УДК 517.52

Р. М. Тригуб, канд. физ.-мат. наук

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ФИНИТНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $F(x)$ — преобразование Фурье функции с носителем на $[-\pi, \pi]$:

$$F(x) = \hat{f}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-itx}\, dt, \quad f \in L[-\pi, \pi].$$

Если $f(t) = 0$ вне $[-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, то, как известно (см. [1, с. 106, лемма 6]),

$$F \in L(-\infty, \infty) \Leftarrow\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(k)| < \infty \Leftarrow\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \max_{[k,\, k+1]} |F(x)| < \infty$$

(предположение о непрерывности f не существенно). В этой статье указываются аналогичные условия при $\varepsilon = 0$. Затем этот результат применяется к исследованию поведения последовательности интегральных норм полиномов в зависимости от их коэффициентов.

Будем писать: $f \in A$, если ряд Фурье функции f

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\, e^{ikx}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi} F(k) \tag{1}$$

сходится абсолютно:

$$\widetilde{F}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} if(t) \operatorname{sign} t e^{-itx}\, dt.$$

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\, dx < \infty$,

2) $\sum_k \max_{[k,\, k+1]} |F(x)| < \infty$,

3) $\exists\, \theta \in (0,\, 1) : \sum_k |F(k)| + |F(k+\theta)| < \infty$,

4) $\sum_k |F(k)| + |F'(k)| < \infty$,

5) $\sum_k \left| F(k) \right| + \left| \widetilde{F}(k+1) - \widetilde{F}(k) \right| < \infty$.

Доказательство.

Лемма 1. $\sum_k \max_{[k,\, k+1]} |F(x)| \leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\, dx$, *$C$ — абсолютная константа.*

Это утверждение содержится в доказательстве приведенной выше леммы Винера.

Лемма 2. *Существует абсолютная константа C, такая, что для всех $x \in [m,\, m+1]$ (m — целое)*

$$F(x) = (-1)^m \frac{\sin \pi x}{2} \left\{ \widetilde{F}(m+1) - \widetilde{F}(m) \right\} + \theta \sum_k \frac{|F(k)|}{\left(k - m - \frac{1}{2}\right)^2},$$

$$|\theta| \leqslant C.$$

Доказательство. Интегрируя почленно произведение ряда Фурье (1) на функцию ограниченной вариации, получим

$$\widetilde{F}(m) = i \sum_k C_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} t e^{i(k-m)t}\, dt = -4 \sum_k{}' \frac{c_k}{k-m} \tag{2}$$

(штрих означает, что суммирование идет по k разной четности с $m : k - m \equiv 1 \pmod 2$).

Аналогично,

$$F(x) = 2\sum_k c_k \frac{\sin (k-x)\pi}{k-x} = 2\sin\pi x \sum_k (-1)^{k+1}\frac{c_k}{k-x}.$$

Будем предполагать далее, что $x \in (m, m+1)$. Заменим в последней сумме x на m. Для этого сначала отбросим слагаемые, в которых $k = m$ или $k = m+1$ (погрешность $\theta_1 |c_m| + \theta_2 |c_{m+1}|$, $\theta| \leqslant 2\pi$, $i = 1, 2$), затем учтем, что $\left(\left(k - m - \frac{1}{2}\right)^2 < \right.$ $\left. < 3|k-x|\cdot|k-m|\right)$:

$$\left|\sin\pi x \sum_{k\neq m,\, m+1} (-1)^{k+1} c_k \left(\frac{1}{k-x} - \frac{1}{k-m}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\neq m,\, m+1} |c_k| \frac{x-m}{|k-x|\cdot|k-m|} \leqslant 3\sum_{k\neq m,\, m+1} |c_k| \frac{1}{\left(k-m-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Поэтому

$$F(x) = 2\sin\pi x \sum_{k\neq m} (-1)^{k+1} c_k \frac{1}{k-m} + \theta_3 \sum_k \frac{|c_k|}{\left(k-m-\frac{1}{2}\right)^2}$$

(в первой сумме добавлено слагаемое с $k = m+1$). Или

$$F(x) = 2(-1)^m \sin\pi x \sum{}' c_k \frac{1}{k-m} +$$

$$+ 2(-1)^{m+1}\sin\pi x \sum_{k\neq m}{}'' c_k \frac{1}{k-m} + \theta_3 \sum_k \frac{|c_k|}{\left(k-m-\frac{1}{2}\right)^2}$$

(в первой сумме $k - m \equiv 1 \pmod 2$, во второй — $k - m \equiv 0 \pmod 2$). Первое из трех слагаемых в силу (2) равно

$$(-1)^{m+1}\frac{1}{2}\sin\pi x \tilde{F}(m).$$

Заменим во второй сумме m на $m+1$, учитывая, что

$$\left|\sum_{k\neq m}{}'' c_k \left(\frac{1}{k-m} - \frac{1}{k-m-1}\right)\right| \leqslant 3\sum_{k\neq m}{}'' \frac{|c_k|}{\left(k-m-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Опять же в силу (2)

$$\sum{}'' c_k \frac{1}{k-m-1} = -\frac{1}{4}\tilde{F}(m+1)$$

и лемма доказана $\left(c_k(f) = \frac{1}{2\pi}F(k)\right)$.

Доказательство теоремы проведем по схеме

1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 1).

То, что 1) $\Rightarrow$ 2), составляет содержание леммы 1; 2) $\Rightarrow$ 3) — очевидно (θ — любое).

3) $\Rightarrow$ 4). Выберем функцию $\varphi(t) = \varphi_\theta(t) = 2\pi e^{-i\theta t} + 2it \sin \pi\theta$ Тогда

$$F(k+\theta) - \frac{\sin \pi\theta}{\pi} F'(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \varphi(t)\, e^{-ikt}\, dt = c_k(f \cdot \varphi).$$

Осталось заметить, что $\varphi \in A$ и, следовательно, $f\varphi \in A$, а $\sin \pi\theta \neq 0$.

4) $\Rightarrow$ 5). Доказывается аналогично $(\varphi(t) = 2t + \pi(e^{-it} - 1) \operatorname{sign} t)$.

5) $\Rightarrow$ 1). Следует из леммы 2:

$$\int_{m_1}^{m_2} |F(x)|\, dx = \sum_{m=m_1}^{m_2-1} \int_{m}^{m+1} |F(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{m=m_1}^{m_2-1} \left|\widetilde{F}(m+1) - \widetilde{F}(m)\right| +$$

$$+ C \sum_{k} |F(k)| \sum_{m=m_1}^{m_2-1} \frac{1}{\left(k - m - \frac{1}{2}\right)^2} \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{m} \left|\widetilde{F}(m+1) - \widetilde{F}(m)\right| +$$

$$+ C_1 \sum_{k} F(k)|.$$

Теорема доказана.

Используя эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 4), получаем

Следствие 1. *Если $f \in L[-\pi, \pi]$ и $f(x) = 0$ вне $[-\pi, \pi]$, то $\widehat{f}(x) \in L(-\infty, \infty)$ тогда и только тогда, когда*

$$f(x) \text{ и } xf(x) \in A.$$

Заметим, что указанные два условия независимы. Так, если f — четная выпуклая на $[0, \pi]$ функция с условием $f(\pi) = 0$ и

$$\int_0^{\pi} \frac{f(x)}{\pi - x}\, dx = \infty,$$

то $f(x) \in A$, а $xf(x)$ — нет (см. [3, с. 34—35]).

Следствие 2. *Если $f(x) = 0$ вне $[-\pi, \pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, то*

$$\widehat{f} \in L(-\infty, \infty) \Leftrightarrow f \in A.$$

Для доказательства достаточно заметить, что в этом случае на $[-\pi, \pi]$

$$xf(x) = \varphi_\varepsilon(x)\, f(x), \quad \varphi_\varepsilon(x) \in A$$

($\varphi_\varepsilon(x) = x$ на $[-\pi, \pi - \varepsilon]$, далее линейна с условием $\varphi_\varepsilon(\pi) = \varphi_\varepsilon(-\pi)$)

Пусть теперь

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e^{ikx}. \quad x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}.$$

Теорема 2.

$$1)\ \frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}\max_{[x_k,\, x_{k+1}]}|T(x)| \leqslant C_1\int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|\,dx,$$

$$2)\ \frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}\left(|T(x_k)| + \frac{1}{n+1}|T'(x_k)|\right) \leqslant C_2\int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|\,dx,$$

$$3)\ \int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|\,dx \leqslant \widetilde{C}_3\frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}(|T(x_k)| + |T(x_k+\theta x_1)|),$$

$$4)\ \int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|\,dx \leqslant C_4\frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}\left(|T(x_k)| + \frac{1}{n+1}|T'(x_k)|\right),$$

C_1, C_2, C_4 — *константы абсолютные*, $\widetilde{C}_3$ *зависит лишь от* $\theta \in (0, 1)$. Доказательство *1* аналогично доказательству более слабого неравенства 7.6 при $p = 1$ в [2, с. 46]

$$T(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T(u)\,\varphi(x-u)\,du,$$

где $\varphi = \varphi_n(u)$ — какая-либо функция с равными единице коэффициентами Фурье для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n$ и условием ($|u| \leqslant 3\pi$):

$$|\varphi(u)| \leqslant C_0\min\left\{n+1,\ \frac{1}{(n+1)\,u^2\,(2\pi-|u|)^2}\right\} = C_0\psi(u).$$

Например, $\varphi(u) = 2K_{2n-1} - K_{n-1}$, K_m — ядро Фейера. Тогда

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}\max_{[x_k,\, x_{k+1}]}|T(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|u|\leqslant\pi}\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}\sup_{x\in[x_k,\, x_{k+1}]}|\varphi(x-u)|\right\}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|T(u)|\,du,$$

а выражение в фигурных скобках не превосходит

$$\left(s = \left[\frac{2n+1}{2\pi}u\right],\ |x_k - u| = \frac{2\pi}{2n+1}\left|k - \frac{2n+1}{2\pi}u\right| = \frac{2\pi}{2n+1}(|k-s| + \right.$$

$$\left. + \theta_s),\ |\theta_s| \leqslant 1\right),$$

$$\frac{C_0}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}\psi(x_k-u) + \psi(x_{k+1}-u) \leqslant \frac{2C_0}{n+1}\sum_{k=-n}^{n+1}\psi(x_k-u) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2C_0}{n+1}\left(\sum_{2\leqslant|k-s|\leqslant n}\psi(x_k-u) + \sum_{n+1\leqslant|k-s|\leqslant 2n-1}\psi(x_k-u) + 6(n+1)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2C_0}{n+1}\left(\sum_{2\leqslant|k-s|\leqslant n}\left\{4(n+1)\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^2(|k-s|-1)^2\right\}\right)^{-1} +$$

$$+ \sum_{n+1\leqslant|k-s|\leqslant 2n-1}\left\{4(n+1)\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^2(2n+1-|k-s|-1)^2\right\}^{-1} +$$

$$+6(n+1) \leqslant \frac{2C_0}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} + 12C_0 < 13C_0.$$

1 доказано.

Из *1* следует

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^{n} |T(x_k)| \leqslant C_1 \int_{-\pi}^{\pi} |T(x)|\, dx.$$

Но тогда такое же неравенство можно написать и для $T'(x)$. *2* следует теперь из неравенства Бернштейна (см., например, [2, с. 21]).

3 и *4* выведем из теоремы 1

Рассмотрим функцию

$$F(x) = T\left(\frac{2\pi x}{2n+1}\right)\left(\frac{\sin \lambda x}{\lambda x}\right)^2.$$

Она принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$ и при $\lambda \in \left(0, \frac{\pi}{4n+2}\right)$ является сужением целой функции экспоненциального типа $\leqslant \pi$. По теореме Винера—Пэли [2, с. 408]

$$F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-itx}\, dt, \; f \in L^2[-\pi, \pi].$$

При любом $\theta \in (0, 1)$ по теореме 1 (3) $\Rightarrow$ 1)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\, dx \leqslant C(\theta)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |T(x_k)| \left(\frac{\sin \lambda k}{k\lambda}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |T(x_k + \theta x_1)| \left(\frac{\sin \lambda (k+\theta)}{(k+\theta)\lambda}\right)^2\right).$$

Используя периодичность полинома, можно первую сумму представить следующим образом:

$$\sum_{k=-n}^{n} |T(x_k)| \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda (k + p(2n+1))}{\lambda (k + p(2n+1))}\right)^2.$$

При $\lambda = \frac{\pi}{4n+2}$ внутренняя сумма не превосходит ($|k| \leqslant n$):

$$1 + \sum_{p \neq 0} \frac{1}{\lambda^2 [k + p(2n+1)]^2} = 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{p \neq 0} \frac{1}{\left(p + \frac{k}{2n+1}\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{|p| \geqslant 1} \frac{1}{\left(|p| - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Аналогично оценивается вторая сумма.

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\, dx \leqslant \tilde{C}(\theta) \sum_{k=-n}^{n} |T(x_k)| + |T(x_k) + \theta x_1)|.$$

Но $\left(2\sqrt{2}\,|y| \leqslant \pi\,|\sin y|\right.$ при $\left. y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right)$,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |T(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{2n+1} \int\limits_{-\frac{2n+1}{2}}^{\frac{2n+1}{2}} \left|T\left(\frac{2\pi x}{2n+1}\right)\right| \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi^2}{8}\,\frac{2\pi}{2n+1} \int\limits_{-\frac{2n+1}{2}}^{\frac{2n+1}{2}} \left|T\left(\frac{2\pi x}{2n+1}\right)\right| \left(\frac{\sin \lambda x}{\lambda x}\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi^3}{4\,(2n+1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\,\mathrm{d}x$$

и неравенство *3* доказано.

Для доказательства *4* нужно учесть, что

$$F'(x) = \frac{2\pi}{2n+1}\,T'\left(\frac{2\pi x}{2n+1}\right)\left(\frac{\sin \lambda x}{\lambda x}\right)^2 + 2T\left(\frac{2\pi x}{2n+1}\right)\frac{\sin \lambda x}{\lambda x}\left(\frac{\sin \lambda x}{\lambda x}\right)',$$

применить теорему 1 (4) $\Rightarrow$ 1) и предыдущие рассуждения

$$\left|\left(\frac{\sin \lambda x}{x\lambda}\right)'\right| \leqslant \frac{3}{|x|}, \text{ если } |\lambda x| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Теорема 2 доказана.

Следующее предложение описывает пространство функций, введенное автором ранее [3, § 5] в связи с вопросами суммируемости рядов Фурье.

Следствие. *Если* $\lambda \in C\,[-\pi, \pi]$, *то*

$$\sup_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{k=-n}^{n} \lambda(x_k)\,e^{ikx}\right| \mathrm{d}x < \infty \Leftarrow\Rightarrow \lambda(x),\, x\lambda(x) \in A$$

Для доказательства достаточно применить неравенства *2* и *4* из теоремы 2 и учесть, что

$$\frac{1}{2n+1}\,T(-x_m) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \lambda(x_k)\,\overline{e}^{imx_k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \lambda(x)\,e^{-imx}\,\mathrm{d}\omega_{2n+1} = C_m^{(n)}$$

(коэффициент Фурье—Лагранжа функции $\lambda(x)$, а [2, с. 28])

$$\sum_{m=-n}^{n} |c_m^{(n)}| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=-p}^{p} |c_k| =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-p}^{p} |c_k^{(n)}| \leqslant \sup_n \sum_{k=-n}^{n} |c_k^{(n)}|.$$

Аналогично,

$$-\frac{2\pi i}{(2n+1)^2}\,T'(-x_m) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} x_k \lambda(x_k) e^{-imx_k} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\lambda(x)\,e^{-imx}\,\mathrm{d}\omega_{2n+1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., Физматгиз, 1963 (1933). 256 с.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, II. М., Физматгиз. 1965 (1959). 537 с.
3. Тригуб Р. М. Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье. — «Изв. АН СССР», 1968, т. 32, № 1, с. 24—49.