УДК 517.948 : 513.8+519.4

В. И. Шевченко

О СОВПАДЕНИИ МИНИМАЛЬНОГО И МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В работе приведены достаточные условия совпадения минимального и максимального операторов, построенных по дифференциальному выражению эллиптического типа, которое рассматривается в произвольной неограниченной области $G \subseteq R^n$.

Изучению этой задачи для выражений второго порядка посвящено большое количество работ. Частный вид выражений высокого порядка в области $G = R^n$ был изучен в работе [1].

В случае, когда дифференциальное выражение формально самосопряжено, задача о существенной самосопряженности минимального оператора изучалась в работах [2]—[4].

Рассмотрим в некоторой области $G \subseteq R^n$ дифференциальное выражение порядка $2m$ вида

$$P \equiv \sum_{\substack{|\alpha| \leq m;\ |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta|>0}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_{\alpha,\beta}(x) D^\beta + q(x), \tag{1}$$

где α, β — целочисленные мультиндексы,

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n); \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n); \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n;$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}; \quad D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdot \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}.$$

Коэффициенты $a_{\alpha,\beta}(x)$, $q(x)$ комплексные, удовлетворяющие следующим условиям гладкости:

$$a_{\alpha,\beta}(x) \in C^{|\alpha|+|\beta|+m}(G); \quad q(x) \in C^m(G) \tag{2}$$

Выражение, формально сопряженное к выражению (1), будет иметь вид

$$P^+ \equiv \sum_{\substack{|\alpha| \leq m;\ |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta|>0}} (-1)^{|\beta|} D^\beta \overline{a_{\alpha,\beta}(x)} D^\alpha + \overline{q(x)}. \tag{3}$$

Минимальным оператором, порожденным дифференциальным выражением (I), мы будем называть замыкание оператора P, рассматриваемого на финитных функциях в $L_2(G)$, и будем обозначать $P_{\min}$. Соответственно максимальный оператор определим по формуле

$$P_{\max} = (P^+_{\min})^*.$$

Очевидно, выполняется включение $P_{\min} \subseteq P_{\max}$. Нашей задачей будет нахождение условий, при которых эти операторы совпадают. Приведем простое, но полезное

Предложение. *Для того, чтобы операторы $P_{\min}$ и $P_{\max}$ совпадали, необходимо и достаточно, чтобы для всех $u \in D(P_{\max})$, $v \in D(P_{\max}^{+})$, выполнялось равенство*

$$(P_{\max} u, v) = (u, P_{\max}^{+} v), \tag{4}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(G)$.

Обозначим $M_m \overset{\text{def}}{=} \{\alpha : |\alpha| = m\}$. Предположим, что выражение (1) удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha, \beta}(x) \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta \geqslant a(x) \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2 \tag{5}$$

для всех точек $x \in G$, где $a(x)$ — вещественная положительная функция; ξ_α — произвольный набор комплексных чисел, таких что $\alpha \in M_m$.

Для выражений второго порядка условие (5) совпадает с сильной эллиптичностью, для $m > 1$ оно более ограничительно. Условию (5) удовлетворяют, например, выражения вида $(-\Delta)^m +$ члены меньших порядков. В случае $n = 2$ старшие члены выражения (I) будут иметь вид:

$$(-1)^m \sum_{i \leqslant m;\ j \leqslant m} \frac{\partial^m}{\partial x_1^i \partial x_2^{m-i}} a_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial^m}{\partial x_1^j \partial x_2^{m-j}}.$$

Из чего видно, что соответствующая форма будет удовлетворять (5) тогда и только тогда, когда матрица $a_{ij}(x_1, x_2)$ положительно определена для всех $x \in G \subseteq R^2$.

Теорема 1. *Рассмотрим выражение* (I), *удовлетворяющее условиям* (2), (5) *Предположим, что существует семейство компактных областей $G_\nu \subset G$, $\nu = 1, 2, \ldots$,*

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots, \quad \bigcup G_\nu = G,$$

и последовательность положительных финитных функций $e_\nu(x)$, $\varphi_\nu(x)$; $\mu_{k,\nu}(x)$, $(k = 0, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots)$ таких, что

$$\operatorname{supp} e_\nu \subseteq G_{\nu+1}, \quad \operatorname{supp} \varphi_\nu \subseteq G_{\nu+1} \setminus G_\nu \overset{\text{def}}{=} \pi_\nu,$$

а также удовлетворяющих условиям:

$$e_\nu(x) = 1 \text{ при } x \in G_\nu,\ e_\nu(x) < 1 \text{ при } x \in \pi_\nu,$$
$$e_\nu(x) = 0 \text{ при } x \in G \setminus G_{\nu+1}; \tag{6}$$

$$|a_{\alpha,\beta} D^{\alpha-\gamma} e_\nu| + |a_{\beta,\alpha} D^{\alpha-\gamma} e_\nu| \leqslant C_1 \mu_{|\beta|,\nu} \cdot \mu_{|\gamma|,\nu};\ |\alpha| \leqslant m;\ \gamma < \alpha; \tag{7}$$

$$|a_{\alpha,\beta} D^{\alpha-\gamma} \varphi_\nu| + |a_{\beta,\alpha} D^{\alpha-\gamma} \varphi_\nu| \leqslant C_2 \mu_{|\beta|,\nu} \cdot \mu_{|\gamma|,\nu};\quad \gamma < \alpha; \tag{8}$$

$$\varphi_\nu(x) \cdot a(x) \geqslant C_3 \mu_{m,\nu}^2(x); \tag{9}$$

$$\mu_{k,\nu}^2(x) \leqslant C_4 \mu_{k+1,\nu}(x) \cdot \mu_{k-1,\nu}(x);\ k = 1, \ldots, m-1; \tag{10}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\mu_{k,\nu}(x)\right| \leqslant C_5\mu_{k-1,\nu}(x);\ k=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n; \tag{11}$$

$$\varphi_\nu^2(x) \leqslant C_6\varphi_\nu(x)\operatorname{Re} q(x) + C_7, \tag{12}$$

где $C_1, \ldots, C_7$ — *некоторые постоянные;*

$$\mu_{0,\nu}^2(x) \leqslant \varepsilon\varphi_\nu(x)\operatorname{Re} q(x) + C_\varepsilon \tag{13}$$

для любого $\varepsilon > 0$. *Тогда операторы* $P_{\min}$ *и* $P_{\max}$ $(P_{\min}^+, P_{\max}^+)$ *совпадают.*

В силу известных теорем о гладкости обобщенных решений (см. [5]), а также условий (2), (5), $D(P_{\max})$ и $D(P_{\max}^+)$ имеют следующие описания:

$$D(P_{\max}) = \{u : u \in W_{2,\mathrm{lok}}^{2m}(G) \Lambda Pu \in L_2(G)\};$$

$$D(P_{\max}^+) = \{v : v \in W_{2,\mathrm{lok}}^{2m}(G) \Lambda P^+v \in L_2(G)\}. \tag{14}$$

Для доказательства теоремы 1 достаточно проверить равенство (4) на финитных функциях, удовлетворяющих (14). Доказательство разобьем на несколько шагов, выделив их в виде лемм. Обозначим:

$$B(u, v) = \bar{v}Pu - u\overline{P^+v}.$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (6), (7) *теоремы 1, тогда для* $u \in D(P_{\max})$; $v \in D(P_{\max}^+)$ *будет выполнена оценка*

$$\left|\int e_\nu B(u, v)\,\mathrm{dx}\right| \leqslant C\left\{\|u\|_{H_{\mu_\nu}^m}^2 + \|v\|_{H_{\mu_\nu}^m}^2\right\}, \tag{15}$$

где

$$\|u\|_{H_{\mu_\nu}^m}^2 = \sum_{k=0}^m J_{k,\nu}^2(u), \tag{16}$$

$$J_{k,\nu}^2(u) = \int \mu_{k,\nu}^2(x) \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2\,\mathrm{dx} \tag{17}$$

$J_{k,\nu}(u)$ *будем называть k-м моментом функции* u.

Доказательство. Интегрируя по частям, пользуясь свойствами функции $e_\nu(x)$, а также условием (7), получаем:

$$\left|\int e_\nu B(u, v)\,\mathrm{dx}\right| = \left|\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m;\ |\beta|\leqslant m\\ \gamma<\alpha;\ \gamma<\beta\\ |\alpha|+|\beta|>0}} \int a_{\alpha,\beta}\left\{\binom{\alpha}{\gamma} D^{\alpha-\gamma}e_\nu D^\beta u\overline{D^\gamma v} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \binom{\beta}{\gamma} D^{\beta-\gamma'}e_\nu\overline{D^\alpha v}\cdot D^{\gamma'}u\right\}\mathrm{dx}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m;\ |\beta|\leqslant m\\ |\alpha|+|\beta|>0\\ \gamma<\alpha}} \int_{\pi_\nu} |a_{\alpha,\beta}D^{\alpha-\gamma}e_\nu|\cdot|D^\alpha u|\cdot|D^\gamma v|\,\mathrm{dx} + \right.$$

$$+\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m;\ |\beta|\leqslant m;\\ |\alpha|+|\beta|>0\\ \gamma'<\beta}} \int_{\pi_\nu} |a_{\alpha,\beta}\cdot D^{\beta-\gamma'}e_\nu|\cdot|D^\beta v|\cdot|D^{\gamma'}u|\,dx\Bigg\} \leqslant$$

$$\leqslant C'\sum_{k<m}\left\{\int \mu_{k,\nu}^2\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha u|^2\,dx+\int \mu_{k,\nu}^2\sum_{|\alpha|=k}|D^\beta v|^2\,dx\right\}=$$

$$=C'\left\{\|u\|^2_{H^m_{\mu_\nu}}+\|v\|^2_{H^m_{\mu_\nu}}\right\}.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (5), (8), (9) теоремы 1, тогда для любых* $u\in D(P_{\max})$, $v\in D(P^+_{\max})$ *будут справедливы оценки*

$$J^2_{m,\nu}(u)\leqslant C_1\sum_{k=0}^{m-1}J^2_{k,\nu}(u)+C_0\left\{|(u\varphi_\nu,\ Pu)|-\int\varphi_\nu\operatorname{Re}q|u|^2\,dx\right\}; \qquad (18)$$

$$J^2_{m,\nu}(v)\leqslant C_1'\sum_{k=0}^{m-1}J^2_{k,\nu}(v)+$$

$$+C_0'\left\{|(v\varphi_\nu,\ P^+v)|-\int\varphi_\nu\operatorname{Re}q|v|^2\,dx\right\}. \qquad (19)$$

При доказательстве леммы будет видно, что достаточно получить хотя бы одно из неравенств (18), (19).

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\operatorname{Re}\int\varphi_\nu\bar{u}Pu\,dx.$$

Путем интегрирования по частям получим из него следующее неравенство:

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\int\varphi_\nu\operatorname{Re}a_{\alpha,\beta}D^\alpha u\cdot\overline{D^\beta u}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_1\sum_{\substack{|\beta|=m;\ |\alpha|\leqslant m\\ \gamma\leqslant\alpha;\ |\gamma|\neq m}}\int|a_{\alpha,\beta}D^{\alpha-\gamma}\varphi_\nu|\cdot|D^\beta u|\cdot|D^\gamma u|\,dx+$$

$$+C_2\sum_{\substack{|\beta|<m\\ |\alpha|=|\gamma|=m}}\int|a_{\alpha,\beta}\cdot D^{\alpha-\gamma}\varphi_\nu|\cdot|D^\beta u|\cdot|D^\gamma u|\,dx+$$

$$+C_3\sum_{\substack{|\alpha|<m;\ |\beta|<m;\\ |\alpha|+|\beta|>0\\ \gamma<\alpha}}\int|a_{\alpha,\beta}D^{\alpha-\gamma}\varphi_\nu|\cdot|D^\beta u|\cdot|D^\gamma u|\,dx+$$

$$+\left|\int\bar{u}\varphi_\nu Pu\,dx\right|-\int\varphi_\nu\operatorname{Re}q|u|^2\,dx. \qquad (20)$$

Оценим снизу левую часть (20), пользуясь эллиптичностью (5) и условием (8) теоремы I, а правую часть по условию (9). Выделяя m-й момент с ε в правой части, получаем оценку

$$J^2_{m,\nu}(u)\leqslant\varepsilon J^2_{m,\nu}(u)+C\varepsilon^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}J^2_{k,\nu}(u)+$$

$$+|(u\varphi_\nu,\ Pu)|-\int\varphi_\nu\operatorname{Re}q|u|^2\,dx,$$

из которой неравенство (18) следует тривиальным образом. Чтобы показать выполнимость неравенства (19), нужно повторить приведенные рассуждения для выражения

$$\operatorname{Re}\int \varphi_\nu v P^+ v \, dx.$$

Лемма 3. (Неравенства типа Эрлинга). *Пусть выполнены условия* (10), (11) *теоремы* 1, *тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *будут иметь место неравенства*

$$J^2_{k,\nu}(u) \leqslant C_\varepsilon J^2_{k-1,\nu}(u) + \varepsilon J^2_{k+1,\nu}(u), \quad k = 1, \ldots, m-1. \tag{21}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_{k,j,\nu}(u) = \mu^2_{k,\nu}(x) \sum_{|\alpha|=k-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha u\right) \cdot (\overline{D^\alpha u}).$$

В силу финитности функции $\mu_{k,\nu}(x)$ имеем тождество

$$\sum_{j=1}^{n} \int \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_{k,j,\nu}(u)\, dx = \int \mu^2_{k,\nu} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2\, dx +$$

$$+ 2\int \mu_{k,\nu} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\partial \mu_{k,\nu}}{\partial x_j} \sum_{|\alpha|=k-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha u\right) (\overline{D^\alpha u})\, dx +$$

$$+ \int \mu^2_{k,\nu} \sum_{\substack{|\alpha|=k-1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} D^\alpha u\right) \cdot (D^\alpha u)\, dx = 0.$$

Из полученного тождества и условий (10), (11) теоремы 1 получаем неравенство

$$J^2_{k,m}(u) \leqslant C \left\{ \int \mu_{k-1,\nu} \cdot \mu_{k,\nu} \sum_{|\alpha|=k-1} \left|\frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha u\right| \sum_{|\beta|=k-1} |D^\beta u|\, dx + \right.$$

$$\left. + \int \mu_{k-1,\nu} \cdot \mu_{k+1,\nu} \sum_{\substack{|\alpha|=k-1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \left|\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} D^\alpha u\right| \cdot \left|\sum_{|\beta|=k-1}\right| D^\beta u|\, dx \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\delta,\varepsilon} J^2_{k-1,\nu}(u) + \delta J^2_{k,\nu}(u) + \varepsilon J^2_{k+1,\nu}(u).$$

Подбирая соответственно $0 < \delta < 1$ и перенося в левую часть k-й момент, получаем неравенство (19).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для* $u \in D(P_{\max})$, $v \in D(P^+_{\max})$ *справедливы оценки*

$$J^2_{k,\nu}(u) \leqslant C \left\{ \|u\|^2_{L_2(\pi_\nu)} + \|Pu\|^2_{L_2(\pi_\nu)} \right\}, \tag{22}$$

$$J^2_{k,\nu}(v) \leqslant C' \left\{ \|v\|^2_{L_2(\pi_\nu)} + \|Pv\|^2_{L_2(\pi_\nu)} \right\}, \tag{23}$$

$$k = 0, \ldots, m.$$

Достаточно получить одну из систем неравенств (22), (23). Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ верна оценка

$$J^2_{k,\nu} \leqslant C_\varepsilon J_{0,\nu} + \varepsilon J^2_{k+1,\nu}. \tag{24}$$

Доказательство проведем методом индукции. При $k=1$ оценка (24) вытекает из неравенства (21). Предположим, что оценка (24) верна при k, покажем ее выполнимость при $k+1$. Для любого $\delta > 0$ неравенство (21) дает оценку

$$J^2_{k+1,\nu} \leqslant C_\delta J^2_{k,\nu} + \delta J^2_{k+2,\nu}, \tag{25}$$

из которой, используя (24), получаем

$$J^2_{k+1,\nu} \leqslant C_\delta \cdot C_\varepsilon J^2_{0,\nu} + C_\delta \cdot \varepsilon J^2_{k+1,\nu} + \delta J^2_{k+2,\nu}. \tag{26}$$

Из неравенства (26) оценка (24) следует, если выбрать соответствующим образом δ и ε.

Из (24) легко получить неравенство вида

$$J^2_{k,\nu} \leqslant C_\varepsilon J^2_{0,\nu} + \varepsilon J^2_{m,\nu}. \tag{27}$$

Следующим шагом доказательства леммы (4) будет получение оценки (22) при $k=m$. Для этого воспользуемся неравенством (18), оценивая его правую часть через (27).

$$\begin{aligned} J^2_{m,\nu}(u) \leqslant C_0 \sum_{k=0}^{m-1} J^2_{k,\nu}(u) + C_1 \Big\{ \int |u\varphi_\nu| \cdot |Pu| \, dx - \\ - \int \varphi_\nu \operatorname{Re} q \, |u|^2 \, dx \Big\} \leqslant \varepsilon J^2_{m,\nu}(u) + \\ + \int \left[C_\varepsilon \mu^2_{0,\nu} - (1-\delta')\varphi_\nu \operatorname{Re} q \right] \cdot |u|^2 \, dx + \\ + \int \left[\delta\varphi^2_\nu - \delta\varphi_\nu \operatorname{Re} q \right] \cdot |u^2| \, dx + C_\delta \int_{\pi_\nu} |Pu|^2 \, dx, \end{aligned} \tag{28}$$

где ε, δ, δ' — любые положительные числа. Выбирая их таким образом, чтобы $\varepsilon < 1$, $\delta' = C_6 \cdot \delta < 1$, и используя условия (12), (13) теоремы 1 и перенося выражение $\varepsilon J^2_{m,\nu}(u)$ в левую часть неравенства, получаем оценку m-го момента

$$J^2_{m,\nu}(u) \leqslant C \left\{ \| u \|^2_{L_2(\pi_\nu)} + \| Pu \|^2_{L_2(\pi_\nu)} \right\}. \tag{29}$$

Завершим доказательство леммы. Для этого оценим правую часть неравенства (27) через (28):

$$\begin{aligned} J^2_{k,\nu}(u) \leqslant \varepsilon^2 J^2_{m,\nu}(u) + \varepsilon C_\delta \int_{\pi_\nu} |Pu|^2 \, dx + \\ + \varepsilon \Big\{ \int \left[C_\varepsilon \mu^2_{0,\nu} - (1-\delta')\varphi_\nu \right] \cdot |u|^2 \, dx + \\ + \int \left[\delta\varphi^2_\nu - \delta'\varphi_\nu \operatorname{Re} q \right] \cdot |u|^2 \, dx \Big\}. \end{aligned}$$

Оценивая m-й момент правой части неравенства по (29), а также пользуясь условиями (12), (13) теоремы 1, получаем оценку k-го момента. Лемма 4 доказана.

Из лемм 1 и 4 следует, что для $u \in D(P_{\max})$ и $v \in D(P^{+}_{\max})$ выполняется соотношение

$$\lim_{\nu \to \infty} \int e_\nu B(u, v)\, dx = 0.$$

Покажем, что этого достаточно для доказательства теоремы 1. Проверим выполнимость равенства (4):

$$\left| \int B(u, v)\, dx \right| = \left| \int_G (1 - e_\nu) B(u, v)\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_G e_\nu B(u, v)\, dx \right| \leqslant C \lim_{\nu \to \infty} \left\{ \| u \|^2_{L_2(G/G_\nu)} + \right.$$

$$\left. + \| v \|^2_{L_2(G/G_\nu)} + \| Pu \|^2_{L_2(G/G_\nu)} + \| P^+ v \|^2_{L_2(G/G_\nu)} \right\} +$$

$$+ \lim_{\nu \to \infty} \left| \int e_\nu B(u, v)\, dx \right| = 0.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 1 предполагает существование последовательностей функций $e_\nu(x)$, $\varphi_\nu(x)$, $\mu_{k,\nu}(x)$, которые обеспечивали бы выполнимость ее условий. Следующая теорема дает нам конструктивный метод построения этих последовательностей.

Теорема 2. *Предположим, что существуют:*

а) гладкая вещественная положительная функция $R(x)$ такая, что замыкание множества вида

$$G_C \overset{\text{def}}{=} \{x : R(x) < C\},$$

(где C — произвольная постоянная) является компактом, строго лежащим в области G;

б) гладкие вещественные функции $Q(x)$ и $r(x)$ такие, что $1 \leqslant Q(x) \leqslant \infty$ и для точек, достаточно близких к границе области G, удовлетворяющие условиям

$$|a_{\alpha, \beta}| \leqslant C_1 a(x) \cdot Q(x)^{-1 + \frac{|\alpha| + |\beta|}{2m}} \cdot r^{-1 + \frac{|\alpha| + |\beta|}{2m}}(x); \tag{30}$$

$$|D^\alpha R(x)| \leqslant C_2 \cdot Q^{-1 + \frac{|\alpha|}{2m}}(x) \cdot r^{-\frac{|\alpha|}{2m}}(x); \tag{31}$$

$$\left| D^\alpha Q^{-\frac{1}{2m}}(x) \right| \leqslant C_3 Q^{\frac{|\alpha| - 1}{2m}}(x) \cdot r^{-\frac{|\alpha|}{2m}}(x); \tag{32}$$

$$\left| r^{\frac{|\alpha| + 1}{2m}}(x) \cdot D^\alpha r^{-\frac{1}{2m}}(x) \right| \leqslant C_4; \tag{33}$$

$$\operatorname{Re} q(x) \geqslant -C_5 Q(x); \tag{34}$$

$$a(x) r^{-1}(x) \leqslant \varepsilon Q^{-1}(x) \operatorname{Re} q(x) + C_\varepsilon, \tag{35}$$

где $a(x)$ — миноранта в условии (5). *Пусть $a(x) \in C^1(G)$ и выполняется неравенство*

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} a(x) \right| \leqslant C_6 r^{-\frac{1}{2m}}(x) \cdot Q^{\frac{1}{2m}}(x) \cdot a(x), \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

$C_1, \ldots, C_6$ — некоторые положительные постоянные, а ε — произвольное положительное число. Тогда операторы $P_{\min}$ и $P_{\max}$ ($P^+_{\min}$, $P^+_{\max}$) совпадают.

Доказательство теоремы 2 сводится к фактическому построению функций $e_\nu(x)$, $\varphi_\nu(x)$, $\mu_{k,\nu}(x)$; $k = 0, \ldots, m$; $\nu = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим функцию

$$e_{k,\nu}(t) = (t - \nu)^{k+1} (\nu + 1 - t)^{k+1}.$$

Тогда искомые последовательности строим следующим образом:

$$e_\nu(x) = 1 \text{ при } x \in G_\nu,$$

$$e_\nu(x) = 0 \text{ при } x \in G \setminus G_{\nu+1};$$

$$e_\nu(x) = C_\nu \int_{R(x)}^{\nu+1} e_{2m,\nu}(t)\,dt \text{ при } x \in \pi_\nu,$$

C_ν — постоянная, такая, что выполняется условие $e_\nu(x) = 1$ для $x \in \{x : R(x) = \nu\}$;

$$\mu_{k,\nu}(x) = Q^{-\frac{k}{2m}}(x) \cdot r^{\frac{k-m}{2m}}(x)\, a^{\frac{1}{2}}(x)\, e_{k,\nu}(R(x)) \text{ для } x \in \pi_\nu;$$

$$\mu_{k,\nu}(x) = 0 \text{ при } x \notin \pi_\nu;$$

$$\varphi_\nu(x) = Q^{-1}(x)\, e_{2m,\nu}(R(x)), \text{ если } x \in \pi_\nu;$$

$$\varphi_\nu(x) = 0 \text{ для } x \notin \pi_\nu.$$

Следствие. *Рассмотрим дифференциальное выражение вида*

$$P_1 = (-\Delta)^m + q(x).$$

Предположим, что существует сферично-симметрическая функция $Q(x) = Q(|x|)$, удовлетворяющая условиям (32), (34), *а также соотношению типа Титчмарша-Сиерса*

$$\int_0^\infty Q^{-1+\frac{2}{2m}}(\tau)\,d\tau = \infty.$$

Тогда операторы $P_{1,\min}$ и $P_{1,\max}$ совпадают.

Полагаем в данном случае $r(x) \equiv a(x) \equiv 1$,

$$R(x) = \int_0^{|x|} Q^{-1+\frac{1}{2m}}(\tau)\,d\tau.$$

Когда область ограничена, условия теоремы 2 являются условиями на сингулярность коэффициентов вблизи границы области.

Методом данной работы можно исследовать также операторы, порожденные граничными задачами.

Автор приносит благодарность своему руководителю Прокопенко Л. Н. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимадисламов Н. Г. Достаточные условия совпадения минимального и максимального операторов в частных производных и дискретности их спектра. — «Математические заметки», 1968, т. 4, № 3, с. 301—311.
2. Исмагилов Р. С. Об условиях самосопряженности дифференциальных операторов высшего порядка. — ДАН СССР, 1962, т. 142, № 6, с. 1239—1242.
3. Брусенцев А. Г., Рофе-Бекетов Ф. С. — Условие самосопряженности операторов эллиптического типа высших порядков. — «Математическая физика и функциональный анализ», 1971, вып. 2, с. 15—25.
4. Брусенцев А. Г., Рофе-Бекетов Ф. С. Условие самосопряженности дифференциальных операторов эллиптического типа высших порядков. — «Функциональный анализ и его приложения», 1973, вып. 8, с. 46—49.
5. Березанский Ю. М. Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев, «Наука», 1965. 798 с.