УДК 517.55

П. З. Агранович

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГОЛОМОРФНОЙ В КОНУСЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМ ИНДИКАТОРОМ ПРИ УТОЧНЕННОМ ПОРЯДКЕ

Пусть $C_T = \left\{ z : z \in C^n, \ \frac{z}{|z|} \in T \right\}$, где T — открытое множество на единичной сфере в пространстве C^n, и пусть $f(z)$ — голоморфная в конусе C_T функция, а K — произвольный компакт в T. Обозначим

$$M_f(r;\ K) \overset{\text{def}}{=} \max_{|z|=r,\ \frac{z}{r} \in K} |f(z)|.$$

Будем говорить, что $f(z)$ есть функция уточненного[1] (сильного уточненного) порядка, если $\rho(r)$ является уточненным (сильным уточненным) порядком и величина

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln^+ M_f(r;\ K)}{r^{\rho(r)}} \tag{1}$$

положительна и конечна для любого компакта $K \subset T$.

[1] Функция $\rho(r)$, удовлетворяющая условиям

$$1)\ \rho(r) \to \rho \quad \text{при } r \to \infty,$$
$$2)\ r\rho'(r) \ln r \to 0 \quad \text{при } r \to \infty,$$

называется уточненным порядком (см. Валирон [1]).

Уточненный порядок называется сильным (см. Б. Я. Левин [2]), если

$$\rho(r) = \rho + \frac{\psi_1(\ln r) - \psi_2(\ln r)}{\ln r},$$

где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — неограниченно возрастающие дважды непрерывно дифференцируемые вогнутые функции, удовлетворяющие условиям

$$\text{а)}\ \lim_{x \to \infty} \frac{\psi_i(x)}{x} = 0,\ i = 1,\ 2;$$

$$\text{б)}\ \lim_{x \to \infty} \frac{\psi_i''(x)}{\psi_i'(x)} = 0,\ i = 1,\ 2.$$

Назовем радиальным индикатором функции $f(z)$ при уточненном порядке $\rho(r)$ величину

$$L_{\rho(r)}(z;\ f) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln|f(rz)|}{r^{\rho(r)}},\ z \in C_T,$$

а ее регуляризацию $L^*_{\rho(r)}(z;\ f)$ назовем регуляризованным радиальным индикатором функции $f(z)$ при уточненном порядке $\rho(r)$ (в дальнейшем для краткости мы будем называть $L^*_{\rho(r)}(z;\ f)$ просто индикатором).

Нетрудно видеть, что индикатор $L^*_{\rho(r)}(z;\ f)$ — позитивно однородная порядка ρ плюрисубгармоническая функция в C_T.

Естественен вопрос: являются ли эти свойства индикатора характеристическими? Если $\rho(r) \equiv 1$, то из теоремы Полиа о связи роста целой функции с распределением особенностей ассоциированной функции следует утвердительный ответ на этот вопрос в пространстве C^1; в случае, когда ρ — произвольный порядок, соответствующий результат был получен в пространстве C^1 В. Бернштейном [3, 4]; в пространстве C^1 случай, когда $\rho(r)$ — произвольный сильный уточненный порядок или уточненный порядок, стремящийся при $r \to \infty$ к нецелому $\rho > 0$, и $\rho(r)$ — уточненный порядок, стремящийся к целому $\rho > 0$, были рассмотрены Б. Я. Левиным [2] и В. Н. Логвиненко [5] соответственно.

Методы, используемые для решения указанного вопроса при $n = 1$, оказались непригодными в многомерном случае $(n > 1)$. Сравнительно недавно в работах Кизельмана [6] и Мартино [7, 8] для случая $C_T \cup \{0\} = C^n$ было доказано существование целой функции с заданным индикатором при обычном порядке ($\rho(r) \equiv \equiv \rho$). При этом в [6] рассматривался случай $\rho = 1$, а в [7, 8] — произвольного ρ.

В настоящей статье мы получаем решение указанной задачи для произвольного ограниченного плюрисубгармонического индикатора при сильном уточненном порядке, заданного в некотором конусе C_T.

Теорема 1. *Пусть конус C_T псевдовыпуклый и такой, что каждое его непустое сечение комплексно одномерной плоскостью, проходящей через начало координат, является углом раствора меньше, чем $\min\left(\frac{\pi}{\rho},\ 2\pi\right)$, где $\rho > 0$ — задано. Тогда для любой позитивно однородной порядка ρ плюрисубгармонической и ограниченной на каждом компакте в конусе C_T функции $\varphi(z)$ и любого сильного уточненного порядка $\rho(r)$ ($\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$) существует голоморфная в C_T функция $f(z)$ порядка $\rho(r)$, индикатор $L^*_{\rho(r)}(z;\ f)$ которой совпадает с $\varphi(z)$.*

Доказательство этой теоремы проводится в основном по той же схеме, что и доказательство Мартино [9]. Поэтому мы не воспроизводим его полностью, а ограничиваемся изложением тех мест, в которых рассуждения, подобны рассуждениям Мартино, наталкиваются на трудности.

В [9] наряду с тонкими конструкциями, связанными с решением $\bar{\partial}$ — проблемы, существенно использовался тривиальный сам по себе факт существования плюрисубгармонической функции с заданным индикатором при обычном порядке ρ. Существование плюрисубгармонической функции с заданным индикатором при уточненном порядке нетривиально и составляет содержание теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть конус* C_T *такой же, как и в теореме 1. Пусть, далее,* $\varphi(z)$ — *позитивно однородная порядка* ρ *плюрисубгармоническая ограниченная на каждом компакте в конусе* C_T *функция и* $\rho(r)$ $(\rho(r) \to \rho$ *при* $r \to \infty)$ — *сильный уточненный порядок. Тогда существует функция* $u(z)$ *порядка* $\rho(r)$, *плюрисубгармоническая во всем конусе* C_T *и такая, что*

$$\overset{*}{L}_{\rho(r)}(z;\ u) = \varphi(z).$$

Замечание 1. Понятие плюрисубгармонической в конусе C_T функции уточненного порядка отличается от соответствующего понятия для голоморфной функции только тем, что условие (1) заменяется условием

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{M_\varphi(r; K)}{r^{\rho(r)}} \ (M_\varphi(r;\ K) = \sup_{|z|=r,\ \frac{z}{|z|}\in K} \varphi(z))$$

положительна и конечна для любого компакта $K \subset T$.

Радиальным индикатором функции $\varphi(z)$ при уточненном порядке $\rho(r)$ называется величина

$$L_{\rho(r)}(z, \varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\varphi(rz)}{r^{\rho(r)}},\ z \in C_T,$$

а ее регуляризацию $\overset{*}{L}_{\rho(r)}(z;\ \varphi)$ назовем регуляризованным радиальным индикатором функции $\varphi(z)$ при уточненном порядке $\rho(r)$.

Нетрудно видеть, что регуляризованный индикатор $L^*_{\rho(r)}(z; \varphi)$ является позитивно однородной порядка ρ плюрисубгармонической функцией в конусе C_T.

Кроме факта существования плюрисубгармонической в C_T функции с заданным индикатором в доказательстве Мартино использовалось известное утверждение (см. [2]) о существовании целой функции одного переменного с заданным индикатором при обычном порядке. В наших построениях необходим соответствующий результат для функций, голоморфных в угле и удовлетворяющих некоторой оценке.

Теорема 3. *Для любой тригонометрически* ρ-*выпуклой в угле* $(\alpha,\ \beta)\left(\beta - \alpha < \min\left(\frac{\pi}{\rho}, 2\pi\right)\right.$ *функции* $h(\theta)$ *существует голоморфная в этом угле функция* $f(z)$ *такая, что ее индикатор совпа-*

дает с $h(\theta)$ *и для произвольного* $\varepsilon > 0$ *равномерно по* $\theta \in (\alpha, \beta)$ *при* $r \to \infty$ *справедливо неравенство*

$$\ln|f(re^{i\theta})| < (h(\theta) + \varepsilon) r^{\rho(r)}.$$

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Если* $\rho(r)$ — *сильный уточненный порядок, то*

$$\lim_{r\to\infty} r^2\rho''(r)\ln r = 0.$$

Доказательство. Заметим, что из вогнутости функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ и свойства *а* сильного уточненного порядка следует, что

$$\lim_{x\to\infty} \psi_i'(x) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Далее, согласно (1) имеем

$$r^2\rho''(r)\ln r = [\psi_1''(\ln r) - \psi_2''(\ln r)] - [\psi_1'(\ln r) - \psi_2'(\ln r)] -$$
$$- 2\frac{\psi_1'(\ln r) - \psi_2'(\ln r)}{\ln r} + \frac{\psi_1(\ln r) - \psi_2(\ln r)}{\ln r} + 2\frac{\psi_1(\ln r) - \psi_2(\ln r)}{\ln^2 r}.$$

Отсюда ввиду (1) и свойств *а* и *б* уточненного порядка вытекает, что

$$\lim_{r\to\infty} r^2\rho''(r)\ln r = 0.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь конус $C_T \neq C^n$. Обозначим

$$\tilde{C}_T = \{z : z = a + \zeta,\ \zeta \in C_T\},$$

где вектор a выбран таким, что

$$\bigcup_{\zeta\in\overline{C}_T} \{z : |z - \zeta| < 1\} \subset \tilde{C}_T.$$

Пусть $f(z)$ — функция, определенная на C_T. Положим

$$\tilde{f}(z) = f(z - a).$$

Пусть $\eta(z)$ — функция финитная, бесконечно дифференцируемая в C^n, которая зависит только от $|z|$ и удовлетворяет условиям: $0 \leqslant \eta(z) \leqslant 1$ при $|z| \leqslant 1$, $\eta(z) = 0$ при $|z| > 1$ и

$$\int_{C^n} \eta(z)\,dz = 1.$$

Положим

$$\varphi_\eta(z) = \tilde{\varphi} * \eta(z) = \int_{|\zeta|<1} \varphi(z - \zeta - a)\,\eta(\zeta)\,d\zeta, \quad z \in C_T.$$

Тогда для $z \in C_{T'}$, $T' \subset T$,

$$|\varphi_\eta(z)| \leqslant \int_{|\zeta|<1} |\varphi(z-\zeta-a)|\,\eta(\zeta)\,d\zeta \leqslant \tilde{A}_{T'}|z|^\rho\left(1+\frac{|\zeta+a|}{|z|}\right)^\rho,$$
$$|\zeta|<1,$$

где $\tilde{A}_{T'}>0$ — некоторая константа. Отсюда при достаточно больших $|z|$, $z \in C_{T'}$, $T' \subset T$ следует неравенство

$$|\varphi_\eta(z)| \leqslant A_{T'}|z|^\rho,\ A_{T'}>0. \tag{4}$$

Аналогично можно показать, что для достаточно больших $|z|$, $z \in C_{T'}$, $T' \subset T$

$$\left|\operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\eta}{\partial z_i}\,w_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w}_i\right)\right| \leqslant B_{T'}|z|^\rho|w|^2, \tag{5}$$

где $B_{T'}$ — некоторая положительная константа.

Функция $\varphi_\eta(z)$ плюрисубгармоническая и бесконечно дифференцируемая; определим функцию $\psi(z)$ формулой

$$\psi(z)=\frac{\varphi_\eta(z)\,|z|^{\rho(|z|)}}{|z|^\rho}. \tag{6}$$

Разобьем теперь доказательство теоремы на две части.

1) Пусть сначала $\rho>2$. Положим тогда

$$\gamma(t)=\max\left\{\left|\frac{|4\{[\rho(t)-\rho]+t\rho'(t)\ln t\}|^{1/2}}{\rho(t)+t\rho'(t)\ln t}\right|,\right.$$
$$\left.\left|\frac{|\{[\rho(t)-\rho]+t\rho'(t)\ln t\}^2+2t\rho'(t)-2[\rho(t)-\rho]+t^2\rho''(t)\ln t-t\rho'(t)\ln t|^{1/2}}{\{\rho(t)+t\rho'(t)\ln t\}^2+2t\rho'(t)-2\rho(t)+t^2\rho''(t)\ln t-t\rho'(t)\ln t}\right|\right\}.$$

Как нетрудно видеть, из леммы и свойств уточненного порядка следует, что функция $\gamma(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и $\gamma(t)\geqslant 0$ при $0\leqslant t\leqslant\infty$.

Построим теперь выпуклую бесконечно дифференцируемую функцию $\alpha(t)$ так, чтобы $\alpha(t)\to 0$ при $t\to\infty$, $\alpha(t)\geqslant\gamma(\sqrt{t})$ $\forall t\in(0,\ \infty)$ и чтобы

$$t\alpha'(t)+\frac{\rho-\varepsilon}{4(\rho+2)}\,\alpha(t)\geqslant 0, \tag{7}$$

где $\varepsilon>0$ и $\rho-\varepsilon>0$.

Пусть

$$\Phi(t)=\alpha(t^2)\,t^{\rho(t)}$$

и

$$v(z)=\psi(z)+\Phi(|z|), \tag{8}$$

где функция $\psi(z)$ определена формулой (6). Покажем, что для любого открытого множества $T'\subset T$ существует число $R_{T'}>0$

такое, что функция $v(z)$ является плюрисубгармонической на множестве $C_{T'} \cap \{z : |z| > R_{T'}\}$. Действительно,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j = |z|^{\rho(|z|)-\rho} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_\eta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \right\}.$$

Здесь

$$I_1 = \Big[\frac{\varphi_\eta(z)}{4|z|^4} (\{[\rho(|z|) - \rho] + |z|\rho'(|z|)\ln|z|\}^2 + 2|z|\rho'(|z|) -$$

$$- 2[\rho(|z|) - \rho] + |z|^2\rho''(|z|)\ln|z| - |z|\rho'(|z|)\ln|z|) +$$

$$+ \frac{\alpha(|z|^2)}{4} |z|^{\rho-4} ([\rho(|z|) + |z|\rho'(|z|)\ln|z|]^2 + 2|z|\rho'(|z|) -$$

$$- 2\rho(|z|) + |z|^2\rho''(|z|)\ln|z| - |z|\rho'(|z|)\ln|z|) \Big] \left| \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i \right|^2;$$

$$I_2 = \Big[\frac{\varphi_\eta(z)}{2|z|^2} \{[\rho(|z|) - \rho] + |z|\rho'(|z|)\ln|z|\} +$$

$$+ \frac{\alpha(|z|^2)}{8} |z|^{\rho-2} \{\rho(|z|) + |z|\rho'(|z|)\ln|z|\}\Big] |w|^2;$$

$$I_3 = \operatorname{Re}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\eta}{\partial z_i} w_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i \right) \right] \frac{[\rho(|z|) - \rho] + |z|\rho'(|z|)\ln|z|}{2|z|^2} +$$

$$+ \frac{\alpha(|z|^2)}{4} |z|^{\rho-2} \frac{\rho(|z|) + |z|\rho'(|z|)\ln|z|}{2} |w|^2;$$

$$I_4 = \frac{\alpha(|z|^2)}{2} |z|^{\rho-2} \frac{\rho(|z|) + |z|\rho'(|z|)\ln|z|}{2} |w|^2 + \alpha'(|z|^2)|z|^{\rho-2} \times$$

$$\times [\rho(|z|) + |z|\rho'(|z|)\ln|z|] \left| \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i \right|^2 + \alpha'(|z|^2)|z|^\rho |w|^2 +$$

$$+ \alpha''(|z|^2)|z|^\rho \left| \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i \right|^2.$$

Так как $\varphi_\eta(z)$ — плюрисубгармоническая в конусе C_T функция, то

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_\eta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w} \geqslant 0.$$

Из неравенства (4) и (5) и выбора функции $\gamma(t)$, по которой строится функция $\alpha(t)$, сразу следует, что выражения I_1, I_2 и I_3 неотрицательны при $z \in C_{T'}$, $T' \subset T, |z| > R_{T'}$.

Рассмотрим теперь выражение I_4. Так как $\alpha'(t) < 0$, то, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$I_4 \geqslant \frac{\alpha(|z|^2)}{2} |z|^{\rho-2} \frac{\rho(|z|) + \rho'(|z|)|z|\ln|z|}{2} |w|^2 + \alpha'(|z|^2)|z|^{\rho-2} \times$$

$$\times [\rho(|z|) + 1 + |z|\rho'(|z|)\ln|z|]\,|z|^2 |w|^2 + \alpha''(|z|^2)|z|^\rho \left| \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i \right|^2.$$

В силу выпуклости функции $\alpha(t)$ имеем $\alpha''(t^2) \geqslant 0$. Поэтому из неравенства (7), свойств уточненного порядка и леммы следует, что выражение $I_4 \geqslant 0$ при достаточно больших $|z|$.

Таким образом, существует такое $R_{T'} > 0$, что на множестве $C_{T'} \cap \{z : |z| > R_{T'}\}$ функция $v(z)$ является плюрисубгармонической.

Определим теперь функцию

$$\varkappa(z) = -\ln\delta(z) + \frac{1}{2}\ln(1 + |z|^2),$$

где $\delta(z)$ — евклидово расстояние точки z до границы конуса C_T. Так как конус C_T — псевдовыпуклый, то $\varkappa(z)$ — положительная строго плюрисубгармоническая функция. Отметим, что на множестве $C_{T'} \cap \{z : |z| > R\}$ $(T' \subset T)$ функция $\varkappa(z)$ ограничена. Действительно, на $C_{T'}$ справедливо неравенство

$$C_1|z| < \delta(z) < C_2|z|,$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные константы. Отсюда

$$|\varkappa(z)| \leqslant \left|\frac{1}{2}\ln(1 + |z|^2) - \ln|z|\right| + \text{const}$$

и, значит,

$$|\varkappa(z)| \leqslant M, \; M > 0.$$

Рассмотрим семейство функций

$$\beta_A(z) = \max(\varkappa(z), \; A) - A, \tag{9}$$

где $A \in (0, \; \infty)$.

Пусть T_1, T_2, ... — последовательность множеств, исчерпывающих множество T; $C_{T_i} = \left\{z : z \in C^n, \; \frac{z}{|z|} \in T_i\right\}$, $i = 1, 2, \ldots$; $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — монотонно возрастающая к бесконечности последовательность чисел; $\beta_{A_j(z)} \equiv \beta_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots$, совокупность функций вида (9); $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность исчерпывающих конус C_T множеств, определяемых по функциям $\beta_j(z)$ следующим образом:

$$\Omega_j = \{z : z \in C_T, \; \beta_j(z) = 0\}. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$u(z) = v(z + w) + \sum_{j=1}^{\infty} B_j\beta_j(z), \tag{11}$$

где B_j — некоторые положительные числа; $v(z)$ — функция, определенная формулой (8), и w выбрано так, чтобы функция $v(z + w)$ была плюрисубгармонической в конусе C_{T_2} и в окрестности начала координат. Не нарушая общности, можно считать, что для любого конуса $C_{T'}$, $T' \subseteq T$, существует такое $R_{T'} > 0$, что на множестве $C_{T'} \cap \{z: |z| > R_{T'}\}$ функция $v(z+w)$ является плюрисубгармонической. Подберем вначале число B_1 так, чтобы функция $v(z+w) + B_1\beta_1(z)$ была плюрисубгармонической в конусе C_{T_3}. Это можно сделать следующим образом: сначала выберем такое число R_{T_3}, что на множестве $D_3 = C_{T_3} \cap \{z: |z| > R_{T_3}\}$ функция $v(z+w)$ является плюрисубгармонической. Кроме того, заметим, что увеличивая, если требуется, R_{T_3}, можно добиться того, что $D_3 \subset \Omega_3$. Поэтому далее будем считать это условие выполненным. Так как $\beta_1(z)$ — строго плюрисубгармоническая функция на $C_T \setminus \Omega_2$ и $\beta_1(z) \neq 0$ на множестве $C_{T_3} \setminus (D_3 \cup C_{T_2})$, которое компактно вложено в $C_{T_2} \setminus \Omega_2$, то при достаточно большом значении B_1 форма Леви функции $v(z+w) + B_1\beta_1(z)$ будет на D_3 положительной, и, значит, сама функция будет плюрисубгармонической на D_3, а, следовательно, и на C_{T_3}. Повторяя теперь эти рассуждения, выбираем последовательно числа $B_2, B_3, \ldots, B_n \ldots$ так, чтобы соответствующие функции $v(z+w) + B_1\beta_1(z) + B_2\beta_2(z), \ldots, v(z+w) + \sum_{j=1}^{n} B_j\beta_j(z)$, $\ldots$ были плюрисубгармоническими в конусах $C_{T_4}, \ldots$ $\ldots C_{T_{n+3}}, \ldots$ соответственно.

Заметим, что ввиду (10) в каждой точке z из конуса C_T ряд (11) содержит конечное число членов и потому сходится. Итак, функция $u(z)$, определенная формулой (11), является плюрисубгармонической во всем конусе C_T и, как нетрудно видеть,

$$L^*_{\rho(r)}(z;\ u) = L^*_{\rho(r)}(z;\ v) = L^*(z;\ \varphi_\eta),$$

где $L^*(z;\ \varphi_\eta)$ — обычный радиальный индикатор функции $\varphi_\eta(z)$ (см. определение в [9]). В силу леммы 3.6.5 [9] имеем

$$L^*(z;\ \varphi_\eta) = \varphi(z)$$

и, значит,

$$L^*_{\rho(r)}(z;\ u) = \varphi(z).$$

В случае $\rho \leqslant 2$ положим

$$\gamma(t) = \max\left\{\left|\frac{|12\{[\rho(t)-\rho] + t\rho'(t)\ln t\}|^{1/2}}{[\rho(t) + t\rho'(t)\ln t]^2 + t^2\rho''(t)\ln t + 2t\rho'(t) + 2t\rho'(t)\ln t}\right|,\right.$$

$$\left.\left|\frac{|2\{[\rho(t)-\rho] + t\rho'(t)\ln t\}^2 + 2t\rho'(t) - 2[\rho(t)-\rho] + t^2\rho''(t)\ln t - t\rho'(t)\ln t|^{1/2}}{[\rho(t) + t\rho'(t)\ln t]^2 + t^2\rho''(t)\ln t + 2t\rho'(t)}\right|\right\}.$$

Легко видеть, что $\gamma(t) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \infty$ и $\gamma(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Построим теперь выпуклую бесконечно дифференцируемую функцию $\alpha(t)$ так, чтобы $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $\alpha(t) \geqslant \gamma(\sqrt{t})$ $\forall t \in (0, \infty)$ и чтобы

$$t\alpha'(t) + \frac{\rho^2 - \varepsilon}{24(\rho+2)}\alpha(t) \geqslant 0,$$

где $\varepsilon > 0$, $\rho^2 - \varepsilon > 0$.

По функции $\alpha(t)$ построим функцию

$$\Phi(t) = \alpha(t^2)\, t^{\rho(t)}$$

и определим функцию $v(z)$ следующим образом:

$$v(z) = \psi(z) + \Phi(|z|),$$

где функция $\psi(z)$ задана формулой (8).

Покажем, что для любого открытого множества $T' \subset T$ существует число $R_{T'} > 0$ такое, что функция $v(z)$ является плюрисубгармонической на множестве $C_{T'} \cap \{z : |z| > R_{T'}\}$. В самом деле

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial z_i \partial \bar z_j} w_i \bar w_j = |z|^{\rho(|z|)-\rho} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_\eta}{\partial z_i \partial \bar z_j} w_i \bar w_j + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \right\},$$

где

$$I_1 = \Big[\frac{\varphi_\eta(z)}{4|z|^4} (\{[\rho(|z|) - \rho] + |z|\rho'(|z|)\ln|z|\}^2 + 2|z|\rho'(|z|) +$$

$$+ |z|^2\rho''(|z|)\ln|z| - 2[\rho(|z|) - \rho] - |z|\rho'(|z|)\ln|z|) +$$

$$+ \frac{\alpha(|z|^2)}{8}|z|^{\rho-4}\{[\rho(|z|) + |z|\rho'(|z|)\ln|z|]^2 + |z|^2\rho''(|z|)\ln|z| +$$

$$+ 2|z|\rho'(|z|)\}\Big] \left|\sum_{i=1}^{n} z_i \bar w_i\right|^2,$$

$$I_2 = \Big[\frac{\varphi_\eta(z)}{2|z|^2}([\rho(|z|) - \rho] + |z|\rho'(|z|)\ln|z|) + \frac{\alpha(|z|^2)}{24}|z|^{\rho-2} \times$$

$$\times \{[\rho(|z|) + |z|\rho'(|z|)\ln|z|]^2 + |z|^2\rho''(|z|)\ln|z| + 2|z|\rho'(|z|) +$$

$$+ 2|z|\rho'(|z|)\ln|z|\}\Big] |w|^2;$$

$$I_3 = \mathrm{Re}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\eta}{\partial z_i} w_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \bar w_i\right)\right] \frac{[\rho(|z|) - \rho] + |z|\rho'(|z|)\ln|z|}{2|z|^2} +$$

$$+ \frac{\alpha(|z|^2)}{24}|z|^{\rho-2}\{[\rho'(|z|)|z|\ln|z| + \rho(|z|)]^2 + |z|^2\rho''(|z|)\ln|z| +$$

$$+ 2\rho'(|z|)|z| + 2\rho'(|z|)|z|\ln|z|\}|w|^2;$$

$$I_4 = \alpha''(|z|^2)|z|^\rho \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w}_i\right|^2 + \alpha'(|z|^2)|z|^{\rho-2}[\rho(|z|) + 1 +$$

$$+ |z|\rho'(|z|)\ln|z|]|z|^2|w|^2 + \frac{\alpha(|z|^2)}{24}|z|^{\rho-2}\{[\rho(|z|) +$$

$$+ |z|\rho'(|z|)\ln|z|]^2 + |z|^2\rho''(|z|)\ln|z| + 2\rho'(|z|)\ln|z||z| +$$

$$+ 2|z|\rho'(|z|)\}|w|^2.$$

Далее повторим те же рассуждения, что и в предыдущем случае.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3[1]. Прежде всего заметим, что всякая ρ-тригонометрически выпуклая в угле (α, β) $\left(\beta - \alpha < \min\left(\frac{\pi}{\rho}, 2\pi\right)\right)$ функция $h(\theta)$ является верхней огибающей некоторого семейства ρ-тригонометрических функций[2]. Действительно, предположим, что $\rho = 1$. Это ограничение не нарушает общности, потому что случай произвольного ρ сводится к указанному отображением вида

$$w = z^\rho.$$

Известно [9], что ρ-тригонометрическая выпуклость функции $h(\theta)$ при $\rho = 1$ эквивалентна обычной выпуклости функции $\varphi(z) = rh(\theta)$ $(z = re^{i\theta})$. Произвольная же выпуклая поверхность является верхней огибающей некоторого семейства плоскостей, а так как в нашем случае $rh(\theta)$ — позитивно однородная функция, то соответствующие плоскости проходят через начало координат. Замечая, что ρ-тригонометричность функции $h(\theta)$ при $\rho = 1$ эквивалентна тому, что $\varphi = rh(\theta)$ есть уравнение плоскости, проходящей через начало координат, убеждаемся в истинности сделанного утверждения.

Таким образом, функции $h(\theta)$ отвечает семейство ρ-тригонометрических функций $\{H_\tau(\theta)\}$, огибающей которого она является. Очевидно, что на интервале (α, β) имеется не более, чем счетное число отрезков, на которых функция $h(\theta)$ совпадает с какой-нибудь ρ-тригонометрической функцией $H(\theta)$. Эти функции обозначим $H'_\tau(\theta)$. Выделим соответствующие отрезки, а на оставшемся множестве γ выберем счетное плотное множество точек $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$. Каждой точке φ_i сопоставим функцию $H_{\tau_i}(\theta)$ так, чтобы

$$\begin{cases} H_{\tau_i}(\varphi_i) = h(\varphi_i); \\ H_{\tau_i}(\varphi_i) > H_{\tau_j}(\varphi_i)\ \forall \tau_j \neq \tau_i. \end{cases} \qquad (12)$$

---

[1] При доказательстве теоремы 3 мы используем метод Полиа [10] — Гришина [11].

[2] Функцию $H(\Theta)$ будем называть ρ-тригонометрической, если

$$H(\Theta) = a\cos\rho\Theta + b\sin\rho\Theta.$$

Отметим, что на i-ом выделенном отрезке

$$\begin{cases} H_i'(\theta) = h(\theta); \\ H_i'(\theta) > H_{\tau_j}(\theta) \ \forall j \\ H_i'(\theta) > H_j'(\theta) \ \forall j \neq i. \end{cases} \qquad (12')$$

Теперь образуем новое семейство функций $\{\widetilde{H}_k(\theta)\}$, состоящее из функций $H_{\tau_i}(\theta)$ и $H_i'(\theta)$. Это семейство счетное, и каждая его функция удовлетворяет условию (12) либо условию (12′).

Каждой функции $\widetilde{H}_k(\theta) = a_k \cos\rho\theta + b_k \sin\rho\theta$ сопоставим функцию $f_k(z)$, голоморфную, не имеющую корней внутри угла (α, β) и такую, что при $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ равномерно

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|f_k(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = a_k \cos\rho\theta + b_k \sin\rho\theta.$$

(Существование такой функции доказано Б. Я. Левиным [2]).

Выберем теперь такую монотонно стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел δ_k, чтобы

$$\delta_k |f_k(z)| \leqslant \exp\{(a_k \cos\rho\theta + b_k \sin\rho\theta + \varepsilon_k) r^{\rho(r)}\},$$

где числа $\varepsilon_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$.

Тогда

$$\delta_k |f_k(z)| \leqslant \exp\{(h(\theta) + \varepsilon_k) r^{\rho(r)}\} \ \forall\theta, \ r. \qquad (13)$$

Обозначим

$$A_n = \begin{cases} \max\limits_{m<n} \max\limits_{r} \left| \dfrac{f_n(re^{i\varphi_m})}{f_m(re^{i\varphi_m})} \right|, & (14) \\ \max\limits_{m<n} \max\limits_{r} \left| \dfrac{f_n(re^{i\theta})}{f_m(re^{i\theta})} \right|, & (15) \end{cases}$$

причем в (14) функция f_m соответствует функции H_{τ_m} и $\varphi_m \in \gamma$, а в (15) функция f_m соответствует H_m', θ — точка m-го выделенного отрезка.

Из (12) и (12′) следует, что $1 \leqslant A_n < \infty$. Определим функцию

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\delta_n}{2^n A_n} f_n(z)$$

Из (13) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{2^n A_n} |f_n(z)| \leqslant \exp\{(h(\theta) + \varepsilon_1) r^{\rho(r)}\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n A_n}$$

и, значит, функция $f(z)$ голоморфна в угле (α, β).

Оценим теперь функцию $f(z)$ на лучах $\arg z = \varphi_j$.

Из (12) следует, что существует $R_{n,j}(\varepsilon)$ ($n \neq j$, $\varepsilon > 0$ — произвольное) такое, что при $r > R_{n,j}(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{f_n(re^{i\varphi_j})}{f_j(re^{i\varphi_j})}\right| < \varepsilon.$$

Заметим, что по определению A_n для $n > j$

$$\frac{1}{A_n}\left|\frac{f_n(re^{i\varphi_j})}{f_j(re^{i\varphi_j})}\right| < 1,\ \varphi_j \in \gamma,$$

и

$$\frac{1}{A_n}\left|\frac{f_n(re^{i\Theta})}{f_j(re^{i\Theta})}\right| < 1,$$

где θ — точка j-го выделенного отрезка. Отсюда при $r > R_j(2) = \max\limits_{n<j} R_{n,j}(1)$ получим

$$|f(re^{i\varphi_j})| < |f_j(re^{i\varphi_j})| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \tag{16}$$

С другой стороны, при $r > R_N(\varepsilon) = \max\limits_{n<N} R_{n,N}(\varepsilon)$ получим

$$|f(re^{i\varphi_j})| > |f_j(re^{i\varphi_j})| \left[\frac{\delta_j}{2^j A_j} - {\sum_{n=1}^{N}}' \frac{\delta_n}{2^n A_n}\left|\frac{f_n(re^{i\varphi_j})}{f_j(re^{i\varphi_j})}\right| - {\sum_{n=N+1}^{\infty}}' \frac{\delta_n}{2^n A_n} \times\right.$$

$$\left.\times\left|\frac{f_n(re^{i\varphi_j})}{f_j(re^{i\varphi_j})}\right|\right] > |f_j(re^{i\varphi_j})| \left[\frac{\delta_j}{2^j A_j} - \varepsilon {\sum_{n=1}^{N}}' \frac{\delta_n}{2^n} - {\sum_{n=N+1}^{\infty}}' \frac{\delta_n}{2^n}\right]$$

($'$ означает, что в сумме отсутствует член с $n = j$), индекс j выбран таким, что функции f_j соответствует функция $H_{\tau_j}(\theta)$.

Выбирая N достаточно большим, а ε — достаточно малым, получим при $r > R_N(\varepsilon)$, что

$$|f(re^{i\varphi_j})| > C_j |f_j(re^{i\varphi_j})|,\ C_j > 0. \tag{17}$$

В силу (12′) аналогично получим неравенство

$$|f(re^{i\Theta})| > \widetilde{C}_j |f_j(re^{i\varphi_j})|,\ \widetilde{C}_j > 0, \tag{17′}$$

где f_j — функция, соответствующая функции H_j', а θ — произвольная точка j-го выделенного отрезка.

Из неравенств (16), (17) и (17′) следует, что

$$h_f(\varphi_j) = \lim_{r \to \infty} \frac{\ln |f(re^{i\varphi_j})|}{r^{\rho(r)}} = h(\varphi_j)$$

и

$$h_f(\theta) = \lim_{r \to \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = h(\theta)$$

для произвольной точки θ из выделенных отрезков.

Итак, на выделенных отрезках $h_f(\theta) = h(\theta)$, а в силу непрерывности индикатора и плотности точек φ_j получим равенство $h_f(\theta) = h(\theta)$ на множестве γ.

Теорема доказана.

Замечание 2. Известно (см. [9]), что позитивно однородная плюрисубгармоническая во всем пространстве C^n функция является ограниченной на каждом компактном множестве в C^n. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Для любой позитивно однородной порядка $\rho > 0$ плюрисубгармонической в пространстве C^n функции $\varphi(z)$ и любого сильного уточненного порядка $\rho(r)$ ($\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$) существует целая в C^n функция $f(z)$ порядка $\rho(r)$, индикатор $\overset{*}{L}_{\rho(r)}(z; f)$ которой совпадает с $\varphi(z)$.*

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Л. И. Ронкина за внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Valiron G. Lectures on the General Theory of Integnal Functions. — Privat Toulouse. 1923. 214 s.
2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956. 638 с.
3. Bernstein V. Sur les propriètes caractèristiques des indicatrices de croissance. — C. R. 1936, vol. 202, p. 108—110.
4. Bernstein V. Sulla proprietà carttestiche delle indicatrisè de crescenza delle transcendenti intere d'ordine finito. — Mem. Reale Acc. d'Jtalia. 1936, vol. 7, p. 131—189.
5. Логвиненко В. Н. Построение целой функции с заданным индикатором при заданном целом уточненном порядке. — «Функциональный анализ и его приложения», 1972, т. 6, вып. 6, с. 87—88.
6. Kiselman C. O. On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals. — Acta Math. Uppsala, 1967, vol. 117, p. 1—35.
7. Martineau A. Indicatrices de croissance des fonctions entiéres N variables. — Invent. Math. Berlin, 1966, vol. 2, p. 81—86.
8. Martineau A. Indicatrices des croissance des fonctions entiéres N variables. (Correction et complément), — Invent. Math. Berlin, 1967, vol. 3, p. 16—19.
9. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с.
10. Pólya G. Intersuchengen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen. — Math. Zeits, 1929, vol. 29, 2. 549—640.
11. Гришин А. Ф. О функциях, голоморфных внутри угла и имеющих там нулевой порядок. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 1, Харьков, 1965, с. 41—56.