УДК 513.88

М. М. Маламуд

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящей работе изучается линейная эквивалентность вольтерровых операторов, действующих в пространствах L_p [0, 1]. Простейшими (модельными) операторами считаются оператор интегрирования и его степени. Линейную эквивалентность таких операторов изучали Л. А. Сахнович [1, 2], Г. К. Калиш [3, 4]. Они почти одновременно и независимо получили первые достаточные условия линейной эквивалентности данных операторов оператору интегрирования. Затем условия Сахновича—Калиша были ослаблены в работе И. И. Кальмушевского [5].

Здесь мы находим более сильные достаточные условия, которые для определенных классов ядер являются также необходимыми. В замечании после теоремы 2 мы показываем, как теорема Кальмушевского следует из теоремы 2. Далее, методами банаховых алгебр с использованием теоремы 2 находятся достаточные условия эквивалентности вольтерровых операторов степеням оператора интегрирования.

Определение. *Операторы A и B, действующие в банаховом пространстве, называются линейно эквивалентными, если существует ограниченный вместе с обратным оператор T такой, что*

$$B = TAT^{-1}.$$

Рассмотрим оператор

$$Pf = \int_0^x P(x, t) f(t)\, dt. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть ядро $P(x, t)$ оператора удовлетворяет условиям*

$$\operatorname*{vrai\ sup}_x \int_0^x |P(x, t)|\, dx = C_1 < \infty, \tag{2}$$

$$vrai\ \sup_{t} \int_{t}^{1} |P(x, t)|\, dt = C_2 < \infty. \tag{3}$$

Тогда оператор P *вида* (1) *непрерывно действует из*

$$L_p[0, 1] \text{ в } L_p[0, 1] \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

причем

$$\| P \|_{L_p} \leqslant C_1^{\frac{1}{p}} C_2^{1-\frac{1}{p}}.$$

Доказательство леммы легко следует из интерполяционной теоремы М. Рисса [6], если заметить, что условия (2) и (3) дают ограниченность оператора P соответственно в пространствах $L_\infty[0, 1]$ и $L_1[0, 1]$.

Лемма 2. *Пусть* $M(x, t)$ *удовлетворяет условиям леммы* 1. *Тогда интегральное уравнение*

$$N(x, y) = \int_{x-y}^{x} M(s, s+y-x)\, ds +$$

$$+ \int_{x-y}^{x} ds \int_{s+y-x}^{s} M(s, t)\, N(t, s+y-x)\, dt \tag{4}$$

имеет единственное решение $N(x, y)$, *также удовлетворяющее условиям леммы 1.*

Доказательство существования решения с нужными свойствами будем вести методом последовательных приближений, проверяя на каждом шаге выполнение условий (2) и (3) из леммы 1. Положим

$$N_1(x, y) = \int_{x-y}^{x} M(s, s-x+y)\, ds;$$

$$N_k(x, y) = \int_{x-y}^{x} M(s, s-x+y)\, ds + \tag{5}$$

$$+ \int_{x-y}^{x} ds \int_{s+y-x}^{s} M(s, t)\, N_{k-1}(t, s+y-x)\, dt.$$

Тогда для $N_1(x, y)$ будем иметь после замены переменных $s = u$ $s + y - x = v$

$$\int_{y}^{1} |N_1(x, y)|\, dx \leqslant \int_{y}^{1} dx \int_{x-y}^{x} |M(s, s+y-x)|\, ds =$$

$$= \int_{0}^{y} dv \int_{v}^{v-y+1} |M(u, v)\, du \leqslant \int_{0}^{y} dv \int_{v}^{1} |M(u, v)|\, du \leqslant C_1 y,$$

$$\int_{0}^{x} |N_1(x, y)|\, dx \leqslant \int_{0}^{x} dy \int_{x-y}^{x} |M(s, s+y-x)|\, ds =$$

$$= \int_{0}^{x} du \int_{0}^{u} |M(u, v)|\, dv \leqslant \int_{0}^{x} C_2\, du = C_2 x.$$

Предположим по индукции, что

$$\int_y^1 | N_k(x, y) - N_{k-1}(x, y) | \, dx \leqslant \frac{C_1^k y^k}{k!}; \tag{6}$$

$$\int_0^x | N_k(x, y) - N_{k-1}(x, y) | \, dy \leqslant \frac{C_2^k x^k}{k!}.$$

Тогда

$$N_{k+1}(x, y) - N_k(x, y) = \int_{x-y}^{x} P_{k+1}(s, s+y-x) \, ds,$$

где

$$P_{k+1}(x, y) = \int_y^x M(x, t) [N_k(t, y) - N_{k-1}(t, y)] \, dt.$$

Имеем, пользуясь предположением индукции (6),

$$\int_y^1 | P_{k+1}(x, y) | \, dx \leqslant \int_y^1 dx \int_y^x | M(x, t) | \cdot | N_k(t, y) - N_{k-1}(t, y) | \, dt =$$

$$= \int_y^1 | N_k(t, y) - N_{k-1}(t, y) | \, dt \int_t^1 | M(x, t) | \, dx \leqslant \frac{C_1^{k+1} y^k}{k!}.$$

Далее, после замены $s = u$, $s + y - x = v$

$$\int_y^1 | N_{k+1}(x, y) - N_k(x, y) | \, dx \leqslant \int_y^1 dx \int_{x-y}^{x} | P_{k+1}(s, s+y-x) | \, ds =$$

$$= \int_0^y dv \int_v^{v-y+1} | P_{k+1}(u, v) | \, du \leqslant \int_0^y dv \int_v^1 | P_{k+1}(u, v) \, du \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^y \frac{C_1^{k+1} v^k}{k!} \, dv = \frac{C_1^{k+1} v^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Аналогично, используя (6),

$$\int_0^x | P_{k+1}(x, y) | \, dy \leqslant \int_0^x dy \int_y^x | M(x, t) | \cdot | N_k(t, y) - N_{k-1}(t, y) | \, dt =$$

$$= \int_0^x dt \int_0^t | M(x, t) | \cdot | N_k(t, y) - N_{k-1}(t, y) | \, dy =$$

$$= \int_0^x | M(x, t) | \, dt \cdot \int_0^t | N_k(t, y) - N_{k-1}(t, y) | \, dy \leqslant \int_0^x | M(x, t) | \frac{C_2^k t^k}{k!} \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2^k x^k}{k!} \int_0^x | M(x, t) | \, dt \leqslant \frac{C_2^{k+1} x^k}{k!}.$$

Поэтому после замены $s = u$, $s + y - x = v$

$$\int_0^x | N_{k+1}(x, y) - N_k(x, y) | \, dy \leqslant \int_0^x dy \int_{x-y}^{x} | P_{k+1}(s, s+y-x) | \, ds =$$

$$= \int_0^x du \int_0^u | P_{k+1}(u, v) | \, dv \leqslant \int_0^x \frac{C_2^{k+1} u^k}{k!} \, du = \frac{C_2^{k+1} x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Предположение индукции доказано, ясно, что ряд

$$N_1(x, y) + [N_2(x, y) - N_1(x, y)] + [N_{k+1}(x, y) - N_k(x, y)] + \dots \quad (7)$$

сходится по L_1 норме и даже по гораздо более сильной норме, определяемой условиями (2) и (3) леммы 1. Для суммы $N(x, y)$ ряда (7), являющейся, как легко видеть, решением уравнения (4), получаем из (6) оценки

$$\int_0^x |N(x, y)|\, dy \leqslant (e^{c_2 x} - 1); \quad \int_y^1 |N(x, y)|\, dx \leqslant (e^{c_1 y} - 1). \quad (8)$$

Итак, доказано существование решения уравнения (4) с нужными свойствами. Докажем единственность решения. Предположим, что существует два решения. Обозначая их разность через $L(x, y)$, получим

$$L(x, y) = \int_{x-y}^{x} ds \int_{s+y-x}^{s} M(s, t)\, L(t, s+y-x)\, dt. \quad (9)$$

Отсюда

$$\int_0^x |L(x, y)|\, dy \leqslant \int_0^x dy \int_{x-y}^{x} |P(s, s+y-x)|\, ds, \quad (10)$$

где

$$P(x, y) = \int_y^x M(x, t)\, L(t, y)\, dt. \quad (11)$$

После замены $s = u$, $s + y - x = v$

$$\int_0^x |L(x, y)|\, dy \leqslant \int_0^x du \int_0^u |P(u, v)|\, dv \leqslant \int_0^x du \int_0^u dv \int_v^u |M(u, t)\, L(t, v)|\, dt =$$

$$= \int_0^x du \int_0^u dt \int_0^t |M(u, t)| \cdot |L(t, v)|\, dv = \int_0^x du \int_0^u |M(u, t)\, z(t)|\, dt =$$

$$= \int_0^x dt \int_t^x |M(u, t)\, z(t)|\, du = \int_0^x |z(t)|\, dt \cdot \int_t^1 |M(u, t)|\, du \leqslant C_1 \int_0^x z(t)\, dt,$$

где

$$z(x) = \int_0^x |L(x, y)|\, dy, \quad (12)$$

или с использованием (12)

$$z(x) \leqslant C_1 \int_0^x z(t)\, dt.$$

Применяя лемму Гронуолла, получаем $z(x) = 0$.

Отсюда уже ясно, что $L(x, y) = 0$ почти всюду в области $G =$

$=\{0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}$, и единственность решения доказана. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\lambda y(x, \lambda)+\int_0^x M(x, t)\, y(t, \lambda)\, dt, \tag{13}$$

$$y(0, \lambda)=1. \tag{14}$$

Теорема 1. *Пусть функция $M(x, t)$ удовлетворяет условиям (2) и (3) леммы 1. Тогда уравнение (13) с условием (14) имеет единственное решение. Оно представляется в виде*

$$Y(x, \lambda)=e^{\lambda x}+\int_0^x N(x, y)\, e^{\lambda y} dy, \tag{15}$$

причем $N(x, y)$ удовлетворяет условиям (2) и (3) леммы 1.

Доказательство. Применяя к уравнению (13) метод вариации постоянной, получим, что оно вместе с условием (14) эквивалентно интегральному уравнению

$$Y(x)=e^{\lambda x}+\int_0^x ds \int_0^s e^{\lambda(x-s)} Y(t)\, M(s, t)\, dt. \tag{16}$$

Будем искать его решение в виде (15).
Непосредственная подстановка дает

$$\int_0^x N(x, y)\, e^{\lambda y} dy=\int_0^x ds \int_0^s e^{\lambda(x-s)} e^{\lambda t} M(s, t)\, dt+$$

$$+\int_0^x ds \int_0^s e^{\lambda(x-s)} M(s, t)\, dt \int_0^t N(t, u)\, e^{\lambda u} du. \tag{17}$$

Делая замену $x-s+t=y$, $s=v$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^x N(x, y)\, e^{\lambda y} dy=\int_0^x e^{\lambda y} dy \int_{x-y}^x M(v, v-x+y)\, dv+$$

$$+\int_0^x e^{\lambda y} dy \int_{x-y}^x dv \int_{v+y-x}^v M(v, t)\, N(t, v-x+y)\, dt. \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (18) эквивалентно уравнению (4). По лемме 2 существует единственное решение уравнения (4) или, что то же, уравнения (18). Проделывая все выкладки в обратном порядке, получим для решения уравнения (16) или, что то же, (13) и (14) представление (15), что и требовалось. Единственность решения легко доказывается с леммой Гронуолла.

Следствие 1. *Пусть $M(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Для того, чтобы решение $y(x, \lambda)$ уравнения (13) с условием (14) представлялось в виде (15), необходимо и достаточно, чтобы $M(x, y)$ и $N(x, y)$ были связаны уравнением (4).*

Теорема 2. *Если ядро* $k(x, t)$ оператора

$$Kf = \int_0^x k(x, t) f(t)\, dt \quad f(t) \in L_p[0, 1], \tag{19}$$

действующего в $L_p[0, 1]$ $(p \geqslant 1)$, *удовлетворяет условиям:*

1) $k(x, x) = 1$;

2) $\left|\frac{\partial}{\partial x} k(x, t)\right| \leqslant N$, *где* $\frac{\partial}{\partial x} k(x, t)$ *абсолютно непрерывна по* t *при почти всех* x;

3) *функция* $\frac{\partial^2 k(x, t)}{\partial t \partial x}$ *удовлетворяет условиям* (2) *и* (3) *леммы 1*, *то оператор* K *линейно эквивалентен оператору*

$$If = \int_0^x f(t)\, dt \quad f(t) \in L_p[0, 1], \tag{20}$$

действующему в $L_p[0, 1]$ $(p \geqslant 1)$

Доказательство. Пусть $Y(x, \lambda) = (E + \lambda K)^{-1} f$. Тогда

$$y'(x, \lambda) = f'(x) - \lambda y(x, \lambda) - \lambda \int_0^x \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} y(t, \lambda)\, dt \tag{21}$$

(Дифференцирование под знаком интеграла возможно ввиду второго условия теоремы). Рассмотрим оператор $(E + K_1)^{-1}$, обратный по отношению к оператору

$$(E + K_1) f = f(x) + \int_0^x \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} f(t)\, dt.$$

Он имеет такой же вид [7]:

$$(E + K_1)^{-1} = (E + H) f = f(x) + \int_0^x h(x, t) f(t)\, dt,$$

причем $|H(x, t)| \leqslant N_1$, ибо для ядра $k_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} k(x, t)$ имеем $|k_1(x, t)| \leqslant N$.

Применим к обеим частям (21) оператор $(E + H)$, получим

$$y'(x, \lambda) = r(x) - \int_0^x h(x, t) Y'(t, \lambda)\, dt - \lambda y(x, \lambda), \tag{22}$$

где

$$r(x) = (E + H) f'(x).$$

Ядра $k_1(x, t)$ $h(x, t)$, как легко видеть, связаны уравнением

$$k_1(x, t) + h(x, t) + \int_t^x h(x, s) k_1(s, t)\, ds = 0. \tag{23}$$

Продифференцируем в (23) по t (дифференцирование под знаком интеграла возможно ввиду абсолютной непрерывности функции $k_1(s, t)$ по t при почти всех s):

$$\frac{\partial k_1(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}-h(x,t)\,k_1(t,t)+\int\limits_t^x h(x,s)\,\frac{\partial k_1(s,t)}{\partial t}\,ds=0. \tag{24}$$

Из (24) видно, что для ядра $\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}$ выполняются условия (2) и (3) леммы 1, ибо ядра $h(x,t)$ и $k_1(x,t)$ ограничены.

Проинтегрируем в (22) по частям, пользуясь абсолютной непрерывностью $h(x,t)$ по t при почти всех x, которая следует из (23):

$$y'(x,\lambda)=s(x)-y(x,\lambda)\,q(x)+\int\limits_0^x\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\,y(t,\lambda)\,dt-\lambda y(x,\lambda), \tag{25}$$

где

$$s(x)=r(x)+f(0)\,h(x,0)\quad q(x)=h(x,x).$$

Выберем $f(x)$ в (21) так, чтобы $s(x)=0$, $f(0)=1$.
Тогда

$$y'(x,\lambda)=-\lambda\,y(x,\lambda)-y(x,\lambda)\,g(x)+\int\limits_0^x\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\,y(t,\lambda)\,dt.$$

Положив

$$y(x,\lambda)=e^{-\int\limits_0^x g(s)ds}\,y_1'(x,\lambda),$$

получим уравнения

$$y_1'(x,\lambda)=-\lambda y_1(x,\lambda)+\int\limits_0^x M(x,t),\,y_1(t,\lambda)\,dt, \tag{26}$$

$$y_1(0,\lambda)=1, \tag{27}$$

где

$$M(x,t)=\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\,e^{-\int\limits_t^x q(s)ds}.$$

Для ядра $M(x,t)$ выполняются условия (2) и (3) леммы 1, ибо они выполняются для ядра $\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}$:

$$\int\limits_t^1|M(x,t)|\,dx\leqslant C_1\ (\text{для } n.b.t.)\qquad\int\limits_0^x|M(x,t)|\,dt\leqslant C_2\ (\text{для } n.b.x).$$

Применяя теорему 1 к уравнению (26) с условием (27), получим

$$y_1(x,\lambda)=e^{-\lambda x}+\int\limits_0^x N(x,t)\,e^{-\lambda t}dt, \tag{28}$$

причем для ядра $N(x,t)$ выполняются условия (2) и (3) леммы 1. Определим теперь оператор V формулой

$$V_\varphi=\left[\varphi(x)+\int\limits_0^x N(x,t)\,\varphi(t)\,dt\right]e^{-\int\limits_0^x q(s)ds}. \tag{29}$$

Из леммы 1 следует, что он ограничен в любом $L_p[0, 1]$ $(p \geqslant 1)$. Теперь уже не трудно доказать, что

$$K = VIV^{-1},$$

и теорема доказана.

Следствие 2. *Если ядро $k(x, t)$ оператора*

$$Kf = \int_0^x k(x, t) f(t)\, dt \quad f(t) \in L_p[0, 1],$$

действующего в $L_p[0, 1]$ $(p \geqslant 1)$, удовлетворяет условиям:

1) $k(x, x) = 1$;

2) $\left|\frac{\partial}{\partial x} k(x, t)\right| \leqslant N$, где $\frac{\partial k(x, t)}{\partial x}$ *абсолютно непрерывна по t при почти всех x;*

3) $\left|\frac{\partial^2 k(x, t)}{\partial t\, \partial x}\right| \leqslant \varphi(x - t)$, *где $\varphi(t) \in L_1[0, 1]$,*

то оператор K линейно эквивалентен оператору I, действующему в любом $L_p[0, 1]$ $(p \geqslant 1)$.

Доказательство. Нужно только проверить выполнение третьего условия теоремы 2. Но

$$\int_0^x |\varphi(x - t)|\, dt = \int_0^x |\varphi(u)|\, du \leqslant \int_0^1 |\varphi(u)|\, du = \|\varphi\|_{L_1},$$

$$\int_t^1 |\varphi(x - t)|\, dt = \int_0^{1-t} |\varphi(u)|\, du \leqslant \int_0^1 |\varphi(u)|\, du = \|\varphi\|_{L_1}.$$

Следствие доказано.

Замечание. Полагая в следствии 1

$$\varphi(t) = \frac{1}{t \ln^\beta \frac{a}{t}} \quad (\beta > 1,\ a > 1),$$

получаем теорему Кальмушевского [5].

Теперь методами банаховых алгебр решим задачу об извлечении корня n-ой степени из операторов вида

$$Kf = \int_0^x k(x - t) f(t)\, dt, \tag{30}$$

действующих в $L_p[0, 1]$, после чего, применяя теорему 2, установим линейную эквивалентность таких операторов операторам

$$I^n f = \int_0^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} f(t)\, dt. \tag{31}$$

Рассмотрим пространство $W_1^k[0, 1]$ функций, имеющих обобщенные производные, принадлежащие $L_1[0, 1]$ до k-порядка включительно. Это будет банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{W_1^k} = \sum_{m=1}^k \int_0^1 |f^{(m)}(t)|\, dt.$$

Тривиальным следствием теорем вложения является тот факт, что если $f(t) \in W_1^k[0, 1]$, то имеет обычные, абсолютно непрерывные производные до порядка $(k-1)$ включительно.

Лемма 3. *Пространство $W_1^k[0, 1]$ будет банаховой алгеброй без единицы, если умножение элементов f и k определить как свертку формулой (30). После присоединения единицы получается алгебра V_1^k, единственным максимальным идеалом которой является W_1^k.*

Для пространства $W_1^0[0, 1] = L_1[0, 1]$ эта лемма доказана в [8]. Без существенных изменений доказательство распространяется на общий случай пространства $W_1^k[0, 1]$.

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = \sum_{m=2}^{n} a_m \int_0^x \int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_{m-1}} u(x - s_1)\, u(s_1 - s_2) \ldots \tag{32}$$

$$\ldots u(s_{m-1})\, ds_{m-1} \ldots dt_1 + a_1 u(x) \quad a_1 \neq 0.$$

Лемма 4. *Если функция $f(x) \in L_1[0, 1]$, то уравнение (32) имеет одно и только одно решение, принадлежащее $L_1[0, 1]$.*

Для доказательства достаточно вспомнить, что свертка двух функций из $L_1[0, 1]$ есть произведение их как элементов алгебры $V_1^0[0, 1]$. Поэтому уравнение (32) принимает вид уравнения в банаховой алгебре с полиноминальной правой частью:

$$f = \sum_{m=2}^{n} a_m [u]^m + a_1 u, \tag{33}$$

где $[u]^m = \underbrace{u(t) * u(t) * u(t) * \ldots * u(t)}_{m}$ есть свертка функции с собою m раз. Разрешимость уравнения (33) следует теперь из теоремы о неявной функции для банаховой алгебры [9], если учесть, что f принадлежит радикалу алгебры V_1^0 и $a_1 \neq 0$. Единственность решения уравнения (33) следует легко из единственности максимального идеала алгебры V_1^0.

Лемма 5. *Решение $u(x)$ уравнения (32) тогда и только тогда имеет k абсолютно непрерывных производных, когда столько же абсолютно непрерывных производных имеет функция $f(x)$.*

Для доказательства достаточно рассмотреть уравнение (32), как уравнение в банаховой алгебре $W_1^k[0, 1]$ и, воспользовавшись леммой 3, повторить проведенные выше рассуждения.

Теорема 3. *Пусть функция $k(t) \in W_1^n[0, 1]$ и $k(0) = k'(0) = \ldots = k^{n-2}(0) = 0$, $k^{(n-1)}(0) = 1$.*
Тогда существует такая функция $h(t) \in L_1[0, 1]$, что оператор

$$Hf = \int_0^x f(t)\, h(x - t)\, dt \quad f(t) \in L_p[0, 1],$$

действующий в $L_p[0, 1]$ $(p \geqslant 1)$, *удовлетворяет условию* $H^n = K$, *причем* $h(0) = 1$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что для доказательства теоремы нужно найти функцию $h(t) \in L_1[0, 1]$, удовлетворяющую уравнению

$$\int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-2}} h(x - s_1) h(s_1 - s_2) \dots h(s_{n-1}) \, ds_{n-1} \dots ds_1 = k(x). \tag{34}$$

Продифференцировав уравнение (34) n раз, получим, как легко видеть, уравнение

$$k^{(n)}(x) = \sum_{m=2}^{n} C_n^m \int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{m-2}} u(x - s_1) u(s_1 - s_2) \dots u(s_{m-1}) \, ds_{m-1} ds_{m-2} \dots$$
$$\dots ds_1 + nu(x).$$

Применение леммы 4 заканчивает доказательство, если, воспользовавшись условиями теоремы, вернуться от уравнения (35) к уравнению (34), причем

$$h(x) = \int_0^x u(t) \, dt + 1.$$

Имеет место следующая теорема единственности.

Теорема 4. *Если действующие в* $L_p[0, 1]$ *операторы*

$$H_1 f = \int_0^x h_1(x - t) f(t) \, dt \quad \text{и} \quad H_2 t = \int_0^x h_2(x - t) f(t) \, dt;$$

где $h_1(t)$, $h_2(t) \in L_1[0, 1]$, $f(t) \in L_p[0, 1]$, *удовлетворяют условиям* $H_1^n = H_2^n = K$, *то* $H_1 = rH_2$, *где* r — *комплексное число* $| r^n = 1 |$.

Применяя теоремы 2 и 3, докажем следующую теорему о линейной эквивалентности.

Теорема 5. *Пусть функция* $k(t)$ *имеет абсолютно непрерывную* n*-го порядка* $k^n(t)$ *такую, что*

$$k(0) = k'(0) = \dots = k^{(n-2)}(0) = 0 \quad k^{(n-1)}(0) = 1.$$

Тогда оператор

$$Kf = \int_0^x k(x - t) f(t) \, dt \quad f(t) \in L_p[0, 1],$$

действующий в $L_p[0, 1]$ $(p \geqslant 1)$, *линейно эквивалентен оператору*

$$I^n f = \int_0^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} f(t) \, dt,$$

действующему в том же пространстве.

Примеры. Рассмотрим операторы вида

$$G_r f = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [1 + (x-t)^r] f(t)\, dt.$$

Из теорем 1 и 5 следует, что при $r \geqslant 1$ оператор G_r линейно эквивалентен оператору I^n. Можно доказать, что при $0 < r < 1$ оператор G_r не является линейно эквивалентным оператору I^n. Рассмотрим операторы вида

$$K_r f = \int_0^x [1 + (x-t)^r] f(t)\, dt.$$

Из теоремы 5 следует, что K_r^n линейно эквивалентен I^n при $r \geqslant 1$. Кальмушевским доказано, что при $0 < r < 1$ оператор K_r^n не является линейно эквивалентным I^n. Таким образом, для приведенных примеров условия, указанные в теореме 5, являются не только достаточными, но и необходимыми. Они являются необходимыми и для некоторых других классов операторов, т. е. окончательными для этих классов.

В заключение выражаю благодарность Э. Р. Цекановскому за внимание к работе и полезные обсуждения. Автор признателен В. Котенко за помощь при оформлении статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сахнович Л. А. О приведении вольтерровских операторов к простейшему виду и обратных задачах. — «Изв. АН СССР, серия математическая», 1957, т. 21, № 2, с. 24—36.
2. Сахнович Л. А. Спектральный анализ операторов вида $Kf = \int_0^x R(x-t) f(t)\, dt$. — «Изв. АН СССР, серия математическая», 1958, т. 22, № 2, с. 18—39.
3. Kalisch G. K. On similarity, reducing manifolds and unitary ebuivallence of certain Volterra operators. — „Ann. Math“., 1957, vol. 66, № 3, p. 11—17.
4. Kalisch G. K. On similarity invariants of certa in operators in L_p. — „Pacif. j Math.“, 1961, vol. 11, № 1, p. 16—23.
5. Кальмушевский И. И. О линейной эквивалентности вольтерровых операторов. — УМН, 1965, т. XX, № 6, с. 28—34.
6. Данфорд Н. и Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962, с. 9—19.
7. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. М. Физматгиз, 1961. 120 с.
8. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. М., Физматгиз, 1960. 78 с.
9. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., «Мир», 1968. 140 с.