УДК 513. 88 : 517. 51

В. Н. Логвиненко, канд. физ.-мат. наук

ПРИМЕРЫ ПРОСТРАНСТВ C_φ, В КОТОРЫХ ПОЛИНОМЫ НЕ ПЛОТНЫ

Пусть функция $\varphi(t)$ определена на вещественной оси и удовлетворяет условиям: а) $\varphi(t) \in C(-\infty, \infty)$; б) $\varphi(t) \geqslant 1$; в) для любого неотрицательного целого числа n существует предел $\lim\limits_{t\to\pm\infty} t^n/\varphi(t)$, равный нулю. По функции $\varphi(t)$ определяется пространство $C_\varphi = \left\{f(t) \in C(-\infty, \infty) : \lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)/\varphi(t) = 0\right\}$; будучи наделенным нормой $\|f\| = \max\limits_{-\infty<t<\infty} |f(t)|/\varphi(t)$, пространство C_φ становится банаховым.*

С. Н. Бернштейну принадлежит постановка вопроса: когда полиномы плотны в пространстве C_φ. Полный ответ на этот вопрос дают критерии Н. И. Ахиезера—С. Н. Бернштейна [1] и С. Н. Мергеляна [2]. Нам понадобятся два критерия плотности полиномов в пространстве C_φ, содержащиеся в [2]. Для их формулировки введем такие обозначения: обозначим через $\boldsymbol{M}$ множество так называемых подпирающих полиномов $\{P(t) : \|P(t)/(t - i)\| \leqslant 1\}$, а через $M(z)$, $z \in C^1$, — функцию $\sup\limits_{P\in M} |P(z)|$.

---

* Отметим, что требование непрерывности функции $\varphi(t)$ для наших рассмотрений несущественно. Однако, если от него отказаться, то пространство C_φ может перестать быть полным. Необходимые и достаточные условия полноты этого и более широкого класса пространств были получены Т. Е. Починок [7].

1. Для того, чтобы множество полиномов было плотным в пространстве C_φ, необходимо, чтобы функция $M(z) \equiv \infty$ $(z \in C^1 \setminus R^1)$, и достаточно, чтобы существовала хотя бы одна точка $z \in C^1$, для которой выполнялось бы равенство $M(z) = \infty$.

2. Для того, чтобы множество полиномов было плотным в пространстве C_φ, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln M(t)}{1+t^2}\, dt = \infty.$$

Из критерия 2 немедленно следует, что необходимым условием плотности множества полиномов в пространстве C_φ является условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \varphi(t)}{1+t^2}\, dt = \infty. \tag{1}$$

Однако это условие не является достаточным, как показывают соответствующие примеры, принадлежащие Полларду [3] и Карлесону [4].

В настоящей работе мы укажем способ построения целого класса таких примеров. Этот способ опирается на частный случай одной теоремы Б. Я. Левина, сформулированной в [5], и теорему Берлинга—Маявэна [6].

Нужный нам частный случай теоремы Б. Я. Левина формулируется так: для любого множества $F \subset R^1$ относительно плотного по мере Лебега* и для любого числа $\sigma \in (0, \infty)$ существует такая константа $C < \infty$, что для любой целой функции $f(z)$ экспоненциального типа не выше σ выполняется неравенство

$$\sup_{t \in R^1} |f(t)| \leqslant C \sup_{t \in F} |f(t)|.$$

Теорема Берлинга—Маявэна гласит: для любой целой функции экспоненциального типа и класса A найдется ненулевая целая функция $g(z)$ экспоненциального типа, для которой будет выполняться неравенство

$$\sup_{t \in R^1} |f(t)\, g(t)| \leqslant 1.$$

Приступим к конструкции примеров. Пусть $f(z)$ — произвольная целая функция экспоненциального типа, принадлежащая классу A и такая, что для функции $|f(t)|$, $t \in R^1$ выполняются условия *а*, *б* и *в*. Пусть E — какое-нибудь неограниченное открытое множество на оси, удовлетворяющее условию: дополнение

---

* Множество $F \subseteq R^1$ называется относительно плотным по мере Лебега, если существуют такие постоянные $L < \infty$ и $\delta > 0$, что

$$\inf_{t \in R^1} \operatorname{mes} \{(t-L,\ t+L) \cap F\} = \delta,$$

где $\operatorname{mes} E$ — Лебегова мера множества E.

F множества E относительно плотно на оси по мере Лебега. Положим функцию $\varphi(t)$ равной $|f(t)|$ на множестве F, а на интервалах, составляющих множество E, доопределим функцию $\varphi(t)$ произвольным образом, но так, чтобы выполнялись условия *а*, *б*, *в* и (1).

В пространстве C_φ, построенном по только что определенной функции $\varphi(t)$, полиномы не плотны. Действительно, по теореме Берлинга—Маявэна существует целая функция $g(z)$ экспоненциального типа, скажем $\sigma\ (0 < \sigma < \infty)$, для которой выполняется неравенство

$$\sup_{t \in R^1} |(t-i) f(t) g(t)| \leqslant 1. \tag{2}$$

Для любого подпирающего полинома $P(t)$ на множестве F выполняется оценка

$$|P(t)| \leqslant |(t-i) f(t)|. \tag{3}$$

Соотношения (2) и (3) влекут неравенство

$$|P(t) g(t)| \leqslant 1,$$

справедливое для всех точек $t \in F$. Но тогда по теореме Б. Я. Левина

$$\sup_{t \in R^1} |P(t) g(t)| \leqslant C, \tag{4}$$

где величина $C < \infty$ не зависит от полинома $P(t)$.

Так как для целой функции $P(z) g(z)$, имеющей экспоненциальный тип σ, выполнено неравенство (4), то при любом невещественном z справедлива оценка

$$\ln|P(z) g(z)| \leqslant \sigma|\operatorname{Im} z| + \frac{|\operatorname{Im} z|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|P(t) g(t)|\,dt}{(t-\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \leqslant \sigma|Im z| + C.$$

Пусть z_0 — такая невещественная точка, в которой $g(z_0) \neq 0$. Тогда из последней оценки, примененной при $z = z_0$, следует, что для любого подпирающего полинома имеет место неравенство

$$|P(z_0)| \leqslant \frac{1}{|g(z_0)|} e^{\sigma|\operatorname{Im} z_0| + C},$$

что влечет

$$M(z_0) < \infty.$$

В силу критерия 1 в пространстве C_φ полиномы не плотны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И., Бернштейн С. Н. Обобщение теоремы о весовых функциях и применение к проблеме моментов.— ДАН, 1953, т. 92, с. 1109—1112.
2. Мергелян С. Н. Весовые приближения многочленами.— УМН, 1956, т. 71, с. 107—152.

3. Pollard H. Solution of Bernstein's approximation problem. — Proc. Amer Math. Soc., 1953, vol. 4, № 6, p. 869—875.
4. Carleson L. On Bernstein's approximation problem. — «Proc. Amer. Math. Soc.», 1951. vol. 2, № 6, p. 953—961.
5. Логвиненко В. Н., Середа Ю. Ф. Эквивалентные нормы в пространствах целых функций экспоненциального типа. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 20, Харьков, 1974, с. 62—78.
6. Beurling A., Malliavin P. On Fourier transforms of measures with compact support. «Acta Math.», 1962, vol. 107, p. 291—309.
7. Починок Т. Е. Полнота пространства $D^n[\varphi_0, \ldots, \varphi_n]$. —Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 4, Харьков, 1967, с. 79—86.