УДК 517.9:621.372.8

Б. С. Элькин

ОПЕРАТОРНЫЙ КОМПЛЕКС В ЗАДАЧЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОМ ВОЛНОВОДЕ

Изучается электромагнитное поле в полом волноводе с неоднородностью (рис. 1) Предположим, что уже имеется установившийся стационарный режим с частотой ω, т. е. электромагнитное поле имеет вид

$$\vec{E}'(x_1, x_2, x_3; t) = \vec{E}(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t},$$

$$\vec{H}'(x_1, x_2, x_3; t) = \vec{H}(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t}.$$

Уравнения Максвелла запишутся тогда следующим образом:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0; \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = i\omega\varepsilon_0 \vec{E}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{H}, \end{cases} \tag{2}$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость;
μ_0 — магнитная проницаемость.

Предполагается, что волновод имеет идеально проводящие стенки, т. е. на границе S волновода выполняются «условия на металле»

$$\vec{E}_{t/S} = 0^*, \tag{3}$$

$$(\vec{H}\,\vec{n})_{|S} = 0. \tag{4}$$

Введем в рассмотрения дифференциальную операцию

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -i\varepsilon_0^{-1}\,\mathrm{rot} \\ i\mu_0^{-1}\,\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Тогда уравнения (2) можно записать в виде

$$Q\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}. \tag{2^1}$$

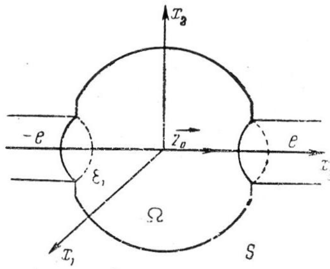

Рис. 1

Изучается задача прохождения электромагнитных волн через неоднородный участок волновода [1], т. е. по заданному полю на Σ_1 ищется поле в Ω и на Σ_2**.

Оператор Максвелла Q задачи прохождения задается дифференциальной операцией (5) на следующей области определения:

$$D_Q = \begin{pmatrix} \vec{E} : \mathrm{div}\,\vec{E} = 0;\ \vec{E}_{t/\Sigma_1} = 0;\ \vec{E}_{t/S} = 0 \\ \vec{H} : \mathrm{div}\,\vec{H} = 0;\ \vec{H}_{t/\Sigma_1} = 0;\ (\vec{H}\vec{n})_{|S} = 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В настоящей работе рассматривается применение теории несамосопряженных операторов к исследованию задачи прохождения. Как известно, теория несамосопряженных операторов успешно применялась при изучении задачи отражения от неоднородности в волноводе [1, 2]. Но задача прохождения, в отличие от задачи отражения, является, как легко показать, неустойчивой. Это, очевидно, послужило причиной того, что с общей точки зрения задача прохождения никем не рассматривалась.

---

* $\vec{E}t$ — тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$;

$\vec{n}$ — внешняя нормаль к S.

Условие (4) вытекает из (2), (3).

** Ω — область трехмерного евклидова пространства R^3, ограниченная стенками S неоднородной части волновода и двумя плоскими симметричными поперечными сечениями Σ_1, Σ_2 (рис. 1). Достаточно на Σ_1 задать $\vec{E}_{t/\Sigma_1}$, $\vec{H}_{t/\Sigma_1}$, так как E_{x_3/Σ_1}, H_{x_3/Σ_1} можно определить через $\vec{E}_{t/\Sigma_1}$, $\vec{H}_{t/\Sigma_1}$, используя (2).

В работе показано, что у оператора Максвелла [5, 6] существует «почти — обратный» вполне непрерывный оператор A (п. 2), для которого строится операторный комплекс θ [1].

Известно, что электромагнитное поле на Σ_1 и Σ_2 ($\vec{E}_{t/\Sigma_i}, \vec{H}_{t/\Sigma_i}$, $i = 1, 2$) может быть разложено в ряд по четырехмерным гармоникам. Одним из основных результатов является то, что путем линейного вложения каждой гармоники в восьмимерное пространство на входе (Σ_1) и выходе (Σ_2) волновода неустойчивую задачу прохождения можно свести к некоторой устойчивой задаче, связанной с операторным комплексом θ.

Для дальнейших рассмотрений нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, которые приводятся в п. 1.

1. Определения и вспомогательные результаты

Пусть Σ — плоская, ограниченная область двумерного евклидова пространства R^2 с гладкой границей L (рис. 2).

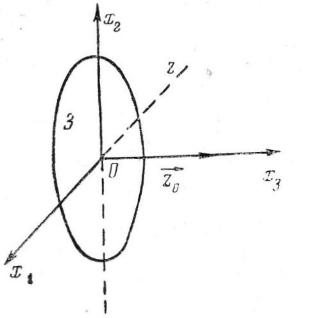

Рис. 2

Введем следующие обозначения:

$L_2(\Sigma)$ — гильбертово пространство двумерных вектор-функций $\vec{u}^0(x_1, x_2) = (u_1^0(x_1, x_2), u_2^0(x_1, x_2))$ с измеримыми и квадратично суммируемыми на Σ компонентами и скалярным произведением

$$(\vec{u}^0, \vec{v}^0) = \int_\Sigma \sum_{i=1}^{2} u_i^0 v_i^{0*} d\sigma^*;$$

M — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{M}$ градиентов гладких функций $\varphi^0(x, y)$;

M_0 — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{M}_0\ \nabla\varphi^0$, где $\varphi^0(x_1, x_2)$ — гладкая функция и $\varphi^0_{|L} = 0$**;

N — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{N}$ гладких вектор-функций $\vec{u}^0$, у которых $\operatorname{div}\vec{u}^0 = 0$;

N_0 — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{N}_0$ гладких вектор-функций $\vec{u}^0$, у которых $\operatorname{div}\vec{u}^0 = 0$ и $(\vec{u}^0, \vec{n}^0)_{|L} = 0$ ($\vec{n}^0$ — внешняя нормаль к L).

---

* v_i^{0*} — комплексно-сопряженное число к v_i^0.

** Через $\nabla\varphi^0$ обозначен $\operatorname{grad}\varphi^0$.

Известно, что имеет место следующее ортогональное разложение $L_2(\Sigma)$:

$$L_2(\Sigma) = M_0 \oplus N = M \oplus N_0. \tag{7}$$

Пусть $\{\gamma_m^0\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\zeta_m^0\}_{m=1}^{\infty}$ — наборы собственных функций краевых задач (8), (9)

$$\Delta\gamma_m^0 + \mu_m^2\gamma_m^0 = 0 \ ((x_1, x_2) \in \Sigma); \ \gamma_{m/L}^0 = 0, \tag{8}$$

$$\Delta\zeta_m^0 + \nu_m^2\xi_m^0 = 0 \ ((x_1, x_2) \in \Sigma), \ \left.\frac{\partial\xi_m^0}{\partial\vec{n}_0}\right|_L = 0. \tag{9}$$

Известно, что $\{\gamma_m^0\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\zeta_m^0\}_{m=1}^{\infty}$ образуют полные ортогональные системы в гильбертовом пространстве измеримых функций с суммируемым квадратом модуля*. Нормируем их следующим образом:

$$\int\limits_{\Sigma} (\gamma_m^0)^2 \, d\sigma = \frac{1}{\mu_m^2};$$

$$\int\limits_{\Sigma} (\zeta_m^0)^2 \, d\sigma = \frac{1}{\nu_m^2} \tag{10}$$

$$(m = 1, 2 \ldots).$$

Введем вектор-функции

$$\vec{F}_m^{(e)} = \nabla\gamma_m^0, \ \vec{G}_m^{(e)} = [\vec{z}_0 \times \nabla\gamma_m^0];$$

$$\vec{F}_m^{(h)} = [\nabla\xi_m^0 \times \vec{z}_0], \ \vec{G}_m^{(h)} = \nabla\xi_m^0 \tag{11}$$

$$(m = 1, 2 \ldots).$$

Легко видеть, что $F_m^{-(e)} \in M_0$, $\vec{G}_m^{(e)} \in N_0$, $\vec{F}_m^{(h)} \in N$, $\vec{G}_m^{(h)} \in M$ $(m = 1, 2 \ldots)$ и образуют ортонормированный базис в соответствующих подпространствах.

Пусть Ω — ограниченная область R^3 с достаточно гладкой границей**.

Обозначим $L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство трехмерных вектор-функций

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3) = (u_1(x_1, x_2, x_3), \ u_2(x_1, x_2, x_3), \ u_3(x_1, x_2, x_3))$$

---

* Для полноты системы $(\zeta_m^0)_{m=1}^{\infty}$ к ней необходимо еще добавить $\zeta_0^0 = \dfrac{1}{\sqrt{|\Sigma|}}$, где $|\Sigma|$ — площадь Σ.

** В качестве Ω мы будем всегда брать неоднородный отрезок волновода, ограниченный боковой поверхностью S и двумя плоскими симметричными сечениями Σ_1, Σ_2.

с измеримыми и квадратично суммируемыми в Ω компонентами и скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} u_i v_i^* d\Omega;$$

$w_2^1(\Omega)$ — гильбертово пространство трехмерных вектор-функций с измеримыми, квадратично суммируемыми в Ω компонентами и их обобщенными производными первого порядка и скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_{w_2^1} = (\vec{u}, \vec{v}) + \int_{\Omega} \sum_{i, j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} d\Omega;$$

J — замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\tilde{J}$ гладких соленоидальных векторов;

J_1 — замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\tilde{J}_1$ гладких соленоидальных векторов $\vec{v}$, у которых $(\vec{v}\vec{n})|_S = 0$;

J'' — замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\tilde{J}''$ гладких соленоидальных векторов $\vec{u}$, у которых $(\vec{u}\vec{n})|_{\Sigma_2} = 0$;

J_1'' — замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\tilde{J}_1''$ гладких соленоидальных векторов $\vec{v}$, у которых $(\vec{v}\vec{n})|_{S+\Sigma_2} = 0$;

U' — замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\tilde{U}'$ градиентов гармонических функций φ таких, что $\varphi|_{\Sigma_1+S} = 0$;

U_1' — замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\tilde{U}_1'$ градиентов гармонических функций ψ таких, что

$$\psi|_{\Sigma_1} = 0, \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S = 0;$$

J' — замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\tilde{J}'$ гладких соленоидальных векторов $\vec{u}$, у которых $(\vec{u}, \vec{n})|_{\Sigma_1} = 0$;

J_1' — замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\tilde{J}_1'$ гладких соленоидальных векторов $\vec{v}$, у которых $(\vec{v}, \vec{n})|_{S+\Sigma_1} = 0$;

U'' — замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\tilde{U}''$ градиентов гармонических функций φ таких, что

$$\varphi|_{S+\Sigma_2} = 0;$$

U_1'' — замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\tilde{U}_1''$ градиентов гармонических функций ψ таких, что

$$\psi\Big|_{\Sigma_2} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S = 0.$$

Можно показать (аналогично [3, 4, 5]) что

$$J = J'' \oplus U' = J' \oplus U''; \ J_1 = J_1'' \oplus U_1 = J_1' \oplus U_1''. \qquad (12)$$

Обозначим через $H = \begin{pmatrix} J \\ J_1 \end{pmatrix}$ — гильбертово пространство шестимерных вектор-функций

$f = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$ ($\vec{u} \in J$, $\vec{v} \in J_1$) со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \int_\Omega (\varepsilon_0 \vec{u}_1 \vec{u}_2^* + \mu_0 \vec{v}_1 \vec{v}_2^*)\, d\Omega. \qquad (13)$$

Аналогично

$$H_1 = \begin{pmatrix} J'' \\ J_1'' \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} U' \\ U_1' \end{pmatrix},$$

$$H' = \begin{pmatrix} J' \\ J_1' \end{pmatrix}, \quad H'' = \begin{pmatrix} U'' \\ U_1'' \end{pmatrix}.$$

Из (12) следует, что

$$H = H_1 \oplus H_2 = H' \oplus H''. \qquad (14)$$

2. Свойства оператора Максвелла.

Лемма 1. *D_Q плотно в H.*

Доказательство. Аналогично [3, 4, 5] можно показать, что гладкие соленоидальные векторы $\vec{u}$, удовлетворяющие условию $\vec{u}_{t/S+\Sigma_1+\Sigma_2} = 0$, плотны в J, а гладкие соленоидальные векторы $\vec{v}$, удовлетворяющие условиям $\vec{v}_{t/\Sigma_1+\Sigma_2} = 0$, $(\vec{v}\vec{n})|_S = 0$, плотны в J_1.

Отсюда вытекает, что гладкие пары соленоидальных векторов $\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$, удовлетворяющие условиям $\vec{u}_{t/\Sigma_1+\Sigma_2+S} = 0$, $\vec{v}_{t/\Sigma_1+\Sigma_2} = 0$, $(\vec{v}\vec{n})|_S = 0$, принадлежат D_Q и плотны в H. Лемма доказана.

Лемма 2. *Оператор Максвелла* [5, 6]* *имеет бесконечномерное ядро.*

Доказательство. Рассматривая решения уравнения $Qf = 0$, получим, что $\operatorname{Ker} Q = H_2$.

Обозначим через Δ_Q образ оператора Q, Q^* — оператор, сопряженный к Q. Легко видеть, что $\overline{\Delta}_Q = H'$**, $\operatorname{Ker} Q^* = H''$.

Если рассмотреть Q на

$$D_{1Q} = D_Q \cap (H \ominus H_2) = \begin{pmatrix} \vec{E} : \operatorname{div} \vec{E} = 0, \ \vec{E}_{t/\Sigma_1+S} = 0, \ (\vec{E}\vec{n})|_{\Sigma_2} = 0, \\ \vec{H} : \operatorname{div} \vec{H} = 0, \ \vec{H}_{t/\Sigma_1} = 0, \ (\vec{H}\vec{n})|_{S+\Sigma_2} = 0 \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

* Из дальнейших рассмотрений будет видно, что Q можно замкнуть.

** Q^* существует, так как D_Q плотно в H. $\overline{\Delta_Q}$ — замыкание линеала Δ_Q в метрике H.

то на D_{1Q} у Q существует обратный оператор A, который определен на Δ_Q.

Теорема 1. *Оператор* $A:\Delta_Q \to D_{1Q}$ *является вполне непрерывным.*

Доказательство. Нам потребуются следующие оценки [3, 4, 5]: a) любой вектор $\vec{u} \in J_1'$ однозначно представим в виде $\vec{u} = \operatorname{rot} \vec{v}$, где $\vec{v} \in w_2'(\Omega)$, $\vec{v} \in J''$, $\vec{v}_{t/\Sigma, \mp S} = 0$, причем

$$\|\vec{v}\|_{w_2^1} \leqslant c \|\operatorname{rot} \vec{v}\|_{L_2};$$

b) любой вектор $\vec{u} \in J'$ однозначно представим в виде $\vec{u} = \operatorname{rot} \vec{v}$, где $\vec{v} \in w_2^1(\Omega)$, $\vec{v} \in J_1''$, $\vec{v}_{t/\Sigma_1} = 0$, причем $\|\vec{v}\|_{w_2^1} \leqslant c \|\operatorname{rot} \vec{v}\|_{L_2}$.

Утверждение теоремы становится очевидным, если воспользоваться a, b и тем фактом, что множество, ограниченное в метрике $w_2^1(\Omega)$, является компактным в метрике $L_2(\Omega)$.

Так как A вполне непрерывен, его можно расширить на все H'*. Доопределим оператор A на H'' нулем. Полученный оператор, который мы по-прежнему будем обозначать A, вполне непрерывен и определен на всем H.

3. Построение операторного комплекса θ и ассоциированной открытой системы $\tilde{\theta}$.

Операторным комплексом [1] называется совокупность оператора $A: H \to H$ системы, векторов $e_\alpha \in H$ $(\alpha = 1, \ldots, N;\ N \leqslant \infty)$ и матрицы $I = (I_{\alpha\beta})_{\alpha,\, \beta=1}^N$, удовлетворяющая условию

$$((2ImA) f, g) = \left(\frac{1}{i}(A - A^*) f, g\right) = \sum_{\alpha;\, \beta=1}^{N} (f, e_\alpha) I_{\alpha\beta} (e_\beta, g).$$

Открытой системой [1] называется совокупность гильбертовых пространств E, H, для которых определены отображения

$$R: E \to H,\ w: E \to E$$

(E — внешнее пространство; H — внутреннее пространство).

Ассоциированная открытая система определяется по операторному комплексу в заданном базисе $\{a_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ пространства E следующим образом [1]:

a) в качестве внутреннего пространства выбирается пространство H из операторного комплекса;

b) отображения $R\varphi^- = f$, $w\varphi^- = \varphi^+$ определяются из уравнений

$$f = \omega A f + \sum_{\alpha=1}^{N} \varphi_\alpha^- e_\alpha,$$

$$\varphi^+ = \varphi^- - iwI \sum_{\alpha=1}^{N} (f, e_\alpha)\, a_\alpha.$$

* Отсюда следует, что Q можно замкнуть.

Лемма 3. *Справедливо следующее соотношение:*

$$(2\operatorname{Im} A\ \ f, g) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{\infty} (f,\ e_{\alpha m})\, I_{\alpha\beta}^{(m)}\,(e_{\beta m},\ q)\right), \tag{16}$$

где $f,\ q \in H$,

$$\left(I_{\alpha\beta}^{(m)}\right)_{\alpha,\ \beta=1}^{8} = -\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & & & 0 \\ & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & & \\ & & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \\ 0 & & & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} (m = 1,\ 2, \ldots), \tag{17}$$

$$e_{1m} = p'\begin{bmatrix} \nabla\gamma_m \\ 0 \end{bmatrix},\ e_{2m} = p'\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{f}_m \end{bmatrix} + iA^*\begin{bmatrix} \varepsilon_0^{-1}\nabla\varphi_m \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$e_{3m} = p'\begin{bmatrix} 0 \\ \nabla\zeta_m \end{bmatrix},\ e_{4m} = p'\begin{bmatrix} \vec{g}_m \\ 0 \end{bmatrix} - iA^*\begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0^{-1}\nabla\psi_m \end{bmatrix};$$

$$e_{5m} = -iA^*\begin{bmatrix} \varepsilon_0^{-1}\nabla\gamma_m^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix},\ e_{6m} = p''\begin{bmatrix} \nabla\varphi_m \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{18}$$

$$e_{7m} = iA^*\left[\mu_0^{-1}\nabla\zeta_m^{(1)}\right],\ e_{8m} = p''\begin{bmatrix} 0 \\ \nabla\psi_m \end{bmatrix}^*.$$

$$(m = 1,\ 2, \ldots)$$

Здесь γ_m — решение краевой задачи в Ω:

$$\Delta\gamma_m = 0;\ \gamma_{m/\Sigma_1} = \gamma_{m/\Sigma_2} = \overset{0}{\gamma}_m,\ \gamma_{m/S} = 0; \tag{I}$$

ζ_m — решение краевой задачи в Ω:

$$\Delta\zeta_m = 0;\ \zeta_{m/\Sigma_1} = \zeta_{m/\Sigma_2} = \overset{0}{\zeta}_m;\ \left.\frac{\partial\zeta_m}{\partial n}\right|_S = 0; \tag{II}$$

φ_m — решение краевой задачи в Ω:

$$\Delta\varphi_m = 0;\ \left.\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right|_{\Sigma_1} = -\left.\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right|_{\Sigma_2} = \mu_m^2\overset{0}{\gamma}_m,\ \varphi_{m/S} = 0; \tag{III}$$

$\vec{f}_m$ — решение краевой задачи в Ω: $\operatorname{div}\vec{f}_m = 0$,

$$\operatorname{rot}\vec{f}_m = \nabla\varphi_m;\ \vec{f}_{mt/\Sigma_1} = \vec{f}_{mt/\Sigma_2} = \vec{G}_m^{(e)},\ (\vec{f}_m\vec{n})_{|S} = 0; \tag{IV}$$

ψ_m — решение краевой задачи в Ω:

$$\Delta\psi_m = 0;\ -\left.\frac{\partial\psi_m}{\partial n}\right|_{\Sigma_1} = \left.\frac{\partial\psi_m}{\partial n}\right|_{\Sigma_2} = \nu_m^2\overset{0}{\zeta}_m,\ \left.\frac{\partial\psi_m}{\partial n}\right|_S = 0; \tag{V}$$

---

* Здесь и далее p', p'', p_1, p_2 — ортопроекторы на подпространства H', H'', H_1, H_2 соответственно.

$\vec{g}_m$ — решение краевой задачи в Ω: $\operatorname{div}\vec{g}_m = 0$,

$$\operatorname{rot}\vec{g}_m = \nabla\psi_m;\ \vec{g}_{mt/\Sigma_1} = \vec{g}_{mt/\Sigma_2} = \vec{F}_m^{(h)},\ \vec{g}_{mt/S} = 0^*, \qquad \text{(VI)}$$

$\gamma_m^{(1)}$ — решение краевой задачи в Ω:

$$\Delta\gamma_m^{(1)} = 0;\ \ \gamma_{m/\Sigma_1}^{(1)} = \gamma_m^0,\ \gamma_{m/S+\Sigma_2}^{(1)} = 0; \qquad \text{(VII)}$$

$\zeta_m^{(1)}$ — решение краевой задачи в Ω:

$$\Delta\zeta_m^{(1)} = 0;\ \zeta_{m/\Sigma_1}^{(1)} = \zeta_m^0,\ \left.\frac{\partial\zeta_m^{(1)}}{\partial n}\right|_S = 0;\quad \zeta_{m/\Sigma_2}^{(1)} = 0. \qquad \text{(VIII)}$$

$$(m = 1,\ 2, \ldots)$$

Доказательство. Из (14) следует, что любой вектор можно представить в виде

$$f = f_1 \oplus f_2 = f_1' \oplus f'',\ \text{где}\ f_1 \in H_1,\ f_2 \in H_2;\ f' \in H',\ f'' \in H''. \qquad (19)$$

Тогда для любых $f,\ g \in H$ имеем

$$(2ImA)f,\ g) = \frac{(Af,\ g) - (f,\ Ag)}{i} = \frac{(u_1,\ Qv_1) - (Qu_1,\ v_1)}{i} + \frac{(u_1,\ q'') - (f'',\ v_1)}{i}, \qquad (20)$$

где

$$u_1 = Af \in D_{1Q},\ v_1 = Aq \in D_{1Q},\ Qu_1 = f' \in H',\ Qv_1 = g' \in H'. \qquad (21)$$

Пусть

$$u_1 = \left[\frac{\vec{E}_1}{H_1}\right], \qquad v_1 = \left[\frac{\vec{E}_2}{H_2}\right].$$

Тогда

$$\frac{(u_1, Qv_1) - (Qu_1,\ v_1)}{i} = -\int\limits_{\Sigma}[E_{1t} \times \vec{H}_{2t}^*]\vec{z}_0 d\sigma + \int\limits_{\Sigma_0}[\vec{H}_{2t} \times \vec{E}_{1t}^*]\vec{z}_0 d\sigma = -\sum_{m=1}^{\infty}\{(\vec{E}_{1t}\ \vec{F}_m^{(e)})_{\Sigma_2}\ (\vec{G}_m^{(e)},\ \vec{H}_{2t})_{\Sigma_2} + (\vec{E}_{1t},\ \vec{F}_m^{(h)})_{\Sigma_2}\ (\vec{G}_m^{(h)},\ \vec{H}_{2t})_{\Sigma_2} + (\vec{H}_{1t},\ \vec{G}_m^{(e)})_{\Sigma_2}\ (\vec{F}_m^{(e)}, \vec{E}_{2t})_{\Sigma_2} + (\vec{H}_{1t},\ \vec{G}_m^{(h)})_{\Sigma_2}(F_m^{(h)},\ (\vec{E}_{2t})_{\Sigma_2}\} \qquad (22)$$

---

* Разрешимость краевых задач (IV), (VI) следует из того, что $\vec{f}_m$, $\vec{q}_m$ можно восстановить по $\nabla\varphi_m$, $\nabla\psi_m$ с помощью интеграла Био-Савара, а выполнение краевых условий вытекает из возможности подправки на градиент гармонической функции, формулы Стокса и соотношений

$$(\operatorname{rot}\vec{G}_m^{(e)}\ \vec{z}_0) = -\mu_m^2\gamma_m^0,\ (\operatorname{rot}\vec{F}_m^{(h)},\ \vec{z}_0) = \nu_m^2\zeta_m^0.$$

В силу соотношений

$$(\vec{E}_t,\ \vec{F}_m^{(h)})_{\Sigma_2} = (\vec{E}_t,\ \vec{F}_m^{(h)})_{\Sigma_1} + \int\limits_\Omega \operatorname{rot}\vec{E}\cdot\nabla\zeta_m d\Omega, \qquad \text{(a)}$$

$$(\vec{H}_t,\ G_m^{(e)})_{\Sigma_2} = (\vec{H}_t,\ \vec{G}_m^{(e)})_{\Sigma_1} - \int\limits_\Omega \operatorname{rot}\ \vec{H}\cdot\nabla\gamma_m d\Omega, \qquad \text{(в)}$$

$$(\vec{E}_t,\ F_m^{(e)})_{\Sigma_2} = (\vec{E}_t,\ \vec{F}_m^{(e)})_{\Sigma_1} + \int\limits_\Omega \operatorname{rot}\vec{E}\cdot\vec{f}_m d\Omega - \int\limits_\Omega \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{f}_m d\Omega, \qquad \text{(c)}$$

$$(\vec{H}_t,\ \vec{G}_m^{(h)})_{\Sigma_2} = (\vec{H}_t,\ G_m^{(h)})_{\Sigma_1} - \int\limits_\Omega \operatorname{rot}\ \vec{H}\cdot\vec{g}_m d\Omega + \int\limits_\Omega \vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{g}_m d\Omega \qquad \text{(d)}$$

и условия (21) имеем

$$\frac{(u_1,\ Qv_1) - (Qu_1,\ v_1)}{i} = -\sum_{m=1}^{\infty}\{[(\mu_0^{-1}\operatorname{rot}\vec{E}_1,\ \vec{f}_m) -$$
$$-(\vec{E}_1,\ \varepsilon_0^{-1}\operatorname{rot}\vec{f}_m)][-(\nabla\gamma_m,\ \varepsilon_0^{-1}\operatorname{rot}\vec{H}_2)] +$$
$$+[(\mu_0^{-1}\operatorname{rot}\vec{E}_1,\ \nabla\zeta_m)][-(\vec{g}_m,\ \varepsilon_0^{-1}\ \operatorname{rot}\ H_2) + (\mu_0^{-1}\operatorname{rot}\vec{g}_m\ \vec{H}_2] +$$
$$+[-(\varepsilon_0^{-1}\operatorname{rot}\vec{H}_1,\ \nabla\gamma_m)][(f_m,\ \mu_0^{-1}\operatorname{rot}\vec{E}_2) - \qquad (23)$$
$$-(\varepsilon_0^{-1}\operatorname{rot}\vec{f}_m,\ \vec{E}_2)] + [-(\varepsilon_0^{-1}\operatorname{rot}\vec{H}_1,\ \vec{g}_m) +$$
$$+(\vec{H}_1,\ \mu_0^{-1}\operatorname{rot}\vec{g}_m)][(\nabla\zeta_m,\ \mu_0^{-1}\operatorname{rot}\vec{E}_2)].$$

Преобразуем выражение $\frac{(u_1,\ \vec{g}'' - f'',\ v_1)}{i}$.

Так как $f'',\ \vec{g}'' \in H'' = \operatorname{Ker} Q^*$, то

$$f'' = \begin{bmatrix}\nabla p\\ \nabla q\end{bmatrix},\quad \vec{g}'' = \begin{bmatrix}\nabla\tilde{p}\\ \nabla\tilde{q}\end{bmatrix},\ \text{где}\ \Delta p = \Delta\tilde{p} = \Delta q = \tilde{\Delta} q = 0$$

в Ω

$$p/_{\Sigma_2+S} = \tilde{p}/_{\Sigma_2+S} = 0;\ \ q/_{\Sigma_2} = \tilde{q}/_{\Sigma_2} = 0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial n/^S} = \frac{\partial\tilde{q}}{\partial n/^S} = 0;\quad (u_1,\ \vec{g}'') = \int\limits_\Omega(\varepsilon_0\vec{E}_1\nabla\tilde{p}^* +$$
$$+\mu_0\vec{H}_1\nabla\tilde{q}^*)\,d\Omega = \int\limits_\Omega \operatorname{div}(\varepsilon_0\tilde{p}^*\vec{E}_1 + \mu_0\tilde{q}^*\vec{H}_1)\,d\Omega =$$
$$= \int\limits_\Sigma(E_{1n}\varepsilon_0\tilde{p}^* + H_{1n}\mu_0\tilde{q}^*)\ d\sigma = \sum_{m=1}^{\infty}[\varepsilon_0\mu_m^2(E_{1n},\ \overset{0}{\gamma}_m)_{\Sigma_1}(\overset{0}{\gamma}_m,\ \tilde{p})_{\Sigma_1} +$$
$$+\mu_0\nu_m^2(H_{1n},\ \zeta_m^0)_{\Sigma_1}(\zeta_m^0,\ \tilde{q})\Sigma_1] = \sum_{m=1}^{\infty}[(\vec{E}_1\varepsilon_0^{-1}\nabla\gamma_m^{(1)})\times$$
$$\times(\nabla\varphi_m,\ \nabla\tilde{p}) + (\vec{H}_1\nabla\zeta_m^{(1)}\mu_0^{-1})(\nabla\psi_m,\ \nabla\tilde{q})]. \qquad (24)$$

Аналогично

$$(f'', v_1) = \sum_{m=1}^{\infty} [(\nabla p, \nabla\varphi_m)(\varepsilon_0^{-1} \nabla\gamma_m^{(1)}, \vec{E}_2) +$$

$$+ (\nabla q, \nabla\psi_m)(\mu_0^{-1}\nabla\zeta_m^{(1)}, \vec{H}_2). \tag{25}$$

Объединив (23), (24), (25), с учетом (21) получим

$$\Big((2ImA) f, g) = -\sum_{m=1}^{\infty} \Big(f, p'\begin{bmatrix}0\\ \vec{f}_m\end{bmatrix} + iA^*\begin{bmatrix}\varepsilon_0^{-1}\nabla\varphi_m\\ 0\end{bmatrix}\Big) \times$$

$$\times\Big(p'\begin{bmatrix}\nabla\gamma_m\\ 0\end{bmatrix}g\Big) + \Big(f, p'\begin{bmatrix}\nabla\gamma_m\\ 0\end{bmatrix}\Big)\Big(p'\begin{bmatrix}0\\ \vec{f}_m\end{bmatrix} + iA\begin{bmatrix}\varepsilon_0^{-1}\Delta\varphi_m\\ 0\end{bmatrix}, g\Big) +$$

$$+\Big(f, p'\begin{bmatrix}0\\ \nabla\zeta_m\end{bmatrix}\Big)\Big(p'\begin{bmatrix}\vec{g}_m\\ 0\end{bmatrix} - iA^*\begin{bmatrix}0\\ \mu_0^{-1}\nabla\psi_m\end{bmatrix}, g\Big) +$$

$$+\Big(f, p'\begin{bmatrix}\vec{g}_m\\ 0\end{bmatrix} - iA^*\begin{bmatrix}0\\ \mu_0^{-1}\nabla\psi_m\end{bmatrix}\Big)\Big(p'\begin{bmatrix}0\\ \nabla\zeta_m\end{bmatrix}, g\Big) +$$

$$+\Big(f, -iA^*\begin{bmatrix}\varepsilon_0^{-1}\nabla\gamma_m^{(1)}\\ 0\end{bmatrix}\Big)\Big(p''\begin{bmatrix}\nabla\varphi_m\\ 0\end{bmatrix}, g\Big) +$$

$$+\Big(f, p''\begin{bmatrix}\nabla\varphi_m\\ 0\end{bmatrix}\Big)\Big(-iA^*\begin{bmatrix}\varepsilon_0^{-1}\nabla\gamma_m^{(1)}\\ 0\end{bmatrix}, g\Big) +$$

$$+\Big(f, iA^*\begin{bmatrix}0\\ \mu_0^{-1}\nabla\zeta_m^{(1)}\end{bmatrix}\Big)\Big(p''\begin{bmatrix}0\\ \nabla\psi_m\end{bmatrix}, g\Big) + \Big(f, p''\begin{bmatrix}0\\ \nabla\psi_m\end{bmatrix}\Big) \times$$

$$\times\Big(iA^*\begin{bmatrix}0\\ \mu_0^{-1}\nabla\zeta_m^{(1)}\end{bmatrix}, g\Big),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Имеют место следующие соотношения:*

$$e_{1m} = \begin{bmatrix}\nabla\gamma_m'\\ 0\end{bmatrix}, \quad e_{2m} = \begin{bmatrix}0\\ \vec{f}_m'\end{bmatrix},$$

$$e_{3m} = \begin{bmatrix}0\\ \nabla\zeta_m'\end{bmatrix}, \quad e_{4m} = \begin{bmatrix}\vec{g}_m'\\ 0\end{bmatrix},$$

$$e_{5m} = \begin{bmatrix}0\\ \vec{p}_m'\end{bmatrix}, \quad e_{6m} = \begin{bmatrix}\nabla\varphi_m''\\ 0\end{bmatrix},$$

$$e_{7m} = \begin{bmatrix}\vec{g}_m'\\ 0\end{bmatrix}, \quad e_{8m} = \begin{bmatrix}0\\ \nabla\psi_m\end{bmatrix}.$$

Здесь

γ_m — решение краевой задачи в Ω:

$$\Delta\gamma_m' = 0; \quad \frac{\partial \gamma_m'}{\partial n}\Big/_{\Sigma_1} = 0; \ \gamma_{m/S}' = 0,$$

$$\gamma_{m/\Sigma_2}' = \gamma_m^0; \tag{I'}$$

$\vec{f}_m'$ — решение краевой задачи в Ω: $\operatorname{div} \vec{f}_m' = 0$;

$$\operatorname{rot} \vec{f}_m' = \nabla \tilde{\varphi}_m; \quad \vec{f}_{mt/\Sigma_2}' = \vec{G}_m^{(e)},$$

$$(\vec{f}_m', \vec{n})_{/\Sigma_1 + S} = 0, \tag{II'}$$

где $\tilde{\varphi}_m$ — решение краевой задачи в Ω:

$$\Delta\tilde{\varphi}_m = 0; \quad \tilde{\varphi}_{m/\Sigma_1 + S} = 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_m}{\partial n}\Big/_{\Sigma_1} = -\mu_m^2 \gamma_m^0;$$

ζ_m' — решение краевой задачи в Ω:

$$\Delta\zeta_m' = 0; \ \frac{\partial \zeta_m'}{\partial n}\Big|_{\Sigma_1 + S} = 0;$$

$$\zeta_{m/\Sigma_2}' = \zeta_m^0; \tag{III'}$$

$\vec{g}_m'$ — решение краевой задачи в Ω: $\operatorname{div} \vec{g}_m' = 0$,

$$\operatorname{rot} \vec{g}_m' = \nabla\tilde{\psi}_m; \ (\vec{g}_m', \vec{n})_{/\Sigma_1} = 0,$$

$$\vec{g}_{mt/S}' = 0, \quad \vec{g}_{mt/\Sigma_2}' = \vec{F}_m^{(h} \tag{IV'}$$

где ψ_m — решение краевой задачи в Ω:

$$\Delta\tilde{\psi}_m = 0; \ \tilde{\psi}_{m/\Sigma_1} = 0; \ \frac{\partial \tilde{\psi}_m}{\partial n}\Big|_S = 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_m}{\partial n}\Big/_{\Sigma_2} = \nu_m^2 \zeta_m^0;$$

$\vec{p}_m'$ — решение краевой задачи в Ω: $\operatorname{div} \vec{p}_m' = 0$;

$$\operatorname{rot} \vec{p}'_m = \nabla\tilde{\gamma}_m; \quad \vec{p}'_{mt/\Sigma_2} = 0;$$
$$(\vec{p}'_m, \vec{n})_{/S+\Sigma_1} = 0, \tag{V'}$$
где $\tilde{\gamma}_m$ — решение краевой задачи в Ω:
$$\Delta\tilde{\gamma}_m = 0; \quad \tilde{\gamma}_{m/\Sigma_1} = \overset{0}{\gamma}_m; \quad \tilde{\gamma}_{m/S} = 0;$$
$$\frac{\partial\tilde{\gamma}_m}{бn}\Big/_{\Sigma_2} = 0;$$
$\tilde{\varphi}''_m$ — решение краевой задачи в Ω:
$$\tilde{\Delta\varphi}_m = 0; \quad \varphi'_{m/S+\Sigma_2} = 0; \quad \frac{\partial\varphi''_m}{\partial n}\Big/_{\Sigma_1} = \mu_m^2\overset{0}{\gamma}_m \tag{VI'}$$
$\vec{q}'_m$ — решение краевой задачи в Ω:
$$\operatorname{div} \vec{q}'_m = 0 \operatorname{rot} \vec{q}'_m = \nabla\tilde{\zeta}_m; \tag{VII'}$$
$$(\vec{q}'_m, \vec{n})_{/\Sigma_1} = 0; \quad \vec{q}'_{mt/S+\Sigma_2} = 0,$$
где $\tilde{\zeta}_m$ — решение краевой задачи в Ω:
$$\Delta\tilde{\zeta}_m = 0; \quad \tilde{\zeta}_{m/\Sigma_1} = \zeta_m^0; \frac{\partial\tilde{\zeta}_m}{\partial n}\Big/_{S+\Sigma_2} = 0,$$
ψ''_m — решение краевой задачи в Ω:
$$\Delta\tilde{\psi}''_m = 0; \quad \frac{\partial\psi''_m}{\partial n}\Big/_{\Sigma_1} = -\nu_m^2\zeta_m^0,$$
$$\frac{\partial\tilde{\psi}''_m}{\partial n}\Big/_{S} = 0 \quad \psi''_{m/\Sigma_2} = 0 \tag{VIII'}$$
$$(m = 1, 2, \ldots).$$
Доказательство. В лемме 3 показано, что
$$e_{1m} = p'\begin{bmatrix}\nabla\gamma_m\\0\end{bmatrix} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$
в силу (14)
$$\begin{bmatrix}\nabla\gamma_m\\0\end{bmatrix} = p'\begin{bmatrix}\nabla\gamma_m\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\nabla\alpha_m\\0\end{bmatrix},$$
где α_m — решение краевой задачи в Ω:
$$\Delta\alpha_m = 0; \quad \frac{\partial\alpha m}{\partial n}\Big/_{\Sigma_1} = \frac{\partial\gamma m}{\partial n}\Big/_{\Sigma_1} \quad \alpha_{m/S+\Sigma_2} = 0.$$
Отсюда следует, что
$$p'\begin{bmatrix}\nabla\gamma_m\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\nabla\gamma'_m\\0\end{bmatrix},$$

где γ_m — решение краевой задачи (1′). Итак, утверждение леммы для e_{1m} $(m=1, 2, \ldots)$ доказано. Аналогично доказываются утверждения леммы для e_{3m}, e_{6m}, e_{8m} $(m=1, 2, \ldots)$.

В силу леммы 3 $e_{5m} = -iA^*\begin{bmatrix}\varepsilon_0^{-1}\nabla\gamma_m^{(1)}\\ 0\end{bmatrix}$ $(m=1, 2, \ldots)$. Мы воспользуемся следующими соотношениями:

$$\Delta_{A^*} \perp \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} Q^*,$$
$$\Delta_A \perp \operatorname{Ker} A^* = \operatorname{Ker} Q.$$

Для произвольного $f \in H$ имеем

$$\left(-iA^*\begin{bmatrix}\varepsilon_0^{-1}\nabla\gamma_m^{(1)}\\ 0\end{bmatrix}, f\right) = \left(-iA^*\begin{bmatrix}\varepsilon_0^{-1}\nabla\gamma_m^{(1)}\\ 0\end{bmatrix}, f'\right) =$$
$$= \left(-i\begin{bmatrix}\varepsilon_0^{-1}\nabla\gamma_m^{(1)}\\ 0\end{bmatrix}, Af'\right) = \left(-ip_1\begin{bmatrix}\varepsilon_0^{-1}\nabla\gamma_m^{(1)}\\ 0\end{bmatrix}, Af'\right).$$

Аналогично, как это делалось для e_{1m}, e_{3m}, e_{6m}, e_{8m}, имеем

$$p_1\begin{bmatrix}\nabla\gamma_m^{(1)}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\nabla\tilde{\gamma}_m\\ 0\end{bmatrix}.$$

Так как $p_1\begin{bmatrix}\nabla\gamma_m^{(1)}\\ 0\end{bmatrix} \perp \operatorname{Ker} Q$, то $-i\begin{bmatrix}\varepsilon_0^{-1}\nabla\tilde{\gamma}_m\\ 0\end{bmatrix} = Q^*\begin{bmatrix}\nabla\alpha_m\\ \vec{p}_m\end{bmatrix}$, где $\nabla\alpha_m \in U''$, $\vec{p}_{mt}/_{\Sigma_2} = 0$; $(\vec{p}_m\vec{n})/_S = 0$.

Поскольку $QAf' = f'$ для произвольного $f' \in H'$, то

$$\left(-iA^*\begin{bmatrix}\varepsilon_0^{-1}\nabla\gamma_m^{(1)}\\ 0\end{bmatrix}, f\right) = \left(\begin{bmatrix}\nabla\alpha_m\\ \vec{p}_m\end{bmatrix}, f'\right) =$$
$$= \left(p'\begin{bmatrix}\nabla\alpha_m\\ \vec{p}_m\end{bmatrix}, f\right) = \left(\begin{bmatrix}0\\ \vec{p}_m{}'\end{bmatrix}, f\right),$$

где $\vec{p}_m{}'$ — решение краевой задачи (V′). Отсюда, в силу произвольности f, следует, что

$$e_{5m} = \begin{bmatrix}0\\ \vec{p}_m{}'\end{bmatrix} \quad (m=1, 2, \ldots),$$

что и требовалось доказать.

Утверждения леммы для e_{2m}, e_{4m}, e_{7m} $(m=1, 2 \ldots)$ доказываются аналогично. Из определения операторного комплекса и лемм **3**, **4** следует

Теорема 2. *Оператор A, вектор-функции $e_{\alpha m}$ (I′) — (VIII′) $(\alpha = 1, \ldots, 8;\ m = 1, 2, \ldots)$ и матрица $I = (I_{\alpha\beta}^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ образуют операторный комплекс θ.*

Теорема 3. *Отображение $w: \varphi^- \to \varphi^+$ ассоциированной открытой системы $\tilde{\theta}$ является ограниченным в l_2.*

Доказательство. Из вида w [1] легко получить, что утверждение теоремы эквивалентно следующему:

$$\|e_{\alpha m}\| \leqslant C \; (\alpha = 1, \; \ldots, \; 8; \; m = 1, \; 2 \; \ldots), \tag{26}$$

где C зависит лишь от геометрии области Ω.

Докажем (26) для $e_{1m} = \begin{bmatrix} \nabla\gamma_m' \\ 0 \end{bmatrix}$ $(m = 1, \; 2 \; \ldots)$. Как известно, γ_m доставляет минимум функционалу

$$I(\omega) = \int\limits_{\Omega} /\nabla\omega/^2 d\Omega \tag{27}$$

в классе функций

$$K\gamma_m = \left\{\omega : \omega \in w_2^1(\Omega), \; \omega/\Sigma_2 = \gamma_m^0, \quad \omega_S = 0\right\}. \tag{28}$$

Поэтому (26) достаточно доказать для некоторой функции из класса $K\gamma_m'$.

Выберем эту функцию следующим образом: пусть α_m — решение краевой задачи в $\tilde{\Omega}$*:

$$\Delta\alpha_m = 0; \quad \frac{\partial\alpha_m}{\partial n}\Big/ \Sigma_1 = 0; \; \alpha_m/\tilde{s} = 0; \; \alpha_m/\Sigma_2 = \gamma_m^0. \tag{29}$$

Используя разделение переменных, можно показать, что (26) для α_m в $\tilde{\Omega}$ справедливо. Затем α_m продолжаем на $\Omega/\tilde{\Omega}$ так, чтобы продолжение принадлежало классу $K\gamma_m'$, и норма продолжения увеличивалась не более чем в конечное, фиксированное число раз.

Доказательство (26) для остальных $e_{\alpha m}$ $(\alpha = 2, \; \ldots, \; 8; \; m = 1, \; 2 \; \ldots)$ может быть сведено к аналогичной задаче.

4. Связь между электромагнитным полем в задаче прохождения и операторным комплексом Θ.

Из анализа уравнений Максвелла (2′) и уравнений открытой системы $\tilde{\Theta}$ может быть получена

Теорема 4. *Электромагнитное поле* $\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H}_1 \end{bmatrix}$ *и передаточная функция* $S(\omega)$ *задачи прохождения связаны с внутренним состоянием* $\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix}$ *открытой системы* $\tilde{\Theta}$ *и характеристической оператор-функцией* $w(\omega)$ *оператора* A *следующим образом:*

---

* Ω — отрезок цилиндра с сечением Σ_1, находящийся внутри Ω; s — его боковая поверхность.

$$\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'E - \frac{i}{\omega\varepsilon_0} \sum\limits_{m=1}^{\infty} (\bar{\varphi}_{2m} \nabla \tilde{\varphi}_m + \bar{\varphi}_{5m} \nabla \tilde{\gamma}_m) \\ p'H + \frac{i}{\omega\mu_0} \sum\limits_{m=1}^{\infty} (\bar{\varphi}_{4m} \nabla \tilde{\psi}_m + \bar{\varphi}_{7m} \nabla \tilde{\zeta}_m) \end{bmatrix}. \tag{30}$$

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} B(\omega)| & 0 \\ 0 & \dfrac{|D(\omega)|}{|c(\omega)} \end{pmatrix} w(\omega) \begin{pmatrix} B^{-1}_{(\omega)}| & 0 \\ & \dfrac{|D'(\omega)|}{|c'(\omega)} \end{pmatrix}.$$

В теореме 3 было показано, что $w(\omega)$ — ограниченный оператор. Легко показать, что $S(\omega)$ является неограниченным оператором, что влечет неустойчивость задачи прохождения. Таким образом, из (31) следует, что неустойчивая задача прохождения путем линейного преобразования каждой гармоники сводится к устойчивой задаче. Следует отметить, что $B(\omega)$, $B^{-1}(\omega)$, $D(\omega)$, $D'(\omega)$ — конечномерные, блочно-диагональные матрицы, соответствующие проходящим гармоникам, а $c(\omega)$ и $c'(\omega)$ — бесконечномерные блочнодиагональные матрицы, причем блоками являются соответственно 4×8- и 8×4-мерные матрицы, норма которых неограниченно возрастает с ростом номера.

Возникающий здесь вопрос об аппроксимации задачи прохождения последовательностью устойчивых конечномерных задач, учитывающих только проходящие гармоники, при $l \to \infty$ (рис. 1) будет являться предметом особого рассмотрения.

Автор приносит глубокую благодарность М. С. Лившицу за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М. С. Операторы, колебание волны. Открытые системы. М., «Наука», 1966. 300 с.
2. Джебеян Г. Г., Цекановский Э. Р. Об одной несамосопряженной краевой задаче в теории волноводов.— «Математика», I, Изд. АН Арм. ССР, 1966, т. I, № 6, с. 359—373.
3. Быховский Э. Б. Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы.— «Вестник Ленингр. ун-та. Математика, механика, астрономия». Вып. 3, № 13, 1957, с. 50—66.
4. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области и операторах векторного анализа. — «Труды ин-та математики АН СССР», 1960, т. 59, с. 5—36.
5. Быховский Э. Б. Оценка вектора через его ротор и начально-краевая задача электродинамики в случае смешанных граничных условий. — «Вестник Ленингр. ун-та. Математика, механика, астрономия». Вып. 4, № 19, 1961, с. 161—164.