УДК 517.521.8

А. И. Соколенко

О СУММИРОВАНИИ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ *К*-МАТРИЦАМИ

1. Н. А. Давыдов в работе [1] установил достаточное условие для того, чтобы положительная T-матрица* не суммировала данную ограниченную последовательность или чтобы ядро данной последовательности совпадало с ядром преобразованной последовательности. В качестве следствий этих условий им был получен ряд теорем о неэффективных матрицах.

В данной работе мы дадим обобщения результатов работы [1], перенеся их с T-матриц на K-матрицы.

Справедливы следующие предложения.

Теорема 1. *Ограниченная расходящаяся последовательность комплексных чисел $\{S_k\}$ не суммируется положительной K-матрицей $A = \|a_{nk}\|$, если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i'} + \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i''} > \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \equiv a > 0, \tag{1}$$

где $\lim\limits_{i\to\infty} S_{k_i'} = S_*$, $\lim\limits_{i\to\infty} S_{k_i''} = S_{**}$, S_* и S_{**} — *аффиксы концов диаметра множества всех частичных пределов последовательности* $\{S_k\}$.

Теорема 2. *Пусть $A = \|a_{nk}\|$ — положительная K-матрица и $\{S_k\}$ — ограниченная расходящаяся последовательность действительных чисел, причем*

$$\lim_{i\to\infty} S_{k_i'} = \underline{\lim_{k\to\infty}} S_k, \quad \lim_{i\to\infty} S_{k_i''} = \overline{\lim_{k\to\infty}} S_k.$$

Если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i'} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i''} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \equiv a > 0, \tag{2}$$

---

* По вопросу обозначений и определений, принятых в данной работе, мы отсылаем читателя к работе [2].

то ядром последовательности

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

является отрезок $[a\underline{S} + b,\ a\overline{S} + b]$, где $\underline{S} = \underline{\lim}_{k \to \infty} S_k$, $\overline{S} = \overline{\lim}_{k \to \infty} S_k$ и b — некоторое число, определяемое последовательностью $\{S_k\}$ и матрицей A.

Теорема 3. *Положительная К-матрица $A = \| a_{nk} \|$ неэффективна на множестве ограниченных последовательностей, если для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{p_i\}$ справедливо неравенство*

$$a^{\{p_i\}} \equiv \overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{np_i} > \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \equiv \frac{a}{2} > 0, \tag{3}$$

где число $a^{\{p_i\}}$, вообще говоря, зависит от выбранной последовательности $\{p_i\}$.

Следствие. *Положительная К-матрица $A = \| a_{nk} \|$ неэффективна на множестве ограниченных последовательностей, если в каждом k-м столбце этой матрицы для $k \geqslant k_0$ имеется элемент $a_{n_k k}$ такой, что*

$$a_{n_k k} \geqslant \theta > \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \equiv \frac{a}{2} > 0. \tag{4}$$

В частности, если положительная К-матрица $A = \| a_{nk} \|$ удовлетворяет условию

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} \left(a_{nn} - \sum_{k \neq n} a_{nk} \right) > 0, \tag{5}$$

то она неэффективна на множестве ограниченных последовательностей.

Последнее утверждение ранее доказано Г. А. Михалиным [3].

Теорема 4. *Положительная К-матрица $A = \| a_{nk} \|$ преобразует всякую ограниченную последовательность действительных чисел $\{S_k\}$ в последовательность, ядро которой совпадает с отрезком $[a\underline{S} + b,\ a\overline{S} + b]$, если для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{p_i\}$ справедливо равенство*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{np_i} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \equiv a > 0, \tag{6}$$

где $\underline{S} = \underline{\lim}_{k \to \infty} S_k$, $\overline{S} = \overline{\lim}_{k \to \infty} S_k$ и b — некоторое число, определяемое последовательностью $\{S_k\}$ и матрицей A.

2. Доказательство теоремы 1.

а) Случай действительной последовательности $\{S_k\}$.

Обозначим: $\{l_i\}$ — множество всех тех номеров членов последовательности $\{S_k\}$, для которых или $n = k_i'$, или $S_n < \underline{\lim}_{k\to\infty} S_k \equiv \underline{S}$; $\{p_i\}$ — множество всех тех номеров членов последовательности $\{S_k\}$, для которых $n = k_i''$ или $S_n > \overline{\lim}_{k\to\infty} S_k \equiv \overline{S}$, и рассмотрим последовательность

$$S_n^{(1)} = \begin{cases} \underline{S}, \text{ если } n \in \{l_i\}, \\ \overline{S}, \text{ если } n \in \{p_i\}, \ (n = 1,\ 2,\ \ldots). \\ S_n \text{ для остальных } n. \end{cases}$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = 0, \quad \text{где } S_n^{(2)} = S_n - S_n^{(1)} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

то последовательность $\{S_n\}$ суммируется или нет матрицей A одновременно с последовательностью $\{S_n^{(1)}\}$.

Покажем, что последняя не может суммироваться матрицей A, если матрица A удовлетворяет условиям теоремы 1. Положив

$$\{m_i\} = \}1,\ 2,\ \ldots\} \diagdown \{k_i'\},$$

имеем

$$t_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i'} S_{k_i'}^{(1)} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{nm_i} S_{m_i}^{(1)} \leqslant$$

$$\leqslant \underline{S} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i'} + \overline{S} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nm_i} = \underline{S} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i'} +$$

$$+ \overline{S}\left(a - \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i'} + o\,(1)\right) = a\overline{S} - (\overline{S} - \underline{S}) \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i'} + o\,(1).$$

Отсюда

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} t_n^{(1)} \leqslant a\overline{S} - (\overline{S} - \underline{S})\, \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i'}. \tag{7}$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} t_n^{(1)} \geqslant a\underline{S} + (\overline{S} - \underline{S})\, \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i''}. \tag{8}$$

Из (7) и (8), в силу (1), получаем

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} t_n^{(1)} - \underline{\lim}_{n\to\infty} t_n^{(1)} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i'} + \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i''} - a\right) \cdot (\overline{S} - \underline{S}) \equiv \alpha > 0,$$

что и доказывает справедливость утверждения теоремы.

б) Случай комплексной последовательности $\{S_k\}$.

Можно считать, что диаметр множества всех частичных пределов последовательности $\{S_k\}$ лежит на прямой, параллельной действительной оси, так как в противном случае этого можно добиться умножением всех членов последовательности $\{S_k\}$ на постоянное число вида $e^{i\varphi}$, где φ — действительное число. Пусть

$$S_k = S_k' + iS_k'' \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где $\{S_k'\}$ и $\{S_k''\}$ — последовательности действительных чисел. Для последовательности $\{S_k'\}$ имеем случай a, поэтому справедливость утверждения теоремы вытекает из равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k' + i \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k''.$$

Теорема 1 доказана полностью.

Заметим, что утверждение теоремы 1 верно, если вместо условия (1) этой теоремы потребовать выполнения неравенств

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i'} > \frac{a}{2} \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i''} > \frac{a}{2},$$

где

$$a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} > 0.$$

3. Доказательство теоремы 2.

Предварительно докажем следующее утверждение: для любой ограниченной последовательности действительных чисел $\{S_k\}$ и положительной K-матрицы $A = \|a_{nk}\|$ выполняются неравенства

$$a \underline{\lim_{n\to\infty}} S_n + b \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} t_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} t_n \leqslant a \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n + b, \tag{9}$$

где $a = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}$, $t_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k$ $(n = 1, 2\ldots)$, b — некоторое число, определяемое последовательностью $\{S_k\}$ и матрицей A.

Действительно, для последовательностей $\{S_n^{(1)}\}$ и $\{S_n^{(2)}\}$, определенных выше в п. 2, имеем

$$\underline{S} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \leqslant t_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k^{(1)} \leqslant \overline{S} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$a\underline{S} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} t_n^{(1)} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} t_n^{(1)} \leqslant a\overline{S}$$

и [2, с. 78]

$$\lim_{n\to\infty} t_n^{(2)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k^{(2)} \equiv b,$$

где

$$a_k = \lim_{n\to\infty} a_{nk} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как

$$\varliminf_{n\to\infty} t_n = \varliminf_{n\to\infty} t_n^{(1)} + b \quad \text{и} \quad \varlimsup_{n\to\infty} t_n = \varlimsup_{n\to\infty} t_n^{(1)} + b, \tag{10}$$

то

$$a\underline{S} + b \leqslant \varliminf_{n\to\infty} t_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} t_n \leqslant a\overline{S} + b,$$

и неравенства (9) доказаны.

Из (7), (8) и (10), в силу (2), получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} t_n \leqslant a\underline{S} + b \quad \text{и} \quad \varlimsup_{n\to\infty} t_n \geqslant a\overline{S} + b,$$

что в сопоставлении с (9) дает

$$\varliminf_{n\to\infty} t_n = a\underline{S} + b \quad \text{и} \quad \varlimsup_{n\to\infty} t_n = a\overline{S} + b.$$

Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теорем 3, 4.

Теоремы 3 и 4 являются следствиями соответственно теорем 1 и 2.

Справедливость первой части следствия теоремы 3 вытекает из этой теоремы, так как в силу (4) для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{p_i\}$ имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{np_i} \geqslant \varlimsup_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_{p_j} p_i} \geqslant \varlimsup_{j\to\infty} a_{n_{p_j} p_j} \geqslant \theta > \frac{a}{2}.$$

Справедливость второй части следствия теоремы 3 вытекает из его первой части, так как при выполнении условия (5) следует выполнение условия (4). Действительно, обозначив через

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \quad \text{и} \quad \tau_n' = a_{nn} - \sum_{k\neq n} a_{nk} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

имеем

$$a_{nn} = \frac{1}{2}(\tau_n + \tau_n') \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = a, \quad \varliminf_{n\to\infty} \tau_n' = \theta_1 > 0,$$

отсюда

$$\varliminf_{n\to\infty} a_{nn} = \theta \equiv \frac{a}{2} + \frac{\theta_1}{2} > \frac{a}{2}.$$

Замечания. 1) Условие (1) в теореме 1, как и условие (3) в теореме 3, ослабить нельзя. Действительно, преобразование

$$t_n = S_{n-1} + S_n \ (n = 1, 2, \ldots),$$

определяемое положительной K-матрицей $A = \|a_{nk}\|$, для которой

$$a \equiv \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 2,$$

суммирует ограниченную последовательность 0, 1, 0, 1 ... Здесь вместо условий (1) и (3) выполнены соответственно условия

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i'} + \overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i''} = 2 = a,$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{np_i} \geqslant 1 = \frac{a}{2}.$$

2) Теоремы 1—4 переносятся и на полунепрерывные K-матрицы.

В заключение выражаю благодарность проф. Н. А. Давыдову за постановку задачи и руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов Н. А. Суммирование ограниченных последовательностей регулярными положительными матрицами. — «Математические заметки», 1973, т. 13, вып. 2, с. 179—188.
2. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., Физматгиз, 1960. 362 с.
3. Михалин Г. А. Обобщение теоремы Агнью и о равносильности методов Кожима методам Чезаро суммирования рядов на множестве ограниченных последовательностей. — «Укр. мат. журн.», 1974, т. 26, № 1, с. 95—98.