УДК 517.4

А. Г. Руткас, канд. физ.-мат. наук, **Д. М. Чаусовский**, канд. физ.-мат. наук

ИНДЕФИНИТНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УЗЛЫ И ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ДИСКРЕТНЫХ СТРУКТУР

При изучении дискретных структур с положительными и отрицательными параметрами (электрические и механические цепи, системы частиц, образующие решетки с отдельными неустойчивыми узлами и т. п. [8—14]), естественной метрикой в пространстве состояний системы часто оказывается индефинитная метрика. В работе показано, как в задаче прохождения волн через дискретные структуры (конечные или бесконечные) возникают операторные S-узлы; они называются здесь индефинитными, если индефинитна метрика внутреннего пространства. В случае дефинитной метрики узлы такого типа изучались М. С. Бродским и М. С. Лившицем [1, 2].

С помощью матрицы сечений графа структуры построена общая формула для коэффициента прохождения волн $W(\lambda)$ и выделен класс дискретных структур, у которых этот коэффициент совпадает с передаточной (характеристической) функцией узла. Ряд свойств узлов и их передаточных функций применяется к исследованию дискретных структур. В связи с этим рассмотрены задачи эквивалентности, восстановления, факторизации индефинитных узлов; доказательства, аналогичные случаю дефинитных узлов [1, 2], опускаются.

1°. Дадим определение S-узла и его передаточной функции. Символом X_G обозначим гильбертово пространство X с регулярной метрикой G [4] : $[x, y]_G = (G\ x, y)$.

Пусть Y_F — пространство с F-метрикой и $A \in [X, Y]$; через A^+_{FG} обозначим оператор, FG-сопряженный к $A : [Ax, y]_F = [x, A^+_{FG}y]_G$. В силу регулярности метрик оператор A^+_{FG} определен однозначно и равен $G^{-1}A^*F$, где звездочкой обозначен переход к сопряженному оператору в исходных гильбертовых метриках.

Назовем S-узлом совокупность

$$N = (X_G,\ T,\ \Gamma,\ J,\ Y_F) \qquad (1)$$

пространств X и Y с G-и F-метриками соответственно операторов

$$T \in [X, X], \ J \in [Y, Y], \ \Gamma \in [Y, X],$$

для которых

$$J_{FF}^{+} = J, \ J^2 = E, \ \ T - T_{GG}^{+} = i\Gamma J \Gamma_{GF}^{+}.$$

Как и в [1], элементам узла (1) присваиваются наименования: X (Y)—*внутреннее* (*внешнее*) пространство, T—*внутренний*, J — *канаповый* операторы; G и F—*внутренняя* и *внешняя* метрики.

Если внутренняя метрика индефинитна, S-узел (1) называется *индефинитным*. Метрика $[Jy, y]_F$ в Y называется *канаповой*.

Передаточной функцией (*п. ф*) узла (1) называется функция от λ

$$S(\lambda, \ N) = E - iJ\Gamma_{GF}^{+}(T - \lambda E)^{-1}\Gamma. \tag{2}$$

2°. Под дискретной структурой мы будем понимать конечный или бесконечный граф, наделенный структурой линейной электрической цепи [10—14]. Такие структуры являются математическими моделями электрических и механических цепей [1, 13, 14], периодических структур [8], непериодических систем частиц с конечными или бесконечными радиусами взаимодействия [10], диффузионно-волновых и квантово-механических систем [9]. В этом классе объектов теория и практика имеет дело как с положительными, так и с отрицательными элементами (индуктивность и емкость, масса и жесткость).

Пусть Φ — дискретная структура, представляющая собой граф Λ со структурой LC-цепи без идеальных преобразователей [10, 11, 12].

Множество дуг графа Λ разбито на подмножества *внутренних* дуг U°, *входных* дуг U^- и *выходных* дуг U^+, причем $\operatorname{card} U^- = \operatorname{card} U^+$.

Пусть H и Y_0 — гильбертовы пространства, каждое из которых, независимо друг от друга, есть пространство C^n или l_2. Предполагается, что между U° и координатным базисом H (между $U^\pm$ и координатным базисом Y_0) установлено взаимно однозначное соответствие.

Структура LC-цепи порождает векторы I^0 и V^0 токов и напряжений внутренних ребер, токов и напряжений I^-, V^- (I^+, V^+) входных (выходных) ребер [11—14]. Эти векторы рассматриваются как элементы пространств H и $Y_0 : I^0, \ V^0 \in H; \ V^\pm, I^\pm \in Y_0$. Положим $Y = Y_0 \oplus Y_0$. Тогда $(V^\pm, \ I^\pm) \in Y$.

Коэффициентом прохождения волн называется оператор-функция

$$W(\lambda, \ \Phi) : \varphi^- \to \varphi^+, \tag{3}$$

где $\varphi^- = (V^-, \ I^-)$, $\varphi^+ = (V^+, \ I^+)$ — векторы амплитуд волн с частотой λ на входе (выходе) структуры Φ.

Разбиение множества внутренних дуг на индуктивные U_L и емкостные U_C порождает ортогональное разложение $H = H_L \oplus H_C$. Введем ортопроекторы $P_L : H \to H_L$, $P_C : H \to H_C$ и через L и C обозначим самосопряженные ограниченные и вполне обратимые операторы в H_L и H_C.

Операторы L, C и

$$\Delta = L \oplus C = LP_L + CP_C \tag{4}$$

будем называть *операторами параметров* структуры Φ.

Запишем закон Ома, связывающий амплитуды V^0 и I^0 гармонических колебаний и токов, установившихся на частоте λ:

$$V^0 = Z(\lambda) I^0, \tag{5}$$

где

$$Z(\lambda) = \lambda \Delta P_L + \lambda^{-1} \Delta^{-1} P_C. \tag{6}$$

Предположим, что граф Λ структуры Φ обладает парой каркасов* T^+ и T^-, такой, что

$$U^+ \subset T^+,\ U^+ \cap T^- = U^- \cap T^+ = \varnothing; \tag{7}$$

$$U^- \subset T^-,\ T^+ \backslash U^+ = T^- \backslash U^-.$$

Пара каркасов со свойствами (7) называется *симметричной*, T^- — *входной*, T^+ — *выходной* каркас.

Положим $P^0 = T^+ \cap U^0$, $D^0 = U^0 \backslash P^0$. Такое разбиение множества U^0 порождает разложение пространства H в сумму $H_{D^0} \oplus H_{P^0}$. Отвечающие H_{D^0} и H_{P^0} ортопроекторы обозначим через D и P. Разбиение всех дуг графа на множества U^+, P^0, D^0, U^- позволяет записать матрицу сечений S^+ по каркасу T^+ [10, 11] в блочной форме:

$$S^+ = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} U^+ & P^0 & D^0 & U^- \end{array} & \\ \begin{bmatrix} E & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & E & S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} U^+ \\ P^0. \end{array} \end{array} \tag{8}$$

Далее предполагается, что блоки S_{ij} являются матрицами линейных ограниченных операторов в координатных базисах соответствующих пространств и оператор $S_{12} \in [\mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_0]$ вполне обратим.

В этих условиях в [11] получена формула для функции (3):

$$W(\lambda, \Phi) = K - KJ\Gamma_0^* (PZ + D)(AZ + B)^{-1} \Gamma_0, \tag{9}$$

где $Z = Z(\lambda)$ — функция (6), K, $J \in [\mathrm{Y}, \mathrm{Y}]$, A, $B \in [H, H]$, $\Gamma_0 \in [\mathrm{Y}, H]$. В соответствии с разложениями $H_{D^0} \oplus H_{P^0}$, $\mathrm{Y}_0 \oplus \mathrm{Y}_0$ эти операторы допускают матричные представления

$$K = \begin{bmatrix} Q_{21}^{-1} & 0 \\ 0 & -S_{12} \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -E \\ -E & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} E & Q_{12} - Q_{11} Q_{21}^{-1} Q_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

---

* Каркас графа — это максимальный подграф, содержащий все вершины и не имеющий циклов.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_{21} & E \end{bmatrix}, \ \Gamma_0 = \begin{bmatrix} Q_{11}Q_{21}^{-1} & 0 \\ 0 & -S_{22} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где $Q_{ij} = -S^*_{ji}$. Непосредственно проверяются соотношения

$$BA^* + AB^* = \Gamma_0 J \Gamma_0^*;$$

$$BP + AD = E, \ DB = PA = 0. \tag{11}$$

Подставляя в (9) выражение (6), получаем

$$W(\lambda, \Phi) = K - KJ\Gamma_0^* (\lambda q \Delta + d)(\lambda a \Delta + b)^{-1} \Gamma_0, \tag{12}$$

где

$$a = AP_L + BP_C, \ b = BP_L + AP_C; \tag{13}$$

$$q = PP_L + DP_C, \ d = DP_L + PP_C.$$

Операторы q, d суть взаимно дополнительные ортопроекторы в H; в силу (13)

$$ba^* + ab^* = \Gamma_0 J \Gamma_0^*. \tag{14}$$

Выделим класс тех структур Φ, для которых

$$\lim_{\lambda \to \infty} W(\lambda, \Phi) = E. \tag{15}$$

Если граф $\Lambda(\Phi)$ конечен и $\Delta > 0$, то для выполнения условия (15) необходимо и достаточно существование такой симметричной пары каркасов T^+, T^-, что для блоков матрицы (8) выполнены условия

$$S_{11} DP_C = 0, \quad P_L P S_{21} DP_C = 0; \tag{16}$$
$$P_L P S_{22} = 0, \quad S_{12} = -E.$$

Вывод и геометрическая интерпретация условий (16) даны в [13, 14]. Обобщим эту ситуацию на произвольные структуры.

Определение. *Структура Φ принадлежит классу Ω_∞, если ее граф обладает такой симметричной парой каркасов T^+ и T^-, что для блоков матрицы сечений* (8) *выполнены соотношения (16).*

Можно показать [10 — 12], что если при некотором выборе симметричной пары каркасов выполнены условия (16), то они выполнены и для любой другой симметричной пары. Заметим, что в отличие от [13, 14] определение класса Ω_∞ распространяется, с одной стороны, на структуры бесконечные, с другой — на случай не знакоопределенного оператора параметров Δ.

Теорема 1. *Пусть $W(\lambda)$ — коэффициент прохождения волн структуры $\Phi \in \Omega_\infty$. Если для оператора a (13) сужение G отображения $a\Delta a^*$ на подпространство $X = \overline{a(H)}$ имеет ограниченный обратный оператор, то $W(i\lambda)$ есть передаточная функция S-узла $N = (X_G, T, \Gamma, J, Y)$, где $\Gamma = iG^{-1}\Gamma_0$, $T = iG^{-1}ba^*|_X$.*

Доказательство. Из (10), (11), (13), (16) имеем $K=E$, $qa=0$, $\Gamma_0^* q=0$, $\Gamma_0^* d=\Gamma_0^*$, $qb=E-a^*$, $da=a$, $ad=d$. Так как d — ортопректор, то $\Gamma_0(Y)\subset d(H)=\overline{a(H)}=X$. На основании (14) операторы ba^* и $a\Delta a^*$ приводятся подпространством X и аннулируются на его ортогональном дополнении. Волновая функция $W(\lambda)$ имеет теперь вид

$$W(\lambda)=E-J\Gamma_0^*(\lambda a\Delta+b)^{-1}\Gamma_0. \tag{17}$$

Пусть ψ есть решение уравнения

$$(\lambda a\Delta+b)\psi=\Gamma_0\varphi^-. \tag{18}$$

Умножив его на q, получаем $qb\psi=0$, $(E-a^*)\psi=0$. Таким образом, решение (18) есть неподвижный вектор a^*. Обозначим через G и R операторы, индуцированные в X операторами $a\Delta a^*$ и ba^*. Функция (16) принимает вид

$$W(\lambda)=E-J\Gamma_0^*(G\lambda+R)^{-1}\Gamma_0. \tag{19}$$

Для операторов $\Gamma=iG^{-1}\Gamma_0$, $T=iG^{-1}R$ и метрики G в X имеем $T_{GG}^+=-iG^{-1}ab^*$, $\Gamma^+=\Gamma_0^*$, так что из (13) вытекает соотношение $T-T_{GG}^+=i\Gamma J\Gamma^+$; кроме того, $J^2=E$, $J^*=J$. Равенство (19) принимает вид $W(\lambda)=E-iJ\Gamma^+(T-\lambda E)^{-1}\Gamma$.
Теорема доказана.

Замечание. Для узла N, построенного в теореме 1 (его мы будем называть принадлежащим структуре Φ), метрика F внешнего пространства Y совпадает с исходной гильбертовой; метрика G внутреннего пространства имеет столько отрицательных квадратов, сколько «отрицательных» элементов содержит Φ.

Укажем явное представление операторов T и Γ, построенных в теореме 1, через блоки матрицы (8). Введем операторы

$$\begin{gathered}B_{11}=S_{11}P_LD,\ B_{21}=PP_LS_{21}DP_L,\ B_{31}=PP_GS_{21}DP_L,\\ B_{32}=PP_GS_{21}DP_G,\ B_{33}=PP_LS_{22}.\end{gathered} \tag{20}$$

В соответствии с разложением X в ортогональную (и G-ортогональную) сумму подпространств $X^L=DP_L(X)$, $X^G=PP_G(X)$ и условиями (16) операторы T и Γ имеют блочный вид

$$T=iG^{-1}\begin{bmatrix}0 & B_{11}^*B_{33}^*-B_{31}^*\\ B_{31} & 0\end{bmatrix},\ \Gamma=iG^{-1}\begin{bmatrix}-B_{11}^* & 0\\ 0 & -B_{33}\end{bmatrix}. \tag{21}$$

Кроме того, $G=\Delta_L\oplus\Delta_G$, где $\Delta_L=DP_LG\mid_{X^L}$, $\Delta_G=PP_GG\mid_{X^G}$.

3°. Вопрос о включении оператора $T\in[Y, Y]$ в S-узел с произвольно заданными метриками внутреннего и внешнего пространств решает

Теорема 2. *Пусть X_G и Y_F — пространства с G-и F-метриками, $T\in[X, X]$ и $\dim Y\geqslant\dim R(T-T_{GG}^+)$. Тогда существует*

S-узел с внутренним пространством X_G, внешним пространством Y_F и внутренним оператором T.

Доказательство. Пусть $H = \overline{R(A)}$, где $A = i(G^{-1}T^* - TG^{-1})$, и $A_0 = A|_H$. Операторы $\alpha = \operatorname{sgn} A_0$, $\varphi = \operatorname{sgn} F$ в H и Y соответственно однозначно представляются в виде разностей взаимно дополнительных ортопроекторов; $\alpha = P_1 - P_2$, $\varphi = Q_+ - Q_-$. Пусть $P_iH = H_i$ $(i = 1, 2)$, $Q_\pm Y = Y_\pm$. Так как $\dim H = \dim R \times (T - T^+_{GG})$, то неравенства $\dim H_1 > \dim Y_+$, $\dim H_2 > \dim Y_-$ одновременно выполняться не могут. Предположим, что $\dim H_1 < \dim Y_+$, $\dim H_2 \geqslant \dim Y_-$ (остальные случаи разбираются аналогично). Существует такой изометрический оператор $V \in [H, Y]$, что $Y_1 = VH_1 \subset Y_+$, $Y_2 = VH_2 \supset Y_-$.

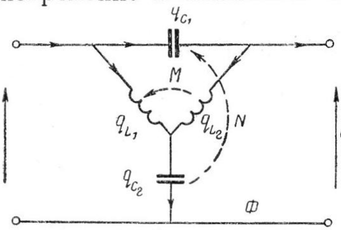

Рис. 1

Введем в Y ортопроекторы Q_k на подпространство Y_k $(k = 1, 2) = Q'$ на $(Y \ominus Y_1) \ominus Y_2$, Q'' на $Y_2 \ominus Y_-$. Из соотношений $Q_1 = Q_+ - Q' - Q''$, $Q_2 = Q_- + Q''$, $V^*Q' = 0$, $P_i = V^*Q_iV$ $(i = 1, 2)$ вытекает $\alpha = V^*(\varphi - 2Q'')V$. Положим

$$\Gamma = |A_0|^{\frac{1}{2}} V^* |F|^{\frac{1}{2}}, \quad J = |F|^{\frac{1}{2}} (\varphi - 2Q'') |F|^{\frac{1}{2}},$$

где Γ считается оператором из Y в X. Имеем $J^2 = E$, $J^+_{FF} = J$, $A = \Gamma J F^{-1} \Gamma^*$. Последнее равенство можно представить в виде $T - T^+_{GG} = \Gamma J \Gamma^+_{GF}$, так что совокупность (X_G, T, Γ, J, Y_F) образует S-узел.

4°. *Главным подпространством* X_0 узла (1) называется замыкание линейной оболочки векторов вида $T^n\Gamma\varphi$, $n = 0, 1, \ldots$, $\varphi \in Y$.

Можно показать, как это сделано в [3] для оператор-функций несколько иного вида, п. ф. S-узла постоянна (и равна E) тогда и только тогда, когда главное подпространство узла нейтрально в G-метрике, т. е. $[x, y]_G = 0$ для $x, y \in X_0$.

В качестве примера рассмотрим передающий четырехполюсник Φ (рис. 1).

Ребра U^+, q_{C_1}, q_{C_2} образуют входной каркас T^+ графа $\Lambda(\Phi)$. Записывая матрицу (8) по каркасу T^+ и повторяя преобразования п. 2°, получим S-узел N вида (1), у которого $\dim X = 4$, $\dim Y = 2$, а операторы G, T, Γ в координатных базисах имеют матрицы

$$G = \begin{bmatrix} L_1 & M & 0 & 0 \\ \overline{M} & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & N \\ 0 & 0 & \overline{N} & C_2 \end{bmatrix}, \quad T = iG^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = iG^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если L_1, L_2, C_1, β — вещественные числа, $M = \frac{L_1+L_2}{2} + i\beta$, $C_2 = 0$, $N \neq 0$, $\frac{1}{4}(L_2 - L_1)^2 + \beta^2$, то главное пространство узла оказывается линейной оболочкой векторов $(1, -1, 0, 0)$ и $(0, 0, 0, 1)$ и в G-метрике нейтрально. Поэтому при указанных операторах параметров коэффициент прохождения волн четырехполюсника Φ равен E.

5°. Два S-узла называются *эквивалентными*, если они имеют общее внешнее пространство, общую каналовую метрику и их передаточные функции совпадают в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.

Для S-узла (1) положим $F' = FJ$, $J' = \operatorname{sgn} F'$. Оператор J' самосопряжен как в исходной гильбертовой метрике, так и в эквивалентной ей $|F'|$-метрике пространства Y. Непосредственно проверяется, что совокупность $(X_G, T, \Gamma, J', Y_{|F'|}$ есть S-узел с такой же п. ф., что и узел (1). Таким образом, всякий S-узел эквивалентен некоторому S-узлу с гильбертовой внешней метрикой.

6°. Рассмотрим пару S-узлов

$$N_i = (X^i_{G_i},\ T_i,\ \Gamma_i,\ J,\ Y_F) \quad (i = 1, 2). \tag{22}$$

Эти узлы называются изометрически эквивалентными, если существует линейный замкнутый обратимый G_1G_2-изометрический оператор W, такой, что

$$1)\ D(W) \subset X^1,\ R(W) \subset X^2,$$

$$2)\ T_1 D(W) \subset D(W),\ R(\Gamma_1) \subset D(W),$$

$$3)\ WT_1 = T_2 W,\ \Gamma_2 = W\Gamma_1.$$

G_1G_2-изометричность означает, что

$$4)\ [Wx,\ Wy]_{G_2} = [x,\ y]_{G_1},\ x,\ y \in D(W).$$

Отношение изометрической эквивалентности S-узлов рефлексивно, симметрично и транзитивно, что оправдывает терминологию.

S-узел будем называть *невырожденным*, если невырождено его главное подпространство

Теорема 3. *Для того, чтобы невырожденные S-узлы были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы они были изометрически эквивалентными.*

Доказательство. Пусть узлы (22) эквивалентны. Через L_i обозначим линейную оболочку векторов вида $T_i^n \Gamma_i \varphi$, $n = 0, 1, \ldots$, $\varphi \in Y$. Как и в дефинитном случае [1, 2], отображение $T_1^n \Gamma_1 \varphi \to T_2^n \Gamma_2 \varphi$ продолжается до линейного G_1G_2-изометрического оператора $W_0 : L_1 \to L_2$; корректность определения W_0 следует из невырожденности L_2 как линеала, плотного в невырожденном главном подпространстве узла N_2. При этом $D(W_0) = L_1$, $R(W_0) = L_2$, $T_1 D(W_0) \subset D(W_0)$, $R(\Gamma_1) \subset D(W_0)$, $\Gamma_2 = W_0 \Gamma_1$, $W_0 T_1 = T_2 W_0$.

Так как $\overline{R(W_0)}$ невырождено, W_0 допускает замыкание. Положим $W = \overline{W}_0$. Оператор W — обратимый и $G_1 G_2$-изометрический [4]. Если $x \in D(W)$, найдется последовательность $(x_n) \subset D(W_0)$ с $x_n \to x$, $Wx_n \to Wx$. Из

$$WT_1 x_n = T_2 W x_n, \quad T_1 x_n \to T_1 x, \quad T_2 W x_n \to T_2 W x$$

следует, что

$$T_1 x \in D(W), \quad WT_1 x = T_2 W x.$$

Отсюда

$$T_1 D(W) \subset D(W), \quad WT_1 = T_2 W.$$

Кроме того,

$$R(\Gamma_1) \subset D(W_0) \subset D(W), \quad \Gamma_2 = W\Gamma_1.$$

Оператор W устанавливает изометрическую эквивалентность между узлами (22).

Наоборот, если узлы (22) изометрически эквивалентны, то из условия *3* следует, что

$$WT_1^n \Gamma_1 \varphi = T_2^n \Gamma_2 \varphi.$$

Ввиду замкнутости W для достаточно большого $|\lambda|$

$$W(T_1 - \lambda E)^{-1} \Gamma_1 = (T_2 - \lambda E)^{-1} \Gamma_2.$$

В силу условия *4* на $D(W)$ $\Gamma_1^+ = \Gamma_2^+ W$. Таким образом,

$$S(\lambda, N_1) = S(\lambda, N_2).$$

Теорема доказана.

Заметим, что во второй части доказательства невырожденность узлов не была использована.

Если в условиях теоремы ранг индефинитности* метрики G_1 на $\overline{L_1}$ или метрики G_2 на $\overline{L_2}$ конечен, то операторы W и W^{-1} ограничены ([5, теорема 4.3]).

7°. Запишем условия изометрической эквивалентности *1—4* п. 6° для S-узлов, принадлежащих дискретным структурам класса Ω_∞.

Обозначения п. 2° сохраняются.

Пусть P^L (P^C) — сужение DP_L (PP_C) на X. Из (21) имеем $TX^L \subset X^C$, $TX^C \subset X^L$. Главное подпространство X_0 узла N разлагается в ортогональную и G-ортогональную сумму $X_0^L + X_0^C$, где X_0^L (X_0^C) — замкнутая линейная оболочка векторов вида

$$T^{2n} P^L \Gamma\varphi, \; T^{2n+1} P^C \Gamma\varphi \; (T^{2n} P^C \Gamma\varphi, \; T^{2n+1} P^L \Gamma\varphi), \; n = 0, 1, \ldots, \; \varphi \in Y.$$

---

* Рангом индефинитности G-метрики называется $\min\{d_+, d_-\}$, где d_+ (d_-) — максимальная размерность положительного (отрицательного) линеала.

Через $P_0^L(P_0^C)$ обозначим ортопроектор из X на $X_0^L(X_0^C)$.

Рассматривая далее две структуры $\Phi, \widetilde{\Phi} \in \Omega_\infty$, мы будем все объекты, относящиеся к $\widetilde{\Phi}$ (узлы, операторы, пространства) обозначать теми же символами, что и аналогичные объекты для Φ, с добавлением значка $\sim$.

Пусть узлы N и $\widetilde{N}$, принадлежащие Φ и $\widetilde{\Phi}$, невырождены и эквивалентны. Операторы W и W^{-1} (теорема 3) будем предполагать ограниченными (достаточные для этого условия приведены в конце п. 6°).

Тогда $D(W) = X_0$, $R(W) = \widetilde{X}_0$. При этом $WP_0^L = \widetilde{P}_0^L W$, $WP_0^C = \widetilde{P}_0^C W$. Пусть W_L (W_C) — сужение W на X_0^L (X_0^C). Очевидно, $W_L \in [X_0^L, \widetilde{X}_0^L]$, $W_C \in [X_0^C, \widetilde{X}_0^C]$ и W_L, W_C вполне обратимы.

Условия *1—4* с учетом (20) и (21) приводят к соотношениям

$$\widetilde{\Delta}_C^{-1}\widetilde{B}_{11}^* = W_L\Delta_L^{-1}B_{11}^*, \quad \widetilde{B}_{11}W_L = B_{11}P_0^L;$$

$$\widetilde{\Delta}_C^{-1}\widetilde{B}_{33} = W_C\Delta_C^{-1}B_{33}, \quad \widetilde{B}_{33}^*W_C = B_{33}^*P_0^C; \tag{23}$$

$$\widetilde{\Delta}_C^{-1}\widetilde{B}_{31}W_L = W_C\Delta_C^{-1}B_{31}P_0^L, \quad \widetilde{\Delta}_L^{-1}\widetilde{B}_{31}^*W_C = W_L\Delta_L^{-1}B_{31}^*P_0^C.$$

Наоборот, если существуют такие операторы

$$W_L \in [X_0^L, \widetilde{X}^L] \text{ и } W_C \in [X_0^C, \widetilde{X}^C],$$

что выполнены условия (23), то узлы N и $\widetilde{N}$ эквивалентны (ср. с [14], где это показано для конечномерного случая).

Граф $\Lambda(\Phi)$ будем называть полусокращенным [14], если в нем нет U_L-сечений (т. е. сечений, состоящих из ребер U_L) и U_C-циклов. Для структуры с полусокращенным графом

$$X = H, \ X^L = H_L, \ X^C = H_C, \ \Delta_L = L, \ \Delta_C = C, \ T^+ = U^+ \cup U_C,$$

а матрица S^+ имеет вид

$$S^+ = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} U^+ & U_C & U_L & U^- \end{array} & \\ \begin{bmatrix} E & 0 & B_{11} & -E \\ 0 & E & B_{31} & B_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} U^+ \\ U_C. \end{array} \end{array} \tag{24}$$

Нетрудно показать, что всякая структура класса Ω_∞ эквивалентна некоторой структуре этого же класса с полусокращенным графом. Ниже мы ограничиваемся для простоты именно такими графами.

Пусть пространство X^G структуры Φ разложено в ортогональную сумму подпространств $X_1^G \oplus X_2^G$ и существуют такие операторы

$$\sigma \in [X_1^G, X_2^G], \quad b_{31} \in [X^L, X_1^C], \quad b_{33} \in [Y_0, X_1^C],$$

что

$$B_{31} = (P_1 + \sigma)\, b_{31}, \quad B_{33} = (P_1 + \sigma)\, b_{33},$$

где P_1 — ортопроектор из X^C на X_1^G. Если матрица, полученная из (24) заменой B_{31} на b_{31} и B_{33} на b_{33}, есть матрица сечений некоторого графа $\tilde{\Lambda}$, а оператор $(P_1 + \sigma^*)\, \Delta_C^{-1}\, (P_1 + \sigma)$ в X_1^C вполне обратим, то дискретная структура $\tilde{\Phi}$ с графом $\tilde{\Lambda}$ и операторами параметров

$$\tilde{\Delta}_L = \Delta_L, \quad \tilde{\Delta}_C = \left[(P_1 + \sigma^*)\, \Delta_G^{-1}\, (P_1 + \sigma)\right]^{-1}$$

эквивалентна структуре Φ. Действительно, полагая

$$\tilde{X}^L = X^L, \quad \tilde{X}^G = X_1^G, \quad \tilde{X} = \tilde{X}^L \oplus \tilde{X}^C, \quad \tilde{B}_{11} = b_{11},$$

$$\tilde{B}_{31} = b_{31}, \quad \tilde{B}_{33} = b_{33}, \quad W_L = E, \quad W_C = P_1 + \sigma^*,$$

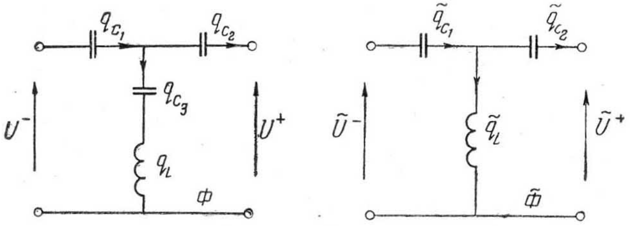

Рис. 2

мы убеждаемся в выполнении условий (23). По этой схеме в графе $\Lambda(\Phi)$ могут быть устранены U_G-сечения без изменения передаточной функции структуры. Аналогичным образом из графа могут быть устранены U_L-циклы.

В качестве примера укажем на четырехполюсники Φ и $\tilde{\Phi}$ (рис. 2).

Если внутренним ребрам графа Λ — q_L, q_{C1}, q_{C2}, q_{C3} — и внутренним ребрам графа $\tilde{\Lambda}$ — $\tilde{q}_L$, $\tilde{q}_{G1}$, $\tilde{q}_{G2}$ (в указанном порядке) отнести матрицы параметров

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{C_2^{-1} + C_3^{-1}}{\Sigma} & \dfrac{C_3^{-1}}{\Sigma} \\ 0 & \dfrac{C_3^{-1}}{\Sigma} & \dfrac{C_1^{-1} + C_3^{-1}}{\Sigma} \end{bmatrix},$$

где L, C_1, C_2, C_3 — вещественные и $\Sigma = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1 C_2 C_3}$, то передаточные функции этих четырехполюсников совпадут.

8°. Как было отмечено в п. 5°, передаточная функция S-узла совпадает с передаточной функцией некоторого узла с гильбертовой внешней метрикой; в этом пункте мы ограничиваемся лишь такими узлами.

Пусть $S(\lambda)$ — передаточная функция S-узла (1).

Тогда

I. $S(\lambda)$ голоморфна в окрестности ∞ и

$$\lim_{\lambda \to \infty} \| S(\lambda) - E \| = 0.$$

II. Оператор-функция

$$V(\lambda) = 2jJ(S(\lambda) - E)(S(\lambda) + E)^{-1} \tag{25}$$

аналитически продолжается на множество Z, представляющее всю комплексную плоскость, за вычетом некоторого компактного множества, симметричного относительно вещественной оси (спектра оператора

$$A = \frac{1}{2}(T + T_{GG}^{+}).$$

III.

$$V^*(\lambda) = V(\bar{\lambda}).$$

Из I—III следует, что в окрестности ∞ $V(\lambda)$ допускает разложение

$$V(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} B_k, \quad B_k = B_k^* \in [Y, Y]. \tag{26}$$

Если метрика G имеет конечный ранг индефинитности (в этом случае мы говорим, что конечный ранг индефинитности имеет и сам узел), то можно отметить и другие свойства $V(\lambda)$.

Для определенности будем считать, что (конечный) ранг индефинитности G-метрики равен наибольшей размерности G-отрицательного линеала в X_G. Обозначим его $\varkappa$.

Положим

$$K(\lambda, \mu) = \frac{V(\lambda) - V^*(\mu)}{\lambda - \bar{\mu}}, \quad (\lambda, \mu \in Z). \tag{27}$$

Очевидно,

$$K(\lambda, \mu) = \Gamma_G^{+}(A - \bar{\mu}E)^{-1}(A - \lambda E)^{-1}\Gamma.$$

Для любого набора n чисел $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in Z$, любых n векторов $y_1, \ldots, y_n \in Y$ квадратичная форма

$$\sum_{i, j=1}^{n} (K(\lambda_i, \lambda_j) y_i, y_j) \xi_i \bar{\xi}_j \tag{28}$$

имеет не более $\varkappa$ отрицательных квадратов. Если к тому же при некотором выборе n, чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и векторов $y_1, \ldots, y_n$ форма (28) имеет точно $\varkappa$ отрицательных квадратов, то мы будем говорить, что

IV. Точно $\varkappa$ отрицательных квадратов имеет функция $K(\lambda, \mu)$.

Класс оператор-функций со значениями в $[Y, Y]$, удовлетворяющих условиям I—IV, обозначим через $\Omega(Y, J, \varkappa)$.

Теорема 4. *Если оператор-функция принадлежит классу* $\Omega(Y, J, \varkappa)$, *то она является передаточной функцией некоторого* S*-узла с рангом индефинитности* $\varkappa$.

Доказательство разобъем на две части. В первой части приводится краткое описание пространства реализации для Q-функции, принадлежащее М. Г. Крейну и Г. Лангеру [6, 7], во второй части по функции $V(\lambda)$ (25) восстанавливается S-узел; здесь существенно, что кроме свойств II—III функция $V(\lambda)$ удовлетворяет условию (26).

1. Пусть L — линейное комплексное пространство функций, определенных на Z (условие II) со значениями в Y, каждая из которых отлична от нуля лишь на конечном множестве точек.

Равенством

$$[f, g] = \sum_{\lambda,\, \mu \in Z} (K(\lambda, \mu) f(\lambda), g(\mu))$$

определим в L билинейную форму (π-метрику). Если L_0 — изотропный линеал в L, то $\tilde{L}$ будет обозначать фактор-пространство L/L_0. Положим для $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{L}$

$$[\tilde{f}, \tilde{g}] = [f, g], \quad f \in \tilde{f}, \ g \in \tilde{g}, \tag{29}$$

$\tilde{L}$ — невырожденное пространство относительно π-метрики, имеющее ранг индефинитности $\varkappa$, так что в $\tilde{L}$ имеется $\varkappa$-мерный отрицательный линеал и нет отрицательных линеалов более высокой размерности. $\tilde{L}$ может быть включено в пространство X типа $\Pi_\varkappa$ (пространство Понтрягина) в качестве плотного линеала.

Пусть

$$D = \left\{ f \in L : \sum_{\lambda \in Z} f(\lambda) = 0 \right\}, \tag{30}$$

$\hat{A}$ — оператор в L с

$$D(\hat{A}) = D, \quad (\hat{A} f)(\lambda) = \lambda f(\lambda).$$

При каноническом вложении L в $\tilde{L}$ D переходит в линеал $\tilde{D}$, а $\hat{A}$ индуцирует оператор $\tilde{A} : \tilde{A}\tilde{f} = \widetilde{\hat{A} f}$. Корректность определения

$\tilde{A}$ вытекает из инвариантности L_0 относительно $\hat{A}$. Как показано в [7], $\tilde{D}$ плотно в X, оператор $\tilde{A}$ — симметрический в π-метрике, а его замыкание $\overline{A}$ есть π-самосопряженный оператор с $D(\overline{A}) \supset \tilde{L}$.

2. Пусть $\varepsilon(\lambda, y)$ — функция из L, равная y в точке λ и нулю в остальных точках. Используя аппарат π-сходимости [6, 7] и принимая во внимание (26), можем определить оператор $\Gamma \in [Y, X]$, положив

$$\Gamma y = -\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \tilde{\varepsilon}(\lambda, y).$$

Из равенства

$$\overline{A}(\tilde{\varepsilon}(\lambda, y) - \tilde{\varepsilon}(\mu, y)) = \lambda \tilde{\varepsilon}(\lambda, y) - \mu \tilde{\varepsilon}(\mu, y)$$

при $\mu \to \infty$ получаем

$$(\overline{A} - \lambda E)\tilde{\varepsilon}(\lambda, y) = \Gamma y.$$

Если λ не принадлежит спектру $\overline{A}$, то

$$\varepsilon(\lambda, y) = (\overline{A} - \lambda E)^{-1}\Gamma y. \tag{31}$$

Для π-сопряженного к Γ оператора Γ^+ имеем

$$\Gamma^+ \tilde{\varepsilon}(\lambda, y) = V(\lambda) y. \tag{32}$$

Из (31), (32) находим

$$V(\lambda) = \Gamma^+ (\overline{A} - \lambda E)^{-1}\Gamma. \tag{33}$$

Покажем, что $\overline{A}$ — ограниченный оператор. Согласно [7], пространство X можно представить в виде π-ортогональной суммы подпространств X_1 и X_2, инвариантных относительно $\overline{A}$, причем на X_1 оператор $\overline{A}$ ограничен, а подпространство X_2—гильбертово в π-метрике. Пусть P_1 и P_2 суть π-ортопроекторы на X_1 и X_2. Имеем

$$(\overline{A} - \lambda E)^{-1} = (A_1 - \lambda E)^{-1}P_1 + (A_2 - \lambda E)^{-1}P_2, \tag{34}$$

где A_1 и A_2 — сужения $\overline{A}$ на X_1 и X_2. Из (34)

$$V(\lambda) = \Gamma^+ (A_1 - \lambda E)^{-1}P_1\Gamma + \Gamma^+ P_2 (A_2 - \lambda E)^{-1}P_2\Gamma.$$

Функция

$$V_2(\lambda) = \Gamma^+ P_2 (A_2 - \lambda E)^{-1}P_2\Gamma$$

удовлетворяет условиям II—III, а также условию

IV. $\dfrac{V_2(\lambda) - V_2^*(\lambda)}{2i} \geqslant 0$ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, Поэтому [1, 2] она может быть представлена в виде $\Gamma_0^*(A_0 - \lambda E)^{-1}\Gamma_0$, где A_0 — ограниченный самосопряженный оператор в некотором гильбертовом пространстве H, $\Gamma_0 \in [Y, H]$. Отсюда, как и в п. 6°, можно построить изометрический оператор W: $H \to X_2$, такой, что $A_2 W = W A_0$. Таким образом, оператор A_2, а с ним и оператор $\overline{A}$ ограничен.

Итак,

$$V(\lambda) = \Gamma^+ (\overline{A} - \lambda E)^{-1} \Gamma.$$

Восстанавливая $S(\lambda)$ по $V(\lambda)$ в соответствии с условием II, получим

$$S(\lambda) = E - iJ\Gamma^+ (T - \lambda E)^{-1} \Gamma, \tag{35}$$

где

$$T = \overline{A} + \frac{i}{2} \Gamma J \Gamma^+.$$

Функция (35) — передаточная функция узла

$$N = (X, T, \Gamma, J, Y),$$

где X, как видно из построения, есть пространство типа $\Pi_\varkappa$.

9°. Если M есть G-проекционно-полное подпространство внутреннего пространства X_G S-узла N (1), то, как и в дефинитном случае [1, 2], можно определить понятие проекции узла N на M.

Проекцией N на M называется S-узел

$$N_M = (M_G, P_M T, P_M \Gamma, J, Y_F),$$

где P_M — G-ортогональный проектор из X_G на M. То, что N_M — узел, проверяется без труда.

Если M суть G-проекционно-полное подпространство в X_G, инвариантное относительно оператора T, M' суть G-ортогональное дополнение M, то, как и для узлов в гильбертовом пространстве [1, 2], п. ф. узла N представляется в виде произведения п. ф. узлов N_M и $N_{M'}$:

$$S(\lambda, N) = S(\lambda, N_M) \cdot S(\lambda, N_{M'}). \tag{36}$$

Если же M не проекционно-полное, такое разложение теряет смысл. Ниже мы указываем некоторые видоизменения разложения (36), которые могут иметь смысл и без предположения о проекционной полноте M.

Определим во внутреннем пространстве узла (1) наряду с метрикой G G_ε-метрику, где $G_\varepsilon = G + \varepsilon E$, $\varepsilon > 0$. При достаточно малых ε G_ε-метрика регулярна.

Пусть подпространство $M \subset X$, инвариантное относительно T и не являющееся проекционно полным в G-метрике, становится проекционно-полным в G_ε-метрике. Так будет, например, если $\dim M < \infty$. Положим

$$A_\varepsilon = i(TG^{-1} - G^{-1}T^* - TG_\varepsilon^{-1} + G_\varepsilon^{-1}T^*).$$

Пусть

$$\Gamma_\varepsilon = |A_\varepsilon|^{\frac{1}{2}}, \quad J_\varepsilon = \operatorname{sgn} A_\varepsilon.$$

Очевидно, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Gamma_\varepsilon = 0$. Введем обозначения:

$$\tilde{Y} = Y \oplus X, \quad \tilde{\Gamma}_\varepsilon = \Gamma \oplus \Gamma_\varepsilon, \quad \tilde{J}_\varepsilon = J \oplus J_\varepsilon, \quad \tilde{F} = F \oplus E.$$

Совокупность

$$\tilde{N} = (X_{G_\varepsilon}, \ T, \ \tilde{\Gamma}_\varepsilon, \ \tilde{J}_\varepsilon, \ \tilde{Y}_{\tilde{F}})$$

образует S-узел. Если P есть $\tilde{F}$-ортопроектор из $\tilde{Y}$ на Y, то проектируя узел $\tilde{N}$ G_ε-ортогонально на M и его G_ε-ортогональное дополнение M_ε^1, представим $S(\lambda, \tilde{N})$ в виде произведения $S(\lambda, \tilde{N}_M) \cdot S\left(\lambda, \tilde{N}_{M'_\varepsilon}\right)$. Таким образом,

$$S(\lambda, N) = \lim_{\varepsilon \to 0} PS(\lambda, \tilde{N}_M) \cdot S\left(\lambda, \tilde{N}_{M'_\varepsilon}\right) P, \tag{37}$$

что можно рассматривать как обобщение разложения (36).

Рассмотренный метод факторизации п. ф. (1) по подпространству M, инвариантному относительно внутреннего оператора, требует расширения внешнего пространства. В иных предположениях относительно M можно обобщить разложение (36) без такого расширения.

Будем сейчас предполагать, что подпространство $M_\varepsilon = G_\varepsilon^{-1} GM$ а) G_ε-проекционно-полно; б) инвариантно относительно $T_\varepsilon = G_\varepsilon^{-1} GT$ при достаточно малых ε. Условие a выполнено, в частности, при $\dim M < \infty$, а условие $б$ — если $M = \ker T$ или $R(T)$. Совокупность $\tilde{N} = (X_{G\varepsilon}, \ T_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon, J, \ Y_F)$, где $\Gamma_\varepsilon = G_\varepsilon^{-1} G\Gamma$, образует, как и N, S-узел. При этом

$$S(\lambda, \tilde{N}) = E - iJ\Gamma_{GF}^{+} (T - \lambda E - \lambda\varepsilon G^{-1})^{-1}\Gamma.$$

Очевидно,

$$S(\lambda, N) = \lim_{\varepsilon \to 0} S(\lambda, \tilde{N}).$$

Спроектировав узел $\tilde{N}$ на M_ε и его G-ортогональное дополнение M_ε'', получим

$$S(\lambda, N) = \lim_{\varepsilon \to 0} S(\lambda, \tilde{N}_{M_\varepsilon}) \cdot S\left(\lambda, \tilde{N}_{M'_\varepsilon}\right)$$

Следующий пример иллюстрирует этот прием.

Пусть X и Y — координатные гильбертовы пространства, $\dim X = 3$, $\dim Y = 2$. Операторы в X и Y будем отождествлять с их матрицами в координатных базисах. Сохраняя в Y гильбертову метрику, определим в X G-метрику, где

$$G = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \quad L > 0, \quad C > 0.$$

Пусть

$$T = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & -L^{-1} \\ 0 & 0 & -L^{-1} \\ C^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Совокупность $N = (X_G, T, \Gamma, J, Y)$ образует индефинитный узел. Подпространство, натянутое на векторы $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, вырождено относительно G-метрики и инвариантно относительно T.

«Возмущая» G-метрику, положим $G_\varepsilon = G + \varepsilon E$. Операторы T_ε и Γ_ε равны соответственно

$$i \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(L+\varepsilon)^{-1} \\ 0 & 0 & -(L+\varepsilon)^{-1} \\ (C+\varepsilon)^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (L-\varepsilon)^{-1} & 0 \\ 0 & (C+\varepsilon)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Передаточная функция $S(\lambda, \widetilde{N})$ узла $\widetilde{N} = (X_{G_\varepsilon}, T_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon, J, Y)$ равна

$$\begin{bmatrix} 1 & i\lambda (C+\varepsilon)^{-1} \Delta^{-1}(\lambda) \\ i\lambda^{-1} (L+\varepsilon)^{-1} & 1 - (L-\varepsilon)^{-1} (C+\varepsilon)^{-1} \Delta^{-1}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где

$$\Delta(\lambda) = (L+\varepsilon)^{-1} (C+\varepsilon)^{-1} - \lambda^2.$$

При $\varepsilon = 0$ получим п. ф. узла N:

$$S(\lambda, N) = \begin{bmatrix} 1 & i\lambda C^{-1} (L^{-1}C^{-1} - \lambda^2)^{-1} \\ i\lambda^{-1} L^{-1} & 1 - L^{-1}C^{-1} (L^{-1}C^{-1} - \lambda^2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Подпространство $M_\varepsilon = G_\varepsilon^{-1} GM$ есть линейная оболочка векторов $(0, 0, 1)$, $(L-\varepsilon, L+\varepsilon, 0)$. M_ε невырождено относительно G_ε и инвариантно относительно T. Передаточные функции проекций узла $\widetilde{N}$ на M_ε и M'_ε равны соответственно

$$\begin{bmatrix} 1 - (2\varepsilon (C+\varepsilon) \Delta(\lambda))^{-1} & i\lambda ((C+\varepsilon) \Delta(\lambda))^{-1} \\ -i\lambda (L+\varepsilon) (2\varepsilon (L-\varepsilon) \Delta(\lambda))^{-1} & 1 - ((C+\varepsilon)(L-\varepsilon) \Delta(\lambda))^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i (2\varepsilon\lambda)^{-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Первая из них имеет два полюса, вторая — один полюс, в то время как $S(\lambda, N)$ имеет три полюса. В рассмотренном примере функция $S(\lambda, N)$ является коэффициентом прохождения волн через четырехполюсник с индуктивностями L, $-L$ и емкостью C; параметр ε играет роль скалярного возмущения величин L, $-L$, C.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны (открытые системы). М., «Наука», 1966. 298 с.
2. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969. 287 с.
3. Кужель А. В. Спектральный анализ квазиэрмитовых операторов в пространстве с индефинитной метрикой. — «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 4, Харьков, 1967, с. 3—27.
4. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Линейные операторы в гильбертовых пространствах с G-метрикой. — УМН, XXVI, 4 (160), 1971, с. 43—92.
5. Иохвидов И. С., Крейн М. Г. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. II. — «Труды Моск. мат. о-ва», 1959, т. 8, с. 413—496.
6. Krein M. G., Langer H. Uber die verallgemeinerten Resolventen und die charakteristische Eunktion eines isometrischen Operators im Raume $\pi_{\varkappa}$.— ,,Colloquia math. soc.", Janos Bolyai, 5, Hilbert space operators. Tihany, 1970, S. 353—399.
7. Krein M. G., Langer H. Uber die Q-Funktion eines π—hermiteschen Operators im Raum $\Pi_{\varkappa}$,— ,,Acta sci. math.", 1973, t. 34, S. 191—230.
8. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М., ИЛ, 1959. 457 с.
9. Крон Г. Исследование систем по частям (диакоптика). М., «Наука», 1972. 542 с.
10. Руткас А. Г., Хиргий Н. И. Полугруппы мономорфизмов графов в дискретных структурах. — «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 19, Харьков, 1973, с. 111—125.
11. Руткас А. Г., Хиргий Н. И. Коэффициент прохождения линейной структуры на графе. — «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики». Вып. 31, Харьков, 1974, с. 168—177.
12. Хиргий Н. И. О коэффициенте прохождения линейной структуры. (См. статью в настоящем сборнике).
13. Чаусовский Д. М. Открытые системы на графах. — «Изв. АН Арм. ССР. Математика», 1967, т. 2, № 2, с. 105—116.
14. Чаусовский Д. М. Эквивалентные преобразования открытых систем на графах. — «Изв. АН Арм. ССР. Математика», 1973, т. 8, № 1, с. 56—69.