УДК 513.88 + 517.948

Л. М. Райх, Э. Р. Цекановский, канд. физ-мат. наук

БИИНВОЛЮТИВНО САМОСОПРЯЖЕННЫЕ БИРАСШИРЕНИЯ J-ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

В статье рассматривается новый вид расширений с выходом в оснащенное пространство плотно заданных J-эрмитовых (J-инволюция) операторов, так называемые биинволютивно самосопряженные бирасширения. Устанавливается аналог формул Дж. Неймана, в которых дано описание и классификация биинволютивно самосопряженных бирасширений, определяется ряд их свойств. Указанный подход позволяет дать в общем случае* описание обычных J-самосопряженных расширений J-эрмитова оператора в терминах формул Неймана, которое ранее было неизвестным, и, как следствие, получить теорему Галиндо [2] о возможности расширения плотно заданного J-эрмитова оператора до J-самосопряженного. Полученные результаты относительно биинволютивных бирасширений являются обобщением на случай J-эрмитовых операторов работ [2, 3], а также публикующейся работы Э. Р. Цекановского и Ю. Л. Шмульяна.

В настоящей работе мы придерживаемся следующих обозначений: если C — линейный оператор, то через $D(C)$ обозначается его область задания, через $\Delta(C)$ — область его значений, $G(C)$ — множество нулей оператора C. Если H_1 и H_2 — два гильбертовых пространства, то через $[H_1, H_2]$ будем обозначать пространство всех линейных непрерывных операторов C из H_1 в $H_2 \cdot (D(C) = H_1, \Delta(C) \subseteq H_2)$. Говоря о непрерывности либо замкнутости операторов, будем указывать сначала топологию в их области определения, а затем в области значений.

1. Биинволюции и их свойства

Определение 1. *Плотно заданный замкнутый оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, будем называть J-эрмитовым, если*

$$A \subset JA^*J, \tag{1}$$

где J — инволюция в пространстве H.

Легко видеть, что условие (1) эквивалентно

$$(Ax, Jy) = (x, JAy). \tag{2}$$

Здесь x и y — произвольные векторы из $D(A)$. Во множествах $D(A^*)$ и $D(JA^*J)$ введем скалярные произведения

$$(x, y)_+ = (JA^*Jx, JA^*Jy) + (x, y), \tag{3}$$

$$(u, v)^+ = (A^*u, A^*v) + (u, v), \tag{4}$$

где x, y из $D(JA^*J)$, а u, v из $D(A^*)$. Обозначим $H_+ = D(JA^*J)$, $H^* = D(A^*)$. Легко видеть, что H_+ и H^+ со скалярными произведениями соответственно (3) и (4) являются гильбертовыми пространствами. Построим соответствующие оснащения [5]

$$H_+ \subset H \subset H_-; \tag{5}$$

$$H^+ \subset H \subset H^-.$$

* В некоторых частных случаях такое описание в терминах резольвент было получено в [3, 4].

Определение 2. *Отображение $B(H_1 \to H_2)$ будем называть антиизометрическим, если*

$$(Bx, By)_2 = \overline{(x, y)_1} \quad (x, y \in H_1). \tag{6}$$

Легко видеть, что антиизометрическое отображение B является гомеоморфизмом.

Определение 3. *Пусть $B(H_- \to H^-)$ и $C(H_+ \to H^+)$ — антиизометрические отображения. Пару отображений $\{B, C\}$ будем называть биинволюцией, если*

$$(Bx, Cy) = \overline{(x, y)} \quad (x \in H_-, y \in H_+). \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть J — инволюция в H. Тогда а) отображение $J_+ = J|_{H_+}$ — антиизометрия из H_+ в H^+; б) расширение J_- инволюции J по (H_-H^-) непрерывности — антиизометрия из H_- в H^-; в) пара отображений $\{J_-, J_+\}$ — биинволюция.*

Доказательство. а) Из (3) и (4) следует, что $I_+ = J|_{H_+}$ отображает H_+ на H^+. Далее

$$(J_+x, J_+y)^+ = (Jx, Jy) + (A^*Jx, A^*Jy) = \overline{(x, y)}_+ \quad (x, y \in H_+).$$

б) Если $x \in H$, то

$$\| Jx \|^- = \sup_{z \in H^+} \frac{|(z, Jx)|}{\| z \|^+} = \sup_{u \in H_+} \frac{|(JJ_+u, x)|}{\| u \|_+} = \sup_{u \in H_+} \frac{|(u, x)|}{\| u \|_+} = \| x \|_-,$$

поэтому отображение J допускает расширение J_- по непрерывности на все H_-, причем

$$\| J_-x \|^- = \| x \|_- (x \in H_-). \tag{8}$$

Легко видеть, что J_- — антилинейный оператор. Поэтому, в силу (8),

$$(J_-x, J_-y)^- = \overline{(x, y)} \quad (x, y \in H_-). \tag{9}$$

в) Пусть $x_n \to x$ $(x_n \in H)$ в метрике H_-. Тогда

$$(J_-x, J_+y) = \lim_{n \to \infty} (J_-x_n, J_+y) = \lim_{n \to \infty} (Jx_n, Jy) = \overline{(x, y)}. \tag{9'}$$

Теорема доказана.

Замечание. Легко видеть, что антиизометрия J_- отображает H_- на H^-. Как известно [1], каждая тройка пространств вида (5) порождает изометрические операторы R $(H_+ \to H_-)$ и Q $(H^+ \to H^-)$, которые мы будем называть операторами Ф. Рисса. Эти операторы, как известно [1], удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(x, y)_+ = (x, Ry) = (Rx, y) = (Rx, Ry)_- \quad (x, y \in H_+), \tag{10}$$

$$(u, v)^+ = (u, Qv) = (Qu, v) = (Qu, Qv)^- \quad (u, v \in H^+). \tag{11}$$

Теорема 2. *Следующая диаграмма коммутативна*:

$$\begin{tikzcd} H_+ \arrow[r, "R"] \arrow[d, "J_+"'] & H_- \arrow[d, "J_-"] \\ H^+ \arrow[r, "Q"] & H^- \end{tikzcd} \tag{12}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$QJ_+ = J_-R. \tag{13}$$

Действительно, пусть $x \in H_+$, $y \in H^+$. Тогда, в силу теоремы, $y = J_+z$, где $z \in H_+$. Поэтому, учитывая, что $\{J_-, J_+\}$ — биинволюция, получим

$$(J_-Rx,\ y) = (J_-Rx,\ J_+z) = \overline{(Rx,\ z)} = \overline{(x,\ z)_+} =$$
$$= (J_+x,\ J_+z)^+ = (J_+x,\ y)^+ = (QJ_+x,\ y).$$

Отсюда и следует (13). Теорема доказана.

Теорема 3*. *а) Оператор A является $(H,\ H^-)$-непрерывным; б) если $\bar{A}$ расширение A по $(H,\ H^-)$-непрерывности, то оператор Ф. Рисса задается формулой*

$$Q = I + \bar{A}A^*. \tag{14}$$

$$\text{в)}\quad (\bar{A}\,|_{H_+})^* = A^* \ \text{и}\ J_-(\bar{A}\,|_{H_+})^* J_+ \supset A. \tag{15}$$

Доказательство. *а*) Пусть $x \in D(A)$, $y \in H^+ = D(A^*)$. Тогда $(Ax,\ y) = (x,\ A^*y)$. Так как $\| A^*y \| < \| y \|^+$,

$$\| Ax \|^- = \sup_{y \in H^+} \frac{|(Ax,\ y)|}{\| y \|^+} = \sup_{y \in H^+} \frac{|(x,\ A^*y)|}{\| y \|^+} \leqslant \| x \|.$$

б) Покажем, что для любых x из H и y из H^+ справедливо

$$(\bar{A}x,\ y) = (x,\ A^*y). \tag{16}$$

Действительно, пусть $x \in H$. Тогда существует последовательность $x_n \in D(A)$ такая, что $x_n \to x$ в H. Тогда $\bar{A}x_n \to \bar{A}x$ в H^-. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $(Ax_n,\ y) = (x_n,\ A^*y)$ $(y \in H^+)$, получим (16). Далее для любых $x,\ y \in H^+$.

$$(Qx,\ y) = (x,\ y)^+ = (x,\ y) + (A^*x,\ A^*y) =$$
$$= (x,\ y) + (\bar{A}A^*x,\ y) = ([I + \bar{A}A^*],\ x,\ y),$$

откуда и следует (14).

в) Соотношение (15) легко следует из (16) и (1). Теорема доказана.

* Пп. *а* и *б* этой теоремы установлены в [5]. В общем случае (для неплотной области определения) они доказаны Ю. Л. Шмульяном.

Теорема 4. *Имеет место* (H_+) *и соответственно* (H^+) *ортогональные разложения*

$$H_+ = D(A) \oplus N_+, \tag{17'}$$

$$H^+ = J_+ D(A) \oplus N^+, \tag{17''}$$

причем $N^+ = J_+ N_+$ *и подпространство* N_+ *состоит из тех и только тех векторов* $x \in H$, *для которых* $(A^* J)^2 x = -x$.

Доказательство. Пусть $x \in H$ и $(A^* J)^2 x = -x$ и пусть y — произвольный вектор из $D(A)$. Тогда

$$(x, y)_+ = (x, y) + (JA^*Jx, JA^*Jy) = (x, y) + (JA^*Jx, Ay) =$$

$$= (x, y) + (A^*JA^*Jx, y) = (x, y) - (x, y) = 0.$$

Проводя выкладки в обратном порядке, получим, что если x принадлежит (H_+)-ортогональному дополнению к $D(A)$, то $(A^*J)^2 x = -x$. Соотношение (17″) окончательно следует из (3), (4) и (17′). Теорема доказана.

Следствие 1. *Справедливо равенство*

$$A^* J N_+ = N_+. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $x \in N_+$. Тогда в силу теоремы (4)

$$(A^*J)^2 (A^*Jx) = A^*J (A^*J)^2 x = -A^*Jx. \tag{19}$$

Из (19) следует включение $A^*JN_+ \subset N_+$. Пусть x — произвольный вектор из N_+. Тогда $x = -A^*JA^*Jx = A^*Jy$, где $y = -A^*Jx \in N_+$. Отсюда и вытекает

Следствие 2. *Оператор* $J_+ A^* J_+$ *изометрический.*
Следствие вытекает из следующего для $x, y \in N_+$ соотношения

$$(J_+A^*J_+x, J_+A^*J_+y)^+ = (A^*JA^*Jx, A^*JA^*Jy) +$$

$$+ (JA^*Jx, JA^*Jy) = (x, y) + (JA^*Jx, JA^*Jy) = (x, y)_+.$$

Определение 4. *Оператор* $B \in [H_+, H^+]$ *будем называть* J_+*-самосопряженным, если*

$$B = J_+ B^* J_+. \tag{20}$$

2. Теорема существования биинволютивно самосопряженных бирасширений у J-эрмитова оператора

Определение 5. *Линейный оператор* $A| \in [H_+, H^-]$ *будем называть биинволютивным расширением* J*-эрмитова оператора* A, *если для биинволюции* $\{J_-, J_+\}$ *справедливо включение*

$$A| \supset A \quad J_- A|^* J_+ \supset A. \tag{21}$$

Биинволютивное бирасширение $A|$ оператора A будем называть самосопряженным, если

$$A| = J_- A|^* J_+. \tag{22}$$

Класс всех биинволютивных бирасширений J-эрмитова оператора обозначим через $\Omega(A)$. Легко видеть, что оператор

$$\frac{1}{2}(A| + J_-A|J_+) \in \Omega(A),$$

если $A| \in \Omega(A)$

Лемма 1. *Пусть $A| \in \Omega(A)$ и $A|' \in [H_+, H^-]$. Для того, чтобы $A|' \in \Omega(A)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$G(A| - A|') \supset D(A), \tag{23}$$

$$G(J_-(A|^* - A|'^*)J_+) \supset D(A). \tag{24}$$

Доказательство Если $A|' \in \Omega(A)$, то включение (23) и (24). очевидно, вытекает из (21). Если имеют место (23) и (24), то $A|' \supset A$, $J_-A|'^*J_+ \supset A$. Лемма доказана.

Следствие 3. *Пусть $F(\subset H^-)$ — ортогональное дополнение к $JD(A)$. Тогда включения (23), (24) эквивалентны соответственно включениям*

$$\Delta(J_-(A|^* - A|'^*)J_+) \subset F, \tag{25}$$

$$\Delta(A| - A|') \subset F. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть x — произвольный из H_+, а y произвольный из H^+. Эквивалентность (23) и (25) следует из соотношения

$$(Jx, J_-(A|^* - A|'^*)J_+y) = \overline{((A| - A|')x, Jy)}.$$

Аналогично доказывается эквивалентность (24) и (26).

Лемма 2. *Пусть A — J-эрмитов оператор, действующий в пространстве H. Тогда операторы*

$$A|_0 = JA^*J, \quad A|_1 = \overline{A}|_{H_+} \tag{27}$$

принадлежат классу $\Omega(A)$, причем

$$A|_0 = J_-A|_1^*J_+, \quad A|_1 = J_-A|_0^*J_+. \tag{28}$$

Доказательство. В силу теоремы (3) $(\overline{A}|_{H_+})^* = A^*$, поэтому

$$J_-A|_1^*J_+ = J_-(\overline{A}|_{H_+})^*J_+ = J_-A^*J_+ = JA^*J = A|_0 \supset A.$$

Из теоремы (3) и соотношения (27) следует $A|_1 \in \Omega(A)$ и $J_-A|_0^*J_+ = A|_1$, а значит и $A|_0 \in \Omega(A)$. Лемма доказана.

Теорема 5. *Формулы*

$$A| = A|_0 + QS_{A|}P_{N+}; \; S_{A|} = Q^{-1}[A| - A|_0]|_{N_+} \tag{29}$$

задают биективное соответствие $A| \leftrightarrow S_{A|}$ между классами

$$\Omega(A) \text{ и } [N_+, N^+].$$

Доказательство. Пусть $A| \in \Omega(A)$. Поскольку в силу леммы (2) $A|_0 \in \Omega(A)$, то из следствия к лемме (1) вытекает, что $\Delta(A| - A|_0) \subset F$ и в силу (17′)

$$\Delta(A| - A|_0)|_{N_+} \subset F. \tag{30}$$

Из (17′), (17″) вытекает, что оператор $Q^{-1}(A| - A|_0)|_{N_+}$ отображает непрерывно N_+ в N^+. Положим

$$S_{A|} = Q^{-1}(A| - A|_0)|_{N_+}, \tag{31}$$

причем $S_{A|} \in [N_+, N^+]$. Из (31) $S_{A|}P_{N_+} = Q^{-1}(A| - A|_0)$, отсюда и получим (29). Пусть теперь $S_{A|}$ — произвольный оператор из класса $[N_+, N^+]$. Покажем, что тогда оператор

$$A| = A|_0 + QS_{A|}P_{N_+} \tag{32}$$

принадлежит классу $\Omega(A)$. Действительно, из (17′) и (32) легко следует, что $A| \supset A$ и для векторов $x \in H_+$, $y \in H^+$

$$(A|x, y) = (x, A|_0^* y) + (S_{A|}P_{N_+}x, y)^+ = (x, S_{A|}^* P_{N^+}y)_+ + \\ + (x, A|_0^* y) = (x, A|_0^* y) + (x, RS_{A|}^* P_{N^+}y). \tag{33}$$

Из (33) следует, что

$$A|^* = A|_0^* + RS_{A|}^* P_{N^+},$$

где $S_{A|}^*$ — сопряженный по отношению к $S_{A|}$ оператор и действующий из N^+ в N_+. Из (17′) и (17″) следует, что

$$J_- A|^* J_+ = J_- A|_0^* J_+ + J_- RS_A^* | P_{N^+} J_+. \tag{34}$$

Из (17) легко следует, что

$$P_{N^+} J_+ = J_+ P_{N_+}. \tag{35}$$

Тогда, учитывая (13), (28), (34) и (35), получим

$$J_- A|^* J_+ = A|_1 + QJ_+ S_{A|}^* J_+ P_{N_+}. \tag{36}$$

Отсюда и вытекает, что $J_- A|^* J_+ \supset A$. Теорема доказана.

Следствие 4. *Оператор $J_- A|^* J_+ \in \Omega(A)$ при $A| \in \Omega(A)$*

$$J_- A|^* J_+ = A|_0 + QS_{J_- A|^* J_+} P_{N_+}. \tag{37}$$

Доказательство. Действительно, $J_- A|^* J_+ \supset A$. Далее из (9), (9′) следует, что $(J_- A|^* J_+)^* = J_-^{-1} A| J_+^{-1}$, а это означает, что $J_- (J_- A|^* J_+)^* J_+ = A| \supset A$. Отсюда, в силу теоремы (5), справедливо (37). Следствие доказано.

Следствие 5. *Если $A| \in \Omega(A)$, то*

$$S_{J_- A|^* J_+} = J_+ S_{A|} J_+ - J_+ A^* J_+ |_{N_+}. \tag{38}$$

Доказательство. В силу (36) и (37)

$$-(A|_1 - A|_0) = Q\,[J_+\overset{*}{S}_{A|}J_+ - S_{J_+A|^*J_+}]P_{N_+}. \tag{39}$$

В силу (14) и (27), а также теоремы (4) получим

$$A|_1 - A|_0 = (\overline{A} - JA^*J)\,P_{N_+} = (-\overline{A}A^*JA^*J - JA^*J)\,P_{N_+} =$$
$$= -(\overline{A}A^* + I)\,JA^*JP_{N_+} = -QJA^*JP_{N_+}. \tag{40}$$

Учитывая (39) и (40), получим

$$QJA^*JP_{N_+} = Q\left[J_+\overset{*}{S}_{A|}J_+ - S_{J_-A|J_+}\right]P_{N_+}.$$

Отсюда и следует (38).

Из теоремы 5 и следствий 4, 5 вытекает

Теорема 6. *Для того, чтобы выражение* (29) *определяло биинволютивно самосопряженное бирасширение J-эрмитова оператора A, необходимо и достаточно, чтобы*

$$J_+\overset{*}{S}_{A|}J_+ - S_{A|} = J_+A^*J_+|_{N_+}. \tag{41}$$

Из теорем 5 и 6, как следствие, вытекает

Теорема 7. *Формулы*

$$A| = A|_0 + QS_{A|}P_{N_+}; \tag{42}$$

$$S_{A|} = S - \frac{1}{2}\,J_+A^*J_+|_{N_+}$$

устанавливают биективное соответствие между множеством биинволютивно самосопряженных бирасширений оператора A и множеством J_+-самосопряженных операторов S из класса $[N_+, N^+]$.

3. Классификация биинволютивно самосопряженных бирасширений J-эрмитовых операторов

Определение 6. *Квазиядром биинволютивно самосопряженного бирасширения $A|$ J-эрмитова оператора A будем называть оператор вида*

$$\widehat{A}x = A|x \quad (x \in D(\widehat{A}),\ A|x \in H), \tag{43}$$

причем, $D(A)$ состоит из тех и только тех векторов $x \in H_+$, для которых $A|x \in H$.

Определение 7. *Бирасширение $A|$ будем называть слабым, средним и сильным, если соответственно*

$$\widehat{A} = A,\ \widehat{A} \neq A \ \text{и}\ \widehat{A} \neq J\widehat{A}^*J,\quad \widehat{A} = J\widehat{A}^*J.$$

Легко видеть, что соотношение (43) эквивалентно равенству

$$(A|x,\ Jy) = (x,\ J_-A|y),\ (x,\ y \in H_+), \tag{44}$$

поэтому из (5), (43) и (44) следует, что квазиядро является J-эрмитовым (или J-самосопряженным) оператором, т. е.

$$\widehat{A} \subseteq J\widehat{A}^*J. \tag{45}$$

Теорема 8. *Для того, чтобы биинволютивно самосопряженное бирасширение $A|$ J-эрмитова оператора A было слабым, необходимо и достаточно, чтобы оператор $S_{A|}$ в соотношении* (42) *был обратимым.*

Доказательство. Пусть бирасширение $A|$ является слабым. Из равенства (42) и включения $JA^*Jx \in H$, справедливого для любого $x \in D(JA^*J)$, следует, что если оператор $S_{A|}$ необратимый, то существует ненулевой вектор $y \in N_+$, такой, что $S_{A|}y = 0$ и $A|y \in H$. Из (17′) и определения квазиядра следует, что бирасширение $A|$ не является слабым. Противоречие. Покажем обратное. Из плотности $JD(A)$ в H, соотношений (11), (17″) и из равенства

$$(QS_{A|}P_{N_+}z,\ y) = (S_{A|}P_{N_+}z,\ y)^+ \quad (z \in H_+,\ y \in JD) \tag{A}$$

следует, что если $QS_{A|}P_{N_+}z \in H$, то $S_{A|}P_{N_+}z = 0$. Поэтому, учитывая (27), получаем, что либо бирасширение $A|$ слабое, либо $S_{A|}$ — необратимый оператор. Теорема доказана.

Следствие 6. *Если $\widehat{A}$ — квазиядро для бирасширения $A|$, то $D(\widehat{A})$ состоит из тех и только тех векторов $x \in H_+$, для которых*

$$S_{A|}P_{N_+}x = 0. \tag{46}$$

Это следствие непосредственно вытекает из доказательства теоремы. Если $\widetilde{A}$ — расширение оператора A, определенное условием

$$\widetilde{A} = JA^*J\,|_{D(\widetilde{A})},\quad (D(\widetilde{A}) \subset D(JA^*J)),$$

то из соотношения (17′) следует, что

$$D(\widetilde{A}) = D(A) \oplus N_+^{(1)} \quad (N_+^{(1)} \subset N_+). \tag{47}$$

Если оператор $\widetilde{A}$ замкнут (в дальнейшем рассматриваются только замкнутые расширения оператора A), то $N_+^{(1)}$ является подпространством в N_+. Заметим, что имеют место следующие соотношения:

$$N_+ = N_+^{(1)} \oplus N_+^{(2)};\quad N^+ = N^+_{(1)} + N^+_{(2)}, \tag{48}$$

$$N^+_{(k)} = J_+N_+^{(k)}\quad (k = 1,\ 2). \tag{49}$$

Если $\tilde{A}$ J-эрмитово (J-самосопряженное) расширение оператора A, то справедливы включения

$$A \subset \tilde{A} \subseteq J\tilde{A}^*J \subset JA^*J \quad (\tilde{A}^* \subset A^*). \tag{50}$$

Лемма 3. *Если* $\tilde{A} = JA^*J|_{D(\tilde{A})}$ *— расширение оператора* A, *то включения*

$$\tilde{A} \subseteq J\tilde{A}^*J \quad и \quad J_+A^*J_+N_+^{(1)} \subseteq N_{(2)}^+$$

эквивалентны.

Доказательство. Пусть x, y — произвольные вектора из $N_+^{(1)}$. Тогда на основании теоремы 4

$$(\tilde{A}x, Jy) - (x, J\tilde{A}y) = (J_+A^*J_+x, J_+y)^+. \tag{51}$$

Из соотношений (18), (48) и (49) следует доказательство леммы.

Лемма 4. *Если* $\tilde{A} = JA^*J|_{D(\tilde{A})}$ *— расширение оператора* A, *то соотношения*

$$\tilde{A} = J\tilde{A}^*J \quad и \quad J_+A^*J_+N_+^{(1)} = N_{(2)}^+$$

эквивалентны.

Доказательство. Пусть $\tilde{A} = J\tilde{A}^*J$, а $J_+A^*J_+N_+^{(1)} \neq N_{(2)}^+$, на основании леммы (3)

$$J_+A^*J_+N_+^{(1)} \subset N_{(2)}^+.$$

Поэтому, принимая во внимание следствие из теоремы 4, получим, что существует ненулевой вектор $y \in N_{(2)}^+$ такой, что

$$J_+A^*J_+N_+^{(1)} \perp y. \tag{52}$$

Пусть x — произвольный из $D(\tilde{A})$. Из (47) следует, что $x = u + v$, где $u \in D(A)$ и $v \in N_+^{(1)}$. Тогда из (48)

$$(\tilde{A}x, y) = (Au, y) + (JA^*Jv, y) = (u, A^*y) + (JA^*Jv, y) +$$
$$+ (A^*JA^*Jv, A^*y) + (v, A^*y) = (x, A^*y) + (J_+A^*J_+v, y) = (x, A^*y).$$

Таким образом, $y \in D(\tilde{A}^*)$ и, значит,

$$J_+^{-1}y \in D(J\tilde{A}^*J) = D(\tilde{A}). \tag{53}$$

Так как $y \in N_{(2)}^+$, то из (47), (48), (49) и (53) следует, что

$$J_+A^*J_+N_+^{(1)} = N_{(2)}^+.$$

Обратно. Пусть

$$J_+A^*J_+N_+^{(1)} = N_{(2)}^+ \tag{54}$$

и $\tilde{A} \neq J\tilde{A}^*J$. На основании леммы 3 $\tilde{A} \subset J\tilde{A}^*J$. Учитывая последнее включение, теоремы 1, 4, соотношения (47), (48), (49) и (50), получим, что существует ненулевой вектор y такой, что

$$y \in D(\tilde{A}^*) \text{ и } y \in N_{(2)}^+. \tag{55}$$

Тогда для произвольного вектора $x \in N_+^{(1)}$

$$\begin{gathered} 0 = (\tilde{A}x, y) - (x, \tilde{A}^*y) = (JA^*Jx, y) - (x, A^*y) = \\ = (JA^*Jx, y) + (A^*JA^*Jx, A^*y) = (J_+A^*J_+x, y)^+. \end{gathered} \tag{56}$$

Поэтому, учитывая (54), (55) и (56), получаем противоречие, доказывающее лемму.

Пусть $\tilde{A}$ — J-эрмитово (J-самосопряженное) расширение квазиядра $\hat{A}$, т. е.

$$A \subset \hat{A} \subset \tilde{A}, \quad \tilde{A} \subseteq J\tilde{A}^*J.$$

Из представления $D(\hat{A})$ (соотношение (47)) и (48) следует, что

$$D(\tilde{A}) = D(A) \oplus N_+^{(1)} \oplus N_+^{(21)},$$

причем

$$\begin{gathered} N_+ = N_+^{(1)} \oplus N_+^{(21)} \oplus N_+^{(22)}; \\ N^+ = N_{(1)}^+ \oplus N_{(21)}^+ \oplus N_{(22)}^+; \\ N_{(21)}^+ = J_+N_+^{(21)}; \quad N_{(22)}^+ = J_+N_+^{(22)}. \end{gathered} \tag{57}$$

Лемма 5. *Если* $A \subset \hat{A} \subset \tilde{A}$ *и* $\tilde{A} \subseteq J\tilde{A}^*J$, *то*

$$A^*N_{(1)}^+ \perp N_+^{(21)}.$$

Доказательство. Из леммы 5 следует, что

$$J_+A^*J_+\left[N_+^{(1)} \oplus N_+^{(21)}\right] \subseteq N_{(22)}^+.$$

Поэтому, учитывая (18) и (57), получаем $A^*N_{(1)}^+ \subset N_+^{(22)}$, откуда и следует доказательство леммы.

Теорема 9. *Для того, чтобы J-эрмитово (J-самосопряженное) расширение $\tilde{A}$ оператора A содержалось в биинволютивно самосопряженном бирасширении $A|$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{gathered} S_{A|} = \left[\tilde{S}P_{N_+^{(2)}} - \frac{1}{2}P_{N_{(1)}^+}JA^*JP_{N_+^{(2)}} + \frac{1}{2}P_{N_{(2)}^+}JA^*JP_{N_+^{(1)}}\right] - \\ - \frac{1}{2}JA^*JP_{N_+}, \end{gathered} \tag{58}$$

$$J_+A^*J_+N_+^{(1)} \subseteq N_{(2)}^+, \tag{59}$$

где $\widetilde{S}$ — J_+-самосопряженный оператор из класса $[N_+^{(2)}, N_{(2)}^+]$.

Доказательство. *Необходимость* Пусть $A \subset \widetilde{A} \subset A|$ и $\widetilde{A} \subseteq J\widetilde{A}^*J$. Тогда условие (57) следует из леммы (3). Легко видеть, что расширение $\widetilde{A}$ содержится в квазиядре бирасширения $A|$. Поэтому, учитывая следствие из теоремы (8), получим

$$S_{A|}P_{N_+}D(\widetilde{A}) = \varnothing. \tag{60}$$

Из (47) и (60) следует, что

$$S_{A|}N_+^{(1)} = \varnothing. \tag{61}$$

Из последнего соотношения вытекает, что $S_{A|}^*N^+ \subseteq N_+^{(2)}$. Принимая во внимание (17′), (17″), (49) и (61), получаем

$$J_+S_{A|}^*J_+N_+ \subseteq N_{(2)}^+. \tag{62}$$

Из соотношений (42) и (61) легко следует

$$S_{A|} = SP_{N_+^{(2)}} - \frac{1}{2}J_+A^*J_+P_{N_+^{(2)}}. \tag{63}$$

Учитывая (41) и (63), получаем

$$SP_{N_+^{(2)}} = J_+S_{A|}^*J_+ - J_+A^*J_+P_{N_+} + \frac{1}{2}J_+A^*J_+P_{N_+^{(2)}}.$$

Из последнего соотношения и из (59) и (62) следует

$$P_{N_{(1)}^+}SP_{N_+^{(2)}} = -\frac{1}{2}P_{N_{(1)}^+}J_+A^*J_+P_{N_+^{(2)}}. \tag{64}$$

Обозначим

$$\widetilde{S} = P_{N_{(2)}^+}SP_{N_+^{(2)}}. \tag{65}$$

Так как S — J_+-самосопряженный оператор из $[N_+, N^+]$, то непосредственной проверкой легко убедиться, что $\widetilde{S}$ — J_+-самосопряженный оператор из $[N_+^{(2)}, N_{(2)}^+]$. Если теперь учесть соотношения (63), (64) и (65), получим

$$S_{A|} = \widetilde{S}P_{N_+^{(2)}} - P_{N_{(1)}^+}J_+A^*J_+P_{N_+^{(2)}} - \frac{1}{2}P_{N_{(2)}^+}J_+A^*J_+P_{N_+^{(2)}}. \tag{66}$$

При выполнении условия (57) равенства (58) и (65) эквивалентны, в чем нетрудно убедиться. Необходимость доказана.

Достаточность. Покажем, что оператор, определенный равенством (58), задает бинволютивно самосопряженное бирасширение $A|$. Для этого на основании теоремы 7 достаточно показать, что оператор

$$S = \tilde{S}P_{N_+^{(2)}} - \frac{1}{2}P_{N_{(1)}^+}J_+A^*J_+P_{N_+^{(2)}} + \frac{1}{2}P_{N_{(2)}^+}J_+A^*J_+P_{N_+^{(1)}} \quad (67)$$

является J_+-самосопряженным из $[N_+, N^+]$. Пусть x и y — произвольные векторы из N_+ и N^+ соответственно. Тогда на основании теоремы 4 и соотношений (3) и (4) получаем

$$(Sx, y)^+ = \left(\tilde{S}P_{N_+^{(2)}}x, y\right)^+ - \frac{1}{2}\left(P_{N_{(1)}^+}J_+A^*J_+P_{N_+^{(2)}}x, y\right)^+ +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(P_{N_{(2)}^+}J_+A^*J_+P_{N_+^{(1)}}x, y\right)^+ = -\frac{1}{2}\left(A^*JA^*P_{N_+^{(2)}}x, A^*P_{N_{(1)}^+}y\right) +$$

$$+ \left(x, \tilde{S}^*P_{N_{(2)}^+}y\right)_+ - \frac{1}{2}\left(JA^*JP_{N_+^{(2)}}x, P_{N_{(1)}^+}y\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(A^*JA^*JP_{N_+^{(1)}}x, A^*P_{N_{(2)}^+}y\right) + \frac{1}{2}\left(JA^*JP_{N_+^{(1)}}x, P_{N_{(2)}^+}y\right) =$$

$$= \left(x, \tilde{S}^*P_{N_{(2)}^+}y\right)_+ + \frac{1}{2}\left(x, P_{N_+^{(2)}}A^*P_{N_{(1)}^+}y\right)_+ - \frac{1}{2}\left(x, P_{N_+^{(1)}}A^*P_{N_{(2)}^+}y\right)_+.$$

Таким образом,

$$S^* = \tilde{S}^*P_{N_{(2)}^+} + \frac{1}{2}P_{N_+^{(2)}}A^*P_{N_{(1)}^+} - \frac{1}{2}P_{N_+^{(1)}}A^*P_{N_{(2)}^+}. \quad (68)$$

Из (48) и (17) легко следует

$$J_+P_{N_+^{(k)}} = P_{N_{(k)}^+}J_+ \quad (k = 1, 2). \quad (69)$$

Учитывая (68) и (69), получаем

$$J_+S^*J_+ = J_+S^*J_+P_{N_+^{(2)}} + \frac{1}{2}P_{N_{(2)}^+}J_+A^*J_+P_{N_+^{(1)}} -$$

$$- \frac{1}{2}P_{N_{(1)}^+}J_+A^*J_+P_{N_+^{(2)}}.$$

Принимая во внимание (67), а также тот факт, что $\tilde{S}$ — J_+-самосопряженный оператор, получим $S = J_+S^*J_+$. Таким образом, определенный равенством (58) оператор действительно задает биинволютивно самосопряженное бирасширение. Так как имеет место (59), то из доказательства необходимости следует, что справедливо (67). Поэтому $S_{A|}$ анулирует $N_+^{(1)}$ и по следствию из теоремы 8 имеют место включения $\tilde{A} \subseteq \hat{A} \subset A|$, где $\hat{A}$ — квазиядро бирасширения $A|$. Теорема доказана.

Теорема 10. *Если $\tilde{A}$ — произвольное J-эрмитово (J-самосопряженное) расширение J-эрмитова оператора A, то существует* *биинволютивно самосопряженное бирасширение $A|$, для которого $\tilde{A}$ является квазиядром.*

Доказательство. Пусть $D(\tilde{A}) = D(A) \oplus N_+^{(1)}$ и $N_+ = N_+^{(1)} \oplus N_+^{(2)}$. Тогда легко видеть, что оператор

$$S_{A|} = -P_{N^+_{(1)}} J_+ A^* J_+ P_{N_+^{(2)}} - \frac{1}{2} P_{N^+_{(2)}} J_+ A^* J_+ P_{N_+^{(2)}}$$

анулирует только подпространство $N_+^{(1)}$. Учитывая следствие 6, лемму 3, теорему 9, получим требуемое.

Теорема 11. *Для того, чтобы биинволютивно самосопряженное бирасширение $A|$ J-эрмитова оператора A было сильным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$S_{A|} = \left[\tilde{S} P_{N_+^{(2)}} - \frac{1}{2} P_{N^+_{(1)}} J_+ A^* J_+ P_{N_+^{(2)}} + \frac{1}{2} P_{N^+_{(2)}} J_+ A^* J_+ P_{N_+^{(1)}}\right] - \\ - \frac{1}{2} J_+ A^* J_+ P_{N_+}; \; J_+ A^* J_+ N_+^{(1)} = N^+_{(2)}, \tag{70}$$

где $\tilde{S}$ — J_+-самосопряженный оператор из $[N_+^{(2)}, N^+_{(2)}]$.

Доказательство теоремы следует из леммы 4, теоремы 10 и того факта, что J-самосопряженный оператор не допускает J-эрмитовых расширений.

Теорема 12. *Для того, чтобы биинволютивно самосопряженное бирасширение $A|$ J-эрмитова оператора A было средним, необходимо и достаточно, чтобы*

$$S_{A|} = \left[\tilde{S} P_{N_+^{(2)}} - \frac{1}{2} P_{N^+_{(1)}} J_+ A^* J_+ P_{N_+^{(2)}} + \frac{1}{2} P_{N^+_{(2)}} J_+ A^* J_+ P_{N_+^{(1)}}\right] - \\ - \frac{1}{2} J_+ A^* J_+ P_{N_+}; \; J_+ A^* J_+ N_+^{(1)} \subset N^+_{(2)},$$

где $\tilde{S}$ — J_+-самосопряженный из класса $[N_+^{(2)}, N^+_{(2)}]$.

Доказательство следует из леммы 4 и теорем 9 и 11.

Как следствие, из теоремы 11 вытекает следующая теорема Галиндо

Теорема. *Всякий замкнутый плотно заданный J-эрмитов оператор допускает J-самосопряженные расширения.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанский Ю. М. Пространства с негативной нормой. — УМН, 1963, т. XVIII, № 1 (109), с. 63—96.
2. Galindo A. On the Existence of J—Self—adjoint Extensions of J Symmetric Operators with Adjoint.—,,Comm. Pure and Appl., Math. ", 1962, vol. 15, p. 423—425.
3. Жихарь Н. А. К теории расширений J-симметрических операторов. — УМЖ, 1959, т. XI, № 4, с. 352—364.

4. Макарова А. Д. О J-симметрических операторах с неплотной областью определения.— Волжск. мат. сб. сер. «Функциональный анализ и теория функций». Ульяновск, 1969, № 10, с. 77—83.
5. Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р. К теории обобщенных самосопряженных расширений эрмитовых операторов с неплотной областью определения. — ДАН УССР, 1973, № 9, сер. А, с. 771—773.