УДК 517.534+519.21

И. П. Камынин, И. В. Островский, д-р физ.-мат. наук

О НУЛЯХ ЦЕЛЫХ ХРЕБТОВЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение. Напомним, что целая функция $\varphi(t)$ называется хребтовой функцией (хр. ф.), если для всех t она удовлетворяет условиям

$$|\varphi(t)| \leqslant \varphi(i \operatorname{Im} t), \quad \varphi(0) = 1.$$

Как известно (см., например, монографию Ю. В. Линника и И. В. Островского [1, с. 57]), на рост непостоянной хр. ф. в общем случае нет никаких ограничений, кроме следующего: он должен быть не ниже нормального типа порядка 1. Марцинкевич [1, с. 59] обнаружил, что если хр. ф. имеет «мало» нулей, то имеются и другие ограничения на рост. Он доказал, что если хр. ф. $\varphi(t)$ имеет конечный порядок ρ и показатель сходимости ее нулей ρ_1 удовлетворяет условию $\rho_1 < \rho$, то $\rho \leqslant 2$.

В теории мероморфных функций, стандартными обозначениями которой мы будем в дальнейшем пользоваться без пояснений (см., например, монографию А. А. Гольдберга и И. В. Островского [2]), вводится понятие дефекта $\delta(\alpha, f)$ функции $f(z)$ в точке α, который в некотором смысле определяет «малость» числа α-точек. Как известно, для всякой мероморфной функции и любого $\alpha \in C \cup \{\infty\}$ выполняется неравенство $0 \leqslant \delta(\alpha, f) \leqslant 1$. В частности, если $f(z)$ вовсе не имеет α-точек, то $\delta(\alpha, f) = 1$.

Можно поставить вопрос: сохранится ли утверждение теоремы Марцинкевича, если условие $\rho_1 < \rho$ заменить условием $\delta(0, \varphi) > 0$? Ответ на этот вопрос отрицателен. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любого числа* $\varkappa$, $2 < \varkappa < \infty$ *существует хр. ф.* $\psi_\varkappa(t)$ *порядка* $\varkappa$ *такая, что для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется*

$$\delta(0, \psi_\varkappa) \geqslant C_\varepsilon \varkappa^{-(2+\varepsilon)\varkappa}, \tag{1.1}$$

где $C_\varepsilon > 0$ *не зависит от* $\varkappa$.

Если же условие $\delta(0, \varphi) > 0$ заменить более жестким: $\delta(0, \varphi) = 1$, то утверждение теоремы Марцинкевича сохранится.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(t)$ — *хр. ф. конечного нижнего порядка и* $\delta(0, \varphi) = 1$. *Тогда порядок функции* $\varphi(t)$ *не превосходит* 2.

Теорему 2 мы получим как следствие такого более общего результата.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(t)$ — *хр. ф. конечного нижнего порядка* λ, p — *целое число, определенное неравенством*

$$\lambda - \frac{1}{2} < p \leqslant \lambda + \frac{1}{2}.^{1} \tag{1.2}$$

Существует абсолютная постоянная $C > 0$ *такая, что из неравенства*

$$\delta(0, \varphi) \geqslant 1 - \varepsilon (Cp \ln(p+1))^{-1} \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1/16)$$

следует, что порядок функции $\varphi(t)$ *не превосходит* $2 + \varepsilon$.

Теорема 2 получается из теоремы 3 при $\varepsilon = 0$.

В монографии Ю. В. Линника и И. В. Островского [1, с. 395] поставлена следующая проблема. Найти величину $C(\rho) = \sup\limits_{\varphi \in A_\rho} \delta(0, \varphi)$, где A_ρ — класс всех хр. ф. порядка $\rho > 2$.

---

[1] Поскольку $\lambda \geqslant 1$ (см. [1, с. 45]), то $p \geqslant 1$.

Полученные нами теоремы 1 и 2 хотя и не дают полного решения этой проблемы, но показывают, что $C(\rho)$ удовлетворяет неравенству

$$C_\varepsilon \rho^{-(2+\varepsilon)\rho} < C(\rho) \leqslant 1.$$

2. Предварительные сведения. Для доказательства теоремы 1 нам потребуется ряд результатов (теоремы 1.1—1.4), представляющих несущественные видоизменения некоторых теорем из гл. IV монографии И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [3].

В дальнейшем через C (с индексами и без них) обозначаются положительные, вообще говоря, различные числа.

Теорема 1.1. (ср. [3, с. 256]). *Пусть $f(z)$ — целая функция, такая что*

$$|f(z)| \leqslant C \exp(\beta |z|^\rho) \quad (\rho,\ \beta > 0).$$

Предположим, что в области $\{z = x + iy : |y| \leqslant K|x|\}$ она удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leqslant C \exp(-\alpha |x|^\rho) \quad (\alpha > 0).$$

Тогда для всех $z = x + iy$ выполняется

$$|f(x+iy)| \leqslant C \exp(-\alpha |x|^\rho + \beta' |y|^\rho),$$

где

$$\beta' = \beta (K^{-2} + 1)^{\rho/2} + \alpha K^{-\rho}.$$

Теорема 1.2 (ср. [3, с. 259]). *Если целая функция $f(z)$ для всех $z = x + iy$ удовлетворяет неравенству*

$$|f(x+iy)| \leqslant C \exp(-\alpha |x|^\rho + \beta' |y|^\rho) \ (\alpha,\ \beta' > 0),$$

то при $p,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ выполняется

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leqslant C A^p B^q p^{p/\rho} q^{q(1-1/\rho)} \ (-\infty < x < \infty),$$

где

$$A = (\alpha e\rho/2)^{-1/\rho}, \quad B = (\beta' e\rho e^{d\alpha/\beta'})^{1/\rho} \cdot e^{-1},$$

причем d — положительная константа, не зависящая от α (для случая $1 < \rho < 2$ она не зависит от ρ).

Теорема 1.3 (ср. [3, с. 238]). *Если бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ удовлетворяет неравенствам*

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leqslant C A^p B^q m_{pq} \ (p,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

причем числа m_{pq} таковы, что

$$\text{а) } m_{p-1,\ q-1}/m_{pq} \leqslant \gamma (p+q)(pq)^{-1} \ (p,\ q = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2.1}$$

$$\text{б) } m_{p+2,\ q}/m_{pq} \leqslant \gamma 2^{p+q} \ (p,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2.2}$$

(γ — *положительная постоянная*), *то преобразование Фурье* $\hat{f}(t)$ *функции* $f(x)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\left| t^p \hat{f}^{(q)}(t) \right| \leqslant C A_1^q B_1^p m_{qp} \quad (-\infty < t < \infty),$$

где

$$A_1 = 2A \exp(\gamma/(AB)), \quad B_1 = 2B \exp(\gamma/(AB)).$$

Теорема 1.4 (ср. [3, с. 246]). *Если* $\psi(t)$ — *бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая для* $p, q = 0, 1, \ldots$ *неравенствам*

$$\left| t^p \psi^{(q)}(t) \right| \leqslant C A_1^q B_1^p m_{qp} \quad (-\infty < t < \infty),$$

где

$$m_{qp} = p^{p\sigma} q^{q\omega} \quad (\sigma > 0, \ \omega < 1),$$

то она продолжается в комплексную плоскость, как целая функция, причем для всех $\xi, \eta \in R$ *выполняется*

$$|\psi(\xi + i\eta)| \leqslant C \exp(-\alpha_1 |\xi|^{1/\sigma} + \beta_1 |\eta|^{1/1-\omega}).$$

Здесь

$$\alpha_1 = e^{-1} \sigma B_1^{-1/\sigma}, \quad \beta_1 = 2(1-\omega) e^{-1} (A_1 e)^{1/1-\omega}.$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится также следующая лемма.

Лемма. *Пусть заданы число* $\rho > 0$ *и* 2π — *периодическая четная тригонометрически* ρ-*выпуклая функция* $\chi(\theta)$. *Тогда существует целая функция* $f(z)$ *порядка* ρ, *индикатор которой равен* $\chi(\theta)$, *и такая, что* $f(x) \geqslant 0$ *при* $-\infty < x < \infty$.

Доказательство. Положим $\chi_1(\theta) = \chi(\theta)/2$. В силу теоремы В. Бернштейна (см., например, Б. Я. Левин [4, с. 124]), существует целая функция $f_1(z)$ порядка ρ, индикатор которой равен $\chi_1(\theta)$.

Пусть

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = f_1(z) \cdot \bar{f}_1(z),$$

где

$$\bar{f}_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k z^k.$$

Ясно, что $f(z)$ — целая функция и $f(x) \geqslant 0$ при $-\infty < x < \infty$. Из равенств

$$|\bar{f}_1(z)| = |f_1(\bar{z})| \text{ и } \chi_1(\theta) = \chi_1(-\theta)$$

вытекает, что индикатор функции $f(z)$ равен

$$2\chi_1(\theta) = \chi(\theta).$$

Лемма доказана.

Чтобы сформулировать теоремы 1.5 и 1.6, используемые при доказательстве теоремы 3, условимся о некоторых обозначениях.

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция, положим

$$K(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, 0) + N(r, \infty)}{T(r, f)}.$$

Если род функции $f(z)$ равен p, то она, как известно [2, с. 80] может быть представлена в виде

$$f(z) = z^k e^{\alpha_0 z^p + \ldots + \alpha_p} \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_\nu}, p\right)\left(\prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{b_\nu}, p\right)\right)^{-1},$$

где $E(\zeta, p)$ — канонический множитель Вейерштрасса.

Введем обозначение

$$C(r) = \alpha_0 + \frac{1}{p}\sum_{|a_\nu|\leqslant r} a_\nu^{-p} - \frac{1}{p}\sum_{|b_\nu|\leqslant r} b_\nu^{-p}$$

и положим $C_j = C(\alpha^j)$, где $\alpha = e^{1/(p+1)}$.

Теорема 1.5. (Эдрей и Фукс [5]). *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка λ, p — целое число, определенное условием* (1.2). *Существуют абсолютные постоянные B_0 и B_1 ($B_1 \geqslant B_0 > 10\,e$) такие, что если*

$$K(f) < \varepsilon[B_0(p+1)\ln(p+1) + B_1(p+1)\ln(1/\sigma)]^{-1}$$
$$(0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad 0 < \sigma < e^{-1}),$$

то неравенство

$$|\ln|f(z)| - \operatorname{Re}(C_j z^p)| < 4\varepsilon |C_j| r^p \quad (j \geqslant j_0) \tag{2.3}$$

имеет место в кольце

$$\Gamma_j = \{z = re^{i\theta}\colon \alpha^j \leqslant r < \alpha^{j+3/2}\},$$

всюду, кроме некоторого множества кружков с суммой радиусов, не превосходящей $2e^2\sigma\alpha^j$.

Теорема 1.6 (см. [2, с. 313]). *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция порядка $\rho \leqslant \infty$ и конечного нижнего порядка λ, а p — целое число, определенное условием* (1.2).

Если

$$K(f) \leqslant \varepsilon(1{,}1(p+1))^{-1}, \text{ где } 0 \leqslant \varepsilon < 1/2,$$

то

$$p \geqslant 1, \quad p - \varepsilon \leqslant \lambda \leqslant \rho \leqslant p + \varepsilon.$$

3. Доказательство теоремы 1. Пусть задано число $\varkappa$, $2 < \varkappa < \infty$. Положим $\rho = \varkappa/(\varkappa - 1)$. (Заметим, что $1 < \rho < 2$).

Обозначим через $h(\theta)$ периодическую с периодом 2π функцию, ко-торая равна

$$h(\theta) = \cos[(2\theta - \pi)\rho/2], \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$
$$h(\theta) = h(\theta - \pi), \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Нетрудно убедиться, что эта функция тригонометрически ρ-выпуклая и четная. В силу леммы существует неотрицательная на вещественной оси целая функция $\varphi_\rho(z)$ порядка ρ, индикатор которой равен $h(\theta)$. Так как в области $\{z = re^{i\theta}: |\theta| \leqslant \pi/(4\varkappa)\}$ выполняется $h(\theta) \leqslant h(\pi/(4\varkappa))$, то в этой области имеем

$$|\varphi_\rho(z)| < C\exp(-a|x|^\rho), \tag{3.1}$$

где $a = -0{,}5h(\pi/(4\varkappa)) > 0$, а во всей плоскости —

$$|\varphi_\rho(z)| < C\exp(2|z|^\rho). \tag{3.2}$$

Заметим, что область

$$\{z = re^{i\theta}: |\theta| \leqslant \pi/(4\varkappa)\}$$

можно записать в виде

$$\{z = x + iy: |y| \leqslant K|x|\},$$

где

$$K = \operatorname{tg}(\pi/(4\varkappa)).$$

Рассмотрим преобразование Фурье $\psi_\varkappa(t)$ функции $\varphi_\rho(x)$:

$$\psi_\varkappa(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_\rho(x)\,dx.$$

Как следует из неравенства (3.1) и неотрицательности $\varphi_\rho(z)$ на вещественной оси, функция $\psi_\varkappa(t)$ является целой характеристической с точностью до положительного множителя, а значит — хр. ф. Мы покажем, что хр. ф. $\psi_\varkappa(t)$ является искомой. Сначала установим, что функция $\psi_\varkappa(t)$ в области $G = \{t = \xi + i\eta: |\eta| \leqslant K_1|\xi|\}$, где величина K_1 будет определена ниже, допускает оценку

$$|\psi_\varkappa(t)| \leqslant C\exp(-a'|\xi|^\varkappa) \quad (a' > 0), \tag{3.3}$$

а во всей плоскости — оценку

$$|\psi_\varkappa(t)| \leqslant C\exp(b'|t|^\varkappa) \quad (b' > 0). \tag{3.4}$$

Действительно, в силу (3.1) и (3.2) функция $\varphi_\rho(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1, поэтому для всех $z = x + iy$ выполняется

$$|\varphi_\rho(z)| \leqslant C\exp(-a|x|^\rho + b|y|^\rho),$$

где

$$b = 2(K^{-2} + 1)^{\rho/2} + aK^{-\rho}. \tag{3.5}$$

Отсюда, используя теорему 1.2, получаем, что для $-\infty < x < \infty$ справедливы неравенства

$$|x^p \varphi_\rho^{(q)}(x)| \leqslant CA^p B^q p^{p/\rho} q^{q(1-1/\rho)} \quad (p, q = 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$A = (ae\rho/2)^{-1/\rho}, \quad B = (be\rho \cdot \exp(da/b))^{1/\rho} \cdot e^{-1}, \tag{3.6}$$

а $d > 0$ постоянная, не зависящая от a и ρ. Легко видеть, что числа $m_{pq} = p^{p/\rho} q^{q(1-1/\rho)}$ удовлетворяют неравенствам (2.1), (2.2) с некоторым $\gamma > 0$ и, следовательно, согласно теореме 1.3, для преобразования Фурье $\psi_\varkappa(t)$ функции $\varphi_\rho(x)$ имеем

$$|t^p \psi_\varkappa^{(q)}(t)| \leqslant CA_1^q B_1^p m_{qp} \quad (p, q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Здесь

$$A_1 = 2A \exp(\gamma/(AB)), \quad B_1 = 2B \exp(\gamma/(AB)). \tag{3.7}$$

Применяя теперь теорему 1.4, получаем для $\psi_\varkappa(t)$ следующую оценку сверху во всей плоскости:

$$|\psi_\varkappa(t)| \leqslant C \exp(-a_1 |\xi|^\varkappa + b_1 |\eta|^\varkappa) \quad (t = \xi + i\eta),$$

где

$$a_1 = (\varkappa e B_1^\varkappa)^{-1}, \quad b_1 = 2(\varkappa e)^{-1} (A_1 e)^\varkappa. \tag{3.8}$$

Отсюда легко следуют неравенства (3.3) и (3.4), причем можно положить

$$a' = a_1/2, \ b' = b_1, \quad K_1 = (a_1/(2b_1))^{1/\varkappa}.$$

Для того, чтобы оценить дефект $\delta(0, \psi_\varkappa)$ снизу, достаточно оценить характеристику $T(r, \psi_\varkappa)$ сверху, а $m\left(r, \frac{1}{\psi_\varkappa}\right)$ — снизу. Из (3.4) следует

$$T(r, \psi_\varkappa) \leqslant b_1 r^\varkappa \quad (r > r_0). \tag{3.9}$$

Так как (3.3) выполняется в области

$$G = \{t = \xi + i\eta : |\eta| \leqslant K_1 |\xi|\},$$

то имеем

$$m\left(r, \frac{1}{\psi_\varkappa}\right) \geqslant \frac{a_1}{2\pi} \int\limits_{|\theta| \leqslant \operatorname{arctg} K_1} (\cos\theta)^\varkappa d\theta \cdot r^\varkappa \quad (r > r_0). \tag{3.10}$$

Таким образом, получаем следующую оценку:

$$\delta(0, \psi_\varkappa) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{m(r, 1/\psi_\varkappa)}{T(r, \psi_\varkappa)} \geqslant \frac{a_1}{2\pi b_1} \int\limits_{|\theta| \leqslant \operatorname{arctg} K_1} (\cos\theta)^\varkappa d\theta. \tag{3.11}$$

Отсюда видно, что $\delta(0, \psi_\varkappa) > 0$ при всех $\varkappa > 2$.

Получим оценку для $\delta(0, \psi_\varkappa)$ при больших $\varkappa$. Рассмотрим отношение a_1/b_1. Используя (3.8), получаем

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{2}(A_1B_1e)^{-\varkappa}.$$

Подставив вместо A_1 и B_1 их выражения из (3.7), имеем

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{2}(ABe)^{-\varkappa}4^{-\varkappa}\exp(-2\gamma\varkappa/(AB)).$$

Для дальнейшего нам понадобится оценка отношения a/b как сверху, так и снизу. В силу (3.5)

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2(K^{-2}+1)^{\rho/2}+aK^{-\rho}}.$$

Отсюда

$$\frac{aK^\rho}{2+a} \geqslant \frac{a}{b} \geqslant \frac{aK^\rho}{2+a+2K^\rho}.$$

Так как

$$2a = -h(\pi(\rho-1)/(4\rho)) = -\cos\{(\pi(\rho-1)/(2\rho)-\pi)\rho/2\} = \\ = \sin(\pi\rho/(2\varkappa)),\ K = \operatorname{tg}(\pi/(4\varkappa)),$$

то

$$\frac{\sin(\pi\rho/(2\varkappa))\cdot\operatorname{tg}^\rho(\pi/(4\varkappa))}{4+\sin(\pi\rho/(2\varkappa))} \geqslant \frac{a}{b} \geqslant \frac{\sin(\pi\rho/(2\varkappa))\cdot\operatorname{tg}^\rho(\pi/(4\varkappa))}{4+\sin(\pi\rho/(2\varkappa))+4\operatorname{tg}^\rho(\pi/(4\varkappa))}.$$

Воспользовавшись элементарными неравенствами, окончательно получаем

$$\varkappa^{-(1+\rho)} \geqslant a/b \geqslant 20^{-1}\varkappa^{-(1+\rho)}. \tag{3.12}$$

В силу (3.6) имеем

$$(ABe)^{-1} = \left(\frac{a}{2b}\right)^{1/\rho}\exp(da/(\rho b)). \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13) вытекает, что

$$C_2 \geqslant \exp(-2\gamma\varkappa/(AB)) \geqslant C_1,$$

$$C_4\varkappa^{-(1+1/\rho)\varkappa} \geqslant (ABe)^{-\varkappa} \geqslant C_3 40^{-\varkappa}\varkappa^{-(1+1/\rho)\varkappa}.$$

Отсюда

$$\frac{a_1}{b_1} \geqslant C'4^{-\varkappa}40^{-\varkappa}\varkappa^{-(1+1/\rho)\varkappa}, \tag{3.14}$$

$$\frac{a_1}{b_1} \leqslant C''\varkappa^{-(1+1/\rho)\varkappa}. \tag{3.15}$$

Осталось оценить снизу интеграл в (3.11). Очевидно,

$$\int\limits_{-\operatorname{arctg}K_1}^{\operatorname{arctg}K_1}(\cos\theta)^\varkappa\,d\theta \geqslant 2\operatorname{arc\,tg}K_1(\cos(\operatorname{arc\,tg}K_1))^\varkappa.$$

Используя неравенства

$$x \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant (4/\pi)\, x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right),$$

имеем

$$\left(\frac{a_1}{2b_1}\right)^{1/\varkappa} \geqslant \operatorname{arc\,tg} K_1 \geqslant \frac{\pi}{4}\left(\frac{a_1}{2b_1}\right)^{1/\varkappa},$$

а из (3.14) и (3.15) получаем оценки

$$C_6 \varkappa^{-(1+1/\rho)} \geqslant \operatorname{arc\,tg} K_1 \geqslant C_5 \varkappa^{-(1+1/\rho)}. \tag{3.16}$$

Следовательно,

$$(\cos(\operatorname{arc\,tg} K_1))^{\varkappa} \geqslant C. \tag{3.17}$$

Учитывая (3.11), (3.14), (3.16) и (3.17), получаем

$$\delta(0,\ \psi_\varkappa) \geqslant C \varkappa^{-2\varkappa} 4^{-\varkappa} 40^{-\varkappa} \varkappa^{-2},$$

откуда следует (1.1).

Заметим, что так как $T(r,\ \psi_\varkappa) \geqslant m(r,\ 1/\psi_\varkappa) + O(1)$, то из (3.10) следует, что $T(r,\ \psi_\varkappa) > Cr^\varkappa$. Учитывая (3.9), видим, что порядок функции $\psi_\varkappa(t)$ равен $\varkappa$. Теорема 1 полностью доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Пусть $\varphi(t)$ — хр. ф. конечного нижнего порядка λ, p — целое число, определенное неравенствами (1.2). Выберем в теореме 1.5 число σ таким, чтобы существовала окружность

$$L_j = \{t : |t| = r_j,\ \alpha^j \leqslant r_j < \alpha^{j+3/2}\},$$

на которой справедлива оценка (2.3). Для этого достаточно выбрать число σ настолько малым, чтобы ширина кольца Γ_j, равная $\alpha^{j+3/2} - \alpha^j$, была больше $4e^2\sigma\alpha^j$. Например, можно положить $\sigma = (4e^2(p+1))^{-1}$. Легко видеть, что при таком выборе числа σ существует абсолютная постоянная $C > 0$, для которой выполняется

$$\varepsilon(Cp\ln(p+1))^{-1} \leqslant \varepsilon\{B_0(p+1)\ln(p+1) +$$

$$+ B_1(p+1)\ln(1/\sigma)\}^{-1}\ (\varepsilon > 0).$$

Покажем, что это — именно та константа C, существование которой утверждается в теореме 3.

Предположим, что выполняется условие $\delta(0,\ \varphi) \geqslant 1 - \varepsilon(Cp \times \ln(p+1))^{-1}$. Так как функция $\varphi(t)$ целая, то оно равносильно такому:

$$K(\varphi) \leqslant \varepsilon(Cp\ln(p+1))^{-1}.$$

В силу теоремы 1.5 при $j \geqslant j_0$ на окружности L_j выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(C_j t^p) - 4\varepsilon |C_j| r_j^p < \ln |\varphi(t)| <$$
$$< \operatorname{Re}(C_j t^p) + 4\varepsilon |C_j| r_j^p.$$

Положим в этом неравенстве

$$t = t_{jk} = r_j e^{i\theta_{jk}} \in L_j,$$

где

$$\theta_{jk} = \frac{\arg C_j + 2\pi k}{p} \quad (k = 0, \ldots, p-1).$$

Так как $\varphi(t)$ является хр. ф., то

$$\ln |\varphi(t_{jk})| \leqslant \ln |\varphi(i \operatorname{Im} t_{jk})|$$

и, следовательно,

$$|C_j| r_j^p - 4\varepsilon |C_j| r_j^p < \ln |\varphi(t_{jk})| \leqslant$$

$$\leqslant \ln |\varphi(i \operatorname{Im} t_{jk})| < |C_j| |\sin \theta_{jk}|^p r_j^p + 4\varepsilon |C_j| r_j^p.$$

Отсюда

$$|C_j| r_j^p < |C_j| r_j^p (|\sin \theta_{jk}|^p + 8\varepsilon) \quad (k = 0, \ldots, p-1). \tag{4.1}$$

Если $p \geqslant 3$, то при всех $k = 0, \ldots, p-1$ неравенства (4.1) не могут выполняться, так как в этом случае ($p \geqslant 3$) существует угол $\theta_{jk_0} = \frac{\arg C_j + 2\pi k_0}{p}$ такой, что $|\sin \theta_{jk_0}| \leqslant 1/\sqrt{2}$. Следовательно, $p \leqslant 2$ и теорема 1.6 (можно, конечно, считать, что $C \geqslant 1{,}1$) приводит к неравенству $\rho \leqslant 2 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), где ρ — порядок функции $\varphi(t)$. Теорема 3 доказана для случая $\varepsilon > 0$. Если $\varepsilon = 0$, то для любого $\mu > 0$ справедливо неравенство $K(\varphi) < \mu (Cp \ln (p + 1))^{-1}$. Отсюда в силу доказанного ранее имеем $\rho \leqslant 2 + \mu$. Переходя к пределу при $\mu \to 0$, получаем требуемое. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М., «Наука», 1972. 480 с.
2. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 592 с.
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. М., Физматгиз, 1958. 307 с.
4. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956. 632 с.
5. Edrei., Fuchs W. H. J. Valeurs deficientes et valeurs asymptotiques des fonctions meromorphes. — Comment. math. helv. 1959, vol. 33, p. 258—295.