УДК 517.55:517.948.32

В. А. Какичев, канд. физ.-мат. наук

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В БИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ, II

Введение

1°. Эта статья является естественным продолжением работы I и использует результаты и обозначения, принятые в ней и в [2].

В I поставлена задача о нахождении, если это возможно, по функции $G(t, \omega) \neq 0$ и H-непрерывной (непрерывной по Гельдеру) на общем остове $C \times \Gamma$ бицилиндрических областей $D^{\pm} \times \Delta^{\pm}$ четырех функций $\Phi^{\pm\pm}(z, w)$ соответственно классов $H_0^{\pm\pm}$ и таких, что

$$\Phi^{++}(t, \omega) + \Phi^{--}(t, \omega) = G(t, \omega)[\Phi^{+-}(t, \omega) + \Phi^{-+}(t, \omega)]. \qquad (1)$$

Последнее равенство совпадает с условием однородной задачи линейного сопряжения, соответствующей неоднородной задаче

$$\Phi^{++} + \Phi^{--} = G(t, \omega)(\Phi^{+-} + \Phi^{-+}) + g(t, \omega), \qquad (2)$$

где $g(t, \omega) \in H$ и $(t, \omega) \in C \otimes \Gamma$.

В пункте 3.6° работы I описан общий класс задач линейного сопряжения, приводящихся к задаче (2).

Если $l = l(G)$ и $\lambda = \lambda(G)$ — частные индексы функции $G(t, \omega)$, то она допускает представление

$$G(t, \omega) = t^l \omega^\lambda G_0(t, \omega), \; G_0(t, \omega) \in H \text{ и } l(G_0) = \lambda(G_0) = 0.$$

Полагая

$$Q_\tau(t, \omega) = (t^l \omega^\lambda)^{1-\tau}[G(t, \omega)]^\tau = t^l \omega^\lambda [G_0(t, \omega)]^\tau, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1$$

найдем, что (см. [4])

$$Q_0(t, \omega) = t^l \omega^\lambda, \; Q_1(t, \omega) = G(t, \omega), \; l(G_0^\tau) = \lambda(G_0^\tau) = 0.$$

Отсюда следует, что пара чисел l и λ — частных индексов H — непрерывной функции $G(t, \omega) \neq 0$ на $C \times \Gamma$ является ее гомотопическим инвариантом.

Гомотопируя функцию $Q_1 = G$ в задачах (1) и (2) в функцию $Q_0 = t^l \omega^\lambda$, получаем задачи, о которых известно (см. [1, 2]), что при $|l| + |\lambda| > 0$ первая из них имеет счетное множество линейно независимых решений, а вторая — разрешима лишь в том случае, когда ее свободный член $g(t, \omega)$ удовлетворяет счетному множеству необходимых и достаточных условий разрешимости. Следовательно, обе d — характеристики задачи (2) с коэффициентом $G = t^l \omega^\lambda$ при $|l| + |\lambda| > 0$ равны бесконечности.

2°. Здесь задача (2) решена при очень сильных ограничениях на ее коэффициент $G(t, \omega)$. Более точно рассмотрены следующие четыре задачи:

$$F^{+-}(t, \omega)(\Phi^{++} + \Phi^{--}) = t^l \omega^\lambda (\Phi^{+-} + \Phi^{-+}) + g(t, \omega), \tag{3}$$

$$F^{-+}(t, \omega)(\Phi^{++} + \Phi^{--}) = t^l \omega^\lambda (\Phi^{+-} + \Phi^{-+}) + g(t, \omega), \tag{4}$$

$$\Phi^{++} + \Phi^{--} = t^l \omega^\lambda F^{\pm\mp}(t, \omega)(\Phi^{+-} + \Phi^{-+}) + g(t, \omega), \tag{5}$$

в которых $g(t, \omega) \in H$, а известные функции $F^{\pm\pm}(t, \omega)$ имеют нулевые частные индексы и являются предельными значениями соответственно функций $F^{\pm\pm}(z, w)$, голоморфных в областях $D^\pm \times \Delta^\pm$ и не обращающихся в нуль в замыкании этих областей.

На самом деле мы ограничимся исследованием только задачи (3), так как изучение задач (4) и (5) приводится совершенно аналогично. Отметим, что наибольшую трудность доставляет анализ условий разрешимости задачи (3) при $l \geqslant 0$ и $\lambda < 0$.

Каждая из задач (3)—(5) является частным случаем одной из четырех задач более общего вида

$$F^{\pm\mp}(t, \omega)(\Phi^{++} + \Phi^{--}) = t^l \omega^\lambda F^{\pm\pm}(t, \omega)(\Phi^{+-} + \Phi^{-+}) + g(t, \omega). \tag{6}$$

Способ решения задач (3)—(5) и (6) состоит в сведении их к соответствующим элементарным задачам и последующим применением модификации метода проектирования [1]. К сожалению, этот способ не позволяет получить решение задач (3)—(5) из решений соответствующих задач (6), полагая в последних $F^{\pm\pm}(t, \omega) \equiv 1$ или $F^{\mp\pm}(t, \omega) \equiv 1$ соответственно. Это связано с тем, что задачи (3)—(5) и (6) приводятся, вообще говоря, к различным элементарным задачам. Исследование задач (6) будет дано в другой работе автора.

§ 1. Сведение задачи (3) к элементарным задачам

3°. Полагая

$$F^{+-}(\Phi^{++} + \Phi^{--}) \equiv A^{++} - A^{+-} + A^{--}, \tag{7}$$

$$G(z, w) = K(g)(z, w) \equiv \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{C \times \Gamma} \frac{g(t, \omega)\, dt d\omega}{(t - z)(\omega - w)}$$

и $V^{\pm\pm} = A^{\pm\pm} - G^{\pm\pm}$, а также учитывая равенство [2]

$$g(t, \omega) = G^{++} - G^{-+} - G^{+-} + G^{--},$$

краевое условие (3) преобразуем в условие

$$V^{++} - (t^l \omega^\lambda \Phi^{+-} + A^{+-} - G^{+-}) = (t^l \omega^\lambda \Phi^{-+} - G^{-+}) + V^{--}. \tag{8}$$

Если $l \geqslant 0$ и $\lambda < 0$ ($l < 0$ и $\lambda \geqslant 0$), то заменой

$$V^{+-} = t^l \omega^\lambda \Phi^{+-} + A^{+-} - G^{+-};$$
$$V^{-+} = \Phi^{-+} - t^{-l} \omega^{-\lambda} G^{-+} \tag{9}$$
$$(V^{+-} = \Phi^{+-} - t^{-l} \omega^{-\lambda} (A^{+-} - G^{+-});$$
$$V^{-+} = t^l \omega^\lambda \Phi^{-+} - G^{-+}) \tag{10}$$

условие (8) приведем к виду

$$V^{++} - V^{+-} - t^l \omega^\lambda V^{-+} + V^{--} = 0 \ \ (l \geqslant 0, \ \lambda < 0), \tag{11}$$
$$(V^{++} - t^l \omega^\lambda V^{+-} - V^{-+} + V^{--} = 0 \ \ (l < 0, \ \lambda \geqslant 0)). \tag{12}$$

Если же $l \geqslant 0$ и $\lambda \geqslant 0$ ($l < 0$ и $\lambda < 0$), то полагая

$$V^{+-} = t^l \Phi^{+-} - \omega^{-\lambda} (A^{+-} - G^{+-});$$
$$V^{-+} = \omega^\lambda \Phi^{-+} - t^{-l} G^{-+} \tag{13}$$
$$(V^{+-} = \omega^\lambda \Phi^{+-} + t^{-l} (A^{+-} - G^{+-});$$
$$V^{-+} = t^l \Phi^{-+} - \omega^{-\lambda} G^{-+}), \tag{14}$$

условие (8) заменим таким:

$$V^{++} - \omega^\lambda V^{+-} - t^l V^{-+} + V^{--} = 0 \, (l \geqslant 0, \ \lambda \geqslant 0), \tag{15}$$
$$(V^{++} - t^l V^{+-} - \omega^\lambda V^{-+} + V^{--} = 0 \, (l < 0, \ \lambda < 0)). \tag{16}$$

Таким образом, краевая задача (3) может быть сведена к одной из элементарных задач (11), (12) и (15), (16).

Замечание 1. Если $F^{+-}(t, \omega) \equiv 1$, то равенство (8) принимает вид

$$V^{++} - (t^l \omega^\lambda \Phi^{+-} - G^{+-}) = (t^l \omega^\lambda \Phi^{-+} - G^{-+}) - V^{--}.$$

Это соотношение при соответствующих предложениях относительно знаков l и λ может быть преобразовано к тем же задачам — (11), (12) и (15), (16).

4°. Договоримся еще о следующих обозначениях (сравните с [1]). Пусть, например, функция $V(z, w) \in H_0^{+-}$ и, следовательно, в некоторой окрестности точки $(0, \infty)$ представима рядом

$$V(z, w) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-1}^{-\infty} v_{kl} z^k w^l = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} v_{k,-l} z^k w^{-l}.$$

Мы будем говорить, что функция $V(z, w)$ имеет тип $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ +\infty, & -\infty \end{pmatrix}$, и писать $V(z, w) \in \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ +\infty, & -\infty \end{pmatrix}$. Если $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$ и $-\infty \leqslant \leqslant -r \leqslant -s \leqslant -1$, то через $V_{\left(\begin{smallmatrix} p, & -r \\ q, & -s \end{smallmatrix}\right)}(z, w)$ будем обозначать проекцию

$$\sum_{k=p}^{q} \sum_{l=-s}^{-r} v_{kl} z^k w^l = \sum_{k=p}^{q} \sum_{l=s}^{r} v_{k,\,-l} z^k w^{-l}$$

функции $V(z, w) \in H_0^{+-}$ на семейство мономов $\{z^k w^{-l} : p \leqslant k \leqslant q, s \leqslant l \leqslant r\}$ и последующее ее аналитическое продолжение до функции, голоморфной в $D^+ \times \Delta^-$, что, очевидно, возможно. В частности, если $p = q\ (r = s)$, то будем полагать:

$$\tilde{v}_p^-(w) \equiv z^{-p} V_{\left(\begin{smallmatrix} p, & -r \\ p, & -s \end{smallmatrix}\right)}(z, w) \left(\tilde{v}_r^+(z) \equiv w^r V_{\left(\begin{smallmatrix} p, & -r \\ q, & -r \end{smallmatrix}\right)}\right)(z, w).$$

§ 2. Вывод условий разрешимости задачи (3) при $l \geqslant 0$ и $\lambda < 0$

5°. Решение задачи (11) определяется формулами [1]:

$$V^{+-}(z, w) = V_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ l-1, & \lambda \end{smallmatrix}\right)}(z, w) = \sum_{s=0}^{l-1} \sum_{\sigma=1}^{-\lambda} v_{s,\,-\sigma} z^s w^{-\sigma},$$

$$V^{++}(z, w) = V_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ l-1, & +\infty \end{smallmatrix}\right)}(z, w) = \sum_{s=0}^{l-1} z^s \tilde{v}_s^+(w),$$

$$V^{--}(z, w) = V_{\left(\begin{smallmatrix} -1, & -1 \\ -\infty, & \lambda \end{smallmatrix}\right)}(z, w) = \sum_{\sigma=1}^{-\lambda} w^{-\sigma} \hat{v}_{-\sigma}^-(z),$$

где $v_{s,\,-\sigma}$ — произвольные постоянные, а $\tilde{v}_s^+(w) \in H^+(\Gamma)$ и $\hat{v}_{-\sigma}^-(z) \in H_0^-(C)$ — произвольные функции своих классов.

Следовательно, если $C \times \Gamma$ является единичным тором $T_2 = \{|t| = 1, |\omega| = 1\}$, то базис ядра задачи (11) имеет вид

$$\left\{ z^s w^\sigma \ : (s, \sigma) \in \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ l-1, & +\infty \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} -1, & -1 \\ -\infty, & \lambda \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ l-1, & \lambda \end{pmatrix} \right\}.$$

После того, как определены функции $V^{\pm\pm}(z, w)$, легко найдем, что

$$A^{\pm\pm}(z, w) = V^{\pm\pm}(z, w) + G^{\pm\pm}(z, w),$$

$$\Phi^{-+}(z, w) = V^{-+}(z, w) + z^{-l} w^{-\lambda} G^{-+}(z, w).$$

Для определения функции $\Phi^{+-}(z, w)$ надо воспользоваться верхним равенством в (9), содержащим неизвестную пока функцию A^{+-}.

Учитывая равенство (7), получаем краевую задачу

$$\Phi^{++} + \Phi^{--} + A^{+-}/F^{+-} = (A^{++} + A^{--})/F^{+-} \tag{17}$$

с известной правой частью, такой, что ее проекция на H_0^{-+} равна нулю. Из (17) следует, что

$$\Phi^{\pm\pm}(t, \omega) = P^{\pm\pm}[(A^{++} + A^{--})/F^{+-}],$$

$$A^{+-}(t,\ \omega)=F^{+-}P^{+-}[(A^{++}+A^{--})/F^{+-}]$$

и, значит, $\Phi^{\pm\pm}(z,\ w)=K(\Phi^{\pm\pm})(z,\ w)$ при $(z,\ w)\in D^{\pm}\times\Delta^{\pm}$.

Здесь $P^{\pm\pm}$ — операторы проектирования на подпространства $H_0^{\pm\pm}$ (см. [1]). Положим

$$B(z,\ w)=K\left[F^{+-}P^{+-}\left(\frac{G^{++}+G^{--}}{F^{+-}}\right)\right](z,\ w),$$

$$U(z,\ w)=K\left[F^{+-}P^{+-}\left(\frac{V^{++}+V^{--}}{F^{+-}}\right)\right](z,\ w),$$

тогда

$$A^{+-}(t,\ \omega)+B^{+-}(t,\ \omega)+U^{+-}(t,\ \omega)=0$$

и, значит, в силу верхней строки в (9)

$$z^l w^\lambda \Phi^{+-}(z,\ w)\equiv X^{+-}(z,\ w)\equiv V^{+-}(z,\ w)+U^{+-}(z,\ w)+ \\ +Q_1^{+-}(z,\ w),$$

где

$$Q_1(z,\ w)=B^{+-}(z,\ w)-G^{+-}(z,\ w)$$

— известная функция, а функция $U^{+-}(z,\ w)$ зависит от произвольных функций $V^{\pm\pm}(z,\ w)$, входящих вместе с $V^{+-}(z,\ w)$ в решение задачи (11).

Если

$$z^{-l}w^{-\lambda}X^{+-}(z,\ w)\in H_0^{+-}$$

или, что то же самое,

$$X^{+-}_{\binom{0,\ -1}{+\infty,\ \lambda}}(z,\ w)\equiv X^{+-}_{\binom{0,\ \lambda-1}{l-1,\ -\infty}}(z,\ w)\equiv 0, \tag{18}$$

то задача (3) разрешима, а функция $\Phi^{+-}(z,\ w)$ определяется равенством $\Phi^{+-}(z,\ w)=z^{-l}w^{-\lambda}X^{+-}(z,\ w)$. Таким образом, *чтобы задача* (3) *при* $l\geqslant 0$ *и* $\lambda<0$ *была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (18), *которые равносильны счетному множеству равенств* [2]:

$$\int\limits_{C\times\Gamma}\frac{X^{+-}(t,\ \omega)}{t^{-s}\omega^{-\sigma}}\frac{dt}{t}\frac{d\omega}{\omega}=0,\ (s,\ \sigma)\in\begin{pmatrix}0, & -1\\ +\infty, & \lambda\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}0, & \lambda-1\\ l-1, & -\infty\end{pmatrix}.$$

Если $C\times\Gamma$ является тором T_2, а известные функции (и, значит, предельные значения искомых) принадлежат $L_2(T_2)$, то последние равенства равносильны линейной системе из счетного множества уравнений относительно коэффициентов $v_{s\sigma}$, входящих в функции $V^{+-}(z,\ w)$ и $V^{\pm\pm}(z,\ w)$. Однако что-либо определенное об этой системе сказать трудно. Поэтому мы будем исследовать условия (18) при предположениях, указанных выше.

§ 3. Анализ условий разрешимости задачи (3) при $l \geqslant 0$ и $\lambda < 0$

6°. Так как функция $F^{+-}(z, w) \neq 0$ в $D^+ \times \Delta^-$, то ее свободный член в разложении в ряд в окрестности точки $(0, \infty)$ отличен от нуля и поэтому в (18) функцию $X^{+-}(z, w)$ можно заменить функцией $Y^{+-}(z, w) = X^{+-}(z, w)/F^{+-}(z, w) \in H_0^{+-}$. Заметим, что

$$\frac{U^{+-}(z, w)}{F^{+-}(z, w)} = K\left(\frac{V^{++} + V^{--}}{F^{+-}}\right)(z, w) \ \forall (z, w) \in D^+ \times \Delta^-,$$

и положим

$$\hat{m}_j^-(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{t^{-j}}{F^{+-}(t, \omega)}\frac{dt}{t},$$

$$\hat{\mu}_k(w) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{k}\int\limits_\Gamma \frac{\tilde{v}_s^+(\omega)\,\hat{m}_{k-s}^-(\omega)}{\omega - w}\,d\omega.$$

Далее, учитывая, что $\hat{m}_j^-(\omega) = 0$ при $j = -1, -2, \ldots$, и предполагая, что $(z, w) \in D^+ \times \Delta^-$, получим равенство

$$K(V^{++}/F^{+-})(z, w) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{l-1}\int\limits_\Gamma \frac{\tilde{v}_s^+(\omega)\,d\omega}{\omega - w}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{2\pi i}\int\limits_C \frac{t^{s-k}}{F^{+-}(t, \omega)}\frac{dt}{t} =$$

$$= \sum_{s=0}^{l-1}\sum_{k \geqslant s}\frac{z^k}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\tilde{v}_s^+(\omega)\,\hat{m}_{k-s}^-(\omega)}{\omega - w}\,d\omega \equiv$$

$$\equiv \sum_{s=0}^{l-1} z^k \hat{\mu}_k^-(w) + \hat{M}^{+-}(z, w),$$

где

$$\hat{\mu}_k^-(w) = \mu_k(w)\ \forall w \in \Delta^- \text{ и } \hat{M}^{+-}(z, w) \in \begin{pmatrix} l, & -1 \\ +\infty, & -\infty \end{pmatrix}.$$

Аналогичными рассуждениями убедимся, что при $(z, w) \in D^+ \times \Delta^-$

$$K(V^{--}/F^{+-})(z, w) =$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{-\lambda} w^{-\sigma}\tilde{\mu}_{-\sigma}^-(z) + \tilde{M}^{+-}(z, w),\ \tilde{M}^{+-}(z, w) \in \begin{pmatrix} 0, & \lambda - 1 \\ +\infty, & -\infty \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\mu}_{-\sigma}^-(z)$ при $z \in \Delta^-$ совпадает с интегралом

$$\tilde{\mu}_{-\sigma}(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\rho=1}^{\sigma}\int\limits_G \frac{\hat{v}_{-\rho}^-(t)\,\tilde{m}_{-\rho+\sigma}^+(t)}{t - z}\,dt,$$

в котором

$$\tilde{m}_j^+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\omega^{-j}}{F^{+-}(t,\ \omega)}\frac{d\omega}{\omega}.$$

Отметим еще равенства

$$V^{+-}(z,\ w)/F^{+-}(z,\ w) = \sum_{k=0}^{l-1} z^k \hat{n}_k^-(w) +$$

$$+ \hat{N}^{+-}(z,\ w) = \sum_{\rho=1}^{-\lambda} w^{-\rho}\tilde{n}_{-\rho}^{+}(z) + \tilde{N}^{+-}(z,\ w),$$

в которых

$$V^{+-}(z,\ w) = \sum_{k=0}^{l-1} z^k \hat{v}_k^-(w) = \sum_{\rho=1}^{-\lambda} w^{-\rho}\tilde{v}_{-\rho}^{-}(z),$$

$$\hat{n}_k^-(w) = \sum_{s=0}^{k} \hat{v}_s^-(w)\,\hat{m}_{k-s}^-(w),\quad \tilde{n}_{-\rho}^+(z) = \sum_{\sigma=1}^{\rho} \tilde{v}_{-\sigma}^+(z)\tilde{m}_{\sigma-\rho}^+(z)$$

и

$$\hat{N}^{+-}(z,\ w) \in \begin{pmatrix} l, & -1 \\ +\infty, & -\infty \end{pmatrix},\ \tilde{N}^{+-}(z,\ w) \in \begin{pmatrix} 0, & \lambda-1 \\ +\infty, & -\infty \end{pmatrix}.$$

Полагая еще $Q^{+-}(z,\ w) = Q_1^{+-}(z,\ w)/F^{+-}(z,\ w)$, найдем, что условия

$$Y^{+-}_{\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ l-1, & -\infty \end{pmatrix}}(z,\ w) = 0 \ \text{ и }\ Y^{+-}_{\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ +\infty, & \lambda \end{pmatrix}}(z,\ w) = 0$$

равносильны таким $l-\lambda$ равенствам:

$$\hat{n}_k^-(w) + \hat{\mu}_k^-(w) + \hat{q}_k^-(w) = 0,\ k = 0,\ 1,\ l-1, \tag{19}$$

$$\tilde{n}_\rho^+(z) + \mu_\rho^+(z) + q_\rho^+(z) = 0,\ \rho = -1,\ \ldots,\ \lambda, \tag{20}$$

где $\hat{q}_k^-(w)$ и $\tilde{q}_\rho^+(z)$ — известные функции, определяемые по функции $Q^{+-}(z,\ w)$, а каждая из функций $\hat{n}_k^-(w)\,(\tilde{n}_{-\rho}^+(z))$ линейным образом зависит от $|\lambda(k+1)|$ (от $|l\rho|$) произвольных постоянных $v_{s,-1},\ \ldots,\ v_{s,\lambda}\,(s = 0,\ 1,\ \ldots,\ k)$ $(v_{,0,\sigma},\ \ldots v_{l-1,-\sigma}\,(\sigma = 1,\ \ldots\ \rho))$, входящих в функцию $V^{+-}(z,\ w)$.

Пусть $w \in \Delta^-$. Полагая $\hat{F}_0(w) = -\hat{q}_0^-(w) = \hat{n}_0^-(w)$ и при $k \geqslant 1$

$$\hat{F}_k(w) = -\hat{q}_k^-(w) - \hat{n}_k^-(w) - \frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{k-1}\int\limits_{\Gamma} \frac{\tilde{v}_s^+(\omega)\,\hat{m}_{k-s}^-(\omega)}{\omega - w}d\omega,$$

равенствам (19) придадим следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{v_k^+(\omega)\,\hat{m}_0^-(\omega)}{\omega - w}\,d\omega = \hat{F}_k(w),\quad w\in\Delta^-,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ l-1. \quad (21)$$

Итак, для определения функций $v_k^+(w)$ надо последовательно решить l уравнений вида (21), отличающихся друг от друга только правыми частями.

А так как при $w\in\Delta^-$

$$\hat{F}_k(w) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\hat{F}_k(\omega)\,d\omega}{\omega - w} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\tilde{u}_k^+(\omega)\,d\omega}{\omega - w},$$

где $\tilde{u}_k^+(\omega)$ — предельное значение произвольной функции класса $H^+(\Gamma)$, то k-е уравнение (21) равносильно односторонней краевой задаче, в которой надо определить пару функций $\tilde{u}_k^+(w)$ и $\tilde{v}_k^+(w)$ класса $H^+(\Gamma)$ по краевому условию

$$\tilde{v}_k^+(\omega)\,\hat{m}_0^-(\omega) = \tilde{u}_k^+(\omega) - \hat{F}_k(\omega),\quad \omega\in\Gamma,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ l-1. \quad (22)$$

Аналогичными рассуждениями убедимся, что каждая из $|\lambda|$ задач (20) равносильна соответствующей односторонней краевой задаче вида

$$\hat{v}_\rho^-(t)\,\tilde{m}_0^+(t) = \hat{u}_\rho^-(t) - \tilde{F}_\rho(t),\quad t\in C,\ \rho=-1,\ \ldots,\ \lambda. \quad (23)$$

7°. Теория односторонних краевых задач наиболее полно описана в работе [3]. Следуя этой работе, функцию $m(z)$ назовем мероморфной в Δ^+ функцией ограниченного вида, если существует пара аналитических и ограниченных в Δ^+ функций $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ таких, что $m(z)=\alpha(z)/\beta(z)$. Например, функция z^χ, где $\chi<0$, является такой функцией; в этом случае $\alpha(z)=1$, а $\beta(z) = z^{-\chi}$. Из результатов статьи [3] следует:

а) однородная ($\hat{F}_k(\omega)=0$) задача (22) имеет лишь тривиальное решение, а неоднородная задача (22) имеет не более одного решения, если $\hat{m}_0^-(\omega)$ не является предельным значением мероморфной функции ограниченного вида;

б) если же $\hat{m}_0^-(\omega)$ является предельным значением мероморфной функции ограниченного вида и $\hat{m}_0^-(w)=\alpha(w)/\beta(w)$, то общее решение разрешимой задачи (22) имеет вид

$$\tilde{v}_k^+(w) = \Omega_k(w)\,\alpha(w) + h_k(w),$$

$$\tilde{u}_k^+(w) = \Omega_k(w)\,\beta(w) + g_k(w),$$

где $\{h_k(w), g_k(w)\}$ — частное решение задачи (22), а $\Omega_k(w)$ — произвольная функция аналитическая в Δ^+, предельные значения которой принадлежат соответствующему классу; если задача (22) разрешима, то необходимо, чтобы функция $\hat{F}_k(\omega)\beta(\omega)$ была аналитически продолжима в Δ^+.

Достаточные условия разрешимости односторонних краевых задач неизвестны, поэтому ответ на вопрос о разрешимости исходной краевой задачи носит условный характер.

Напомним, что функции $\hat{F}_k(\omega)$ и $\tilde{F}_\rho(t)$ зависят не более чем от $l|\lambda|$ произвольных постоянных $v_{s\sigma}$, входящих в функцию $V^{+-}(z, w)$, и поэтому функции $\tilde{v}_k^+(w)$ и $\tilde{v}_\rho^-(z)$, удовлетворяющие уравнениям (22) и (23), линейным образом зависят от этих же постоянных. Подставляя, если они существуют, решения $\tilde{v}_k^+(w)$ и $\hat{v}_\rho^-(z)$ в условие

$$Y^{+-}_{\binom{0\ -1}{l-1,\ \lambda}}(z, w) = 0, \tag{24}$$

получим $l|\lambda|$ линейных уравнений первого порядка, которым должны удовлетворять постоянные $v_{s\sigma}$, $s = 0, 1, \ldots, l-1$, $\sigma = -1, \ldots, \lambda$.

Отметим теперь следующие, наиболее простые, ситуации.

1. Если уравнения (22) и (23) имеют единственное решение при любых произвольных значениях $l|\lambda|$ постоянных $v_{s\sigma}$, а система (24) совместна при некоторых значениях этих постоянных, то задача (5) при $l \geqslant 0$ и $\lambda < 0$ имеет решение, зависящее не более чем от $l|\lambda|$ произвольных постоянных.

2. Если каждое из уравнений (22) и (23) разрешимо при любых произвольных значениях постоянных $v_{s\sigma}$, система (24) совместна при некоторых значениях этих постоянных и хотя бы одно из уравнений (22) и (23) при этом имеет счетное множество линейно независимых решений, то задача (3) при $l \geqslant 0$ и $\lambda > 0$ имеет решение, зависящее от счетного множества произвольных постоянных.

3. Если хотя бы одно из уравнений (22) и (23) неразрешимо даже при специальном подборе входящих в правую их часть произвольных постоянных $v_{s\sigma}$, то задача (3) при $l \geqslant 0$ и $\lambda < 0$ неразрешима. Она неразрешима и тогда, когда уравнения (22) и (23) имеют решение при некотором специальном подборе постоянных $v_{s\sigma}$, но либо такие постоянные, определяемые по уравнениям (22) и по уравнениям (23) различны, либо не удовлетворяют системе (24).

Короче, *задача* (3) *при* $l \leqslant 0$ *и* $\lambda > 0$ *разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы все односторонние краевые задачи* (22) *и* (23), *а их решения таковы, что выполняется условие* (24).

§ 4. Изучение других случаев

8°. Если $l \geqslant 0$ и $\lambda \geqslant 0$, то заменой (13) придем к задаче (15), решение которой определяется формулами

$$V^{--}(z, w) \equiv 0, \; V^{++}(z, w) = \sum_{s=0}^{+\infty} z^s \tilde{v}_s^+(w) \equiv$$

$$\equiv V_{\binom{0,\ 0}{l-1,\ \lambda-1}}(z, w) + V_{\binom{0,\ \lambda}{l-1,\ +\infty}}(z, w) + V_{\binom{l,\ 0}{+\infty,\ \lambda-1}}(z, w);$$

$$w^\lambda V^{+-}(z, w) = \alpha V_{\binom{0,\ 0}{l-1,\ \lambda-1}}(z,w) + V_{\binom{l,\ 0}{+\infty,\ \lambda-1}}(z, w),$$

$$z^l V^{-+}(z, w) = \beta V_{\binom{0,\ 0}{l-1,\ \lambda-1}}(z, w) + V_{\binom{0,\ \lambda}{l-1,\ +\infty}}(z, w),$$

где α и β — произвольные постоянные такие, что $\alpha + \beta = 1$. Отсюда следует, что

$$A^{--}(z, w) = G^{--}(z, w), \; A^{++}(z, w) = V^{++}(z, w) + G^{++}(z, w),$$

а функция

$$w^{-\lambda}[V^{-+}(z, w) - z^{-l} G^{-+}(z, w)] =$$
$$= w^{-\lambda} z^{-l}\left[\beta V_{\binom{0,\ 0}{l-1,\ \lambda-1}}(z, w) + V_{\binom{0,\ \lambda}{l-1,\ +\infty}}(z, w) - G^{-+}(z, w)\right]$$

принадлежит классу H_0^{-+} и, следовательно, определяет функцию $\Phi^{-+}(z, w)$, если только

$$\beta = 0 \text{ и } G^{-+}_{\binom{-1,\ 0}{-\infty,\ \lambda-1}}(z, w) \equiv 0. \tag{25}$$

Предполагая, что условия (25) выполнены, обратимся к задаче (17), из которой, как и выше, определим функции $\Phi^{\pm\pm}(z, w)$, $A^{+-}(z, w)$, $B(z, w)$ и $U(z, w)$, причем последняя зависит только от $V^{++}(t, \omega)$, так как $V^{--}(t, \omega) \equiv 0$. Отсюда и из верхней строки в (13) следует, что

$$z^l \Phi^{+-}(z, w) = X^{+-}(z, w) \equiv$$
$$\equiv w^{-\lambda}\left[V_{\binom{0,\ 0}{l-1,\ \lambda-1}}(z, w) + V_{\binom{l,\ 0}{+\infty,\ \lambda-1}}(z, w) + U^{+-}(z, w) + \right.$$
$$\left. + Q_1^{+-}(z, w)\right],$$

где $Q_1^{+-}(z, w)$, а также и $Q^{+-}(z, w)$ имеет тот же смысл, что и в 6°.

Функция $z^{-l}X^{+-}(z, w) \in H_0^{+-}$, если

$$X^{+-}_{\binom{0,\ -1}{l-1,\ -\infty}}(z, w) \equiv 0 \iff Y^{+-}_{\binom{0,\ -1}{l-1,\ -\infty}}(z, w) \equiv 0, \tag{26}$$

где

$$Y^{+-}(z, w) = Q^{+-}(z, w) +$$
$$+ K(V^{++}/F^{+-})(z, w) + V_{\binom{0,\ 0}{l-1,\ \lambda-1}}(z, w)/F^{+-}(z, w),$$

так что функция $V_{\binom{l,\ 0}{+\infty,\ \lambda-1}}(z,\ w)$, не входящая в $Y^{+-}(z,\ w)$, по-прежнему остается произвольной.

Рассуждая, как и в 6°, найдем, что условия (26) равносильны l равенством вида

$$\hat{\mu}_k^-(w) + \hat{q}_k^-(w) + \hat{F}_k^-(w) = 0,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ l-1, \tag{27}$$

в которых $\hat{\mu}_k^-(w)$ и $\hat{q}_k^-(w)$ те же, что и в 6°, а

$$\hat{F}_k^-(w) = \sum_{\sigma=0}^{\lambda-1}\sum_{s=0}^{k} \frac{v_{s\sigma}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega^\sigma \hat{m}_{k-s}^-(\omega)}{\omega - w}\,d\omega,\ w \in \Delta^-.$$

Следовательно, функции $\tilde{v}_k^+(w)$ и $\hat{F}_k^-(w)$ линейным образом зависят от одних и тех же постоянных $v_{k\sigma}$, $\sigma = 0,\ 1,\ \ldots,\ \lambda-1$.

Если все уравнения (27) разрешимы, или, что то же самое, разрешимы соответствующие им односторонние краевые задачи вида (22), то, зная их общее решение, определим функции $\tilde{v}_k^+(w)$ и, значит, функцию $V_{\binom{0,\ 0}{l-1,\ +\infty}}(z,\ w)$.

Замечание 2. Если $l < 0$ и $\lambda < 0$, то рассуждая как и только что, получим задачу (16), аналогичную задаче (15), условие вида (25) будет содержать равенство $G^{-+}_{\binom{-1,\ 0}{\lambda,\ +\infty}}(z,\ w) = 0$, а вместо краевых задач вида (22) получим краевые задачи, аналогичные задачам (23) и т. д.

9°. Наконец, при $l < 0$ и $\lambda \geqslant 0$ заменой (10) получим задачу (12), решение которой определяется произвольными функциями

$$V^{++}(z,\ w) = V_{\binom{0,\ 0}{+\infty,\ \lambda-1}}(z,\ w),\ V^{--}(z,\ w) = V_{\binom{-1,\ -1}{l,\ -\infty}}(z,\ w),$$
$$V^{-+}(z,\ w) = V_{\binom{-1,\ 0}{l,\ \lambda-1}}(z,\ w).$$

С помощью функций $V^{\pm\pm}(z,\ w)$ найдем функции $A^{\pm\pm}(z,\ w)$, а затем из условия (17) — функции $\Phi^{\pm\pm}(z,\ w)$ и $A^{+-}(z,\ w)$. Далее, в силу (10)

$$\Phi^{+-}(z,\ w) = V^{+-}(z,\ w) + w^{-\lambda}z^{-l}[A^{+-}(z,\ w) - G^{+-}(z,\ w)]$$

принадлежит классу H_0^{+-}, а функция

$$\Phi^{-+}(z,\ w) = z^{-l}w^{-\lambda}[V^{-+}(z,\ w) + G^{-+}(z,\ w)] \in H_0^{-+}$$

тогда и только тогда, когда

$$V^{-+}(z,\ w) + G^{-+}_{\binom{-1,\ 0}{l,\ \lambda-1}}(z,\ w) \equiv 0$$

и

$$G^{-+}_{\binom{l-1,\ 0}{-\infty,\ -\infty}}(z,\ w) \equiv 0,\ G^{-+}_{\binom{-1,\ \lambda}{l,\ +\infty}}(z,\ w) \equiv 0.$$

§ 5. Выводы

10°. Если ситуация 3 из пункта 7° реализуема, то однородная задача, соответствующая задаче (3) при $l \geqslant 0$ и $\lambda < 0$, может быть неразрешимой, в то время как «гомотопная» ей задача с $F^{+-}(t, \omega) \equiv 1$ имеет счетное множество линейно независимых решений. Аналогичная ситуация возможна и при $l \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$ $(l < 0,\ \lambda < 0)$.

Если реализуема ситуация 1 из пункта 7°, то при $l \geqslant 0$ и $\lambda < 0$ задача (3) имеет решение, зависящее только от конечного числа произвольных постоянных. В этом случае условия разрешимости (22) и (23) носят фиктивный характер, так как они удовлетворяются не за счет известных функций $F^{+-}(t, \omega)$ и $g(t, \omega)$, а за счет специального подбора произвольных функций, входящих в общее решение элементарной краевой задачи (15). Напомним, что задача (3) с $F^{+-}(t, \omega) \equiv 1$ разрешима при $l \geqslant 0$ и $\lambda < 0$ лишь в том случае, когда функция $g(t, \omega)$ удовлетворяет счетному множеству условий разрешимости. Аналогичная ситуация возможна и при $l \geqslant 0$, $\lambda < 0$ $(l < 0,\ \lambda < 0)$.

Таким образом, в отличие от одномерного случая (см. [4]) d-характеристики задач линейного сопряжения при $n \geqslant 2$, вообще говоря, не являются инвариантными при гомотопировании их коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Какичев В. А. Методы решения краевых задач линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 14, Харьков, 1971, с. 8 — 15.
2. Какичев В. А. Краевые задачи линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 5, Харьков, 1964, с. 37—58.
3. Зверович Э. И. Литвинчук Г. С. Односторонние краевые задачи теории аналитических функций. — «Изв. АН СССР», сер. матем., 1964, № 28, с. 1003 — 1036.
4. Боярский Б. В. Анализ разрешимости граничных задач теории функций.— Сб. «Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного». М., Физматгиз, 1961, с. 57—79.