УДК 519. 4 + 517 + 513. 4

Л. Л. Ваксман, Д. Л. Гурарий

БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ ЛИ С КОМПАКТНЫМ ПРИСОЕДИНЕННЫМ ДЕЙСТВИЕМ

Введение

Под банаховой алгеброй Ли мы понимаем комплексное банахово пространство А с операцией коммутирования, удовлетворяющей обычным аксиомам алгебры Ли и непрерывной по совокупности переменных

$$\|[a, b]\| \leqslant C \cdot \|a\| \cdot \|b\|, \ (a, b \in A). \tag{1}$$

Непрерывное отображение алгебры A в алгебру ее ограниченных дифференцирований, определенное этой операцией

$$a \to \mathrm{ad}_a(x) = [x, a], \ (x \in A), \tag{2}$$

называют присоединенным представлением алгебры. Нетрудно проверить, что условие (1) эквивалентно ограниченности операторов ad_a $(a \in A)$.

Будем говорить, что банахова алгебра Ли обладает компактным присоединенным действием, является K-алгеброй, если все операторы ad_a $(a \in A)$-компактны. Подобно компактным операторам, K-алгебры среди прочих банаховых алгебр наиболее «близки» к конечномерным, поэтому естественно ожидать, что многие определения и результаты конечномерной теории [1—3] могут быть распространены в соответствующей форме на класс K-алгебр, что и делается в настоящей работе. Отметим, что некоторые наши результаты (§ 4) опираются на недавнюю работу В. И. Ломоносова [5] об инвариантных подпространствах.

Результаты первых трех параграфов были анонсированы в заметке [7] Д. Л. Гурария, результаты § 4 и частично § 2 принадлежат Л. Л. Ваксману. Авторы приносят глубокую благодарность Ю. И. Любичу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§ 1. Полупростые K-алгебры

Введем ряд определений.

1. Банахова алгебра Ли A называется вольтерровой, если все операторы ad_a $(a \in A)$ вольтерровы[1].

---

[1] Напомним, что компактный оператор в банаховом пространстве называют вольтерровым, если его спектр состоит из одной точки $\lambda = 0$.

2. Банахова алгебра Ли называется простой, если она не вольтеррова[1] и не содержит замкнутых нетривиальных идеалов.

3. Банахова алгебра Ли называется полупростой, если она не вольтеррова и не содержит замкнутых вольтерровых идеалов, отличных от нуля.

Легко видеть, что эти определения обобщают соответствующие конечномерные (см., например, [1, 2]).

Элемент a алгебры Ли A будем называть элементом конечного ранга, если оператор ad_a конечномерен. Легко видеть, что элементы конечного ранга образуют идеал алгебры A; обозначим его через A_0.

4. Банахова алгебра Ли A называется конечнопорожденной, если идеал A_0 плотен в A.

Очевидно, каждая конечнопорожденная алгебра имеет компактное присоединенное действие, но обратное, вообще говоря, не верно.

Прежде чем перейти к доказательству теорем, приведем «типичный» пример полупростой K-алгебры.

Пример 1. Пусть $\sigma = \{A_j\}_j$ — семейство простых конечномерных алгебр Ли. Их прямое произведение $L(\sigma) = \Pi_{j \in \sigma} A_j$ наделяется естественным образом структурой алгебры Ли. Элементы конечного ранга (финитные последовательности) образуют идеал алгебры $L(\sigma)$, который мы обозначим через $L_0(\sigma)$.

Пусть $A(\sigma)$ — подалгебра в $L(\sigma)$, содержащая $L_0(\sigma)$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в пространстве $A(\sigma)$, относительно которой $A(\sigma)$ — банахова алгебра Ли[2], т. е. пространства $A(\sigma)$ полно и выполняется неравенство (1).

Для подмножества $\Omega \subset \sigma$ обозначим через $A(\Omega)$ идеал алгебры $A(\sigma)$, состоящий из последовательностей, равных нулю вне Ω, а через $A_0(\Omega)$ — множество финитных элементов идеала $A(\Omega)$. Пусть $I \subset A(\sigma)$ — произвольный замкнутый идеал. Тогда для любого $j \in \sigma$ либо $[I, A_j] = A_j$, либо $[I, A_j] = 0$. Если через Ω обозначить множество тех $j \in \sigma$, для которых $[I, A_j] \neq 0$ («носитель» идеала I), то $\Omega \neq \varnothing$ и $A_0(\Omega) \subset I \subset A(\Omega)$. В частности, I не может быть вольтерровым идеалом. Следовательно, алгебра $A(\sigma)$ полупроста.

Заметим, что идеал элементов конечного ранга $A_0(\sigma) = L_0(\sigma)$ может быть не плотным в алгебре $A(\sigma)$.

Теорема 1.1. *Каждая не вольтеррова K-алгебра имеет вольтерров или конечномерный идеал.*

---

[1] Требование невольтерровости связано с тем, что нам не известно, имеет ли каждая вольтеррова алгебра нетривиальный замкнутый идеал. Из результатов [6] следует, что это справедливо в некоторых частных случаях.

[2] Заметим, что не для всякой нормы в пространстве $L_0(\sigma)$, удовлетворяющей неравенству (1), пополнение $\overline{L_0(\sigma)}$ реализуется, как подалгебра в $L(\sigma)$. Соответствующий пример построен в § 3.

Доказательству теоремы предпошлем одну вспомогательную лемму. Пусть S и T — ограниченные операторы в банаховом пространстве B, удовлетворяющие соотношению

$$[S, T] = S \cdot T - T \cdot S = \lambda \cdot T. \tag{3}$$

Для контура Γ в комплексной плоскости, не пересекающего спектр оператора S, обозначим через P_Γ Риссовский проектор, $P_\Gamma = 1/2\pi i \int_\Gamma R_\zeta(S)\, d\zeta$, и через $E(\Gamma)$ — соответствующее спектральное подпространство.

Лемма 1.1. *Если контуры* Γ и $\Gamma + \lambda = \{\zeta' = \zeta + \lambda \mid \zeta \in \Gamma\}$ *не пересекают спектр оператора* S, *то* $T \cdot P_\Gamma = P_{\Gamma+\lambda} T$. *В частности спектральное подпространство* $E(\Gamma)$ *переводится оператором* T *в* $E(\Gamma + \lambda)$.

Доказательство. Воспользуемся известным соотношением

$$TS^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S^k \cdot \mathrm{ad}_S^{n-k}(T) = (S + \lambda)^n\, T, \tag{4}$$

и подставим его в формулу для резольвенты $R_\zeta(S) = \sum_{n=0}^{\infty} S^n/\zeta^{n+1}$, справедливую при $|\zeta| \geqslant \|S\|$. Получим

$$T \cdot R_\zeta(S) = R_{\zeta-\lambda}(S) \cdot T. \tag{5}$$

В силу аналитичности функций в равенстве (5) оно справедливо при всех $\zeta \notin \sigma(T) \cup \{\sigma(T) + \lambda\}$. Отсюда, интегрируя обе части соотношения (5) по контуру Γ, приходим к нужному равенству.

Перейдем к доказательству теоремы.

1. Каждая не вольтеррова алгебра Ли имеет элемент конечного ранга. Действительно в такой алгебре всегда существует элемент a с ненулевым спектром, $\sigma(\mathrm{ad}_a) \ni \lambda \neq 0$. Пусть b — соответствующий собственный вектор, $\mathrm{ad}_a(b) = \lambda \cdot b$. Покажем, что b — элемент конечного ранга.

Для $\mu \in \sigma(\mathrm{ad}_a)$ $(\mu \neq 0)$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через E_μ и E_ε спектральные подпространства, отвечающие точке μ и контуру $\Gamma_\varepsilon = \{\zeta : |\zeta| = \varepsilon\}$ соответственно. Как известно, имеет место разложение

$$A = E_\varepsilon \dotplus \sum_{|\mu| > \varepsilon} E_\mu, \tag{6}$$

при этом все E_μ $(\mu \neq 0)$ конечномерны, а сумма $\sum\limits_{|\mu| > \varepsilon}$ — конечна.

Применив к операторам ad_a и ad_b лемму 1.1, получим, что ad_b переводит подпространство E_μ в $E_{\mu+\lambda}$, а E_ε в подпространство, отвечающее контуру $\Gamma_\varepsilon + \lambda$. Если ε таково, что контур $\Gamma_\varepsilon + \lambda$ не охватывает никаких других точек спектра, кроме λ, то подпространство конечной коразмерности E_ε переводится оператором ad_b в конечномерное подпространство $E\lambda$, т. е. $\mathrm{rk}(\mathrm{ad}_b) < \infty$.

2. Рассмотрим ненулевой идеал A_0 элементов конечного ранга алгебры A. Либо все элементы из A_0 нильпотентны, и замыкание $\overline{A}_0$ — волтерров идеал алгебры A, либо существует элемент $h \in A_0$ с ненулевым спектром. Оператор ad_h разлагает пространство A в конечную прямую сумму корневых подпространств

$$A = E_0 \dotplus \sum_{\mu \neq 0} E_\mu. \tag{7}$$

Как и в конечномерном случае [1, гл. 8], легко проверяется включение

$$[E_\mu,\ E_\lambda] \subset E_{\mu+\lambda}. \tag{8}$$

Обозначим через J конечномерное подпространство вида

$$J = \sum_{\mu \neq 0} E_\mu \dotplus \sum_{\mu \neq 0} [E_\mu,\ E_{-\mu}] \tag{9}$$

и проверим, что J — идеал.

Действительно, для $a \in E_\lambda$ $(\lambda \neq 0)$

$$\mathrm{ad}_a (J) \subset \sum_{\mu \neq -\lambda} E_{\mu+\lambda} \dotplus \mathrm{ad}_a (E_{-\lambda}) \subset J, \tag{10}$$

для $a \in E_0$

$$\mathrm{ad}_a (J) \subset \sum_{\mu \neq 0} \mathrm{ad}_a (E_\mu) + \sum_{\mu \neq 0} \{[\mathrm{ad}_a (E_\mu),\ E_{-\mu}] + [E_\mu,\ \mathrm{ad}_a (E_{-\mu})]\} \subset J. \tag{11}$$

Этим завершается доказательство.

Непосредственным следствием доказанной теоремы является

Теорема 1.2. *Каждая простая K-алгебра конечномерна.*

Введем следующее определение. С п е к т р о м K-алгебры будем называть множество всех ее простых идеалов.

Теорема 1.3. *Каждая полупростая K-алгебра A имеет вид, описанный в примере 1, т. е. $A = A(\sigma)$, где σ — ее спектр.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1.1. следует, что каждая полупростая K-алгебра имеет конечномерный идеал J. Пусть $R(J)$ — его радикал. Как известно (см. [1, гл. 6]), радикал конечномерной алгебры Ли характеристичен, т. е. инвариантен относительно всех дифференцирований. Следовательно, $R(J)$ является также идеалом алгебры A, и, в силу полупростоты A, радикал $R(J) = 0$.

Итак, каждый конечномерный идеал J полупростой алгебры полупрост. Тогда алгебра J, в свою очередь, распадается в прямую сумму простых идеалов. Все они характеристичны и, следовательно, являются идеалами алгебры A. Далее, каждый простой идеал A_j алгебры A разлагает ее в прямую сумму идеалов $A = A_j \dotplus N_j$. Действительно, так как всякое дифференцирование простой алгебры Ли является внутренним [1, гл. 5], то определен проектор $P_j : x \mapsto x_j$ $(x \in A;\ x_j \in A_j)$, где $\mathrm{ad}_x | A_j = \mathrm{ad}\, x_j | A_j$.

Тогда $x = x_j + (x - x_j)$ искомое разложение. Кроме того, если A_1 и A_2 простые идеалы алгебры A, то $[A_1, A_2] = 0$.

Пусть $\sigma = \{A_j\}_j$ — спектр алгебры A, набор всех ее простых идеалов. Покажем, что пересечение их ядер $N = \cap_{j\in\sigma} N_j$ равно $\{0\}$. Это и будет означать, что отображение $a \mapsto \{a_j\}_{j\in\sigma}$ $(a_j = P_j(a))$ является точным представлением алгебры A в прямое произведение $L(\sigma)$, образ которого содержит $L_0(\sigma)$.

Предположим, что $N \neq \{0\}$. Тогда, повторяя рассуждения теоремы 1.1, можно найти в невольтерровом идеале N конечномерный идеал J алгебры A. Как было отмечено, каждый такой идеал полупрост, и, вопреки предположению, набор σ допускает расширение. Теорема доказана.

Доказанная теорема дает следующий критерий полупростоты алгебры: K-алгебра полупроста тогда и только тогда, когда она допускает точное представление в $L(\sigma)$, образ которого содержит $L_0(\sigma)$.

Следствие. *Каждый замкнутый идеал полупростой алгебры полупрост.*

§ 2. Разрешимые K-алгебры Ли. Радикал

Начнем с того, что введем два определения разрешимости. Затем для каждого из них в отдельности проверим основные функториальные свойства разрешимых алгебр (идеалов), позволяющие вместе с леммой 2.2. выделить наибольший разрешимый идеал K-алгебры — ее радикал. После этого мы докажем эквивалентность двух определений разрешимости.

Определения. *K-алгебра называется*

1) *α-разрешимой, если у нее нет простых фактор-алгебр.*

2) *β-разрешимой, если у нее нет простых подалгебр. Условие β-разрешимости можно сформулировать также как отсутствие в алгебре подалгебр, изоморфных $sl(2)$.*

Легко видеть, что все конечномерные разрешимые, а также вольтерровы алгебры принадлежат пересечению обоих классов. Как следует из результатов § 1, полупростая алгебра разрешима тогда и только тогда, когда она равна $\{0\}$.

Установим основные свойства α-разрешимых алгебр.

1. *Фактор-алгебра α-разрешимой алгебры разрешима*[1].

2. *Расширение разрешимой алгебры с помощью разрешимого идеала является разрешимой алгеброй.*

Пусть $\tilde{L} = L/J$, где J и $\tilde{L}$ — разрешимы. Если для идеала I алгебры L фактор-алгебра L/I простая, то ее разрешимый идеал J/I равен $\{0\}$, т. е. $I \supseteq J$. Тогда фактор-алгебра $(L/J)/(I/J) \cong L/I$

---

[1] Для удобства мы будем опускать приставку там, где это не вызывает недоразумений.

простая, что в силу свойства 1 противоречит разрешимости алгебры $\tilde{L}$.

3. *Если J_1 и J_2 разрешимые идеалы алгебры, то их сумма $J = J_1 + J_2$ также разрешимый идеал.*

Достаточно заметить, что в силу свойства 1 фактор-алгебра $J/J_1 \cong J_2/(J_1 \cap J_2)$ разрешима, и воспользоваться свойством 2.

4. *Если $J_1 \subset J_2 \subset \ldots \subset J_\nu \subset \ldots$ — возрастающая цепочка разрешимых подалгебр (идеалов) алгебры A, то замыкание их объединения $J = \overline{\{\bigcup_\nu J_\nu\}}$ также разрешимая подалгебра (идеал).*

Пусть для идеала I алгебры J фактор-алгебра $\tilde{J} = J/I$ — простая. Рассмотрим возрастающую цепочку разрешимых подалгебр $\tilde{J}_\nu = J_\nu/I$. В силу конечномерности $\tilde{J}$ она обрывается на конечном месте, т. е. все $\tilde{J}_\nu$ принадлежат разрешимой подалгебре L, не совпадающей с $\tilde{J}$. С другой стороны, $\bigcup_\nu \tilde{J}_\nu$ — плотно в $\tilde{J}$, что приводит нас к противоречию.

Заметим, что при проверке свойств 1—4 мы нигде не пользовались компактностью присоединенного действия.

Теперь установим аналогичные свойства для β-разрешимых алгебр.

1. *Фактор-алгебра разрешимой алгебры разрешима.*

Пусть фактор-алгебра $\tilde{A} = A/J$ содержит $sl(2)$. Обозначим через φ естественный гомоморфизм алгебры A на $\tilde{A}$. Если $\tilde{h}$ — элемент Картана в $sl(2) \subset \tilde{A}$, и $h \in \varphi^{-1}(\tilde{h})$, то оператор ad_h в алгебре A невольтерров, так как его спектр содержит точки 1 и —1 (при факторизации компактного оператора спектр не может увеличится). Рассмотрим конечномерную подалгебру

$$A_1 = \{h\} \dotplus \sum_{\kappa=1}^{m} E_\kappa \dotplus \sum_{\kappa=1}^{m} E_\kappa \dotplus \sum_{\kappa=1}^{m} [E_\kappa, E_{-\kappa}], \tag{12}$$

где E_k и E_{-k} корневые подпространства, отвечающие точкам спектра $\lambda = \sqrt{k}$ и $\lambda = \sqrt{-k}$ оператора ad_h. Подалгебра $A_1 \not\subset J$, более того, фактор-алгебра $A_1/J \supset \mathrm{sl}(2)$. Последнее означает, что алгебра A_1 не разрешима. Тогда по теореме Леви—Мальцева [2, гл. 3, § 9] она имеет полупростой фактор H, который в свою очередь содержит подалгебру, изоморфную $sl(2)$, вопреки предположению о разрешимости алгебры A.

2. *Расширение разрешимой алгебры с помощью разрешимого идеала является разрешимой алгеброй.*

3. *Если J_1 и J_2 разрешимые идеалы, то их сумма $J = J_1 + J_2$ также разрешимый идеал.*

Устанавливается, как и для α-разрешимости, комбинацией свойств 1 и 2.

4. *Если $\{J_\nu\}_\nu$ возрастающая цепочка разрешимых идеалов алгебры, то замыкание их объединения $J = \overline{\{\bigcup_\nu J_\nu\}}$ — также разрешимый идеал.*

Пусть $J \supset sl(2)$. Рассмотрим представление алгебры $sl(2)$ в фактор-пространстве J/J_ν, $a \to \mathrm{ad}_a(J/J_\nu)$. Для каждого ν это представление не нулевое, так как $J_\nu \supset sl(2)$. Обозначим через $\{x, y, h\}$ базис Вейля алгебры $sl(2)$:

$$[h, x] = x; \ [h, y] = -y; \ [x, y] = 2h. \tag{13}$$

Если $a \to T_a$ $(a \in sl(2))$ — произвольное банахово представление, то $\|T_h\| \geqslant 1/2$. Действительно, в силу (13) $T_x \cdot T_h - T_h \cdot T_x = T_x$, откуда $\|T_x\| \leqslant 2\|T_x\| \cdot \|T_h\|$. В частности, $\|\mathrm{ad}_h(J/J_\nu)\| \geqslant 1/2$. С другой стороны, оператор ad_h аппроксимируется по норме операторами $\{\mathrm{ad}_b(b \in J_\nu)\}_\nu$, и для каждого элемента $b \in \bigcup_\nu J_\nu$, $\|\mathrm{ad}_b(J/J_\nu)\| \underset{\nu}{\to} 0$. Приходим к противоречию.

Отметим, что для β-разрешимых алгебр имеет место также свойство

5. *Каждая подалгебра β-разрешимой алгебры разрешима.*

Лемма 2. 1. *Каждая не полупростая K-алгебра содержит вольтерров идеал (в частности, сама может быть вольтерровой) или конечномерный разрешимый идеал.*

Доказательство. Пусть $\sigma = \{A_j\}$ множество (может быть пустое) всех простых идеалов алгебры A. Обозначим через N пересечение их ядер $N = \{x \in A : \mathrm{ad}_x | A_j = 0 \ (j \in \sigma)\}$, и, $N = A$, если $\sigma = \varnothing$. Методом теоремы 1.3 можно показать, что идеал N либо вольтерров, либо содержит конечномерный идеал J алгебры A. В силу максимальности семейства σ идеал J не может быть полупростым. Тогда его радикал $R(J)$ характеристичен и, следовательно, является искомым идеалом алгебры A.

Теорема 2.1. *Для каждого из двух определений разрешимости K-алгебра A имеет наибольший разрешимый в соответствующем смысле идеал, фактор-алгебра по которому полупроста.*

Этот идеал называют радикалом алгебры.

Доказательство. Множество разрешимых идеалов не полупростой алгебры не пусто, как доказано в лемме 2.1, и частично упорядочено по включению. В силу свойства 4 каждая линейно упорядоченная цепочка имеет максимальный элемент. Тогда по лемме Цорна существует максимальный элемент всего множества. Обозначим его через R. В силу свойства 3 этот элемент является наибольшим, а в силу свойства 2 фактор-алгебра A/R полупроста.

Следствие 1. *K-алгебра разрешима тогда и только тогда, когда она совпадает со своим радикалом.*

Следствие 2. *K-алгебра полупроста тогда и только тогда, когда ее радикал равен $\{0\}$.*

Теорема 2.2 *Два определения разрешимости K-алгебры эквивалентны.*

Доказательство. Пусть K-алгебра разрешима в смысле одного из определений, а R — ее радикал в смысле другого определения. Тогда фактор-алгебра A/R полупроста. С другой стороны, в силу свойства 1 она разрешима. Следовательно, $A/R = \{0\}$, т. е. $A = R$.

В заключение отметим еще одно естественное свойство радикала: *радикал K-алгебры характеристичен*.

Действительно, легко видеть, что радикал инвариантен относительно непрерывных автоморфизмов алгебры. С другой стороны, каждое ограниченное дифференцирование d определяет автоморфизм ψ по формуле: $\psi = e^d$.

§ 3. Представления полупростых K-алгебр и обобщение теоремы Леви-Мальцева

Мы будем рассматривать представления алгебры Ли компактными операторами в банаховом пространстве B (компактные представления). Обозначим через A_0 прямую сумму простых конечномерных алгебр Ли $\{A_j\}_{j\in\sigma}$ ($L_0(\sigma)$ в примере 1). Каждую полупростую K-алгебру A будем предполагать в дальнейшем конечнопорожденной, т. е. совпадающей с замыканием идеала A_0. Следующая теорема является аналогом Вейлевского принципа полной приводимости.

Теорема 3.1 *Если T — компактное непрерывное представление полупростой K-алгебры, то T содержит конечномерное подпредставление (в частности, все неприводимые представления конечномерны). Каждое конечномерное невырожденное*[1] *подпредставление дополняемо. Если $\dim A < \infty$, то каждое компактное представление разлагается в прямую сумму конечномерного и нулевого.*

Легко видеть, что непрерывное представление полупростой K-алгебры однозначно определяется своим ограничением на идеал A_0. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением последнего. Для каждой простой алгебры A_j ($j \in \sigma$) обозначим через H_j ее компактную форму, через G_j — компактную группу Ли алгебры H_j. Пусть $H_0 = \sum\limits_{j\in\sigma} H_j$; $G_0 = \sum\limits_{j\in\sigma} G_j$.

С помощью унитарного трюка Вейля [3, гл. VII] от представления конечномерной алгебры $\widetilde{H} = \sum\limits_{k=1}^{n} H_{j_k}$ мы можем перейти к равномерно непрерывному представлению группы $\widetilde{G} = \sum\limits_{k=1}^{n} G_{j_k}$, и наоборот. При этом, если инфинитезимальные операторы T_h ($h \in \widetilde{H}$) компактны, то представление $\widetilde{g} \mapsto T_{\widetilde{g}} = e^{T_h}$ ($\widetilde{g} = \exp h$) группы

[1] Такое, что подпространство $E = \{\xi \in B \mid T_a\xi = 0 \ (a \in A)\} = 0$.

$\tilde{G}$ имеет вид $T_{\tilde{g}} = I + S_{\tilde{g}}$, где $S_{\tilde{g}}$ — «компактнозначная», непрерывная в равномерной топологии функция на $\tilde{G}$. Тогда для любой функции f из групповой алгебры $L^1(\tilde{G})$ операторы $T_f \overset{\text{def}}{=} \int_{\tilde{G}} f(\tilde{g}) T_{\tilde{g}} d\tilde{g}$ также имеют вид $T_f = \lambda \cdot I + S_f$, где $\lambda = \int_{\tilde{G}} f(\tilde{g}) d\tilde{g}$, а оператор S_f компактен. Возьмем в качестве f характер χ неприводимого представления π группы $\tilde{G}$, и обозначим через $P(\pi)$ проектор T_χ, через $E(\pi)$ подпространство $P(\pi) B$.

Из теории представлений компактных групп известно, что семейство проекторов $\{P(\pi)\}_\pi$ образует разбиение единицы, коммутирующее с представлением $T_{\tilde{g}}$ $(\tilde{g} \in \tilde{G})$, а ограничение $T \mid E(\pi)$ кратно неприводимому представлению π. В нашем случае $P(\pi) = I + S_\chi$ — проектор конечной коразмерности, если π тривиально $(\pi = 1)$, и $P(\pi) = S_\chi$ — конечномерный проектор для $\pi \neq 1$. Если представление $T_{\tilde{g}}$ $(\tilde{g} \in \tilde{G})$ нетривиально, то найдется $\pi \neq 1$, для которого проектор $P(\pi) \neq 0$. Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Используя равномерную непрерывность представления $T_{\tilde{g}}$ $(\tilde{g} \in \tilde{G})$ можно показать, что его спектр $\sigma(T_{\tilde{g}}) = \{\pi : P(\pi) \neq 0\}$ конечен. В частности, $B = E(1) \dot{+} \sum_{\pi \neq 1} E(\pi)$. Если $E \subset B$ — конечномерное инвариантное подпространство, то, как нетрудно видеть, для почти всех $j \in \sigma$ ограничение $T_{g_j} \mid E$ $(g_i \in G_j)$ тривиально, т. е. $T_g \mid E$ $(g \in G_0)$ является фактически представлением конечномерной группы $\tilde{G}$. Тогда $E \subset \sum_{i=1}^{n} E(\pi_i) = F$, и так как все $\pi_i \neq 1$ в силу невырожденности представления, то $\dim F < \infty$. Подпространство F инвариантно дополняемо в B, а E в F.
Наконец, если $\dim A < \infty$, то сама группа G_0 компактна, и $B = E(1) \dot{+} \sum_{\pi \neq 1} E(\pi)$ — искомое разложение. Теорема доказана.

Применим полученные результаты для обобщения теоремы Леви-Мальцева.

Алгебру Ли A будем называть *алгеброй типа* L_0, если она является прямой суммой простых конечномерных подалгебр, т. е. совпадает с алгеброй $L_0(\sigma)$ примера 1.

Слабым фактором Леви в K алгебре A будем называть подалгебру $H \subset A$ (вообще говоря, не замкнутую), для которой
а) $H \cap R = 0$ (R — радикал алгебры A),
б) $H + R$ плотно в A.

Теорема 3.2. *Если фактор-алгебра $\hat{A} = A/R$ конечно порождена, то в алгебре A есть слабый фактор Лгви. Любая подалгебра $E \subset A$ типа L_0 включается в некоторый слабый фактор.*

Доказательство. Рассмотрим идеал A_0 элементов конечного ранга алгебры A. В любой не разрешимой K-алгебре идеал $A_0 \neq 0$. Действительно, в силу определения β-разрешимости каждая такая алгебра содержит подалгебру $sl(2)$, а из теоремы 3.1 следует, что присоединенное представление $a \mapsto \mathrm{ad}_a\ (a \in sl(2))$ конечномерно, т. е. $sl(2) \subset A_0$.

Более того, образ идеала A_0 при естественном гомоморфизме $\varphi: A \to \hat{A}$ содержит все простые идеалы фактор-алгебры, т. е. $\varphi(A_0) = \hat{A}_0$. Чтобы проверить это, рассмотрим простой идеал $\hat{A}_j \subset \subset \hat{A}$ и его прообраз $A_j = \varphi^{-1}(\hat{A}_j)$. Алгебра A_j — не разрешима (ее радикал совпадает с R) и, следовательно, в A_j есть элементы конечного ранга, т. е. $A_j \cap A_0 \neq \{0\}$. Как было показано, это пересечение не лежит в радикале R алгебры A_j. Таким образом, $\varphi(A_j \cap A_0)$ — не нулевой идеал в простой алгебре $\hat{A}_j$ и, следовательно, совпадает с ней.

Далее, для конечного подмножества Ω спектра σ алгебры $\hat{A}$ обозначим через $\hat{A}(\Omega) = \sum_{j \in \Omega} \hat{A}_j$ и через $A(\Omega)$ прообраз алгебры $\hat{A}(\Omega)$ в A, $A(\Omega) = \varphi^{-1}(\hat{A}(\Omega))$. Очевидно, радикал алгебры $A(\Omega)$ совпадает с R, а любая полупростая подалгебра конечномерна. В частности, для полупростой конечно порожденной подалгебры E ее пересечение с $A(\Omega)$, $E(\Omega) = E \cap A(\Omega)$ — конечномерно. Пусть $\{l_1, l_2, \ldots l_n\}$ — базис пространства $E(\Omega)$. Дополним его элементами $\{l_{n+1}, \ldots l_m\}$ из идеала A_0 так, чтобы система $\{\varphi(l_1), \varphi(l_2, \ldots \varphi(l_m)\}$ стала базисом в пространстве $\hat{A}(\Omega)$. Элементы $\{l_1, \ldots l_m\}$ порождают конечномерную подалгебру L в $A(\Omega)$, причем фактор-алгебра $L/(L \cap R)$ изоморфна $\hat{A}(\Omega)$. Таким образом, радикал алгебры L совпадает с $L \cap R$, и по теореме Леви-Мальцева (см., например, [2, гл. 3]) алгебра L имеет полупростой фактор Леви $H(\Omega) \cong \hat{A}(\Omega)$, содержащий подалгебру $E(\Omega)$. Объединение возрастающего семейства полупростых конечномерных подалгебр $\{H(\Omega)\}_{\Omega \subset \sigma}$ является алгеброй типа L_0, обладающей следующими свойствами.

1. Алгебра $H \supset \bigcup_{\Omega} E(\Omega) = E$.

2. Образ алгебры H при гомоморфизме φ содержит $\hat{A}_0$ и в силу конечной порожденности фактор-алгебры $\varphi(H)$ плотно в $\hat{A}$. Тогда сумма $R + H = \varphi^{-1}(\varphi(H))$ плотна в A.

Этим завершается доказательство теоремы.

Вопрос о существовании замкнутой подалгебры $H \subset A$, удовлетворяющей условиям *а* и *б*, естественно, связан с вопросом о том, является ли полупростым пополнение алгебры типа L_0 по норме, удовлетворяющей неравенству (1). Следующий пример, основанный на аналогичном ассоциативном примере Ч. Фельдмана [9], дает отрицательный ответ на оба предположения.

Пример 2. Пусть A_0 — алгебра финитных последовательностей с коэффициентами из $sl(2)$, $\{x; y; h\}$ — базис Вейля алгебры $sl(2)$. Определим норму в пространстве A_0 равенством

$$\|\{a_j\}\| = (\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\|^2)^{1/2} + |\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j|, \tag{14}$$

где $a_j = \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j h$, а $\|a_j\|^2 = |\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2 + |\gamma_j|^2$.

Аналогично ассоциативному случаю [9] можно проверить, что пополнение A алгебры A_0 по указанной норме является K-алгеброй с одномерным радикалом R, лежащим в центре A, а любой слабый фактор Леви $H \subset A$ содержит A_0. Следовательно, его замыкание $\overline{H} = A$.

§ 4. Локально конечные К-алгебры

Напомним, что алгебра Ли называется локально конечной, если любой конечный набор ее элементов порождает конечномерную подалгебру (см., например, [8]). Банахову алгебру Ли A мы будем называть локально конечной, если у нее существует плотный локально конечный идеал[1] A^0. Для таких алгебр при условии компактности присоединенного действия удается получить дополнительную информацию о свойствах их представлений и радикалов. Заметим, что свойство локальной конечности сохраняется при факторизации алгебры.

Начнем с изучения представлений локально конечных алгебр.

Лемма 4.1. Если алгебра A конечномерна, то любое ее неприводимое компактное представление также конечномерно.

Доказательство. В случае, когда A разрешимая алгебра, из обобщения теоремы Ли [6] следует, что каждое ее неприводимое представление одномерно. Если алгебра не разрешима, то у нее существует полупростой фактор Леви. В силу теоремы 3.1 он представлен операторами конечного ранга. Обозначим через J идеал алгебры A элементов, представленных конечномерными операторами, $J = \{x \in A \mid \mathrm{rk}\, T_x < \infty\}$. При ограничении представления T на идеал J его аннулятор $N = \{\xi \in B \mid T_x \xi = 0\, (x \in J)\}$ является подпространством конечной коразмерности, инвариантным относительно всего представления, т. е. $N = \{0\}$, и $\dim B < \infty$.

[1] Отметим, что каждая конечнопорожденная алгебра является локальнс конечной. Как легко видеть, $A_0 \subset A^0$.

Следствие. *Если $a \mapsto T_a$ компактное представление конечномерной алгебры Ли A, то для всех элементов p из универсальной обвертывающей алгебры $U(A)$ и для всех x из идеала $[A, R[$ операторы $T_p T_x$ вольтерровы.*

Действительно, если $\{E_\lambda\}_\lambda$ максимальная цепочка инвариантных подпространств представления T, то для любого ее разрыва $(E_\lambda^+; E_\lambda^-)$ фактор-пространство $F_\lambda = E_\lambda^+/E_\lambda^-$ конечномерно, и, как известно (см. [1, гл. 6]), оператор $T_x | F_\lambda = 0$. Осталось воспользоваться следующим критерием: компактный оператор S является вольтерровым тогда и только тогда, когда для всех разрывов $F_\lambda = E_\lambda^+/E_\lambda^-$ некоторой цепочки инвариантных относительно S подпространств $S | F_\lambda = 0$

Теорема 4.1. *Каждое неприводимое компактное представление T локально конечной K-алгебры конечномерно.*

Доказательство. Предположим, что T бесконечномерно. Рассмотрим идеалы $J_0 = [A^0 [A^0, R]]$ и $J = [A [A, R]] = \bar{J}_0$. Для элемента $x \in J_0$, $x = \sum_{i=1}^{n} [a_i, r_i]$, где $a_i \in A^0$, $r_i \in [A^0, R]$, и любого конечного набора $\{b_1; b_2; \ldots b_m\} \subset A^0$ обозначим через L конечномерную алгебру, порожденную элементами $\{a_1, \ldots a_n, r_1, \ldots r_n, b_1, \ldots b_m\}$, и через $R(L)$ ее радикал. Очевидно, элемент $x \in [L, R(L)]$ и, следовательно, для любого полинома $p = p(b_1, \ldots b_m)$ оператор $T_p T_x$ вольтерров.

Рассмотрим алгебру M, порожденную операторами вида $S = T_p T_x$, где $p = p(b_1, \ldots b_m)$ пробегает все полиномы от набора $\{b_1, \ldots b_m\}$, а $\{b_1, \ldots b_m\}$ — всевозможные наборы элементов из A^0. Алгебра M состоит из вольтерровых операторов и, как следует из теоремы В. И. Ломоносова [5], является приводимой. Пусть E — собственное инвариантное подпространство алгебры M. Тогда в силу неприводимости представления T $T_x | E = 0$. Обозначим через B_0 замыкание линейной оболочки всех собственных инвариантных подпространств алгебры M. Очевидно, $T_x | B_0 = 0$ и, вследствие приводимости ассоциативной алгебры вольтерровых операторов [5], либо $B_0 = B$, т. е. $T_x = 0$, либо $\dim (B/B_0) = 1$. В последнем случае пространство $B = B_0 + \{\lambda\xi\}$, и вольтерров оператор T_x переводит B в подпространстве B_0, т. е. $T_x \xi = \eta \in B_0$.

Если $\eta \neq 0$, то в силу неприводимости представления найдется такой полином p, что вектор $T_p \eta \notin B_0$. Последнее означает, что спектр вольтеррова оператора $T_p T_x$ в одномерном фактор-пространстве B/B_0 не равен 0. Приходим к противоречию.

Итак, $T_x = 0$ для $\forall x \in J_0$, следовательно, T аннулирует идеал J и является неприводимым представлением фактор-алгебры $\tilde{A} = A/J$. Очевидно, идеал $\tilde{I} = [\tilde{A}, \tilde{R}]$ лежит в центре алгебры $\tilde{A}$, и по обобщенной лемме Шура [6] идеал $\tilde{I}$ представлен скалярными операторами. Но компактный оператор в бесконечномерном пространстве скалярен тогда и только тогда, когда он равен 0. Таким образом, T является представлением фактор-алгебры $\tilde{A}/[\tilde{A}, \tilde{R}]$, радикал которой лежит в ее центре, и, следовательно, как и выше, аннулируется представлением T. Мы показали, что каждое неприводимое бесконечномерное представление локально конечной K-алгебры равно нулю на радикале, т. е. является представлением полупростой фактор-алгебры A/R. Нам осталось воспользоваться теоремой 3.1, чтобы прийти к противоречию.

Следствие. *Для любого неприводимого представления локально конечной K-алгебры ее радикал представлен скалярными операторами.*

Переходя к изучению радикалов локально конечных алгебр, напомним прежде всего некоторые классические определения и результаты (см., например, [10, гл. 2, § 7]).

Пусть M — банахова ассоциативная алгебра с единицей. Радикалом D алгебры M будем называть ее идеал, определенный одним из условий:

1) D — пересечение всех максимальных левых идеалов алгебры M;

2) D — пересечение всех максимальных правых идеалов алгебры M;

3) D состоит из таких элементов $a \in M$, что для всех $x \in M$ спектр произведения $\sigma(a \cdot x) = \{0\}$. Пусть теперь M — равномерно замкнутая алгебра операторов в банаховом пространстве вида $S + \lambda \cdot I$, где S — компактный оператор. Любой линейно упорядоченный набор ее инвариантных подпространств может быть включен по лемме Цорна в максимальный (неуплотняемый) набор. Назовем его композиционным рядом.

Следующая лемма характеризует элементы радикала.

Лемма 4.2. *Оператор S принадлежит радикалу D алгебры M тогда и только тогда, когда для всех разрывов $(E^+; E^-)$ некоторого композиционного ряда $SE^+ \subset E^-$.*

Доказательство. Обозначим через $S \mapsto \hat{S}$ неприводимое представление алгебры M в фактор-пространстве E^+/E^-. Известно, что любой двусторонний идеал J ассоциативной алгебры переходит при неприводимом представлении T либо в $\{0\}$, либо ограничение представления T на J также неприводимо. С другой стороны, радикал D представлен в пространстве E^+/E^- вольтерровыми операторами. По теореме В. И. Ломоносова [5] такое представление всегда приводимо, следовательно, для всех $S \in D$ операторы $\hat{S} = 0$. Для доказательства обратного утверждения достаточно заметить, что спектр компактного оператора, как элемента банаховой алгебры, совпадает с его спектром, как оператора, и воспользоваться критерием вольтерровости оператора.

Определим теперь по аналогии с конечномерным случаем (см. [1, гл. 6]) вольтерров и σ-радикалы локально конечной K-алгебры A.

Пусть M равномерно замкнутая ассоциативная алгебра, порожденная операторами $\{\mathrm{ad}_x (x \in A)\}$, и D — ее радикал. Будем называть вольтерровым радикалом W алгебры A прообраз радикала D при присоединенном представлении $x \mapsto \mathrm{ad}_x$, $W = \{x \in \in A \mid \mathrm{ad}_x \in D\}$.

Теорема 4.2. *Если A локально конечная K-алгебра, то W — наибольший вольтерров идеал алгебры A.*

Доказательство. Пусть $\{E_\lambda\}_\lambda$ — композиционный ряд алгебры M. По лемме 4.2 и критерию вольтерровости для всех $x \in W$ операторы ad_x — вольтерровы, т. е. W — вольтерров идеал алгебры A. Покажем, что произвольный вольтерров идеал J алгебры A принадлежит W. Известно (теорема 2.1), что J принадлежит разрешимому радикалу R алгебры A.

Пусть $(E_\lambda^+, E_\lambda^-)$ — разрыв композиционного ряда. Тогда в силу теоремы 4.1 $\dim (E_\lambda^+/E_\lambda^-) < \infty$, и радикал R представлен в пространстве E_λ^+/E_λ^- скалярными операторами, $\mathrm{ad}_x (E_\lambda^+/E_\lambda^-) = = \mu(x) \cdot I$. С другой стороны, для $x \in J$ операторы ad_x вольтерровы, т. е. $\mu(x) = 0$. Итак, для любого разрыва $(E_\lambda^+, E_\lambda^-)$ и всех $x \in J$ оператор ad_x переводит E_λ^+ в E_λ^-, т. е. $\mathrm{ad}_x \in D$, и $J \subset W$. Теорема доказана.

Таким образом, в каждой локально конечной K-алгебре существуют разрешимый радикал R, вольтерров радикал W и радикал Λ — пересечение ядер всех неприводимых (конечномерных) представлений.

Установим ряд свойств этих радикалов.

1. $\Lambda \subset W \subset R$. Это следует из характеризации W в терминах композиционного ряда.

2. $[A, R] \subset \Lambda$.

3. Вольтерров радикал допускает следующую характеризацию: $W = \{x \in R \mid \sigma(\mathrm{ad}_x) = 0\}$.

4. Всякий непрерывный автоморфизм φ алгебры A переводит R в R, W в W, Λ в Λ, причем в фактор-алгебре R/W, $\varphi = 1$. В частности, всякое ограниченное дифференцирование d алгебры A переводит R в W.

Действительно, в силу свойства 3 элементы $\hat{x}$. $\hat{y}$ фактор-алгебры R/W равны тогда и только тогда, когда спектры операторов ad_x и ad_y совпадают. С другой стороны, всякий автоморфизм сохраняет спектр оператора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. М., ИЛ., 1962. 305 с.
2. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., «Мир», 1964. 352 с.
3. Вейль А. Классические группы. Их инварианты и представления. М., ИЛ, 1947. 408 с.
4. Гохберг Н. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., «Наука», 1965. 448 с.

5. Ломоносов В. И. Об инвариантных подпространствах семейства операторов коммутирующих с вполне непрерывным. — «Функциональный анализ и его приложения», 1973, т. 7, № 3, с. 55—57.
6. Ваксман Л. Л., Гурарий Д. Л. Об алгебрах, содержащих компактный оператор. — «Функциональный анализ и его приложения», 1974, т. 8, № 4, с. 93—94.
7. Гурарий Д. Л. О банаховых алгебрах Ли с компактным присоединенным действием. — ДАН СССР, 1974, т. 217, № 5, с. 1001—1003.
8. Stewart J. Structure theorem for a class of locally finite algebras, — «Proc. Lond. Math, Soc.», 1972, vol. 24, № 1, p. 79—100.
9. Feldman C. The Wedderburn principal theorem in Banach algebras. — «Proc. Amer. Math. Soc.», 1951, № 2, p. 771—777.
10. Наймарк М. А. Нормированные кольца. М., «Наука», 1969. 664 с.