УДК 517.53

А. С. Колокольников

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИЙ, СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В МНОГОМЕРНОМ КОНУСЕ

§ 1. Введение

Пусть Ω — область на единичной сфере $S=\{x:|x|=1\}$ в евклидовом пространстве R^m, а $\partial\Omega$ — ее граница, являющаяся гладким контуром с ограниченной кривизной.

Обозначим через $x^0=x/|x|$ единичный вектор в направлении точки x.

Пусть L — сферическая часть оператора Лапласа. Обозначим через λ_1 первое собственное значение краевой задачи

$$LY+\lambda Y=0,\quad Y(x^0)|_{x^0\in\partial\Omega}=0, \tag{1.1}$$

а через ρ_1 — неотрицательный корень уравнения

$$\rho(\rho+m-2)=\lambda_1. \tag{1.2}$$

Пусть $K^\Omega=\{x:0<|x|<\infty,\ x^0\in\Omega\}$ — конус, соответствующий Ω на S, а $K^{\partial\Omega}$ — граница конуса K^Ω. Будем говорить, что субгармоническая функция $u(x)$ имеет по определению порядок ρ в конусе K^Ω, если

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\{\ln M(r,\ u)\}/\ln r=\rho,$$

где

$$M(r,\ u)=\max_{x^0\in\Omega}u^+(rx^0),\quad u^+(x)=\max\{0,\ u(x)\}.$$

Будем говорить, что $u(x)$ имеем нормальный тип σ при порядке ρ, если

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}r^{-\rho}M(r,\ u)=\sigma<\infty.$$

Будем говорить, что функция $u(x)$ ограничена нулем на границе $K^{\partial\Omega}$ конуса K^Ω, если

$$\overline{\lim_{x\to y}}u(x)\leqslant 0,\ y\in K^{\partial\Omega},\ x\in K^\Omega.$$

Пусть функция $h(r)$, $0<r<\infty$ — монотонная возрастающая, $h(0)=0$.

Обозначим через $E(r,\ x)$ шар радиуса r с центром в точке x.

Определение. *Множество C назовем множеством h-конечного обзора, если существует какое-нибудь его покрытие шарами $E(\delta_j,\ X_j)$ такое, что выполняется условие*

$$\sum_j h\left(\frac{\delta_j}{R_j}\right)<\infty,\ R_j=|X_j|.$$

Если такого покрытия не существует, то назовем C множеством h-бесконечного обзора.

В. С. Азарин в [1] получил следующий результат.

Теорема А. *Пусть $u(x)$ — субгармоническая в конусе K^{Ω} функция, имеющая в нем порядок ρ_1 и нормальный тип, и пусть $u(x)$ ограничена нулем на $K^{\partial\Omega}$. Тогда функция $H(x) = u(x)|x|^{-\rho}$ равномерно стремится к функции $h_u(x^0) = kY_1(x^0)$, k — некоторая постоянная, когда $x \to \infty$ в K^{Ω} вне некоторого множества C шаров r^{m-1}-конечного обзора.*

Эта теорема является обобщением (и уточнением при $m = 2$) на случай пространственного конуса известной теоремы Хеймана [2], который доказал ее для субгармонических функций в полуплоскости. Хейман также рассматривал случай гармонической функции и исследовал точность своей теоремы. Мы уточняем теорему А для случая, когда функция $u(x)$ — гармоническая и исследуем точность теоремы А в различных аспектах. Аналогичная теореме А теорема, но для поведения функции в любом внутреннем конусе, была доказана Лелон-Ферран [4]. Из результатов Джексона и Эссена, сравнивающих исключительные множества в этой теореме и теореме А, следует, что в случае внутреннего конуса исключительное множество можно уменьшить в определенном смысле [5]. Мы показываем, что при исследовании поведения субгармонической функции в замкнутом конусе исключительное множество C из теоремы А уменьшить нельзя, даже если предположить, что функция $u(x)$ — гармоническая.

Теорема 1. *Пусть $\psi(r)$ — положительная убывающая функция от r, $1 \leqslant r < \infty$, такая что $r^{m-1}\psi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Существуют функция $u(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы А и множество $C = UE(\delta_j, X_j)$ шаров такие, что*

$$\sum \psi(R_j)\,\delta_j^{m-1} = \infty, \; R_j = |X_j|$$

и

$$u(x)|x|^{-\rho_1} \to -\infty$$

при $x \to \infty$, $x \in C$.

Эта теорема показывает, что условие

$$\sum \left(\frac{\delta_j}{R_j}\right)^{m-1} < \infty \tag{1.3}$$

в теореме А нельзя заменить условием

$$\sum \psi(R_j)\,\delta_j^{m-1} < \infty.$$

В следующей теореме «минимальность» исключительного множества устанавливается в несколько другом смысле.

Теорема 2. *Для любого $\gamma > 0$ существуют функция $u(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы A, и множество C шаров $r^{m-1-\gamma}$-бесконечного обзора такие, что $u(x)|x|^{-\rho_1} \to -\infty$ при $x \to \infty$, $x \in C$.*

Эта теорема показывает, что условие (1.3) в теореме A нельзя заменить условием

$$\sum \left(\frac{\delta_j}{R_j}\right)^{m-1-\gamma} < \infty, \ \gamma > 0.$$

Пусть теперь функция $u(x)$ — гармоническая в конусе K^{Ω}. Пусть Γ — неограниченное множество, $\Gamma \subset K^{\Omega}$. Обозначим через $d(x)$ расстояние точки x, $x \in K^{\partial\Omega}$ до множества Γ и предположим, что выполнено условие

$$\underline{\lim}_{|x| \to \infty} d(x)|/|x| > 0. \tag{1.4}$$

Имеет место такой факт.

Теорема 3. *Если выполнены предположения теоремы A и функция $u(x)$ — гармоническая в K^{Ω}, тогда функция $H(x) = u(x)|x|^{-\rho_1}$ равномерно стремится к функции $h(x^0) = kY_1(x^0)$, k — некоторая постоянная, когда $x \to \infty$ по произвольному множеству Γ, удовлетворяющему условию* (1.4).

Таким образом, в этом случае отсутствует исключительное множество, фигурирующее в теореме А.

Если же вместо условия (1.4) потребовать для Γ выполнения условия

$$\underline{\lim}_{|x| \to \infty} d(x) / \{|x| \varphi(|x|) > 0,$$

где $\varphi(r) \to 0$ как угодно медленно при $r \to \infty$, то заключение теоремы 3 уже неверно. Справедливо такое предложение.

Теорема 4. *Пусть область $\Gamma \subset K^{\Omega}$ и удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim}_{|x| \to \infty} \frac{d(x)}{|x|} = 0. \tag{1.5}$$

Существуют гармоническая в конусе K^{Ω} функция $u(x)$ и множество C шаров r^{m-1}-конечного обзора, содержащееся в Γ, такие, что $u(x)|x|^{-\rho_1} \to -\infty$ при $x \to \infty$, $x \in C$.

Заметим, что если потребовать, чтобы Γ было областью, граница которой $\partial\Gamma$ имеет в каждой точке кривизну $K(x)$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{\substack{|x| \to \infty \\ x \in K^{\partial\Omega}}} K(x)|x| \geqslant \delta > 0,$$

то условие (1.5) можно заменить условием

$$\underline{\lim}_{|x| \to \infty} d(x) / |x| = 0.$$

Если $\Gamma = K^{\Omega}$, то остается существенным некоторое исключительное множество. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть внутри конуса K^{Ω} задано произвольное неограниченное множество такое, что все шары какого-нибудь покрытия C этого множества пересекаются с поверхностью $K^{\partial\Omega}$ конуса K^{Ω} и образуют множество r^{m-1}-конечного обзора. Существует функция $u(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы A, гармоническая внутри конуса K^{Ω} и такая, что $u(x)|x|^{-\rho_1} \to -\infty$ при $x \to \infty$, $x \in C \cap K^{\Omega}$.*

В заключение этого пункта заметим, что при доказательстве теорем 1 и 5 будет использоваться метод Хеймана [2], модифицированный для случая $m > 2$.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Нам потребуется следующая лемма, дающая оценку функции Грина $G^{\Omega}(x, y)$ для конуса K^{Ω} через первую собственную функцию $Y_1(x^0)$ краевой задачи (1.1) и порядок ρ_1, определяемый уравнением (1.2).

Лемма А ([1]). *Для функции $G^{\Omega}(x, y)$ имеют место неравенства*

$$k_1 \frac{Y_1(x^\circ) Y_1(y^\circ)}{|y|^{m-2}} \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\rho_1} \leqslant G^{\Omega}(x, y) \leqslant k_2 \frac{Y_1(x^\circ) Y_1(y^\circ)}{|y|^{m-2}} \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\rho_1}, \ (x^\circ, y^\circ \in \Omega),$$

$$k_1 \frac{Y_1(x^\circ) \dfrac{\partial}{\partial n} Y_1(y^\circ)}{|y|^{m-1}} \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\rho_1} \leqslant G^{\Omega}(x, y) \leqslant k_2 \frac{Y_1(x^\circ) \dfrac{\partial}{\partial n} Y_1(y^\circ)}{|y|^{m-1}} \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\rho_1},$$
$$(x^\circ \in \Omega, \ y^\circ \in \partial\Omega),$$

где $0 < |x|/|y| \leqslant 4/5$ и k_1, k_2 — постоянные, зависящие лишь от области Ω, а $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к $K^{\partial\Omega}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{r_n\}$, $\{\lambda_n\}$ — строго возрастающие последовательности положительных чисел, стремящиеся к ∞ при $n \to \infty$. Напишем

$$u(x) = \sum_n \lambda_n G^{\Omega}(x, x_n), \ |x_n| = r_n.$$

Применяя лемму А, видим, что этот ряд сходится равномерно в любой ограниченной области внутри конуса K^{Ω}, если сходится ряд

$$\sum_n \frac{\lambda_n}{r_n^{\rho_1+m-2}} < \infty. \tag{2.1}$$

Пусть $G_n(x, y)$ — функция Грина для $E(2\varepsilon_n r_n, x_n)$ — шара радиуса $2\varepsilon_n r_n$ с центром в точке x_n. Справедливо неравенство

$$G^{\Omega}(x, x_n) \geqslant G_n(x, x_n), \ x \in E(2\varepsilon_n r_n, x_n).$$

Так как [3, с. 98]

$$G_n(x,\ x_n) = \frac{\Gamma(m/2)}{(m-2)\,2\pi^{m/2}}\{|x-x_n|^{2-m} - (2\varepsilon_n r_n)^{2-m}\},$$

то

$$G_n(x,\ x_n) > \frac{\Gamma(m/2)}{(m-2)\,2\pi^{m/2}}\frac{(1-2^{2-m})}{(\varepsilon_n r_n)^{m-2}},\ x \in E(\varepsilon_n r_n,\ X_n).$$

Поэтому при $x \in E(\varepsilon_n r_n,\ x_n)$ имеем

$$u(x) < -\lambda_n G^{\Omega}(x,\ x_n) \leqslant -\frac{K\lambda_n}{(\varepsilon_n r_n)^{m-2}},$$

где K — положительная постоянная, не зависящая от x.
Отсюда следует, что $u(x)\,|x|^{-\rho_1} \to -\infty$ при $x \to \infty$ $x \in \bigcup_n E(\varepsilon_n r_n,\ x_n)$

при условии, что

$$\frac{\lambda_n}{\varepsilon_n^{m-2} r_n^{\rho_1+m-2}} \to +\infty \text{ при } n \to \infty. \tag{2.2}$$

Теперь, поскольку

$$\sum_j \psi(r_j)(\varepsilon_j r_j)^{m-1} > \psi(r_n)(\varepsilon_n r_n)^{m-1},$$

то

$$\sum_j \psi(r_j)(\varepsilon_j r_j)^{m-1} = \infty$$

при условии, что

$$(\varepsilon_n r_n)^{m-1}\psi(r_n) \to \infty \text{ при } n \to \infty. \tag{2.3}$$

Теорема 1 будет доказана, если мы покажем, что условия (2.1), (2.2) и (2.3) могут выполняться одновременно. Положим

$$\varepsilon_n = n^{-\frac{3}{m-2}}.$$

Теперь выберем r_n таким большим, чтобы

$$r_n^{\rho_1+m-2} > n^2 \text{ и } r_n^{m-1}\psi(r_n) > n\varepsilon_n^{1-m}.$$

Выбирая λ_n так, что

$$\frac{1}{n_2} < \frac{\lambda_n}{r_n^{\rho_1+m-2}} < \frac{2}{n_2},$$

видим, что условия (2.1), (2.2) и (2.3) удовлетворены.

Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теорем 2 и 5

Прежде чем доказывать теорему 2, установим справедливость теоремы 5.

Доказательство теоремы 5. Множество шаров $\bigcup_j E(\delta_j, X_j)$ покрытия множества C удовлетворяет условию

$$\sum_j \left(\frac{\delta_j}{R_j}\right)^{m-1} < \infty, \quad R_j = |X_j|.$$

Очевидно, можно подобрать последовательность положительных чисел $\gamma_j \to \infty$ при $j \to \infty$ таких, что

$$\sum \gamma_j \left(\frac{\delta_j}{R_j}\right)^{m-1} < \infty. \tag{3.1}$$

Определим кусочно-постоянную функцию $\nu(x)$ на $K^{\partial\Omega}$ следующим образом.

Обозначим $T_j = K^{\partial\Omega} \cap E(2\delta_j, X_j)$. Положим $\nu(x) = 0$ вне множества $\bigcup T_j$; $\nu(x) = \gamma_1$ при $x \in T_1$, $\nu(x) = \gamma_2$ при $x \in T_2/T_1, \ldots$, $\nu(x) = \gamma_k$ при $x \in T_k/T_1 \setminus \ldots \setminus T_{k-1}$. Пусть I_i — множество индексов j, для которых $T_i \cup T_j \neq \varnothing$, включая индекс i. Положим $\lambda_i = \min\limits_{j \in I_i} \gamma_j$. Легко видеть, что число элементов множества I_i для каждого i конечно, кроме того,

$$\lim_{j \to \infty} \lambda_j = \infty. \tag{3.2}$$

Поскольку $\delta_j/R_j \to 0$ при $j \to \infty$, имеем

$$\int_{K^{\partial\Omega}} \frac{\nu(y)\, dy}{|y|^{m-1}} \leqslant \sum_j \gamma_j \int_{T_j} |y|^{1-m}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i \frac{\gamma_j}{(R_j - 2\delta_j)^{m-1}} \int_{T_j} dy = K \sum_j \gamma_j \left(\frac{\delta_j}{R_j}\right)^{m-1},$$

где постояннная K не зависит от δ_j и R_j. В силу условия (3.1) из последнего неравенства получим

$$\int_{K^{\partial\Omega}} \frac{\nu(y)\, dy}{|y|^{m-1}} < \infty. \tag{3.3}$$

Положим

$$u(x) = \int_{K^{\partial\Omega}} \frac{\partial G^{\Omega}(x, y)}{\partial n_y} |y|^{\rho_1} \nu(y)\, dy.$$

В силу леммы A и условия (3.3) этот интеграл сходится равномерно в любой ограниченной области, расположенной внутри конуса K^{Ω}. Почти всюду на $K^{\partial\Omega}$ выполняется соотношение

$$u(x) \to -|y|^{\rho_1} \nu(y) \tag{3.4}$$

при $x \to y$, $x \in K^{\Omega}$, $y \in K^{\partial\Omega}$. Так как $\nu(y)$ кусочно-постоянна на $K^{\partial\Omega}$, то и $u(x)$ остается кусочно-постоянной на $K^{\partial\Omega}$ и $u(y)|y|^{-\rho_1} = -\nu(y) \to -\infty$ при $y \to \infty$, $y \in \cup T_j$.

Обозначим область $D(2\delta_j) = E(2\delta_j, X_j) \cap K^{\Omega}$. Положим

$$L_1(2\delta_j) = \{x : x \in E(2\delta_j, X_j) \cap K^{\partial\Omega}\},$$
$$L_2(2\delta_j) = \{x : x \in S(2\delta_j, X_j) \cap K^{\Omega}\},$$

где $S(2\delta_j, X_j)$ — сфера, ограничивающая шар $E(2\delta_j, X_j)$. Обозначим

$$h_j(x) = u(x) R_j^{-\rho_1}, \ R_j = |X_j|.$$

На множестве $L_2(2\delta_j)$, в силу нормальности типа функции $u(x)$, $x \in K^{\Omega}$, имеем

$$\max_{x \in L_2(2\delta_j)} h_j(x) \leqslant B,$$

где постоянная B — конечная и не зависящая от δ_j и R_j. На множестве $L_1(2\delta_j)$ в силу соотношения (3.4) получаем

$$h_j(x) = u(x) R_j^{-\rho_1} \leqslant -R_j^{-\rho_1} |x|^{\rho_1} \lambda_j \leqslant -C\lambda_j.$$

Здесь C — положительная постоянная, не зависящая от δ_j и R_j. Тогда для любого x из области $D(2\delta_j)$ имеем

$$h_j(x) \leqslant -C\lambda_j \omega(2\delta_j, x) + B(1 - \omega(2\delta_j, x)),$$

где $\omega(2\delta_j, x)$ — гармоническая мера множества $L_1(2\delta_j)$ относительно области $D(2\delta_j)$. Если обозначить через $\tilde{\omega}(1, \eta)$ гармоническую меру $L_1(1) = \{\eta : \eta \in E(1, X_j/2\delta_j) \cap K^{\partial\Omega}\}$ относительно области $D(1) = E(1, X_j/2\delta_j) \cup K^{\Omega}$, подобно сжатой с коэффициентом подобия $2\delta_j$, то будет выполнено соотношение

$$\omega(2\delta_j, 2\delta_j\eta) = \tilde{\omega}(1, \eta).$$

Поэтому имеем

$$h_j(2\delta_j\eta) \leqslant -C\lambda_j\tilde{\omega}(1, \eta) + B(1 - \tilde{\omega}(1, \eta)).$$

Если η близко к L_1, то $\tilde{\omega}(1, \eta)$ близко к единице. Поэтому внутри шаров $E(\delta_j, X_j)$ справедливо неравенство

$$h_j(x) \leqslant -C_1\lambda_j + B_1.$$

Используя полученное неравенство и тот факт, что $\delta_j/R_j \to \infty$ при $j \to \infty$, имеем

$$u(x)|x|^{-\rho_1} = h_j(x)(R_j/x)^{\rho_1} \leqslant (-C_1\lambda_j + B_1) \times$$
$$\times \left(\frac{R_j}{R_j + \delta_j}\right)^{\rho_1} \leqslant -C_2\lambda_j + B_2, \ C > 0.$$

Отсюда в силу (3.2) получаем, что $u(x)|x|^{-\rho_1} \to -\infty$ при $x \to \infty$, $x \in \cup E(\delta_j, X_j)$.

Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть задано $\gamma > 0$. Построим множество шаров $\bigcup E(\delta_j, X_j)$ из теоремы 5 следующим образом. Положим $\delta_j/R_j = \varepsilon_j = j^{-\frac{1+\alpha}{m-1}}$, где число $\alpha > 0$ такое, что $(1+\alpha)(m-1-\gamma)/(m-1) \leqslant 1$. Тогда ряд

$$\sum \left(\frac{\delta_j}{R_j}\right)^{m-1-\gamma} = \sum \varepsilon_j^{m-1-\gamma} = \infty.$$

Поскольку построенное множество шаров является множеством r^{m-1} конечного обзора, по теореме 5 существует функция $u(x)$, даже гармоническая в конусе K^{Ω}, такая, что при $x \to \infty$ по этому множеству $u(x)|x|^{-\rho_1} \to -\infty$.

Теорема 2 доказана.

§ 4. Доказательство теорем 3 и 4

Доказательство теоремы 3. Поскольку Γ удовлетворяет условию (1.4), найдется конус $K^{\Omega'} \supset \Gamma$, $\Omega' \Subset \Omega$. В силу теоремы A нам достаточно доказать справедливость заключения теоремы при стремлении точки x к бесконечности по множеству $K^{\Omega'} \cap C$, C — исключительное множество из теоремы А.

Обозначим через $u_1(x) = u(x) - kY_1(x^0)|x|^{\rho_1}$. Пусть точка $x \in E(\delta_i, X_i) \cap K^{\Omega'}$. Так как функция $u_1(x)$ гармоническая внутри K^{Ω}, то имеем

$$u_1(x) = \sigma^{-1} \int\limits_{S\left(\frac{1}{8}d_i, x\right)} u_1(y)\, dy = \sigma^{-1} \int\limits_{S'} u_1(y)\, dy +$$
$$+ \sigma^{-1} \int\limits_{S''} u_1(y)\, dy = I_1 + I_2, \tag{4.1}$$

где d_i — расстояние точки X_i до поверхности $K^{\partial\Omega}$ конуса K^{Ω},

$$\sigma = \sigma_m \left(\frac{d_i}{8}\right)^{m-1}, \quad \sigma_m = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)},$$

$$S'' = S\left(\frac{d_i}{8}, x\right) \cap C,$$

$$S' = S\left(\frac{d_i}{8}, x\right) \setminus S''.$$

Оценим интеграл I_1 в равенстве (4.1). Поскольку вне множества C выполняется $u_1(x) = 0(|x|^{\rho_1})$ при $x \to \infty$, то найдется такое r_0, что при $|x| > r_0$ будем иметь

$$|I_1| < \varepsilon |x|^{\rho_1}. \tag{4.2}$$

Рассмотрим теперь интеграл I_2. Предположим, что на множестве S'' выполняется соотношение

$$|u_1(y)| \leqslant B_0 |y|^{\rho_1}, \tag{4.3}$$

где B_0 — постоянная, не зависящая от y.

Обозначим через J множество тех индексов j, для которых

$$E(\delta_j, X_j) \cap S\left(\frac{1}{8} d_i, x\right) \neq \varnothing.$$

В силу неравенства (4.3) имеем

$$|I_2| \leqslant B_0 \sigma^{-1} \int\limits_{S''} |y|^{\rho_1} dy \leqslant B_0 \left(|x| + \frac{1}{8} d_i\right)^{\rho_1} \sigma^{-1} \int\limits_{S''} dy =$$

$$= B_1 |x|^{\rho_1} \left(1 + \frac{d_i}{8|x|}\right)^{\rho_1} d_i^{1-m} \sum_{j \in J} (\delta_j)^{m-1}, \qquad (4.4)$$

где постоянная B_1 не зависит от y. Ввиду сходимости ряда (1.3) $\delta_i/R_i \to 0$ и поэтому для $x \in E(\delta_i, X_i)$ имеем:

$$1 + \frac{d_i}{8|x|} \leqslant 1 + \frac{1}{8} \frac{d_i}{R_i - \delta_i} < B_2. \qquad (4.5)$$

Здесь постоянная B_2 не зависит от δ_i, R_i. Поскольку $\Omega' \subset \Omega$, то имеем

$$d_i^{1-m} \sum_{j \in J} (\delta_j)^{m-1} = \sum_{j \in J} \left(\frac{R_j}{d_j}\right)^{m-1} \left(\frac{\delta_j}{R_j}\right)^{m-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j \in J} \left(\frac{R_i + \frac{d_i}{8} + \delta_i + \delta_j}{d_i}\right)^{m-1} \left(\frac{\delta_j}{R_j}\right)^{m-1} \leqslant B_3 \sum_{j \in J} \left(\frac{\delta_j}{R_j}\right)^{m-1}, \qquad (4.6)$$

где постоянная B_3 не зависит от δ_j, R_j. В силу соотношений (4.5), (4.6) из неравенства (4.4) получим

$$|I_2| \leqslant B |x|^{\rho_1} \sum_{j \in J} \left(\frac{\delta_j}{R_j}\right)^{m-1},$$

постоянная B не зависит от x и δ_j, R_j. Отсюда в силу сходимости ряда (1.3) при $|x| > r_0$ получим

$$|I_2| \leqslant \varepsilon |x|^{\rho_1}. \qquad (4.7)$$

Используя соотношения (4.1), (4.2), (4.7), приходим к выводу, что $u_1(x) = o(1)|x|^{\rho_1}$ при $x \to \infty$ в конусе $K^{\Omega'}$. Теорема будет полностью доказана, если мы покажем справедливость условия (4.3).

Из нормальности типа функции $u(x)$ следует

$$u^+(x) \leqslant A|x|^{\rho_1}, \quad x \in K^{\Omega}. \qquad (4.8)$$

Оценим функцию $u(x)$, $x \in K^{\Omega}$ снизу.

Обозначим через ξ_i точку, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\xi_i \in E\left(\frac{1}{8} d_i, x\right), \; \xi_i \,\overline{\in}\, C \cap K^{\Omega'}; \qquad (4.9)$$

$$E\left(\frac{3}{4}d_i,\ \xi_i\right) \supset E\left(\frac{1}{8}d_i,\ x\right),$$

так что наименьшее расстояние между точками сфер $S\left(\frac{1}{8}d_i,\ x\right)$ и $S((3/4)d_i,\ \xi_i)$ не меньше $(1/8)d_i$. В шаре $E((1/8)d_i,\ x)$ при $|x|$ больше некоторого r_0 такая точка ξ_i найдется.

Действительно, пусть в шаре $E\left(\frac{1}{8}d_i,\ x\right)$ такой точки нет. Тогда существует бесконечная последовательность шаров, принадлежащих исключительному множеству C из теоремы A, у которых отношение δ_j/R_j не стремится к нулю, т. е. ряд (1.3) в этом случае будет расходиться. Полученное противоречие показывает, что в шаре $E((1/8)d_i,\ x)$ найдется точка ξ_i, удовлетворяющая условиям (4.9).

По формуле Пуассона имеем

$$u(t) = \frac{R^2 - |t|^2}{\sigma_m R} \int\limits_{S(R,\ \xi_i)} \frac{u(y)\,dy}{(R^2 - 2R\,|t|\cos\theta + |t|^2)^{m/2}},$$

здесь $R = (3/4)d_i$; θ — угол между векторами y и t. При $t \in S \times ((1/8)d_i,\ x)$ из последнего равенства получаем

$$u(t) = \frac{R^2 - |t|^2}{\sigma_m R}\left\{\int\limits_{S(R,\ \xi_i)} \frac{u^+(y)\,dy}{(R^2 - 2R\,|t|\cos\theta + |t|^2)^{m/2}} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{S(R,\ \xi_i)} \frac{u^-(y)\,dy}{(R^2 - 2R\,|t|\cos\theta + |t|^2)^{m/2}}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{R^2 - |t|^2}{\sigma_m R\,(R - |t|)^m}\left\{\left(\frac{R - |t|}{R + |t|}\right)^m \int\limits_{S(R,\ \xi_i)} u^+(y)\,dy - \int\limits_{S(R,\ \xi_i)} u^-(y)\,dy\right\} =$$

$$= \frac{R + |t|}{\sigma_m R\,(R - |t|)^{m-1}}\left\{\left(\frac{R - |t|}{R + |t|}\right)^m - 1\right] \int\limits_{S(R,\ \xi_i)} u^+(y)\,dy -$$

$$\left. - \int\limits_{S(R,\ \xi_i)} u(y)\,dy\right\} \geqslant A_1 R^{1-m}\left\{- A_2 \int\limits_{S(R,\ \xi_i)} u^+(y)\,dy - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{S(R,\ \xi_i)} u(y)\,dy\right\},$$

где A_1, A_2 — положительные постоянные, не зависящие от R и t. В силу условия (4.8) из последнего неравенства получаем

$$u(t) \geqslant A\,|t|^{\rho_1} - A_1 R^{1-m} \int\limits_{S(R,\ \xi_i)} u(y)\,dy = A_0\,|t|^{\rho_1} - A_1 \sigma_m u(\xi_i).$$

Поскольку точка $\xi_j \overline{\in} C$, то по теореме A отсюда получаем $u(t) \geqslant A\,|\,t\,|^{\rho_1}$. В силу этого неравенства и неравенства (4.8) следует справедливость условия (4.3).

Теорема 3 доказана.

Прежде чем доказывать теорему 4, установим справедливость следующей леммы.

Лемма 4.1. *Пусть произвольное неограниченное множество* Г *содержится в* K^{Ω} *и удовлетворяет условию* (1.5). *Существует бесконечное множество шаров* r^{m-1}*-конечного обзора, пересекающихся с* Г *и границей* $K^{\partial\Omega}$ *конуса* K^{Ω}.

Доказательство. Построим бесконечное множество шаров следующим образом. Шары $E(r_j, X_j)$ с радиусами r_j и центрами в точках X_j касаются $K^{\partial\Omega}$ изнутри в точках X_j. Положим $r_j = d(x_j)$. Из предположений леммы следует, что $d(x)/|\,x\,| \to 0$ при $x \to \infty$, $x \in K^{\partial\Omega}$. Поэтому можно выбрать последовательность чисел $R_j \to \infty$ при $j \to \infty$ так, чтобы сходился ряд

$$\sum_j \left(\frac{r_j}{R_j}\right)^{m-1} < \infty, \quad R_j = |\,X_j\,|.$$

Для каждого из построенных шаров возьмем концентрический шар с радиусом $\delta_j = 2r_j$, их объединение составит требуемое множество. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Поскольку область Г содержится в K^{Ω} и удовлетворяет условию (1.5), то в силу леммы 4.1 существует бесконечное множество C_0 шаров r^{m-1}-конечного обзора, пересекающихся с Г и $K^{\partial\Omega}$. В силу теоремы 5 существует гармоническая в конусе K^{Ω} функция $u(x)$ такая, что $u(x)\,|\,x\,|^{-\rho_1} \to -\infty$ при $x \to \infty$, $x \in K^{\Omega} \cap C_0$. В пересечение каждого шара из C_0 с областью Г впишем шар. Совокупность построенных шаров дает требуемое множество. Теорема 4 доказана.

В заключение автор выражает глубокую признательность В. С. Азарину и И. В. Островскому за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азарин В. С. Обобщение одной теоремы Хеймана на субгармонические функции в m-мерном конусе —«Матем. сб.». 1965, т. 66, № 2, с. 248—264.
2. Hayman W. K. Questions of regularity connected with the Phragmen—Lindelöf principle.—J. math. pures et app. 1956, vol. 35, № 2, p. 115—126
3. Тиман А. Ф., Трофимов В. Н. Введение в теорию гармонических функций. М., «Наука», 1968. 207 с.
4. Lelong—Ferran J. Fonctions surharmoniques positives dans un demi—espace.—Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Paris, 1949, vol. 66, № 2, p. 125—1 59.
5. Essen M., Jackson H. Comparison entre un ensemble effice et un ensemble qui satisfait á une condition généraliseé d'Azarin.—C. R. Acad. Sci., Paris, 1973, vol. 277, p. A 241—A 242.