УДК 517.919

*М. А. Перельман*

## О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

В ряде работ последнего времени изучается вопрос о единственности и корректной разрешимости краевых задач в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных ([1—4] и др.). Настоящая работа продолжает эту тематику.

Мы рассматриваем линейное дифференциальное уравнение вида

$$Lu = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0,$$

$$x \in R^m, \ t \in [0, T], \tag{1}$$

где $P(s)$ — полином относительно $s = (s_1, \ldots, s_m)$ с постоянными (комплексными) коэффициентами. Изучаемая нами краевая задача состоит в решении уравнения (1) при условии

$$\int_0^T u(x, t)\, d\mu(t) = u_0(x) \tag{2}$$

Здесь $\mu(t)$ — некоторая комплекснозначная функция ограниченной вариации, $u_0(x)$ — заданная функция.

В $n^0 1$ мы исследуем вопрос о классах единственности решения задачи (1)—(2), т. е. о дополнительных условиях на поведение $u(x, t)$ при $\|x\| \to \infty$, гарантирующих, что единственным решением соответствующей однородной задачи, когда (2) заменяется условием

$$\int_0^T u(x, t)\, d\mu(t) = 0, \tag{$2_0$}$$

является $u(x, t) \equiv 0$.

В $n^0 n^0$ 2—3 более детальному изучению подвергается многоточечная краевая задача (т. е. задача (1) — (2) с кусочно-постоянной $\mu(t)$). Здесь рассматриваются следующие вопросы. В $n^0 1$ введено понятие типа $a$ $(0 \leqslant a < \infty)$ краевой задачи (1) — (2). В $n^0 2$ дано необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять функция $\mu(t)$, чтобы $a = \infty$; выясняется, для каких уравнений вида (1) существует кусочно-постоянная функция $\mu(t)$ такая, что тип задачи (1) — (2) равен $a$, $0 < a < \infty$, и для любой ли $\mu(t)$ при некотором $P(s)$ задача имеет тип $a$. $n^0 3$ посвящен установлению корректной разрешимости многоточечной краевой задачи вида (1) — (2) в классе ограниченных функций и в классе функций степенного роста на бесконечности.

$n^0 1$. В работах [1, 3, 4, 5] вопрос о единственности решения соответствующей краевой задачи с помощью принципа Гольмгрена или обобщенного принципа Гольмгрена сводится к изучению разрешимости некоторой другой, так называемой «сопряженной краевой задачи». В этом пункте мы покажем, что аналогичный метод можно применить и при изучении задачи (1) — ($2_0$), для чего модернизируем соответствующим образом принцип Гольмгрена.

Сопряженной краевой задачей (по отношению к задаче (1) — ($2_0$)) будем называть задачу решения дифференциального уравнения

$$L^*v(x,\ t,\ \tau) \equiv -\frac{\partial v(x,\ t,\ \tau)}{\partial \tau} - P^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x,\ t,\ \tau) = 0,$$

$$x \in R^m,\ t \in [0,\ T],\ \tau \in [0,\ T], \tag{1'}$$

где $P^*(s)$ — полином, полученный из $P(s)$ заменой $s_j$ на $-s_j$, а коэффициентов — на комплексно-сопряженные при условиях

$$\int_0^T v(x, t, t_0)\, d\overline{\mu(t)} = \varphi(x) \tag{2'}$$

Здесь $t_0 \in [0,\ T]$ и $\overline{\mu(t)}$ — функция, комплексно-сопряженная к $\mu(t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x,\ t,\ t) \equiv 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in R^m. \tag{3'}$$

Пусть $\Phi$ — линейное топологическое пространство функций, $E$ — нормированное пространство, $E'$ — сопряженное пространство, причем $\Phi \subset E$ и $\Phi$ плотно в $E$.

**Теорема 1.** *Пусть* $u(x,\ t) \in E'$ — *решение задачи* (1)—($2_0$) *и пусть для любого* $t_0 \in [0,\ T]$ *и для любой функции* $\varphi(x) \in \Phi$ *задача* (1′) — (3′) *имеет решение* $v(x,\ t,\ \tau)$, *обладающее следующими свойствами:*

*а) функция* $v(x,\ t,\ \tau)$ *и ее производные по* $x$, *входящие в* (1′), *являются элементами* $E$ *при любых* $t,\ \tau: 0 \leqslant t,\ \tau \leqslant T$;

*б) справедливо тождество*

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,\ \tau),\ v(x,\ t,\ \tau)\right) = \left(u(x,\ \tau),\ P^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x,\ t,\ \tau)\right),$$

$$0 \leqslant t,\ \tau \leqslant T.$$

*Тогда* $u(x,\ t) \equiv 0$.

Доказательство. Фиксируя $\varphi(x) \in \Phi$ и $t_0 \in [0,\ T]$ и пользуясь *б*, имеем при любом $t \in [0,\ T]$:

$$\int_{t_0}^{t} (Lu(x,\ \tau),\ v(x,\ t,\ \tau))\, d\tau = (u(x,\ \tau),\ v(x,\ t,\ \tau))\Big/_{t_0}^{t} -$$

$$-\int_{t_0}^{t} (u(x,\ \tau),\ L^*v(x,\ t,\ \tau))\, d\tau.$$

Учитывая (1′), получаем

$$(u(x,\ t),\ v(x,\ t,\ t)) - (u(x,\ t_0),\ v(x,\ t,\ t_0)) = 0,$$

откуда следует

$$\int_0^T (u(x, t), v(x, t, t))\, d\mu(t) - \int_0^T (u(x, t_0), v(x, t, t_0))\, d\mu(t) = 0$$

Учитывая, что из (3′) следует $v(x, t, t) = v_1(x)$ и условие (2), получаем

$$\left(u(x, t_0), \int_0^T v(x, t, t_0)\, \overline{d\mu(t)}\right) = 0.$$

Отсюда, учитывая (2′), произвольность $\varphi(x)$ и плотность включения $\Phi \subset E$, заключаем, что $u(x, t_0) = 0$. В силу произвольности $t_0$ заключаем, что

$$u(x, t) \equiv 0.$$

Теорема доказана.

Пусть $\Psi = \{\psi(s)\}$ — пространство преобразований Фурье функций из $\Phi$. Тогда задача (1′) — (3′) в пространстве $\Psi$ переходит в следующую:

$$\frac{d\tilde{v}(s, t, \tau)}{d\tau} = -P^*(is)\tilde{v}(s, t, \tau), \tag{1″}$$

$$\int_0^T \tilde{v}(s, t, t_0)\, \overline{d\mu(t)} = \psi(s), \tag{2″}$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{v}(s, t, t) \equiv 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \ s \in R^m, \tag{3″}$$

где $\tilde{v}(s, t, \tau)$, $\psi(s)$ — преобразование Фурье (по $x$) соответственно $v(x, t, \tau)$, $\varphi(x)$.

Решение задачи (1″) — (3″) можно записать в виде

$$\tilde{v}(s, t, \tau) = \exp\{(t - \tau) P^*(is)\} v_0(s).$$

Здесь $v_0(s)$ ищется из условия (2″):

$$v_0(s) = [\Delta(s)]^{-1} \cdot \psi(s) \cdot \exp\{t_0 P^*(is)\},$$

где $\Delta(s) = \int_0^T \exp\{tP^*(is)\}\, \overline{d\mu(t)}$ — функция, называемая впредь определителем краевой задачи (1) — (2).

Таким образом, доказана

**Теорема 2.** *Решение задачи* (1″) — (3″) *при любой функции* $\psi(s) \in \Psi$ *существует при всех значениях* $s$, *для которых* $\Delta(s) \neq 0$; *это решение представимо в виде*

$$\tilde{v}(s, t, \tau) = \exp\{(t - \tau + t_0) P^*(is)\} \psi(s) \cdot [\Delta(s)]^{-1}. \tag{3}$$

Отметим, что $\Delta(s) \not\equiv 0$, если $\mu(t) \not\equiv \text{const}$.

Пусть $Z$ — множество нулей $\Delta(s)$. Число

$$a = \inf_{s \in Z} \|\operatorname{Im} s\|$$

будем называть типом краевой задачи (1) — (2). Ниже будем обозначать $M_{\alpha, A}$ — пространство функций, удовлетворяющих оценке

$$|f(x)| \leqslant C_f \exp\{A \|x\|^\alpha\}.$$

С помощью формулы (3), используя теорему 1, приходим, как и в [1], к следующим результатам по единственности решения задачи (1) — $(2_0)$.

1. Если $a = \infty$, то задача (1) — $(2_0)$ имеет лишь тривиальное решение:

а) в пространстве как угодно быстро растущих функций, если $p = 0$;

б) в пространстве $M_{\alpha, A}$ при любых $\alpha > 0$, $A > 0$, если $p = 1$;

в) в пространстве $M_{p', A}$ с некоторым $A > 0$, если $p > 1$ $\left(p' = \frac{p}{p-1}\right)$.

2. Если $0 < a < \infty$, то задача (1) — $(2_0)$ имеет лишь тривиальное решение в пространстве функций, удовлетворяющих оценке

$$|f(x)| \leqslant C_f \exp\{\Sigma A_i |x|_i\}, \quad \Sigma A_i^2 < a^2.$$

3. Если $a = 0$, но $\Delta(s)$ не имеет вещественных нулей, то задача (1) — $(2_0)$ имеет лишь тривиальное решение в пространстве функций $K_\mu$, удовлетворяющих оценке

$$|f(x)| \leqslant C_f (1 + \|x\|)^\mu$$

при любом $\mu > 0$.

Пусть $\Delta(s_0) = 0$. Тогда функция

$$u(x, t) = \exp\{-i(s_0, x\} \exp\{tP(-is_0)\}, \tag{4}$$

очевидно, является решением уравнения (1) и, в силу

$$\int_0^T \exp\{tP(-is_0)\} d\mu(t) = \overline{\Delta(s_0)} = 0,$$

удовлетворяет условию $(2_0)$. С помощью этого факта, аналогично [1], находим классы функций, в которых нарушается единственность. Получаем следующие результаты.

4. Если $0 < a < \infty$, то в классе функций $M_{1, A}$, $A > a$ задача (1) — $(2_0)$ имеет нетривиальное решение.

5. Если $a = 0$, но $\Delta(s)$ не имеет вещественных нулей, то при любом $\varepsilon > 0$ задача (1) — $(2_0)$ имеет нетривиальное решение $u(x, t) \in M_{1, \varepsilon}$.

6. Если $a = 0$ и существует $s_0 \in Z$, $\operatorname{Im} s_0 = 0$, то задача (1) — $(2_0)$ имеет нетривиальное ограниченное решение. При этом решение задачи (1) — $(2_0)$, принадлежащее $L_1(R^m)$, тождественно равно нулю.

$n^0 2$. Докажем некоторые факты, относящиеся к многоточечным задачам в случае $m = 1$. В этом случае условие $(2_0)$ имеет вид

$$\int_0^T u(x, t)\,d\mu(t) \equiv \sum_{k=1}^N A_k u(x, t_k) = 0, \tag{$2_0^*$}$$

где $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_N \leqslant T$.

Будем обозначать $P^*(is) = bs^p + \ldots$

**Теорема 3.** *Для того, чтобы задача* (1) — $(2_0)$ *имела бесконечный тип, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mu(t) = A\eta(t - t_0) + B, \; A \neq 0, \; \eta(t)$$

— *функция Хевисайда, т. е. чтобы это была задача Коши.*

Доказательство. Достаточность очевидна.

*Необходимость.* Обозначим $P^*(is) = z$. Пусть $t_0 \in [0, T]$ — последняя точка роста $\mu(t)$. Тогда

$$\Delta(s) = \int_0^{t_0} e^{tz} d\overline{\mu(t)} = \delta(z).$$

Так как целая функция первого порядка роста $\delta(z)$ нигде не имеет нулей, то $\delta(z) = A_1 \exp\{t^* z\}$, $A_1 \neq 0$. Легко показать, что $t^* = t_0$, т. е. $\Delta(s) = A_1 \exp\{t_0 P^*(is)\}$.

Рассмотрим $\mu_0(t) = \mu(t) - A_1\eta(t - t_0)$. Тогда

$$\int_0^T e^{tz} d\overline{\mu_0(t)} \equiv 0,$$

т. е. $\mu_0(t) \equiv \mathrm{const}$.

Теорема доказана.

*Замечание.* Теорема 3 справедлива при любом $m$ и любой функции ограниченной вариации $\mu(t)$.

**Теорема 4.** *Пусть* $p > 1$, $\mathrm{Re}\,b = 0$. *Тогда тип задачи (1) — $(2_0^*)$ равен нулю.*

Доказательство. Рассмотрим образ $\Lambda_a$ полосы $|\mathrm{Im}\,s| \leqslant a$, $a > 0$ при отображении $z = P^*(is)$. Ясно, что $\Lambda_a$ — расширяющаяся область, которая содержит бесконечную часть любой полосы $|\mathrm{Re}\,z| < \mathrm{const}$. В нашем случае

$$\Delta(s) = \int_0^T \exp\{tP^*(is)\} d\overline{\mu(t)} = \sum_{k=1}^N \overline{A}_k e^{t_k z} = \delta(z),$$

где $0 \leqslant t_k \leqslant T$ — точки разрыва функции $\mu(t)$; $A_k$ — комплексные постоянные $(k = 1, \ldots, N)$. В силу теоремы о нулях квазиполинома с постоянными коэффициентами [6, с. 435] и вида области $\Lambda_a$ заключаем, что при любых $t_k$ и $A_k$ при $a > 0$ $\delta(z)$ имеет нули, принадлежащие $\Lambda_a$. Отсюда вытекает, что в полосе $|\mathrm{Im}\,s| \leqslant a$, $a > 0$ $\Delta(s)$ имеет нули. Теорема доказана.

**Теорема** 5. *Пусть либо* (*i*) $\operatorname{Re} b \neq 0$, *либо* (*ii*) $\operatorname{Re} b = 0$, $p = 1$. *Тогда для любого* $a > 0$ *существует многоточечная краевая задача* (*1*) — ($2_0^*$), *тип которой равен* $a$.

Доказательство. Краевое условие ($2_0^*$) можно искать в виде $Au(x, 0) + u(x, t_0) = 0$. Тогда $\Delta(s) = \overline{A} + \exp\{t_0 P^*(is)\}$ и нули $\Delta(s)$ находятся из условия $P^*(is) = z_0 + \frac{2k\pi i}{t_0}$, где $z_0 = t_0^{-1} \times \ln(-\overline{A})$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Образ $\Lambda_a$ полосы $|\operatorname{Im} s| \leqslant a$ при отображении $z = P^*(is)$ представляет собой в случае (*i*) область, которая с любой достаточно удаленной от начала координат вертикалью пересекается по отрезку. В то же время нули $\delta(z) = \overline{A} + \exp\{t_0 z\}$ расположены вдоль вертикали $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0$ на расстоянии $\frac{2\pi}{t_0}$ друг от друга. Выберем достаточно большое $\sigma_0$. Рассмотрим отрезок, полученный пересечением вертикали $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} P^*(i\sigma_0)$ с областью $\Lambda_a$. Выберем $t_0$ так, чтобы величина $\frac{2\pi}{t_0}$ была больше длины найденного отрезка. Наконец, возьмем $\overline{A} = -\exp\{t_0 P^*(i\sigma_0 - a)\}$. Тогда $z_0 = P^*(i(\sigma_0 + ia)) \in \partial\Lambda_a$ и, в силу выбора $t_0$, других корней $\delta(z)$ область $\Lambda_a$ не содержит. Следовательно, в полосе $|\operatorname{Im} s| \leqslant a$ функция $\Delta(s)$ обращается в нуль только в точке $s_0 = \sigma_0 + ia$; тем самым тип задачи равен $a$.

В случае (*ii*) образ полосы $|\operatorname{Im} s| \leqslant a$ при отображении $z = P^*(is)$ есть некоторая вертикальная полоса

$$a_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant a_2.$$

Для доказательства теоремы достаточно выбрать $z_0$, например, так, чтобы $\operatorname{Re} z_0 = a_1$. Теорема доказана.

Суммируя теоремы 4 и 5, получаем

Следствие. *Пусть* $a > 0$. *Условия* (*i*) *и* (*ii*) *теоремы* 5 *являются необходимыми и достаточными для того, чтобы существовала многоточечная краевая задача* (*1*) — ($2_0^*$), *тип которой равен* $a$.

*Замечание*. Нетрудно видеть, что, зафиксировав вид краевого условия ($2_0^*$) и меняя полином $P^*(is)$, можно получить краевую задачу наперед заданного типа $a \geqslant 0$. Для этого достаточно выбрать полосу $\Lambda$, например, горизонтальную, свободную от нулей функции

$$\delta(z) = \sum_{k=1}^{N} \overline{A}_k e^{t_k z},$$

но содержащую нули на границе. Полином $P^*(is) = \alpha s + \beta$ всегда можно выбрать так, чтобы полоса $|\operatorname{Im} s| \leqslant a$ переводилась отображением $z = P^*(is)$ в $\Lambda$.

$n^0 3$. Обозначим $K_\mu$ $(-\infty < \mu < \infty)$ класс непрерывных функций $f(x)$, удовлетворяющих оценке $|f(x)| < C_f (1 + |x|)^\mu$.

Задачу (1) — (2) будем называть корректно-разрешимой в классе функций $K_\mu$, если существует число $l \geqslant 0$, такое, что для любой функции, которая вместе со своими производными до порядка $l$ принадлежит $K_\mu$, существует решение $u(x, t)$ задачи (1) — (2), которое вместе со своими производными, входящими в (1), при каждом $t \in [0, T]$ принадлежит $K_\mu$ и непрерывно зависит от краевых условий в следующем смысле: если в оценке

$$|D^q u_k(x)| \leqslant C_k (1 + |x|)^\mu, \ |q| \leqslant l$$

краевых функций $u_k(x) \in K_\mu$ постоянные $C_k \to 0$ при $k \to \infty$, то в оценке соответствующих решений

$$|D^q u_k(x, t)| \leqslant C_k' (1 + |x|)^\mu, \ |q| \leqslant p$$

$C_k'$ также стремится к нулю.

Аналогичное определение корректной разрешимости краевой задачи дано в [2], где исследовались условия корректной разрешимости локальной двухточечной задачи. Там было показано следующее. Если решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром имеет вид

$$v(s, t) = Q(s, t) \cdot v_0(s),$$

то исходная краевая задача корректно разрешима в классе $K_\mu$ при любом $\mu$, если «разрешающая функция» $Q(s, t)$ удовлетворяет условию $K$:

существуют $L > 0$, $A > 0$, $\alpha \geqslant 0$ и $\lambda \in R^1$, что $\Delta(s) \neq 0$ и $|Q(s, t)| \leqslant A(1 + \|s\|)^\alpha$ при $s \in \Omega_{L,\lambda} = \{s = \sigma + i\tau, \ \|\tau\| \leqslant L(1 + \|\sigma\|)^\lambda\}$.

Аналогично можно показать, что тот же факт справедлив и в нашем случае, если в роли определителя краевой задачи (1) — (2) выступает функция

$$\Delta(s) = \int_0^T \exp\{tP^*(is)\}\overline{d\mu(t)},$$

а в роли разрешающей функции — функция

$$Q(s, t) = [\overline{\Delta(-s)}]^{-1} \cdot \exp\{tP(is)\}.$$

Краевую задачу (1) — (2), для которой выполняется условие $K$, будем называть корректной.

В настоящем пункте мы, считая $x \in R^1$, найдем в случае многоточечной краевой задачи достаточные условия того, чтобы эта задача была корректной, а также покажем, что для любого уравнения (1) существует корректная двухточечная краевая задача.

Итак, мы рассмотрим уравнение (1) $(m=1)$ при краевом условии

$$\sum_{j=0}^{N} A_j u(x,\ t_j) = u_0(x),$$

$$0 \leqslant t_0 < \ldots < t_N \leqslant T;\ A_0 \neq 0,\ A_N \neq 0. \tag{2*}$$

**Теорема 6.** *Пусть* $\operatorname{Re} P(i\sigma) \not\equiv \mathrm{const}$. *Тогда задача* (1)—(2*) *является корректной, если* $\Delta(\sigma) \neq 0\ (-\infty < \sigma < \infty)$ *и выполнено одно из следующих условий*

(*i*) $t_0 = 0,\ t_N = T$;

(*ii*) $t_N = T$ *и функция* $\operatorname{Re} P(i\sigma)$ *ограничена снизу*;

(*iii*) $t_0 = 0$ *и функция* $\operatorname{Re} P(i\sigma)$ *ограничена сверху.*

Если же $\operatorname{Re} P(i\sigma) \equiv \mathrm{const}$, то задача (1) — (2*) является корректной в случае, если $\Delta(\sigma) \neq 0$ и $t_0, \ldots, t_N$ соизмеримы.

Доказательство. Пусть сначала $\operatorname{Re} P(i\sigma) \not\equiv \mathrm{const}$. Обозначим $z = P(is)$. Рассмотрим

$$\overline{\Delta(-s)} = \sum_{j=0}^{N} A_j \exp\{t_j P(is)\} = \sum_{j=0}^{N} A_j e^{t_j z} = \delta(z).$$

Это квазиполином с постоянными коэффициентами. Его нули лежат в некоторой полосе $|\operatorname{Re} z| < C_1$ и в любом прямоугольнике $|\operatorname{Re} z| < C_1,\ b_1 < \operatorname{Im} z < b_2$ имеет конечное число нулей.

Поскольку кривая $z = P(is),\ -\infty < \sigma < \infty$ в силу условия $\Delta(\sigma) \neq 0$ не проходит через нули функции $\delta(z)$ и $|\operatorname{Re} P(i\sigma)| \to \infty$ при $|\sigma| \to \infty$, то, очевидно,

$$d = \inf_{z:\ \delta(z)=0} |P(i\sigma) - z| > 0.$$

Рассмотрим образ области $\Omega_{L,\lambda} = \{s = \sigma + i\tau : |\tau| \leqslant L(1 + |\sigma|)^{\lambda}\}$ в плоскости $z$ при отображении $z = P(is) = P(i\sigma) + R(\sigma,\ \tau)$,

где $R(\sigma,\ \tau) = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{(i\tau)^k}{k!}[P(i\sigma)]^k$.

Поскольку при $\lambda < -p + 1$ $R(\sigma,\ \tau) \to 0$ при $|\sigma| \to \infty$, $s \in \Omega_{L,\lambda}$, то, выбирая достаточно малое $L$, получим $|R(\sigma,\ \tau)| < \frac{d}{2}, s = \sigma + i\tau \in \Omega_{L,\lambda}$. Отсюда, если $\delta(z) = 0$, то

$$|P(is) - z| \geqslant |P(i\sigma) - z| - |R(\sigma,\ \tau)| > \frac{d}{2}.$$

Следовательно, при $s \in \Omega_{L,\lambda}$

$$|\overline{\Delta(-s)}| = |\delta(P(is)| \geqslant C_2 > 0.$$

Оценим $|Q(s,\ t)$ в области $\Omega_{L,\lambda}$.

Случай ($i$). а) Пусть при некотором $\sigma$ $\operatorname{Re} P(i\sigma) \leqslant 0$ Тогда

$$|Q(s, t)| = \left|\frac{e^{tP(is)}}{\overline{\Delta(-s)}}\right| = \left|\frac{e^{tP(is)+tR(\sigma,\tau)}}{\overline{\Delta(-s)}}\right| \leqslant \frac{e^{\frac{Td}{2}}}{C_2} = C_3,$$

и, значит, в этом случае условие $K$ выполнено

б) Пусть теперь $\operatorname{Re} P(i\sigma) \geqslant 0$. Тогда

$$|Q(s, t)| = \left|\frac{e^{tP(is)}}{\overline{\Delta(-s)}}\right| = \left|\frac{e^{tP(is)}}{A_0 + \ldots + A_N e^{TP(is)}}\right| = \left|\frac{e^{(t-T)P(is)}}{A_N + \ldots + A_0 e^{-TP(is)}}\right|$$

и мы сводим рассмотрение к случаю $a$ заменой $P(is)$ на $-P(is)$, точек $t_j$ на $t_j' = T - t_{N-j}$ и коэффициентов $A_j$ на $A_j' = A_{N-j}$.

Случай ($i$) доказан.

Случай ($ii$). Пусть $\operatorname{Re} P(i\sigma) \geqslant a$. Тогда

$$|Q(s, t)| = \left|\frac{e^{tP(is)}}{\overline{A_0 e^{t_0 P(is)} + \ldots + A_N e^{TP(is)}}}\right| =$$

$$= e^{(t-T)a}\left|\frac{e^{(t-T)[P(is)-a]}}{\overline{A_N + \ldots + A_0 e^{(t_0-T)P(is)}}}\right|$$

и оценка производится аналогично случаю ($i$) $б$.

Случай ($iii$). Пусть $\operatorname{Re} P(i\sigma) \leqslant a$. Тогда

$$|Q(s, t)| = \left|\frac{e^{tP(is)}}{\overline{A_0 + \ldots + A_N e^{t_N P(is)}}}\right| =$$

$$= e^{ta}\left|\frac{e^{t[P(is)-a]}}{\overline{A_0 + \ldots + A_N e^{t_N P(is)}}}\right|$$

и оценка производится аналогично случаю ($i$) $a$.

Пусть теперь $\operatorname{Re} P(i\sigma) \equiv a = \text{const}$ и $t_0, \ldots, t_N$ соизмеримы. В этом случае $\delta(z) = \sum_{j=0}^{N} A_j e^{t_j z}$ является полиномом относительно $e^{\Theta z}$, где $\theta$ — наибольший общий делитель $t_0, \ldots, t_N$. Тогда все корни $\delta(z)$ лежат на конечном числе вертикальных прямых $\left(\text{на расстоянии по вертикали } \frac{2\pi}{\Theta}\right)$. Образ действительной оси плоскости $s$ в плоскости $z$ $z = P(i\sigma)$ есть вертикальная прямая (или полупрямая), на которой нет корней $\delta(z)$. Пусть $d$ — кратчайшее расстояние между этой прямой и прямыми, на которых расположены корни $\delta(z)$. Рассмотрим образ области $\Omega_{L,\lambda}$ в плоскости $z$ Очевидно, что при $\lambda < -p + 1$ можно $L$ выбрать так, чтобы $|R(\sigma, \tau)| < \frac{d}{2}$ при $s \in \Omega_{L,\lambda}$. Тогда в этой области $|\overline{\Delta(-s)}| > C$ и

$$|Q(s, t)| = \left|\frac{e^{tP(is)}}{\overline{\Delta(-s)}}\right| < C_1.$$

Теорема доказана

**Теорема 7.** *Для любого уравнения* (1) *существует корректная двухточечная краевая задача.*

Доказательство. Ищем краевое условие ($2^*$) в виде $u(x, 0) + Bu(x, T) = u_0(x)$. В этом случае определитель краевой задачи (1)—($2^*$) $\Delta(s) = 1 + \overline{B} \exp\{TP^*(is)\}$. Следовательно, нам надо доказать, что $B$ можно выбрать так, чтобы $\Delta(\sigma) \neq 0$ (ибо в этом случае мы находимся в условиях теоремы 6 ($i$)).

В случае $\operatorname{Re} P^*(i\sigma) \equiv a = \text{const}$ при $|B| \neq e^{-Ta}$, очевидно, $\Delta(\delta) \neq 0$.

В случае $\operatorname{Re} P^*(i\sigma) \not\equiv \text{const}$ выбираем некоторое $\sigma_0$. Существует не более $p$ значений $\sigma$: $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ $(k \leqslant p)$, для которых $\operatorname{Re} P^*(i\sigma) = \operatorname{Re} P^*(i\sigma_0)$. Выбираем $\overline{B} = |B| e^{i\alpha}$ так, чтобы

$$|B| = \exp\{-T \operatorname{Re} R^*(i\sigma_0)\},$$

$$\alpha \neq T \operatorname{Im} P^*(i\sigma_l) \pmod{2\pi} \; (l = 0, 1, \ldots, k).$$

Тогда, очевидно, $\Delta(\delta) \neq 0$ и, следовательно, задача удовлетворяет условию $K$. Теорема доказана.

Автор благодарит В. М. Борок за внимание к работе и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борок В. М. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.— «Мат. сб.», 1969, т. 79 (121) : 2 (6), с. 293—304.
2. Борок В. М. Корректно разрешимые краевые задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных. — «Изв. АН СССР», 1971, т. 35, с. 185—201.
3. Борок В. М., Перельман М. А. О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое. — «Изв. вузов, математика», 1973, № 8 (135), с. 29—34.
4. Антыпко И. И., Перельман М. А. О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 16, Харьков, 1973, с. 98—109.
5. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 3. М., Физматгиз, 1958. 274 с.
6. Беллман Р., Кукк К. Дифференциально-разностные уравнения. М., «Мир», 1967. 548 с.