} p_{ik,\, j} x_i x_k \ (j = 1,\ 2). \tag{3}$$

Если F_V бесконечно, то система (3) имеет бесконечное множество решений в треугольнике $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 \leqslant 0$. В силу свойства a система (3) не имеет решений на границе треугольника. Следовательно, множество ее решений в треугольнике есть компактная кривая 2-го порядка, т. е. эллипс. Но тогда прямая, проведенная через какую-либо вершину симплекса и центр эллипса, дает две неподвижные точки, что противоречит b. Следовательно, F_V конечно.

По теореме Безу F_V, будучи конечным, содержит не более четырех точек.

Замечание 1. Хорошо известно, что если среди диагональных коэффициентов есть нулевые, то множество неподвижных точек может быть бесконечным (см., например, [1]).

Замечание 2. В отличие от одномерного симплекса, где неподвижная точка единственна, в двумерном симплексе единственности уже может не быть, что было обнаружено Ю. И. Любичем. Модификация предложенного им построения приводит к следующему примеру:

$$x_1' = (1 - 4\varepsilon)\, x_1^2 + 2\varepsilon x_2^2 + 10\varepsilon x_3^2 + 4\varepsilon x_1 x_2 +$$

$$+ (1+4\varepsilon) x_1 x_3 + 8\varepsilon x_2 x_3;$$

$$x_2' = 2\varepsilon x_1^2 + (1-3\varepsilon) x_2^2 + \varepsilon x_3^2 + \left(\frac{1}{2} + 2\varepsilon\right) x_1 x_2 +$$

$$+ 2\varepsilon x_1 x_3 + (1+8\varepsilon) x_2 x_3; \qquad (4)$$

$$x_3' = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_1' - x_2'.$$

При $0 < \varepsilon < 10^{-2}$ оператор (4) имеет две неподвижные точки на отрезке $\left(\frac{t}{2}, \frac{1-t}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Для рассмотрения случая $n = 4$ нам понадобятся некоторые леммы. Первая из этих лемм относится к произвольному n и вместе с предшествующим ей рассмотрением принадлежит Ю. И. Любичу.

Для квадратичного оператора $\tilde{V}: R^n \to R^n$ положим

$$Rx = \tilde{V}x - xs(x), \qquad (5)$$

где $s(x) = x_1 + \ldots + x_n$. Тогда[1]

$$\tilde{V}x = xs(x) + Rx \qquad (6)$$

и

$$s(Rx) = 0. \qquad (7)$$

Обозначим через Λ линейную оболочку векторов Rx и выберем в Λ какой-нибудь базис $a^1, \ldots, a^\nu$. В силу (7) векторы $a^1, \ldots, a^\nu$ лежат в гиперплоскости $s(x) = 0$ и поэтому

$$\dim \Lambda = \nu \leqslant n - 1. \qquad (8)$$

Запишем разложение

$$Rx = \sum_{i=1}^{\nu} f_i(x) a^i,$$

где $f_i(x) = \overset{*}{a}_i(Rx)$ ($\{\overset{*}{a}_i\}_1^\nu$ — базис, сопряженный к $\{a^i\}_1^\nu$) — квадратичные формы. Легко проверить, что они линейно независимы. Действительно, если $\Sigma \alpha_i f_i = 0$, то линейная форма $\varphi = \Sigma \alpha_i \overset{*}{a}_i$ аннулирует все векторы Rx, а значит, равна нулю на Λ, откуда $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, \nu)$. Таким образом, оператор $\tilde{V}$ имеет вид

$$\tilde{V}x = xs(x) + \sum_{i=1}^{\nu} f_i(x) a^i, \qquad (9)$$

где a^i — линейно независимые векторы, лежащие в гиперплоскости $s(x) = 0$; $f_i(x)$ — линейно независимые квадратичные формы.

[1] Представление оператора $\tilde{V}$ в виде (6) было систематически использовано в основоположной работе С. Н. Бернштейна [2].

Размерность $\dim \Lambda$ назовем дефектом оператора $\tilde{V}$ и равным образом — дефектом ($\operatorname{def} V$) оператора $V = \tilde{V} \mid \Delta^{n-1}$. Отметим, что при $V = 1$ дефект равен нулю.

Дефект квадратичного оператора определенным образом связан с другой важной характеристикой — размерностью пространства I_V инвариантных линейных форм. Линейная форма $g(x)$ называется, согласно [1], инвариантной, если

$$g(\tilde{V}x) = s(x)\, g(x). \tag{10}$$

Упомянутая связь состоит в том, что

$$\operatorname{def} V = n - \dim I_V. \tag{11}$$

Действительно, $g \mid \Lambda = 0$ тогда и только тогда, когда g аннулирует векторы вида Rx, что в силу (6) равносильно (10). Поэтому $\Lambda^{\perp} = I_V$, откуда следует (11).

Лемма 1. *При условии* (II) *дефект оператора V равен $n-1$, т. е. равен размерности базисного симплекса.*

Доказательство. Вычислим $\dim I_V$. Инвариантные линейные формы $g(x) = \Sigma g_j x_j$ определяются системой линейных однородных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ik,\,j} g_j = \frac{1}{2}(g_i + g_k) \quad (i,\ k = 1,\ \ldots,\ n). \tag{12}$$

В частности, они удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ii,\,j} g_j = g_i \quad (i = 1,\ \ldots,\ n). \tag{13}$$

Но матрица системы (13) — стохастическая по строкам и все ее элементы по условию положительны. Тогда по теореме Перрона (см., например, [3]) пространство решений системы (13) одномерно. Следовательно, $\dim I_V \leqslant 1$. Но $\dim I_V \geqslant 1$ всегда, поскольку $s \in I_V$. Поэтому $\dim I_V = 1$, и по формуле (11) $\operatorname{def} V = n - 1$.

Далее всюду предполагается, что $n = 4$ и что условие (II) выполнено.

Лемма 2. *Пересечение множества F_V с каждой двумерной плоскостью L, лежащей в трехмерной плоскости $H = \{x \mid s(x) = 1\}$ и пересекающей симплекс Δ^3, конечно (может быть, пусто).*

Доказательство. Плоскость L, проходящая через симплекс, определяется некоторыми тремя точками a, b, c, лежащими на ребрах симплекса. Ограничение уравнения $Vx - x = 0$ на L приводит к системе уравнений:

$$A_j\lambda^2 + B_j\mu^2 + C_j\nu^2 + 2D_j\lambda\mu + 2E_j\lambda\nu + 2F_j\mu\nu = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant 4), \tag{14}$$

где

$$A_j = \sum_{i,\,k=1}^{4} p_{ik,\,j} a_i a_k - a_j,$$

$$B_j = \sum_{i,\,k=1}^{4} p_{ik,\,j} b_i b_k - b_j,$$

$$C_j = \sum_{i,\,k=1}^{4} p_{ik,\,j} c_i c_k - c_j,$$

$$D_j = \sum_{i,\,k=1}^{4} p_{ik,\,j} a_i b_k - \frac{1}{2}(a_j + b_j),$$

$$E = \sum_{i,\,k=1}^{4} p_{ik,\,j} a_i c_k - \frac{1}{2}(a_j + c_j),$$

$$F_j = \sum_{i,\,k=1}^{4} p_{ik,\,j} b_i c_k - \frac{1}{2}(b_j + c_j).$$

Множество $F_V \cap L$ является кривой 2-го порядка в плоскости L. Предположим, что оно бесконечно. Уравнения (14) не могут иметь общего линейного множителя в силу отсутствия неподвижных точек на границе. Следовательно, эти уравнения попарно пропорциональны.

Возможны два случая: 1) a, b, c лежат на ребрах, исходящих из одной вершины; 2) a и b лежат на ребрах, исходящих из одной вершины, а точка c лежит на ребре, не содержащем этой вершины (случай, когда все три точки лежат на одной грани, мы исключаем, так как тогда $L \cap \Delta^3 \subset \partial\Delta^3$ и потому $L \cap F_V = \varnothing$).

1) Пусть для определенности $a = (1-\alpha,\ 0,\ 0,\ \alpha)$, $b = (0,\ 1-\beta,\ 0,\ \beta)$, $c = (0,\ 0,\ 1-\gamma,\ \gamma)$. Тогда для точек $L \cap \Delta^3$ значения параметров λ, μ, ν будут неотрицательными ($L \cap \Delta^3$ — двумерный симплекс с вершинами a, b, c). Все решения системы (14), принадлежащие Δ^3, положительны ($\lambda, \mu, \nu > 0$). Рассмотрим первое уравнение системы (14). В нем коэффициенты при μ^2, ν^2, $\mu\nu$ положительны, поскольку $b_1 = c_1 = 0$. Аналогично, во втором уравнении положительны коэффициенты при λ^2, ν^2, $\lambda\nu$. Следовательно, коэффициент пропорциональности между первым и вторым уравнениями положителен. Таким же образом получается положительность остальных коэффициентов пропорциональности. Но тогда оказывается, что в каждом уравнении системы (14) все коэффициенты положительны, т. е. система не имеет решений в Δ^3, вопреки предположению.

2) Если плоскость L проходит через некоторое ребро, то возникает ситуация, совершенно аналогичная рассмотренной. Поэтому можно предположить, что сечение симплекса Δ^3 плоскостью L — четырехугольник с вершинами a, b, c, d (в порядке обхода). Тогда $L \cap \Delta^3$ является объединением симплексов (a, b, c) и (c, d, a), в каждом из которых можно повторить рассуждения, относящиеся к случаю *1*.

Предложение 3. *Если $n = 4$, то при условии* (II) *множество F_V содержит не более восьми точек.*

Доказательство. В силу леммы 1 множество содержится в алгебраическом многообразии, которое задается уравнением

$$f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0,\ f_3(x) = 0, \tag{15}$$

где f_1, f_2, f_3 — линейно независимые квадратичные формы. Предположим, что F_V бесконечно. Тогда поверхность в CP^3, задаваемая уравнением $f_3(x) = 0$, имеет бесконечное пересечение с кривой в CP^3, задаваемой системой

$$f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0. \tag{16}$$

Согласно классификации пересечений пары квадрик в CP^3 (см. [4, с. 336—339]) для кривой (16) возможны только следующие случаи: a) кривая неприводима; b) кривая состоит из плоских кусков, лежащих в двумерных плоскостях. Случай b исключается, так как иначе бесконечное множество точек из F_V лежит в некоторой двумерной плоскости, вопреки лемме 2. В случае a непосредственное рассмотрение упомянутой классификации показывает, что идеал (f_1, f_2) совпадает со своим радикалом. Если неприводимая кривая $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ имеет с поверхностью $f_3(x) = 0$ бесконечное множество общих точек, то она целиком лежит на ней (см., например, [5, с. 82]). Следовательно, $f_3 \in (f_1, f_2)$ в силу теоремы Гильберта о нулях и сделанного выше замечания. Но тогда f_3 является линейной комбинацией форм f_1 и f_2, вопреки линейной независимости всех трех форм.

Из теоремы Безу следует, что будучи конечным, множество F_V содержит не более восьми точек.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Ю. И. Любичу, под руководством которого выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любич Ю. И. Эволюционная генетика свободных популяций. — УМН 1971, т. 26, вып. 5, с. 51—116.
2. Бернштейн С. Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. — «Учен. зап. н.-и. кафедр Украины, отд. матем.», 1924, вып. 1, с. 83—115.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967. 575 с.
4. Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, т. 2. М., ИЛ, 1954. 431 с.
5. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. М., «Наука», 1972. 567 с.