УДК 517.8519.9

Н. И. Хиргий

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ПЕРЕДАЮЩЕЙ ЛИНЕЙНОЙ СТРУКТУРЫ

1°. Будем говорить, что ориентированный граф G наделен структурой линейной цепи в сепарабельном гильбертовом пространстве Λ, если

а) установлена биекция $\vartheta: U \to e$ между множеством дуг U графа G и некоторым ортонормированным базисом e пространства Λ;

б) каждой дуге $u \in U$ сопоставлены две величины: напряжение $v(u)$ и ток $i(u)$, причем

$$\sum_{u\in U} |v(u)|^2 < \infty, \quad \sum_{u\in U} |i(u)|^2 < \infty;$$

в) векторы $\mathrm{v} = \sum_{u\in U} v(u)\,\vartheta u$ и $\mathrm{i} = \sum_{u\in U} i(u)\,\vartheta u$

удовлетворяют законам Кирхгофа

$$S\mathrm{i} = 0, \quad Q\mathrm{v} = 0, \tag{1}$$

где S, Q — операторы, задаваемые в базисе e матрицей разрезов s и матрицей циклов q соответственно;

г) множество дуг U разбито на два непересекающихся подмножества U^{ex} и U^{in}, элементы которых называются внешними и внутренними дугами соответственно;

д) для некоторого разбиения множества внутренних дуг на α-дуги и β-дуги:

$$U^{\mathrm{in}} = U^{\alpha} \cup U^{\beta} \; (U^{\alpha} \cup U^{\beta} = \varnothing) \tag{2}$$

существует зависимость

$$\xi = X\psi, \tag{3}$$

где $\psi = \sum_{u\in U^{\alpha}} i(u)\,\vartheta u + \sum_{u\in U^{\beta}} v(u)\,\vartheta u$, $\xi = \sum_{u\in U^{\beta}} i(u)\,\vartheta u + \sum_{u\in U^{\alpha}} \vartheta(u)\,\vartheta u$ или, используя обозначения (12),

$$\psi = P_{\alpha}\mathrm{i}^{\mathrm{in}} + P_{\beta}\mathrm{v}^{\mathrm{in}}, \quad \xi = P_{\alpha}\mathrm{v}^{\mathrm{in}} + P_{\beta}\mathrm{i}^{\mathrm{in}}. \tag{4}$$

Внутреннее пространство, т. е. подпространство пространства Λ, натянутое на множество ортов $\vartheta U^{\mathrm{in}}$, обозначим через H, а внешнее — через E ($E \supset \vartheta U^{\mathrm{ex}}$).

При определении передающей линейной структуры множество внешних дуг разбивается на два равномощных подмножества — множество входных дуг U^- и множество выходных дуг U^+. Соответственно этому разбиению внешнее пространство распадается на два изометричных подпространства и вводится оператор J_0, осуществляющий изометрию этих подпространств. Входом φ^- и выходом φ^+ структуры называются векторы $\varphi^- = -\mathrm{v}^- + J_0\mathrm{i}^-$, $\varphi^+ = \mathrm{v}^+ + J_0^*\mathrm{i}^+$, где

$$\mathrm{v}^\pm = \sum_{u \in U^\pm} v(u)\,\vartheta u, \quad \mathrm{i}^\pm = \sum_{u \in U^\pm} i(u)\,\vartheta u.$$

Задача о прохождении сигналов через передающую линейную структуру состоит в определении выхода по произвольно заданному входу, т. е. в нахождении коэффициента прохождения W:

$$\varphi^+ = W\varphi^-. \tag{5}$$

2°. Каркас графа [1] называется входным (выходным) каркасом передающей структуры на этом графе, если он содержит все входные (выходные) дуги и еще внутренние. Каркас называется регулярным, если фундаментальные матрицы разрезов и циклов, определяемые этим каркасом, задают ограниченные операторы в пространстве Λ.

Наличие у структуры входного (выходного) каркаса означает, что в графе структуры нет разрезов, состоящих только из выходных (входных) дуг, и нет циклов, состоящих только из входных (выходных) дуг. Для разрешимости задачи прохождения необходимо, чтобы не было ни разрезов, ни циклов, состоящих только из входных дуг. Следующая теорема устанавливает достаточные условия для разрешимости задачи прохождения.

Теорема 1. *Пусть для передающей линейной структуры на графе существуют регулярные входной и выходной каркасы. Тогда коэффициент прохождения совпадает с оператор-функцией*

$$W(X) = K - (\Gamma_1 X + \Gamma_2)(AX + B)^{-1}\Gamma \tag{6}$$

при всяком X из области определения функции $W(X)$.

Доказательство. Матрица разрезов s_+ по регулярному выходному каркасу может быть представлена в виде блочной матрицы

$$s_+ = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & I & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & I & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

а матрица циклов q_- по регулярному входному каркасу — в виде

$$q_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} & I & a_{12} & a_{11} \\ 0 & I & a_{23} & 0 & a_{22} & a_{21} \\ I & 0 & a_{33} & 0 & a_{32} & a_{31} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где первые блок-столбцы отвечают выходным дугам, последние — входным, остальные — внутренним дугам, причем, внутренние дуги, соответствующие вторым (пятым) блок-столбцам, принадлежат только выходному (входному) каркасу, третьим — обоим рассматриваемым каркасам, а четвертым — ни одному. Для представлений (7), (8) нам пришлось разбить множество дуг графа на подмножества (конечные или бесконечные) и заново пронумеровать дуги в каждом из них. Всякий раз, при выполнении таких процедур в множестве дуг, одновременно посредством биекции ϑ подвергается аналогичным процедурам и базис e.

Из блоков матриц (7), (8) сформируем следующие матрицы:

$$a_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{13} & I & a_{12} \\ I & a_{23} & 0 & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$\gamma_q = \begin{bmatrix} 0 & a_{33} & 0 & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\gamma_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} a_{31} & 0 \\ 0 & -b_{13} \end{bmatrix},$$

$$b_0 = \begin{bmatrix} I & 0 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & I & b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 & -b_{23} \\ 0 & -b_{33} \\ a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы задают в базисах ϑU^{in} и ϑU^{ex} ограниченные операторы соответственно*

$$A_0 : H \to H; \quad \Gamma_q : H \to E; \quad \Gamma_s : H \to E;$$
$$K : E \to E; \quad B_0 : H \to H; \quad \Gamma : E \to H.$$

Будем считать, что изометрия J_0 выбрана так, что оператор $J = J_0^* + J_0$ (в том же базисе, что и оператор K) имеет матричное представление

$$j = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

Из законов Кирхгофа (1) получим соотношения

$$A_0 \mathrm{v}^{\text{in}} + B_0 \mathrm{i}^{\text{in}} - \Gamma \varphi^- = 0, \tag{10}$$

$$\varphi^+ + \Gamma_q \mathrm{v}^{\text{in}} + \Gamma_s \mathrm{i}^{\text{in}} - K \varphi^- = 0, \tag{11}$$

где $\mathrm{v}^{\text{in}} = \sum\limits_{u \in U^{\text{in}}} v(u)\, \vartheta u$, $\mathrm{i}^{\text{in}} = \sum\limits_{u \in U^{\text{in}}} i(u)\, \vartheta u$ — векторы напряжений и то-

* Операторы будем обозначать прописными буквами, а их матричные представления — одноименными строчными.

ков на внутренних дугах. Введем во внутреннем пространстве следующие ортопроекторы равенствами:

$$P_\alpha \vartheta u = \begin{cases} \vartheta u, & u \in U^\alpha \\ 0, & u \in U^\beta \end{cases}, \quad P_\beta \vartheta u = \begin{cases} 0, & u \in U^\alpha \\ \vartheta u, & u \in U^\beta \end{cases}. \tag{12}$$

Из (3), (4) имеем

$$\mathrm{v}^{\mathrm{in}} = (P_\alpha X + P_\beta)\,\psi, \ \mathrm{i}^{\mathrm{in}} = (P_\alpha + P_\beta X)\,\psi. \tag{13}$$

Подставив эти выражения в (10), (11) и группируя, получим

$$(AX + B)\,\psi = \Gamma\varphi^-, \tag{14}$$

$$\varphi^+ = K\varphi^- - (\Gamma_1 X + \Gamma_2)\,\psi, \tag{15}$$

где обозначено

$$A = A_0 P_\alpha + B_0 P_\beta, \ B = A_0 P_\beta + B_0 P_\alpha, \tag{16}$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_q P_\alpha + \Gamma_s P_\beta, \ \Gamma_1 = \Gamma_q P_\beta + \Gamma_s P_\alpha. \tag{17}$$

Пусть $\Sigma(A, B)$ — множество операторов X, для которых вполне обратим оператор $AX + B$. Если $X \in \Sigma$, то уравнение (14) разрешимо относительно ψ, следовательно, из (15) будем иметь (5) с оператором (6) в качестве коэффициента прохождения.

Замечание 1. Матрицы операторов A, B, Γ, Γ_1, Γ_2, K состоят из блоков матриц разрезов и циклов по регулярным каркасам, значит, эти операторы ограничены.

Замечание 2. Множество Σ открыто* в $[H, H]$.

Замечание 3. Пара операторов A, B невырождена в том смысле, что множество $\Sigma = \Sigma(A, B)$ не пусто.

Действительно, выписав блочные матрицы a и b этих операторов, нетрудно привести пример оператора X, для которого матрица $ax + b$ обратима и обратная состоит из блоков матриц a, b, x.

Замечание 4. Если граф конечен ($\dim \Lambda < \infty$), тогда множество Σ всюду плотно в $[H, H]$.

Следствие 1. *Существуют операторы D, F, $\Gamma_л$ такие, что*

$$W(X) = K - \Gamma_л (DX + F)(AX + B)^{-1}\Gamma_п, \tag{18}$$

и оператор

$$\Phi = \begin{pmatrix} A & B \\ D & F \end{pmatrix}, \tag{19}$$

*действующий в пространстве $H \oplus H$, является вполне обратимым***.

---

* Через $[H, H]$ обозначается пространство линейных ограниченных операторов, действующих в H.

** $\Gamma_п = \Gamma$.

Действительно, пусть D_0, $F_0: H \to H$ — операторы, имеющие следующие матричные представления:

$$d_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \tag{20}$$

(в том же базисе, что и матричные представления (9)). Теперь искомые операторы определяются следующим образом:

$$D = D_0 P_\alpha + F_0 P_\beta, \ F = D_0 P_\beta + F_0 P_\alpha, \tag{21}$$

$$\Gamma_л = \Gamma_1 D^* + \Gamma_2 F^*, \tag{22}$$

при этом будем иметь

$$\Gamma_1 = \Gamma_л D, \ \Gamma_2 = \Gamma_л F. \tag{23}$$

Вполне обратимость оператора Φ вытекает из вполне обратимости операторов*

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ D_0 & F_0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{J} = \begin{pmatrix} P_\alpha & P_\beta \\ P_\beta & P_\alpha \end{pmatrix}, \tag{24}$$

поскольку $\Phi = \Phi_0 \widehat{J}$.

Следствие 2. *Для операторов в представлении* (6) *имеют место соотношения*

$$AB^* + BA^* = \Gamma J \Gamma^*, \tag{25}$$

$$\Gamma_1 B^* + \Gamma_2 A^* = KJ\Gamma^*, \tag{26}$$

$$\Gamma_1 \Gamma^*_2 + \Gamma_2 \Gamma^*_1 = KJK^* - J. \tag{27}$$

Для доказательства достаточно заметить, что аналогичные соотношения для матриц (9) — а значит и для операторов A_0, B_0, Γ_q, Γ_s, Γ, K — вытекают непосредственно из вида матриц и того факта, что $s_+ \overset{*}{q}_- = 0$ (см. [1, 4]).

Отметим здесь еще два соотношения

$$KJK^* - J = \Gamma_л (DF^* + FD^*) \overset{*}{\Gamma}_л, \tag{28}$$

$$K^* JK - J = \Gamma^*_п (DF^* + FD^*) \Gamma_п. \tag{29}$$

Следствие 3. *Равенства* (25), (26), (27) *обеспечивают следующие метрические свойства коэффициента прохождения*

$$W(X)\, JW^*(X) - J \begin{cases} \geqslant 0, & \operatorname{Re} X \leqslant 0 \\ = 0, & \operatorname{Re} X = 0. \\ \leqslant 0, & \operatorname{Re} X \geqslant 0 \end{cases} \tag{30}$$

---

* Отметим, что $\widehat{J}^* = \widehat{J}^{-1} = \widehat{J}$.

Действительно, из (6) и (25)—(27) можно получить

$$W(X)\,JW^*(X) - J = -2M\,(\operatorname{Re} X)\,M^*, \tag{31}$$

где

$$M = \Gamma_1 - (\Gamma_1 X + \Gamma_2)(AX+B)^{-1}A.$$

Следствие 4. *Если входной и выходной каркасы в условии теоремы 1 симметричны (в том смысле, что совпадают их множества внутренних дуг), тогда коэффициент прохождения может быть представлен в виде*

$$W(X) = K - KJ\Gamma^*(DX+F)(AX+B)^{-1}\Gamma, \tag{32}$$

причем оператор K будет J-унитарным.

Действительно, если каркасы симметричны, то в матрицах (7), (8) вторые и пятые блок-столбцы оказываются пустыми, также как и вторые блок-строки. В соответствии с этим оказываются пустыми первые и четвертые блок-столбцы, блок-строки в матрицах a_0, b_0, d_0, f_0. Следовательно, D и F в этом случае являются ортопроекторами и имеют место равенства

$$DB^* + FA^* = I,\ D + F = I. \tag{33}$$

Теперь для получения (32) остается сопоставить (18) и (23), (26), (33), а J-унитарность оператора K вытекает из (28), (29).

Выражение (32) для коэффициента прохождения было получено в [8] при ограничении $U^\beta = \varnothing$, т. е. при $P_\beta = 0$, $P_\alpha = I$.

3°. Здесь мы будем рассматривать задачу прохождения сигналов $\varphi^- = \varphi^-(\lambda)$ через линейную структуру с изменяющейся зависимостью вида (3)

$$\xi(\lambda) = X(\lambda)\,\psi(\lambda), \tag{34}$$

где λ — комплексное число.

Пусть множество внутренних дуг U^{in} разбито на попарнонепересекающиеся подмножества

$$U_r,\ U_l,\ U_c,\ U_t^{\text{I}},\ U_t^{\text{II}} = U^\beta, \tag{35}$$

элементы которых называются r—, l—, c-дугами, первичными и вторичными трансформаторными обмотками соответственно; причем множества U_t^{I} и U_t^{II} равномощны (т. е. существует биекция $\chi : U_t^{\text{I}} \to U_t^{\text{II}}$). Подпространства $H_r, H_e, H_c, H_t = H_t^{\text{II}} + H_t^{II}$, натянутые на ϑ-образы соответствующих подмножеств (35), приводят оператор $X(\lambda)$, который индуцирует в них операторы

$$X_r = \mathrm{R},\ X_l = \lambda L,\ X_c = (\lambda C)^{-1}; \tag{36}$$

$$X_t = T^* P_t^{\text{I}} - T P_t^{\text{II}},$$

где оператор T действует из H_t' на H_t'', а P_t^{I} и P_t^{II} — ортопроекторы из H_t на H_t^{I} и H_t^{II} соответственно.

Линейная структура с таким оператором $X(\lambda)$ называется $rlct$-структурой, причем пассивной $rlct$-структурой, если операторы R, L, C положительны, а T вполне обратим. Если какое-либо из подмножеств (35) пусто, то в названии структуры опускается соответствующая буква, например, rct-структура, lc-структура. Конечные пассивные $rlct$-структуры обычно называются многополюсниками [2, 5] или $rlct$-графами [6, 7].

Коэффициент прохождения передающей $rlct$-структуры (с фиксированными R, L, C, T) можно рассматривать как оператор-функцию скалярного аргумента λ:

$$w(\lambda) = W(X(\lambda)).$$

При этом для пассивных $rlct$-структур свойства (30) преобразуются в следующие:

$$w(\lambda) Jw^*(\lambda) - J \begin{cases} \geqslant 0, & \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0 \\ \leqslant 0, & \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0' \end{cases} \tag{37}$$

а для реактивных, т. е. для lct-структур, в дополнение к (37) имеем

$$w(\lambda) Jw^*(\lambda) - J = 0 \quad (\operatorname{Re}\lambda = 0). \tag{38}$$

Для конечных $rlct$-структур свойства функции $w(\lambda)$ (точнее функции* $J_1 w(\lambda) J_1$) исследованы в [5], а для специальных видов конечных lc-структур известны частные случаи представления (32) с нормирующими условиями $w(\infty) = I$ в [6] и $w(0) = I$ в [7].

Дуги из $U_z = U_r \cup U_l \cup U_c$ будем называть z-дугами или линейными сопротивлениями. Дугу $u \in U_z$ будем называть двухполюсным сопротивлением, если вектор ϑu является собственным вектором оператора $Z(\lambda) = X_r P_r + X_l P_l + X_c P_c$, где P_r, P_l, P_c — ортопроекторы из $H_z = H_r \oplus H_l \oplus H_c$ на соответствующие подпространства. Если все z-дуги являются двухполюсными сопротивлениями, то оператор $Z(\lambda)$ является диагональным (см. [3, гл. 6]).

Следующие теоремы устанавливают достаточные условия существования коэффициента прохождения для $rlct$-структуры.

Теорема 2. *Пусть передающая rlct-структура обладает регулярными входным и выходным каркасами такими, что*

a_2) всякое линейное сопротивление либо входит в оба каркаса одновременно, либо не входит ни в один из них;

b_2) выходной каркас содержит все первичные трансформаторные обмотки и не содержит ни одной вторичной;

c_2) входной каркас содержит не более, чем конечное множество вторичных трансформаторных обмоток.

Тогда для произвольных ρ_1 и ρ_2 $(0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty)$ найдутся операторы R, L, C, T такие, что задача прохождения будет разрешимой при всех λ из множества $\sigma_0 = \{\lambda : \rho_1 < |\lambda| < \rho_2\}$.

---

* Оператор J_1 имеет матричное представление $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$.

Если через V^- (V^+) обозначить множество дуг входного (выходного) каркаса, то условия теоремы можно записать в виде

a_2') $V^- \cap U_z = V^+ \cap U_z$;

b_2') $V^+ \cap (U_t^{\mathrm{I}} \cup U_t^{\mathrm{II}}) = U_t^{\mathrm{I}}$;

c_2') множество $U_t^{\mathrm{I}} \setminus V^-$ конечно (либо пусто).

Доказательство. Имеем следующее разбиение множества дуг

$$U^+,\ U_t^{\mathrm{I}} \setminus V^-,\ U_t^{\mathrm{I}} \cap V^-,\ U_z \cap V^-,\ U_z \setminus V^-,\ U_t^{\mathrm{II}} \setminus V^-,\\ U_t^{\mathrm{II}} \cap V^-,\ U^-. \tag{39}$$

Этому разбиению отвечает разбиение на блоки матриц s_+, q_-, a, b более детальное, чем при доказательстве теоремы 1. Коэффициент прохождения $W(X(\lambda))$ в виде (6) существует как только вполне обратим оператор $AX(\lambda)+B$, т. е. матрица $ax(\lambda)+b$. Для этого будем подбирать диагональные положительные матрицы r, l, c, t. Множество V^- разбивает каждое из множеств U_z, U_r, U_l, U_c на две части: 1) входящую в V^- и 2) непересекающуюся с V^-. Такому разбиению множеств отвечает следующее разбиение матриц:

$$z(\lambda) = \begin{bmatrix} z^{(1)} & 0 \\ 0 & z^{(2)} \end{bmatrix},\ r = \begin{bmatrix} r^{(1)} & 0 \\ 0 & r^{(2)} \end{bmatrix} \text{ и т. д,} \tag{40}$$

где первые диагональные блоки соответствуют ветвям входного каркаса, а вторые — его хордам. Кроме того, для матрицы t имеем разбиение

$$t = \begin{bmatrix} t^{(1)} & 0 \\ 0 & t^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{41}$$

где столбцы отвечают множествам $U_t^{\mathrm{I}} \setminus V^-$ и $U_t^{\mathrm{I}} \cap V^-$, а строки — множествам $U_t^{\mathrm{II}} \cap V^-$ и $U_t^{\mathrm{II}} \setminus V^-$. Положим $t^{(1)} = t_1 I$, $t^{(2)} = t_2 I$ и будем подбирать положительные числа t_1, t_2, $r_{\nu\nu}^{(1)}$, $r_{\nu\nu}^{(2)}$, $l_{\nu\nu}^{(1)}$, $l_{\nu\nu}^{(2)}$, $c_{\nu\nu}^{(1)}$, $c_{\nu\nu}^{(2)}$ (стоящие на диагоналях соответствующих матриц) таким образом, чтобы была вполне обратима матрицы (42)

$$\begin{bmatrix} I - t_1 s_{23} & -t_2 s_{22} & 0 & s_{21} & 0 & 0 \\ -t_1 s_{33} & I - t_2 s_{32} & 0 & s_{31} & 0 & 0 \\ -t_1 s_{43} & -t_2 s_{42} & I & s_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{14} z^{(1)} & z^{(2)} & t_2 q_{13} & q_{12} \\ 0 & 0 & q_{24} z^{(1)} & 0 & I + t_2 q_{23} & q_{22} \\ 0 & 0 & q_{34} z^{(1)} & 0 & t_2 q_{33} & q_{32} + t_1 I \end{bmatrix}, \tag{42}$$

представляющая собой блочный вид матрицы $ax(\lambda)+b$, где $s_{\zeta\eta}$ — блоки матрицы s_+, а $q_{\zeta\eta}$ — блоки матрицы q_-.

Многочлены $\det(I - t_1 s_{23})$ и $\det(q_{32} + t_1 I)$ не тривиальны, а потому существует число $t_1 > 0$, при котором одновременно обратимы обе матрицы

$$n_1 = I - t_1 s_{23} \text{ и } n_6 = q_{32} + t_1 I \tag{43}$$

Нетрудно подобрать треугольные (с единицами на диагонали) матрицы y_1 и y_2 такие, чтобы в первом столбце* матрицы $y_2(ax + b)\, y_1$ все блоки ниже n_1 обратились в нуль, а в последней строке — все блоки левее n_6 (см. (42)). При этом второй и пятый диагональные блоки матрицы $y_2(ax + b)\, y_1$ будут иметь вид

$$n_2 = I - t_2 s_1, \; n_5 = I + t_2 q_1, \tag{44}$$

где $s_1 = s_{32} + t_1 s_{43} n_1^{-1} s_{22}$. Следовательно, s_1 зависит только от t_1 и s_+ и не зависит от t_2, т. е. $s_1 = s_1(s_+, \; t_1)$, аналогично $q_1 = q_1(q_-, \; t_1)$. Таким образом, для вполне обратимости блоков n_2 и n_5 достаточно взять

$$0 < t_2 < \min\{\, \| S_1 \|, \; \| Q_1 \| \,\}, \tag{45}$$

где S_1 — оператор в пространстве, натянутом на орты $\vartheta(U_t^{\mathrm{I}} \cap V^-)$, имеющий матричное представление s_1; аналогично, Q_1 — оператор, имеющий в базисе $\vartheta(U_t^{\mathrm{II}} \setminus V^-)$ матричное представление q_1. Пусть теперь y_3, y_4 — такие треугольные матрицы, что первые и последние столбцы и строки матриц $y_2(ax + b)\, y_1$ и $y_4 y_2(ax + b)\, y_1 y_3$ совпадают, однако в последней матрице блоки ниже n_2 и левее n_5 только нулевые, а четвертый диагональный блок суть $n_4 = z^{(2)}(\lambda)$; он вполне обратим, как только

$$\delta_1 = \min\left\{\inf r_{\nu\nu}^{(2)}, \; \rho_1 \inf l_{\nu\nu}^{(2)}, \; \frac{1}{\rho_2} \inf \frac{1}{c_{\nu\nu}^{(2)}}\right\} > 0. \tag{46}$$

Пусть, наконец, y_5 — треугольная матрица такая, что $y_4 y_2(ax + b)\, y_1 y_3 y_5$ блочно-треугольна и имеет на диагонали блоки

$$n_1, \; n_2, \; n_3, \; n_4, \; n_5, \; n_6.$$

Тогда третий блок имеет вид

$$n_3 = I - s_2 n_4^{-1}(\lambda)\, q_2 z^{(1)}(\lambda), \tag{47}$$

где $s_2 = s_2(s_+, \; t_1, \; t_2)$, $q_2 = q_2(q_-, \; t_1, \; t_2)$, т. е. величина $\delta_2 = \| S_2 \| \cdot \| Q_2 \|$ не зависит от λ, r, l, c. Следовательно, можно подобрать положительные числа $r_{\nu\nu}^{(1)}$, $l_{\nu\nu}^{(1)}$, $c_{\nu\nu}^{(1)}$ так, чтобы

$$\max\left\{\sup r_{\nu\nu}^{(1)}, \; \rho_2 \sup l_{\nu\nu}^{(1)}, \; \frac{1}{\rho_1} \sup \frac{1}{c_{\nu\nu}^{(1)}}\right\} < \frac{\delta_1}{\delta_2}. \tag{48}$$

Тогда будем иметь $\sup\limits_{\lambda \in \sigma_0} \| N_3(\lambda) - I \| < 1$ и, следовательно, блок $n_3(\lambda)$ обратим при любом $\lambda \in \sigma_0$, отсюда вытекает обратимость

* Имеются в виду блочные строки и столбцы.

матрицы $y_4 y_2 (ax + b) y_1 y_3 y_5$, а значит и матрицы $ax(\lambda) + b$. Выбранные числа t_1, t_2, $r_{\nu\nu}^{(1)}$, $r_{\nu\nu}^{(2)}$, $l_{\nu\nu}^{(1)}$, $l_{\nu\nu}^{(2)}$, $c_{\nu\nu}^{(1)}$, $c_{\nu\nu}^{(2)}$ определяют операторы T, R, L, C такие, что σ_0 входит в область определения оператор-функции $w(\lambda) = W(X(\lambda))$. Теорема доказана.

Обобщением теоремы 2 является

Теорема 3. *Пусть передающая rlct-структура обладает регулярными входным и выходным каркасами и существует взаимнооднозначное соответствие (биекция) между множеством первичных и множеством вторичных трансформаторных обмоток такое, что*

a_3) *всякое линейное сопротивление либо входит одновременно в оба каркаса, либо не входит ни в один из них;*

b_3) *первичная трансформаторная обмотка входит в выходной каркас тогда и только тогда, когда соответствующая ей вторичная обмотка в него не входит;*

c_3) *множество трансформаторных обмоток (первичных и вторичных) выходного каркаса, не принадлежащих входному, конечно.*

Тогда найдутся операторы R, L, C, T такие, что задача прохождения будет разрешимой при всех λ из некоторой области σ.

Если $\varkappa : U_t^{\mathrm{I}} \to U_t^{\mathrm{II}}$ — биекция из условия теоремы, то условия b_3 и c_3 можно записать в виде (условия a_3' и a_2' совпадают)

b_3') $u \in U_t^{\mathrm{I}} \Rightarrow (u \in V^+ \Leftarrow\Rightarrow \varkappa u \notin V^+)$;

c_3') множество $((U_t^{\mathrm{I}} \cup U_t^{\mathrm{II}}) \cap V^+) \setminus V^-$ конечно.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную структуру, отличающуюся от данной лишь разбиением на α-дуги и β-дуги (и разбиением множества трансформаторных обмоток на первичные и вторичные).

Положим для новой структуры

$$\widetilde{U}_t^{\mathrm{I}} = (U_t^{\mathrm{I}} \cup U_t^{II}) \cap V^+, \ \widetilde{U}_t^{\mathrm{II}} = (U_t^{\mathrm{I}} \cup U_t^{\mathrm{II}}) \setminus V^+,$$

$$\widetilde{U}_\beta = \widetilde{U}_t^{\mathrm{II}}, \ \widetilde{U}_\alpha = U^{\mathrm{in}} \setminus \widetilde{U}_\beta.$$

Нетрудно проверить, что эта новая структура удовлетворяет условиям теоремы 2; следовательно, найдутся операторы $\widetilde{R}$, $\widetilde{L}$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{T}$ такие, что оператор $AX(\lambda) + B$ вполне обратим при всех $\lambda \in \sigma_0$. Операторы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ новой структуры связаны с операторами старой

$$\widetilde{A} = AP_1 + BP_2, \ \widetilde{B} = AP_2 + BP_1,$$

где*

$$P_1 = P_\alpha \widetilde{P}_\alpha + P_\beta \widetilde{P}_\beta, \ P_2 = P_\alpha \widetilde{P}_\beta + P_\beta \widetilde{P}_\alpha.$$

* Обозначения с тильдой «$\sim$» относятся к новой структуре.

Пусть

$$\tilde{t} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_{11} & \tilde{t}_{12} \\ \tilde{t}_{21} & \tilde{t}_{22} \end{pmatrix}, \ t = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

— разбиения матричных представлений операторов $\tilde{T}$ и T, отвечающие по столбцам разбиениям

$$\tilde{U}_t^{\mathrm{I}} \cap U_t^{\mathrm{I}}, \ \tilde{U}_t^{\mathrm{I}} \cap U_t^{\mathrm{II}} \text{ и } U_t^{\mathrm{I}} \cap \tilde{U}_t^{\mathrm{I}}, \ U_t^{\mathrm{I}} \cap \tilde{U}_t^{\mathrm{II}},$$

а по строкам

$$\tilde{U}_t^{\mathrm{II}} \cap U_t^{\mathrm{II}}, \ \tilde{U}_t^{\mathrm{II}} \cap U_t^{\mathrm{I}} \text{ и } U_t^{\mathrm{II}} \cap \tilde{U}_t^{\mathrm{II}}, \ U_t^{\mathrm{II}} \cap \tilde{U}_t^{\mathrm{I}}.$$

Можно считать, что блок $\tilde{t}_{22}$ вполне обратим (см. доказательство теоремы 2). Тогда будет вполне обратим оператор $P_2\tilde{X} + P_1$ и, следовательно, оператор $AX + B$, где

$$X = (P_1\tilde{X} + P_2)(P_2\tilde{X} + P_1)^{-1},$$

при этом будем иметь

$$t_{11} = \tilde{t}_{12}\tilde{t}_{22}^{-1}\tilde{t}_{21}, \ t_{12} = -\tilde{t}_{12}\tilde{t}_{22}^{-1}, \ t_{21} = \tilde{t}_{22}^{-1}\tilde{t}_{21}, \ t_{22} = \tilde{t}_{22}^{-1},$$

$$R = \tilde{R}, \ L = \tilde{L}, \ C = \tilde{C}.$$

В заключение отметим, что все элементарные многополюсники (ядра) из [5] удовлетворяют условиям теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зыков А. А. Теория конечных графов. Т. I. Новосибирск, «Наука», 1969. 543 с.
2. Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны. М., «Наука», 1966. 298 с.
3. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М., «Мир», 1970. 352 с.
4. Ponstein J. A. Argeneralization of the incidence matrices of a graph.— «Thèorie des graphes. Journees inernat. ètude, Rome, 1966», Paris—New-York. 1967, p. 315—332.
5. Ефимов А. В., Потапов В. П. J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей. — УМН, 1973, 23 : 1, с. 65—130.
6. Руткас А. Г., Чаусовский Д. М. Об одном классе линейных автоматов на графах. — «Кибернетика», 1969, № 3, с. 11—15.
7. Руткас А. Г., Чаусовский Д. М. Некоторые применения операторных узлов и гиперузлов. — Сб. «Математическая физика». Вып. 5, Киев, 1968, с. 173—178.
8. Руткас А. Г., Хиргий Н. И. Коэффициент прохождения линейной структуры на графе. — Сб. «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики». Вып. 31, Харьков, 1974, с. 168—177.