УДК 517.521.8

А. И. Соколенко

О СУММИРОВАНИИ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ РЕГУЛЯРНЫМИ МАТРИЦАМИ

1. Н. А. Давыдов [1] установил достаточное условие для того, чтобы регулярная положительная матрица не суммировала данную ограниченную последовательность действительных чисел

или чтобы ядро данной последовательности совпадало с ядром преобразованной последовательности. Именно им доказана

Теорема А. *Пусть $A = \| a_{nk} \|$ — регулярная положительная матрица и $\{S_k\}$ — ограниченная расходящаяся последовательность действительных чисел, причем*

$$\lim_{i\to\infty} S_{k_i'} = \varliminf_{k\to\infty} S_k, \quad \lim_{i\to\infty} S_{k_i''} = \varlimsup_{k\to\infty} S_k.$$

Если

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i'} = a' \geqslant \frac{1}{2}, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i''} = a' \geqslant \frac{1}{2}, \quad \max\{a', a''\} > \frac{1}{2},$$

то матрица A не суммирует последовательность $\{S_k\}$.

Если

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i'} = \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i''} = 1,$$

то ядро последовательности $\{S_k\}$ совпадает с ядром последовательности

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k \ (n = 1, 2, \ldots).$$

В качестве следствий им был получен ряд теорем по неэффективным матрицам.

2. В данной заметке некоторые теоремы Н. А. Давыдова обобщаются на класс регулярных матриц, отличных от положительных, и на произвольные ограниченные последовательности комплексных чисел.

Пусть $A = \| a_{nk} \|$ — регулярная матрица с комплексными элементами a_{nk}, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} | a_{nk} | = 1, \tag{1}$$

и $\{S_k\}$ — ограниченная расходящаяся последовательность комплексных чисел.

Определение 1. *Число $S = \lim_{i\to\infty} S_{k_i}$ назовем A_1-частичным пределом последовательности $\{S_k\}$, если последовательность*

$$c_n^{\{k_i\}} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i} \ (n = 1, 2, \ldots)$$

имеет 1 в качестве своего частичного предела.

Справедлива

Теорема 1. *Если число S является A_1-частичным пределом ограниченной последовательности комплексных чисел $\{S_k\}$, то это число S-частичный предел последовательности*

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $A = \| a_{nk} \|$ — регулярная матрица, удовлетворяющая условию (1).

Доказательство. Существует подпоследовательность

$$c_{n_m}^{\{k_i\}} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_m k_i} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

такая, что

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_m k_i} = 1. \tag{2}$$

Легко видеть, что $A^* = \| a_{n_m k_i} \| = \| a^*_{mi} \|$ — регулярная матрица, поэтому

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_m k_i} S_{k_i} = S. \tag{3}$$

Из неравенств

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_m k_i} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left| a_{n_m k_i} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_{n_m k} \right|,$$

в силу (1) и (2), имеем

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} | a_{n_m k_i} | = 1. \tag{4}$$

Пусть $\{p_i\} = \{1, 2, \ldots\} \setminus \{k_i\}$. Тогда из равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} | a_{n_m k} | = \sum_{i=1}^{\infty} | a_{n_m k_i} | + \sum_{i=1}^{\infty} | a_{n_m p_i} |,$$

в силу (1) и (4), получаем

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} | a_{n_m p_i} | = 0,$$

поэтому

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_m p_i} S_{p_i} = 0.$$

Отсюда, используя (3) и равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_m k} S_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_m k_i} S_{k_i} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_m p_i} S_{p_i},$$

получаем

$$\lim_{m\to\infty} t_{n_m} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_m k} S_k = S.$$

Теорема доказана.

Известно [2, с. 163—164], что ядро в смысле Кноппа [2, с. 161] ограниченной последовательности совпадает с выпуклой оболочкой D множества всех частичных пределов этой последовательности.

Ясно, что выпуклая оболочка D множества всех частичных пределов ограниченной последовательности $\{S_k\}$ будет совпадать с выпуклой оболочкой множества тех частичных пределов этой последовательности, которые лежат на границе выпуклой оболочки D, если D — замкнутая выпуклая область, и она будет совпадать с выпуклой оболочкой двух частичных пределов этой последовательности, лежащих на концах отрезка прямой, если D — этот отрезок прямой.

Таким образом, выпуклая оболочка D множества всех частичных пределов ограниченной последовательности вполне определяется некоторым подмножеством E частичных пределов этой последовательности, лежащих на границе D, если D — замкнутая выпуклая область, и двумя частичными пределами этой последовательности, лежащими на концах отрезка прямой, если D — этот отрезок прямой.

Пусть E — множество частичных пределов ограниченной последовательности $\{S_k\}$, определяющих ядро в смысле Кноппа этой последовательности (это множество, вообще говоря, не единственно).

Справедлива

Теорема 2. *Пусть E — множество частичных пределов ограниченной последовательности комплексных чисел $\{S_k\}$, определяющих ядро этой последовательности, и пусть $A = \| a_{nk} \|$ — регулярная матрица, удовлетворяющая условию* (1).

Если каждое $x \in E$ есть A_1-частичный предел последовательности $\{S_k\}$, то ядро последовательности $\{S_k\}$ совпадает с ядром последовательности

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. По теореме Агнью [2, с. 174] ядро последовательности $\{t_n\}$ содержится в ядре последовательности $\{S_k\}$.

В силу теоремы 1 каждое $x \in E$ является частичным пределом последовательности $\{t_n\}$.

Из этих утверждений и вытекает справедливость доказываемой теоремы

Теорема 2 является обобщением второй части теоремы А.

Следствием теоремы 2 является известная теорема Аллена [2, с. 188, пример 18]:

Если для каждой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{q_i\}$ последовательность

$$c_n^{\{q_i\}} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{nq_i} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

имеет 1 своим частичным пределом, то ядро любой ограниченной последовательности комплексных чисел $\{S_k\}$ совпадает с ядром преобразованной последовательности

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $A = \|a_{nk}\|$ — регулярная матрица, удовлетворяющая условию (1).

Как указывалось выше, ядро в смысле Кноппа ограниченной последовательности совпадает с выпуклой оболочкой множества всех частичных пределов этой последовательности

Определение 2. *Диаметром d ядра ограниченной последовательности $\{S_k\}$ назовем диаметр выпуклой оболочки D множества всех частичных пределов этой последовательности.*

Обобщением первой части теоремы A является

Теорема 3. *Пусть $A = \|a_{nk}\|$ — регулярная матрица, удовлетворяющая условию* (1), *и $\{S_k\}$ — ограниченная расходящаяся последовательность комплексных чисел. Пусть, далее, S_* и S_{**} — аффиксы соответственно точек M_1 и M_2, являющихся концами диаметра d ядра последовательности $\{S_k\}$**.

Если

$$\lim_{i\to\infty} S_{k_i'} = S_*, \quad \lim_{i\to\infty} S_{k_i''} = S_{**}, \tag{5}$$

причем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(a_{nk_i'}\right) = a' \geqslant \frac{1}{2}, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(a_{nk_i''}\right) = a'' \geqslant \frac{1}{2}, \tag{6}$$

$$\max\{a', a''\} > \frac{1}{2},$$

то матрица A не суммирует последовательность $\{S_k\}$.

Доказательство. Пусть

$$S_* = S_*' + iS_*'', \quad S_{**} = S_{**}' + iS_{**}'' \text{ и } S_k = S_k' + iS_k'' \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где S_*', S_*'', S_{**}', S_{**}'', S_k' и S_k'' — действительные числа.

а) Случай положительной матрицы A.

Через точки M_1 и M_2 проведем прямые p и q, перпендику-

* Нетрудно видеть, что эти точки являются частичными пределами последовательности $\{S_k\}$.

лярные к диаметру d. В силу построения прямых p и q и выпуклости оболочки D каждая из этих прямых является опорной прямой для оболочки D (под опорной прямой выпуклой оболочки D мы понимаем прямую, имеющую с границей оболочки D не менее одной общей точки, и такую, что вся эта оболочка лежит по одну сторону от этой прямой).

Можем считать, что диаметр d лежит на прямой, параллельной действительной оси, так как в противном случае вместо последовательности $\{S_k\}$ мы рассмотрели бы последовательность $\{S_k^{(1)}\}$, где $S_k^{(1)} = e^{i\varphi}S_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, φ — некоторое фиксированное действительное число, для которой условия теоремы выполнены и которая одновременно с последовательностью $\{S_k\}$ суммируется или нет матрицей A.

Абсциссы точек пересечения прямых p и q с действительной осью будут соответственно S'_* и S'_{**}. Очевидны равенства

$$\lim_{i\to\infty} S'_{k'_i} = S'_* = \underline{\lim}_{k\to\infty} S'_k, \quad \lim_{i\to\infty} S'_{k''_i} = S'_{**} = \overline{\lim}_{k\to\infty} S'_k.$$

Для последовательности $\{S'_k\}$ выполнены условия первой части теоремы A, поэтому матрица A не суммирует последовательность $\{S'_k\}$ и справедливость утверждения теоремы вытекает из равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}S_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}S'_k + i\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}S''_k.$$

б) Случай действительной матрицы A.

Обозначим

$$a^+_{nk} = \begin{cases} a_{nk}, & \text{если } a_{nk} \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } a_{nk} < 0, \end{cases} \quad a^-_{nk} = \begin{cases} 0, & \text{если } a_{nk} \geqslant 0. \\ a_{nk}, & \text{если } a_{nk} < 0 \end{cases}$$

Тогда справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=1}^{\infty} a^+_{nk} + \sum_{k=1}^{\infty} |a^-_{nk}|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} a^+_{nk} - \sum_{k=1}^{\infty} |a^-_{nk}|,$$

откуда получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 2\sum_{k=1}^{\infty} |a^-_{nk}|$$

В силу регулярности матрицы A и условия (1), имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a^-_{nk}| = 0.$$

Из неравенств (6) и из неравенств

$$\sum_{i=1}^{\infty} a^+_{nk'_i} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk'_i}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a^+_{nk''_i} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk''_i}$$

следует выполнение случая *а* для регулярной матрицы $A^+ = \| a_{nk}^+ \|$. Теперь справедливость утверждения теоремы получаем из равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^+ S_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^- S_k,$$

в котором

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^- S_k = 0.$$

в) Случай комплексной матрицы A.

В силу регулярности матрицы A и условия (1), по известной теореме [2, с. 187, пример 12] имеем:

1) $A' = \| \operatorname{Re}(a_{nk}) \|$ — регулярная матрица, причем

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} | \operatorname{Re}(a_{nk}) | = 1, \tag{7}$$

2)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} | \operatorname{Im}(a_{nk}) | = 0. \tag{8}$$

Для матрицы $A' = \| \operatorname{Re}(a_{nk}) \|$ имеем рассмотренный случай *б*, поэтому последовательность

$$t_n' = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_{nk}) S_k \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

предела не имеет.

В силу (8) получаем

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_{nk}) S_k = 0.$$

Справедливость утверждения теоремы вытекает из последних двух предложений и равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_{nk}) S_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_{nk}) S_k.$$

Следствием теоремы 3 является

Теорема 4. *Если регулярная матрица $A = \| a_{nk} \|$, удовлетворяющая условию (1), удовлетворяет еще условию: для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{q_i\}$ справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_{nq_i}) \equiv a^{\{q_i\}} > \frac{1}{2},$$

где число $a = a^{\{q_i\}}$, вообще говоря, зависит от выбранной последовательности $\{q_i\}$, то эта матрица не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности.

Справедлива

Теорема 5. *Пусть* $A = \|a_{nk}\|$ — *регулярная матрица, удовлетворяющая условию* (1), *и пусть число* $b > \frac{1}{2}$. *Если в каждом* k-*м столбце матрицы* A *для* $k > k_0$ *имеется элемент* $a_{n_k k}$ *такой, что* $|\mathrm{Re}\,(a_{n_k})| \geqslant b$, *то матрица* A *не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности.*

Доказательство. Пусть $\{q_i\}$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\,(a_{nq_i})| \geqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\,(a_{n_{q_m}q_i})| \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} |\mathrm{Re}\,(a_{n_{q_m}q_m})| \geqslant b > \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Обозначим

$$\mathrm{Re}^+(a_{nk}) = \begin{cases} \mathrm{Re}\,(a_{nk}), & \text{если } \mathrm{Re}\,(a_{nk}) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \mathrm{Re}\,(a_{nk}) < 0, \end{cases}$$

$$\mathrm{Re}^-(a_{nk}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathrm{Re}\,(a_{nk}) \geqslant 0, \\ \mathrm{Re}\,(a_{nk}), & \text{если } \mathrm{Re}\,(a_{nk}) < 0. \end{cases}$$

Справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\,(a_{nk})| = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}^+(a_{nk}) + \sum_{k=1}^{\infty} |\mathrm{Re}^-(a_{nk})|,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\,(a_{nk}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}^+(a_{nk}) - \sum_{k=1}^{\infty} |\mathrm{Re}^-(a_{nk})|,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\,(a_{nk})| - \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\,(a_{nk}) = 2\sum_{k=1}^{\infty} |\mathrm{Re}^-(a_{nk})|. \tag{10}$$

Тогда, в силу (7), имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\mathrm{Re}^-(a_{nk})| = 0,$$

а значит и

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\mathrm{Re}^-(a_{nq_i})| = 0.$$

Из (10) получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Re}\,(a_{nq_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\,(a_{nq_i})| - 2\sum_{i=1}^{\infty} |\mathrm{Re}^-(a_{nq_i})|,$$

откуда имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{Re}(a_{nq_i})=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{i=1}^{\infty}|\operatorname{Re}(a_{nq_i})|.$$

В силу (9), теорема 5 следует из теоремы 4.

3. Теоремы 1—4 переносятся и на регулярные полунепрерывные матрицы.

Пусть дано регулярное преобразование

$$t(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)S_k\quad(0\leqslant x<\infty)\tag{11}$$

с комплекснозначными функциями $a_k(x)$, для которого выполняется условие

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(x)|=1\tag{12}$$

и $\{S_k\}$ — ограниченная расходящаяся последовательность комплексных чисел.

Определение 3. *Число $S=\lim_{i\to\infty}S_{k_i}$ назовем $\widetilde{A}_1$-частичным пределом последовательности $\{S_k\}$, если функция*

$$c^{\{k_i\}}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_{k_i}(x)$$

при $x\to\infty$ имеет 1 в качестве своего предельного значения.

Теорема 6. *Если число S является $\widetilde{A}_1$-частичным пределом ограниченной последовательности комплексных чисел $\{S_k\}$, то это число S — предельное значение функции*

$$t(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)\,S_k$$

при $x\to\infty$, где

$$t(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)\,S_k\quad(0\leqslant x<\infty)$$

— регулярное преобразование, удовлетворяющее условию (12).

Теорема 7. *Пусть E — множество частичных пределов ограниченной последовательности комплексных чисел $\{S_k\}$, определяющих ядро этой последовательности, и пусть*

$$t(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)\,S_k\quad(0\leqslant x<\infty)$$

— регулярное преобразование, удовлетворяющее условию (12).

Если каждое $x \in E$ есть $\tilde{A}_1$-частичный предел последовательности $\{S_k\}$, то ядро последовательности $\{S_k\}$ совпадает с ядром функции

$$t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) S_k \quad (0 \leqslant x < \infty)^*.$$

Теорема 8. *Пусть*

$$t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) S_k \quad (0 \leqslant x < \infty)$$

— регулярное преобразование, удовлетворяющее условию (12), где $\{S_k\}$ — ограниченная расходящаяся последовательность комплексных чисел. Пусть, далее, S_* и S_{**} — аффиксы соответственно точек M_1 и M_2, являющихся концами диаметра d ядра последовательности $\{S_k\}$.

Если

$$\lim_{i \to \infty} S_{k_i'} = S_*, \quad \lim_{i \to \infty} S_{k_i''} = S_{**},$$

причем

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(a_{k_i'}(x)\right) = a' \geqslant \frac{1}{2},$$

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(a_{k_i''}(x)\right) = a'' \geqslant \frac{1}{2}, \quad \max\{a', a''\} > \frac{1}{2},$$

то преобразование (11) не суммирует последовательность $\{S_k\}$.

Теорема 9. *Если регулярное преобразование (11), удовлетворяющее условию (12), удовлетворяет еще условию: для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{q_i\}$ справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(a_{q_i}(x)\right) \equiv a^{\{q_i\}} > \frac{1}{2},$$

где число $a = a^{\{q_i\}}$, вообще говоря, зависит от выбранной последовательности $\{q_i\}$, то это преобразование не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности.

Теоремы 4—9 обобщают теоремы Н. А. Давыдова [1, теоремы 2—5].

Выражаю искреннюю благодарность Н. А. Давыдову за постановку задач и помощь при написании данной работы.

---

* Определение ядра функции в смысле Кноппа см., например, [3, с. 77].

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов Н. А. Суммирование ограниченных последовательностей регулярными положительными матрицами. — «Математические заметки», 1973, т. 13, вып. 2, с. 179—188.
2. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., Физматгиз, 1960. 362 с.
3. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., ИЛ, 1951. 476 с.