УДК 517.5

Э. С. Белинский

СУММИРУЕМОСТЬ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ В ТОЧКАХ ЛЕБЕГА

Пусть $f(x)$, $x=(x_1 \dots x_n)$ — 2π-периодическая по каждой переменной функция, интегрируемая по Лебегу на Q^n;

$$Q^n=\{x:\ -\pi \leqslant x_i \leqslant \pi \ \ i=1,\ 2,\ \dots\ n\},$$

а $\sum\limits_k c_k e^{-i(k,\,x)}$ — ее ряд Фурье;

$\lambda(x)$ — некоторая непрерывная функция, имеющая компактный носитель;

$\tilde{\lambda}(u)$ — ее преобразование Фурье.

Введем линейные полиноминальные средние:

$$T_N^\lambda(f;\ x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{Q^n} f(x+u)\sum_k \lambda\left(\frac{k}{N}\right)e^{-i(k,\,u)}du.$$

Рассмотрим вопрос о сходимости $(N=(N_1 \dots N_n)\to\infty)$ в точках Лебега. При $n=1$ (в общем случае сингулярного интеграла) необходимые и достаточные условия такой сходимости дает известная теорема П. К. Фаддеева [1].

В настоящей работе для всякого $n\geqslant 1$ указываются необходимые и достаточные условия сходимости в точках Лебега в терминах преобразования Фурье функции λ. Отметим, что при этом используются и некоторые идеи доказательства теоремы Фаддеева, приведенного в [2, с. 276].

Случай $n>1$ интересен уже тем, что точки Лебега можно определить по-разному*.

Определение 1. *Точку x^0 будем называть слабой точкой Лебега функции $f(x)\in L(Q^n)$, если*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{|B(0,\ h)|}\int\limits_{B(0,\ h)}|f(x^0+u)-f(x^0)|\,du=0,$$

где $B(0,\ h)$ — n-мерная сфера с центром в нуле и радиусом h.

* Вводимые ниже определения точек Лебега соответствуют понятиям дифференцирования кратных интегралов в сильном и слабом смысле.

По классической теореме Лебега почти все точки $x \in Q^n$ являются слабыми точками Лебега для $f(x) \in L(Q^n)$.

Определение 2. *Точку x^0 будем называть сильной точкой Лебега функции $f(x) \in L(Q^n)$, если*

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ \dots \\ h_n \to 0}} \int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_n} |f(x_1^0 + u_1, \dots x_n^0 + u_n) - f(x_1^0, \dots x_n^0)| \, du_1 \dots du_n = 0.$$

Таких точек может быть намного меньше. Классический результат Сакса [4] состоит в том, что существует функция $f(x) \in L(Q^n)$ $(n > 1)$ такая, что ни одна точка не будет для нее сильной точкой Лебега.

Теорема 1. *Для того, чтобы $T_N^\lambda(f; x) \to f(x)$ при $N = (N_1 \dots N_n) \to \infty$, в каждой сильной точке Лебега необходимо и достаточно, чтобы:*

$$1)\ \lambda(0) = 1,$$

$$2)\ \int_{R^n} \sup_{\substack{|u_i| \leqslant |x_i| \\ i=1,\dots n}} |\tilde{\lambda}(x)| \, du < \infty.$$

Теорема 2. *Для того, чтобы $T_N^\lambda(f; x) \to f(x)$, $N \to \infty$ в каждой слабой точке Лебега, необходимо и достаточно, чтобы:*

$$1)\ \lambda(0) = 1,$$

$$2)\ \int_0^\infty \rho^{n-1} \sup_{\rho \leqslant |x| < \infty} |\tilde{\lambda}(x)| \, d\rho < \infty.$$

Отметим некоторые частные методы суммирования, являющиеся классическими.

Следствие 1 [5]. *Если положить*

$$\lambda(x) = \begin{cases} (1 - |x|^2)^\alpha & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

то полученные средние Бохнера — Рисса $T_N^\lambda(f; x)$ сходятся во всех слабых точках Лебега каждой функции $f(x) \in L(Q^n)$ тогда и только тогда, когда $\alpha > \frac{n-1}{2}$.

Действительно, из формулы Коши — Пуассона [6, с. 263] следует, что

$$\tilde{\lambda}(u) = \frac{1}{|u|^{n/2-1}} \int_0^1 (1 - \rho^2)^\alpha \rho^{n/2} J_{n/2-1}(|u|\rho) \, d\rho,$$

где $J_s(t)$ — функция Бесселя порядка s. Замечая, что после замены $\rho = \sin\theta$ выражение справа превращается в первый интеграл Сонина [7, п. 7.7.2 (5)], получим

$$\tilde{\lambda}(u) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) J_{n/2+\alpha}(|u|)}{|u|^{n/2+\alpha}}.$$

Используя теперь асимптотические формулы для функций Бесселя [7, п. 7. 13. 1 (3)]

$$J_\lambda(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(\frac{4z - 2\lambda\pi - \pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{|z|^{3/2}}\right) \quad |z| \to \infty,$$

получаем утверждение следствия.

Следствие 2. *Если положить*

$$\lambda(x) = \begin{cases} (1 - |x_1|) \ldots (1 - |x_n|) & \pi x \in Q^n, \\ 0 & \pi x \notin Q^n, \end{cases}$$

то полученные средние Фейера сходятся в каждой сильной точке Лебега для всех функций $f(x) \in L(Q^n)$, но не всегда сходятся во всех слабых точках Лебега.

Доказательство. Как нетрудно подсчитать,

$$\tilde{\lambda}(u) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \frac{1 - \cos u_1}{u_1^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - \cos u_n}{u_n^2},$$

поэтому для $\tilde{\lambda}(u)$ выполняются условия теоремы 1. С другой стороны,

$$\sup_{\rho \leqslant |u| < \infty} |\tilde{\lambda}(u)| \geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \frac{1 - \cos\rho}{\rho^2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}},$$

т. е. не выполняется условие *2* теоремы 2. Следовательно, существует функция $f(x) \in L(Q^n)$, в некоторой слабой точке Лебега которой средние Фейера $T_N^\lambda(f;\ x)$ не сходятся к значению функции в этой точке*.

Следствие 3. *Если $|f| \log_+^{n-1} |f| \in L(Q^n)$, то средние Фейера сходятся в каждой сильной точке Лебега, т. е. почти всюду.*

Это утверждение получается из предыдущего следствия и того, что для функций этого класса сильные точки Лебега расположены почти всюду ([8], см. также [3, с. 459]). Без указания типа точек этот результат был получен в [8] (см. также [3, с. 463]).

Доказательство теоремы 1. Все рассуждения будем проводить для случая двух переменных.

Достаточность. В силу условия *1*

$$f(x_1,\ x_2) - T_N^\lambda(f;\ \ x_1,\ x_2) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_1 + u_1,\ x_2 + u_2) -$$

$$- f(x_1,\ x_2)] \sum_{m_1} \sum_{m_2} \lambda\left(\frac{m_1}{N_1},\ \frac{m_2}{N_2}\right) e^{-i(m_1 u_1 + m_2 u_2)} du_1 du_2.$$

* Точнее, как видно из доказательства теоремы, $\sup\limits_N \left| T_N^\lambda(f;\ x) \right| = \infty$.

Применяя к сумме, стоящей под знаком интеграла, формулу суммирования Пуассона [6, с. 285], получим

$$|f(x_1, x_2) - T_N^\lambda(f; x_1, x_2)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-N_1\pi}^{N_1\pi}\int_{-N_2\pi}^{N_2\pi}\right|\left[f\left(x_1 + \frac{u_1}{N_1}, x_2 + \frac{u_2}{N_2}\right) - \right.$$

$$\left. - f(x_1, x_2]\right|\sum_{m_1}\sum_{m_2}\tilde{\lambda}(u_1 + 2m_1\pi N_1, u_2 + 2m_2\pi N_2)\, du_1 du_2.$$

Используя неравенство треугольника, вынесем сумму за знаки интеграла и модуля. Делая замены $u_1 + 2m_1\pi N_1 \to u_1$, $u_2 + 2m_2\pi N_2 \to u_2$ и собирая все интегралы (используем периодичность функции f), получим

$$|f(x_1, x_2) - T_N^\lambda(f; x_1, x_2)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x_1 + \frac{u_1}{N_1}, x_2 + \frac{u_2}{N_2}\right) - \right.$$

$$\left. - f(x_1, x_2)\right| |\tilde{\lambda}(u_1, u_2)|\, du_1 du_2.$$

Будем оценивать только

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\left|f\left(x_1 + \frac{u_1}{N_1}, x_2 + \frac{u_2}{N_2}\right) - f(x_1, x_2)\right| |\tilde{\lambda}(u_1, u_2)|\, du_1 du_2. \qquad (1)$$

Интегралы по остальным квадрантам оцениваются аналогично. Представим интеграл (1) в виде суммы

$$\int_0^{\delta N_1}\int_0^{\delta N_2} + \int_{\delta N_1}^{\infty}\int_0^{\delta N_2} + \int_0^{\delta N_1}\int_{\delta N_2}^{\infty} + \int_{\delta N_1}^{\infty}\int_{\delta N_2}^{\infty},$$

где δ выберем позднее. Оценим первый интеграл:

$$\int_0^{\delta N_1}\int_0^{\delta N_2}\left|f\left(x_1 + \frac{u_1}{N_1}, x_2 + \frac{u_2}{N_2}\right) - f(x_1, x_2)\right| |\tilde{\lambda}(u_1, u_2)|\, du_1 du_2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=s}^{\infty}\sum_{m=s}^{\infty}\int_{\frac{N_1}{2^{k+1}}}^{\frac{N_1}{2^k}}\int_{\frac{N_2}{2^{m+1}}}^{\frac{N_2}{2^m}}\left|f\left(x_1 + \frac{u_1}{N_1}, x_2 + \frac{u_2}{N_2}\right) - f(x_1, x_2)\right| \times$$

$$\times |\tilde{\lambda}(u_1, u_2)|\, du_1 du_2.$$

Здесь s выбрано из условия

$$\frac{1}{2^{s+1}} \leqslant \delta < \frac{1}{2^s}.$$

Заменяя $|\tilde{\lambda}(u)|$ наибольшим значением на каждом прямоугольнике и произведя замены $u_1 \to N_1 u_1$, $u_2 \to N_2 u_2$, получим, что последняя сумма не превосходит величины

$$\sum_{k=s}^{\infty} \sum_{m=s}^{\infty} \frac{1}{2^{k+m}} N_1 \cdot N_2 \sup_{\substack{\frac{N_1}{2^{k+1}} \leqslant u_1 \leqslant \frac{N_1}{2^k} \\ \frac{N_2}{2^{m+1}} \leqslant u_2 \leqslant \frac{N_2}{2^m}}} |\tilde{\lambda}(u_1, u_2)| \times$$

$$\times 2^{k+m} \int_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} \int_{\frac{1}{2^{m+1}}}^{\frac{1}{2^m}} |f(x_1 + u_1, x_2 + u_2) - f(x_1, x_2)| \, du_1 du_2.$$

Так как x — сильная точка Лебега, то при достаточно малых δ

$$2^{k+m} \int_0^{\frac{1}{2^k}} \int_0^{\frac{1}{2^m}} |f(x_1 + u_1, x_2 + u_2) - f(x_1, x_2)| \, du_1 du_2 < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\delta N_1} \int_0^{\delta N_2} \left| f\left(x_1 + \frac{u_1}{N_1}, x_2 + \frac{u_2}{N_2}\right) - f(x_1, x_2) \right| |\tilde{\lambda}(u_1, u_2)| \, du_1 du_2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=s}^{\infty} \sum_{m=s}^{\infty} \frac{N_1 \cdot N_2}{2^{k+m}} \sup_{\substack{\frac{N_1}{2^{k+1}} \leqslant u_1 \leqslant \frac{N_1}{2^k} \\ \frac{N_2}{2^{m+1}} \leqslant u_2 \leqslant \frac{N_2}{2^m}}} |\tilde{\lambda}(u_1, u_2)|.$$

Используя неравенство

$$\frac{N_1 \cdot N_2}{2^{k+m}} \sup_{\substack{\frac{N_1}{2^{k+1}} \leqslant u_1 \leqslant \frac{N_1}{2^k} \\ \frac{N_2}{2^{m+1}} \leqslant u_2 \leqslant \frac{N_2}{2^m}}} |\tilde{\lambda}(u_1, u_2)| =$$

$$= 16 \int_{\frac{N_1}{2^{k+2}}}^{\frac{N_1}{2^{k+1}}} \int_{\frac{N_2}{2^{m+2}}}^{\frac{N_2}{2^{m+1}}} \sup_{\substack{\frac{N_1}{2^{k+1}} \leqslant u_1 \leqslant \frac{N_1}{2^k} \\ \frac{N_2}{2^{m+1}} \leqslant u_2 \leqslant \frac{N_2}{2^m}}} |\tilde{\lambda}(u_1, u_2)| \, dt_1 dt_2 \leqslant$$

$$\leqslant 16 \int_{\frac{N_1}{2^{k+2}}}^{\frac{N_1}{2^{k+1}}} \int_{\frac{N_2}{2^{m+2}}}^{\frac{N_2}{2^{m+1}}} \sup_{\substack{t_1 \leqslant u_1 < \infty \\ t_2 \leqslant u_2 < \infty}} |\tilde{\lambda}(u_1, u_2)| \, dt_1 dt_2$$

и собирая все интегралы, получим оценку

$$\int_{0}^{\delta N_1}\int_{0}^{\delta N_2}\left|f\left(x_1+\frac{u_1}{N_1},\ x_2+\frac{u_2}{N_2}\right)-f(x_1,\ x_2)\right||\tilde{\lambda}(u_1,\ u_2)|\,du_1du_2\leqslant$$

$$\leqslant 16\varepsilon\int_0^\infty\int_0^\infty \sup_{\substack{t_1\leqslant u_1<\infty\\ t_2\leqslant u_2<\infty}}|\tilde{\lambda}(u_1,\ u_2)|\,dt_1dt_2$$

Оценим второй интеграл. Для этого представим его в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=s}^{\infty}\int_{\delta kN_1}^{\delta(k+1)N_1}\int_{\frac{N_2}{2^{m+1}}}^{\frac{N_2}{2^m}}\left|f\left(x_1+\frac{u_1}{N_1},\ x_2+\frac{u_2}{N_2}\right)-f(x_1,\ x_2)\right|\times$$

$$\times|\tilde{\lambda}(u_1,\ u_2)|\,du_1du_2.$$

Заменяя, как и выше, функцию $|\tilde{\lambda}(u)|$ ее наибольшим значением на прямоугольнике и используя периодичность функции f, имеем

$$\int_{\delta N_1}^{\infty}\int_{0}^{\delta N_2}\left|f\left(x_1+\frac{u_1}{N_1},\ x_2+\frac{u_2}{N_2}\right)-f(x_1,\ x_2)\right||\tilde{\lambda}(u_1,\ u_2)|\,du_1du_2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=s}^{\infty}\frac{N_1\cdot N_2}{2^m}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{2^{m+1}}}^{\frac{1}{2^m}}|f(x_1+u_1,\ x_2+u_2)-f(x_1,\ x_2)|\,du_1du_2\times$$

$$\times 2^m\sup_{\substack{\delta kN_1\leqslant u_1\leqslant\delta(k+1)N_1\\ \frac{N_2}{2^{m+1}}\leqslant u_2\leqslant\frac{N_2}{2^m}}}|\tilde{\lambda}(u_1,\ u_2)|.$$

Используя конечность супремума

$$\sup_{h_1,\ h_2>0}\frac{1}{h_1h_2}\int_0^{h_1}\int_0^{h_2}|f(x_1+u_1,\ x_2+u_2)-f(x_1,\ x_2)|\,du_1du_2$$

и применяя далее те же преобразования, что и при оценке первого интеграла, получим

$$\int_{\delta N_1}^{\infty}\int_{0}^{\delta N_2}\left|f\left(x_1+\frac{u_1}{N_1},\ x_2+\frac{u_2}{N_2}\right)-f(x_1,\ x_2)\right||\tilde{\lambda}(u_1,\ u_2)|\,du_1du_2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{16\pi}{\delta}\int_{\frac{\delta N_1}{2}}^{\infty}\int_0^{\infty}\sup_{\substack{t_1\leqslant u_1<\infty\\ t_2\leqslant u_2<\infty}}|\tilde{\lambda}(u_1,\ u_2)|\,dt_1dt_2\times$$

$$\times\sup_{h_1,\ h_2>0}\frac{1}{h_1h_2}\int_0^{h_1}\int_0^{h_2}|f(x_1+u_1,\ x_2+u_2)-f(x_1,\ x_2)|\,du_1du_2.$$

Отсюда видно, что второй интеграл стремится к нулю при $N \to \infty$. Оценивая тем же методом третий и четвертый интегралы, получим утверждение теоремы 1.

Необходимость условия *1* очевидна. Докажем необходимость условия *2*. Рассмотрим множество функций $f(x) \in L(Q^2)$, таких, что

$$\lim_{h_1,\ h_2 \to 0} \frac{1}{h_1 h_2} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} |f(x_1,\ x_2)|\, dx_1 dx_2 = 0. \qquad (2)$$

Такие функции образуют банахово пространство B с нормой:

$$\|f\|^* = \sup_{\substack{0 < h_1 \leqslant \pi \\ 0 < h_2 \leqslant \pi}} \frac{1}{h_1 h_2} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} |f(x_1,\ x_2)|\, dx_1 dx_2.$$

Нетрудно проверить, что все аксиомы линейного нормированного пространства выполняются. Докажем полноту. Если $\{f_m\}$ фундаментальна, т. е.

$$\|f_m - f_s\|^* \to 0 \ \ m,\ s \to \infty,$$

то

$$\|f_m - f_z\|_L \to 0 \ \ m,\ s \to \infty$$

и в силу полноты пространства L существует функция $f(x) \in L$ такая, что

$$\|f - f_m\|_L \to 0 \ \ m \to \infty.$$

Следовательно, существует подпоследовательность $\{f_{m_k}\}$, сходящаяся к f почти всюду. Поэтому в силу леммы Фату

$$\|f - f_m\|^* \to 0 \ \ m \to \infty.$$

Покажем, что $f(x)$ удовлетворяет условию *1*. Действительно,

$$\frac{1}{h_1 h_2} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} |f(x_1,\ x_2)|\, dx_1 dx_2 \leqslant \frac{1}{h_1 h_2} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} |f_m(x_1,\ x_2)|\, dx_1 dx_2 +$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_2} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} |f(x_1,\ x_2)| - f_m(x_1,\ x_2)|\, dx_1 dx_2.$$

Второе слагаемое может быть сделано малым в силу сходимости последовательности $\{f_m\}$, а первое — в силу того, что $f_m(x) \in B$.

Предположим, что условие *2* не выполняется, и построим последовательность функций $\{f_N\} \in B$, такую, что

$$\overline{\lim_{N \to \infty}}\, T_N^{\lambda}(f_N;\ 0) \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sup_{\substack{t_1 \leqslant u_1 < \infty \\ t_2 \leqslant u_2 < \infty}} |\tilde{\lambda}(u_1,\ u_2)|\, dt_1 dt_2 = \infty,$$

откуда по теореме Банаха — Штейнгауза будет следовать, что в B существует f, такая, что

$$\varlimsup_{N\to\infty} T_N^\lambda(f;\ 0) = \infty.$$

Это противоречит тому, что T_N^λ сходятся в каждой сильной точке Лебега.

Разобьем квадрат $[0,\ \pi]\times[0,\ \pi]$ на прямоугольники

$$\Pi_{ks} = \left[\frac{\pi}{2^k},\ \frac{\pi}{2^{k-1}}\right]\times\left[\frac{\pi}{2^s},\ \frac{\pi}{2^{s-1}}\right]\quad k,\ s = 1,\ 2,\ \ldots$$

и введем функцию

$$g_{ks}^N = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}\sum\limits_{m_1}\sum\limits_{m_2}\lambda\left(\dfrac{m_1}{N},\ \dfrac{m_2}{N}\right)e^{-i(m_1x_1+m_2x_2)}}{\left|E_{ks}^N\right|} & x\in E_{ks}^N \\ 0 & x\,\overline{\in}\,E_{ks}^N, \end{cases}$$

где

$$E_{ks}^N = \left\{x\in\Pi_{ks}:\ \left|\sum_{m_1}\sum_{m_2}\lambda\left(\frac{m_1}{N},\ \frac{m_2}{N}\right)e^{-i(m_1x_1+m_2x_2)}\right|\geqslant\right.$$

$$\left.\geqslant\frac{1}{2}\sup_{x\in\Pi_{ks}}\left|\sum_{m_1}\sum_{m_2}\lambda\left(\frac{m_1}{N},\ \frac{m_2}{N}\right)e^{-i(m_1x_1+m_2x_2)}\right|\right\};\ \operatorname{sign} z = \frac{|z|}{z}.$$

Теперь положим

$$f_N(x_1,\ x_2) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{g_{ks}^N(x_1,\ x_2)}{2^{k+s}p_kq_s},$$

где $p_k\uparrow\infty$ и $q_s\uparrow\infty$ выбраны таким образом, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sup_{x\in\Pi_{ks}}\left|\sum_{m_1}\sum_{m_2}\lambda\left(\frac{m_1}{N},\ \frac{m_2}{N}\right)e^{-i(m_1x_1+m_2x_2)}\right|\frac{1}{2^{k+s}p_kq_s}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sup_{x\in\Pi_{ks}}\left|\sum_{m_1}\sum_{m_2}\lambda\left(\frac{m_1}{N},\ \frac{m_2}{N}\right)e^{-i(m_1x_1+m_2x_2)}\right|\frac{1}{2^{k+s}}. \tag{3}$$

Проверим, что $f_N(x)\in B$, $\sup\limits_N\|f_N\|^* < \infty$. Действительно,

$$\frac{1}{h_1h_2}\int_0^{h_1}\int_0^{h_2}|f_N(x_1,\ x_2)|\,dx_1dx_2\leqslant\sum_{k=s}^{\infty}\sum_{l=r}^{\infty}\frac{1}{2^{k+l}p_kq_l}\times$$

$$\times\frac{2^{s+r+2}}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2^s}}\int_0^{\frac{\pi}{2^r}}|g_{kl}(x_1,\ x_2)|\,dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} 2^{s+r} \sum_{k=s}^{\infty} \sum_{l=r}^{\infty} \frac{1}{2^{k+l} p_k q_l} \leqslant \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{p_s q_r} \to 0 \quad s, \ r \to \infty.$$

Теперь оценим линейный функционал

$$T_N^{\lambda} (f_N; \ 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f_N (x_1, \ x_2) \sum_{m_1} \sum_{m_2} \lambda \left(\frac{m_1}{N}, \ \frac{m_2}{N}\right) e^{-i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} \, dx_1 dx_2.$$

Из определения функции f_N и свойства (3) следует:

$$T_N^{\lambda} (f_N; \ 0) \geqslant \frac{1}{16\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+s}} \times$$

$$\times \sup_{x \in \Pi_{ks}} \left| \sum_{m_1} \sum_{m_2} \lambda \left(\frac{m_1}{N}, \ \frac{m_2}{N}\right) e^{-i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} \right|.$$

Заменяя

$$\frac{1}{2^{k+s}} = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{2^{l+1}} \sum_{r=s}^{\infty} \frac{1}{2^{r+1}}$$

и меняя порядок суммирования, получим

$$T_N^{\lambda} (f_N; \ 0) \geqslant \frac{1}{16\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{l+1}} \cdot \frac{1}{2^{r+1}} \times$$

$$\times \sup_{\substack{\frac{\pi}{2^l} \leqslant x_1 \leqslant \pi \\ \frac{\pi}{2^r} \leqslant x_2 \leqslant \pi}} \left| \sum_{m_1} \sum_{m_2} \lambda \left(\frac{m_1}{N}, \ \frac{m_2}{N}\right) e^{-i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} \right|.$$

Далее преобразованиями, аналогичными тем, которые применялись при доказательстве достаточности, придем к оценке

$$T_N^{\lambda} (f_N; \ 0) \geqslant \frac{1}{(4\pi)^4} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sup_{\substack{t_1 \leqslant x_1 \leqslant \pi \\ t_2 \leqslant x_2 \leqslant \pi}} \left| \sum_{m_1} \sum_{m_2} \lambda \left(\frac{m_1}{N}, \ \frac{m_2}{N}\right) e^{-i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} \right| dt_1 dt_2.$$

Делая последовательно замены $x_1 \to \frac{x_1}{N}$, $x_2 \to \frac{x_2}{N}$ и затем $Nt_1 \to t_1$, $Nt_2 \to t_2$, получим

$$T_N^{\lambda} (f_N; \ 0) \geqslant \frac{1}{(4\pi)^4} \int_0^{N\pi} \int_0^{N\pi} \sup_{\substack{t_1 \leqslant x_1 \leqslant N\pi \\ t_2 \leqslant x_2 \leqslant N\pi}} \left| \frac{1}{N^2} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \lambda \left(\frac{m_1}{N}, \ \frac{m_2}{N}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \, e^{-i\left(\frac{m_1 x_1}{N} + \frac{m_2 x_2}{N}\right)} \right| dt_1 dt_2.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} T_N^{\lambda}(f_N;\ 0) \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{N\to\infty}} \int_0^M \int_0^M \sup_{\substack{t_1 \leqslant x_1 \leqslant L \\ t_2 \leqslant x_2 \leqslant L}} \left| \frac{1}{N^2} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \lambda\left(\frac{m_1}{N},\ \frac{m_2}{N}\right) e^{-i\left(\frac{m_1}{N} x_1 + \frac{m_2}{N} x_2\right)} \right| dt_1 dt_2$$

для всех $N > M > L$. Замечая, что под знаком модуля стоит интегральная сумма, и устремляя $M \to \infty$, а затем и $L \to \infty$, получаем, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} T_N^{\lambda}(f_N;\ 0) \geqslant \frac{1}{(4\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \sup_{\substack{t_1 \leqslant x_1 < \infty \\ t_2 \leqslant x_2 < \infty}} |\tilde{\lambda}(x_1,\ x_2)|\, dt_1 dt_2.$$

Конечность интегралов по остальным квадрантам из условия *2* получаем аналогично.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 проводится подобным образом, учитывая свойства слабых точек Лебега.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеев П. К. О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Лебега, — «Матем. сб.», 1936, 1, с. 351—368.
2. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М., ИЛ, 1963. 359 с.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2, М., «Мир», 1965. 538 с.
4. Saks S. On the strong derivatives of functions of intervals, — «Fundamenta Mathematical», 1935, 25, p. 245—252.
5. Bochner S. Summation of multiple Fourier series by spherical means. — «Trans Amer. Math. Soc». 1936, 40, p. 175—201.
6. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. М., Физматгиз. 1962. 360 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., «Наука». 1966. 295 с.
8. Jessen B., Murcinkiewicz J., Zygmund A. Note on the differentiability of multiple integrals, — «Fundamenta Mathematical», 1935, 25, p. 217—234.