УДК 513.88

В. Э. Кацнельсон

ФУНКЦИЯ $\frac{\sin|x|}{|x|^{\lambda}}$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ КАК МУЛЬТИПЛИКАТОР ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ ИЗ $L^p(R^3)$

Через x мы обозначаем здесь вектор n-мерного евклидова пространства R^n. Длина (евклидова) вектора x обозначается значком $|x|$. Тот же значок употребляется для обозначения абсолютной величины числа.

Мы исследуем здесь, при каких p функция $\frac{\sin|x|}{|x|^{\lambda}}$ является мультипликатором в пространстве преобразований Фурье функций из $L^p(R^3)$. Иными словами, мы изучаем оператор

$$T_\lambda = F^{-1}\left(\frac{\sin|x|}{|x|^{\lambda}} F\right),$$

где F — преобразование Фурье.

Через $\mathrm{Hom}(L^p)$ мы будем обозначать множество всех непрерывных операторов, действующих из L^p в L^p.

Так как $\forall\lambda \in [0, 1] \left|\frac{\sin|x|}{|x|^{\lambda}}\right| \leqslant 1$, то оператор $T_\lambda \in \mathrm{Hom}(L^2(R^3))$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Так как функция $\frac{\sin|x|}{|x|^{\lambda}}$ $(x \in R^3)$ является преобразованием Фурье меры (а именно δ-функции, сосредоточенной на единичной сфере пространства R^3), то $T_1 \in \mathrm{Hom}(L^p(R^3))$ $\forall p \in [1, \infty]$. Мы покажем, что свойство ограниченности оператора T_λ в определенном смысле линейно интерполируется по параметрам $\frac{1}{p}$, λ

Наш основной результат:

если $\lambda \in (0, 1)$, то $T_\lambda \in \mathrm{Hom}(L^p)$ при $p \in \left(\frac{2}{1+\lambda}, \frac{2}{1-\lambda}\right)$, $T_0 \in \mathrm{Hom}(L^2)$, $T_1 \in \mathrm{Hom}(L^p)$ для любого $p \in [1, \infty]$.

При получении этого результата мы используем аналитическую зависимость семейства операторов T_λ от параметра λ, и пользуемся методом комплексной интерполяции, развитым Ториным [1]. Однако результатов самого Торина нам оказывается недостаточно, и мы используем именно его метод, а не его результаты. Нам приходится также сочетать методы комплексной интерполяции с мощным методом Кальдерона и Зигмунда [2], используемым ими для исследования сингулярных интегралов: мы привлекаем «кубиковую технику» Кальдерона и Зигмунда.

Автор считает приятным долгом отметить, что рассматриваемая в этой работе задача была предложена ему Ф. А. Березиным

в мае 1972 г. У Ф А. Березина эта задача возникла в связи с исследованием интегральных операторов, появляющихся в некоторых задачах математической физики.

1. Комплексная интерполяция

В этом параграфе доказывается интерполяционная теорема, близкая по духу к интерполяционной теореме Рисса-Торина [1].

Через Π обозначена полоса в комплексной λ-плоскости, $\Pi = \{\lambda : 0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant 1\}$.

Рассматривается семейство T_λ линейных операторов, зависящих от комплексного параметра λ. Предполагается, что при каждом $\lambda \in \Pi$ оператор T_λ определен на множестве всех ограниченных функций, заданных в R^n, с компактным в R^n носителем, и для всякой такой функции $f(x)$ функции $(T_\lambda f)(x) \in L^{1\,\mathrm{loc}}(R^3)$ $(\lambda \in \Pi)$. Оператор-функция T_λ предполагается аналитичной в том смысле, что для всякой ограниченной функции $f(x)$ с компактным носителем функция $(T_\lambda f)(x)$ является $L^{1,\,\mathrm{loc}}$-значной функцией переменного λ, непрерывной при $\lambda \in \Pi$ и аналитической внутри Π. Кроме того, будет предполагаться, что оператор-функция T_λ не слишком быстро растет по λ, когда $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \Pi$, а именно, будет предполагаться, что для всех ρ_1, ρ_2, $\rho_1 < \infty$, $\rho_2 < \infty$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{|x|<\rho_1} |(T_\lambda f)(x)|\, dx \leqslant C_{\rho_1,\,\rho_2}(\lambda) \sup_{|x| \leqslant \rho_2} |f(x)|, \tag{1.1}$$

где $f(x)$ — любая ограниченная функция, носитель которой содержится в шаре $|x| \leqslant \rho_2$, а на рост по λ величины $C_{\rho_1,\,\rho_2}(\lambda)$ будут наложены некоторые ограничения.

Теорема 1.1. *Пусть T_λ — оператор, определенный при $\lambda \in \Pi$, аналитически зависящий от λ и такой, что $\forall \rho_1 < \infty$, $\rho_2 < \infty$ величина $C_{\rho_1,\,\rho_2}(\lambda)$ из (1.1) удовлетворяет условию*

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \frac{\ln C_{\rho_1,\,\rho_2}(\lambda)}{e^{\pi|\lambda|}} = 0. \tag{1.2}$$

Пусть $p_0 \in [1, \infty]$, $p_1 \in [1, \infty]$, оператор $T_{i\tau} \in \operatorname{Hom}(L^{p_0})$, и

$$\| T_{i\tau} \|_{L^{p_0} \to L^{p_0}} \leqslant C_0 \varphi_0(\tau), \ (-\infty < \tau < \infty) \tag{1.3}$$

оператор $T_{1+i\tau} \in \operatorname{Hom}(L^{p_1})$, и

$$\| T_{1+i\tau} \|_{L^{p_1} \to L^{p_1}} \leqslant C_1 \varphi_1(\tau), \ (-\infty < \tau < \infty), \tag{1.4}$$

где $C_0 < \infty$, $C_1 < \infty$ — некоторые константы, а функции $\varphi_j(\tau)$ локально ограничены и удовлетворяют условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \varphi_j(\tau)}{\operatorname{ch} \pi\tau}\, d\tau < \infty \qquad (j = 0, \quad 1). \tag{1.5}$$

Тогда $\forall \lambda \in [0, 1]$ *оператор* $T_\lambda \in \operatorname{Hom} L^{p(\lambda)}$, *где* $\frac{1}{p(\lambda)} = (1-\lambda) \times \times \frac{1}{p_0} + \lambda \frac{1}{p_1}$, *и*

$$\| T_\lambda \|_{L^{p(\lambda)} \to L^{p(\lambda)}} \leqslant M C_0^{1-\lambda} \cdot C_1^\lambda,$$

константа $M < \infty$ *зависит лишь от функций* φ_0 *и* φ_1.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $\hat{\lambda} \in (0, 1)$ — фиксировано, и пусть $p = p(\hat{\lambda}) : \frac{1}{p} = (1-\hat{\lambda}) \cdot \frac{1}{p_0} + \hat{\lambda} \cdot \frac{1}{p_1}$. Пусть f, g — функции с компактным носителем, $\|f\|_{L^p} = 1$, $\|g\|_{L^q} = 1$. Здесь q сопряжено по Юнгу к p. Введем

$$f_\lambda(x) = |f(x)|^{\frac{p}{p(\lambda)}} \cdot \operatorname{sign} f(x),$$

$$g_\lambda(x) = |g(x)|^{\frac{q}{q(\lambda)}} \operatorname{sign} g(x),$$

где $\frac{1}{p(\lambda)} = (1-\lambda) \cdot \frac{1}{p_0} + \lambda \cdot \frac{1}{p_1}$, $\frac{1}{q(\lambda)} = (1-\lambda) \cdot \frac{1}{q_0} + \lambda \cdot \frac{1}{q_1}$. Имеем $f_{i\tau} \in L^{p_0}$, $g_{i\tau} \in L^{q_0}$,

$$\| f_{i\tau} \|_{L^{p_0}} = 1, \ \| g_{i\tau} \|_{L^{q_0}} = 1 \ (-\infty < \tau < \infty). \tag{1.6}$$

Аналогично

$$\| f_{1+i\tau} \|_{L^{p_1}} = 1, \ \| g_{1+i\tau} \|_{L^{q_1}} = 1 \ (-\infty < \tau < \infty). \tag{1.7}$$

Рассмотрим функцию (скалярную)

$$u(\lambda) = (T_\lambda f_\lambda, g_\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{R^n} (T_\lambda f_\lambda)(x) \cdot g_\lambda(x)\, dx.$$

Эта функция аналитична в полосе П и, как следует из (1.2), удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{|\lambda| \to \infty}} \frac{\ln |u(\lambda)|}{e^{\pi|\lambda|}} \leqslant 0. \tag{1.8}$$

Рассмотрим функцию $u(\lambda)$ на границе полосы П. Из (1.3)—(1.4) и (1.6)—(1.7) следует, что выполняются неравенства

$$\left.\begin{aligned} |u(i\tau)| &\leqslant C_0 \cdot \varphi_0(\tau); \\ |u(1+i\tau)| &\leqslant C_1 \cdot \varphi_1(\tau), \end{aligned}\right. \quad (-\infty < \tau < \infty). \tag{1.9}$$

Мы покажем ниже (см. лемму 1.1), что для функции $u(\lambda)$ при любом $\lambda \in [0, 1]$ при выполнении условий (1.5), (1.8) и (1.9) выполняется неравенство

$$|u(\lambda)| \leqslant M \cdot C_0^{1-\lambda} \cdot C_1^\lambda, \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1), \tag{1.10}$$

где константа $M < \infty$ зависит лишь от функций $\varphi_0(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$. Выберем теперь в неравенстве (1.10) $\lambda = \hat{\lambda}$.

Имеем $f_{\stackrel{\wedge}{\lambda}} = f$, $g_{\stackrel{\wedge}{\lambda}} = g$, и неравенство (1.10) теперь может быть записано так:

$$\left|\left(T_{\stackrel{\wedge}{\lambda}} f,\ g\right)\right| \leqslant M \cdot C_0^{1-\stackrel{\wedge}{\lambda}} \cdot C_1^{\stackrel{\wedge}{\lambda}}.$$

Так как f, g здесь любые ограниченные функции с компактным носителем и $\|f\|_{L^p} = 1$, $\|g\|_{L^q} = 1$, то из последнего неравенства следует, что $T_{\stackrel{\wedge}{\lambda}} \in \mathrm{Hom}(L^p)$ и

$$\left\|T_{\stackrel{\wedge}{\lambda}}\right\|_{L^p \to L^p} \leqslant M \cdot C_0^{1-\stackrel{\wedge}{\lambda}} \cdot C_1^{\stackrel{\wedge}{\lambda}}.$$

Теорема 1.1 доказана (в предположении справедливости леммы 1.1).

Лемма 1.1. *Пусть* $u(\lambda)$ — *аналитическая внутри полосы* $\Pi = \{\lambda : 0 \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 1\}$ *и непрерывная в* Π *функция, удовлетворяющая условиям* (1.8), (1.9) *и* (1.5). *Тогда для нее выполняется неравенство*

$$|u(\lambda)| \leqslant M \cdot C_0^{1-\lambda} \cdot C_1^{\lambda} \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1),$$

где константа M *зависит лишь от функций* φ_0 *и* φ_1.

Доказательство. Рассмотрим субгармоническую в полосе Π функцию $v(\lambda) = \ln|u(\lambda)| - C_0 \cdot \mathrm{Re}(1-\lambda) - C_1 \mathrm{Re}\,\lambda$. Функция $v(\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$\varlimsup_{|\lambda| \to \infty} \frac{v(\lambda)}{e^{\pi|\lambda|}} \leqslant 0,$$

$$\left.\begin{aligned} v(i\tau) &\leqslant \ln \varphi_0(\tau), \\ v(1+i\tau) &\leqslant \ln \varphi_1(\tau). \end{aligned}\right. \quad (-\infty < \tau < \infty)$$

Нам нужно доказать, что

$$v(\lambda) \leqslant m < \infty, \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1),$$

где константа m зависит только от функций φ_0 и φ_1.

Функция $z(\lambda) = e^{i\pi\lambda}$ осуществляет аналитический изоморфизм между полосой Π в плоскости переменной λ и полуплоскостью $\mathrm{Im}\,z \geqslant 0$. Пусть $\lambda(z) = \frac{1}{i\pi}\ln z$ — функция, дающая обратное отображение.

Положим

$$V(z) = v(\lambda(z)).$$

Функция $V(z)$ — субгармоническая в полуплоскости $\mathrm{Im}\,z > 0$ и удовлетворяет условиям

$$\varlimsup_{\substack{|z| \to \infty \\ \mathrm{Im}\,z > 0}} \frac{V(z)}{|z|} \leqslant 0, \tag{1.11}$$

$$V(x) \leqslant \psi(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{1.12}$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} \ln \varphi_0(\ln |x|), & 0 < x < \infty, \\ \ln \varphi_1(\ln |x|, & -\infty < x < 0. \end{cases}$$

Условия (1.5) на функции φ_0 и φ_1 преобразуются в условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{1+x^2} dx < \infty, \quad \psi(x) \geqslant 0.$$

Как хорошо известно, для субгармонической в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функции, удовлетворяющей условиям (1.11)—(1.13), выполняется неравенство

$$V(z) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} dt,$$

$$\forall z = x + iy, \ y > 0,$$

откуда с учетом ограниченности функции $\psi(t)$ вблизи точек $t = 1$ и $t = -1$ следует, что

$$V(e^{i\theta}) \leqslant m < \infty \quad (0 < \theta < \pi),$$

где константа m зависит лишь от функции ψ, т. е. в конечном счете от функций φ_0, φ_1.

Лемма доказана.

2. Оператор $S_\tau = F^{-1}\left(\frac{1}{|x|^{i\tau}} F\right)$.

Свойства этого оператора понадобятся нам при изучении оператора $T_\lambda = F^{-1}\left(\frac{\sin |x|}{|x|^\lambda} F\right)$.

Рассмотрим ядро $K_{\tau, \varepsilon}(x)$:

$$K_{\tau, \varepsilon}(x) = \int_{R^3} \frac{1}{|\xi|^{i\tau}} e^{i(x\xi)} e^{-\varepsilon|\xi|} d^3\xi.$$

Интегрируя по угловым переменным, получаем

$$K_{\tau, \varepsilon}(x) = \frac{1}{|x|^{3-i\tau}} \cdot \int_0^\infty s^{1-i\tau} \cdot \sin s \cdot e^{-\varepsilon \frac{s}{|x|}} ds.$$

Для $\forall f \in L^2(R^3)$ имеем

$$(S_\tau f)(x) = L^2 - \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{R^3} K_{\tau, \varepsilon}(x-y) f(y) d^3y.$$

Из формулы для $K_{\tau,\varepsilon}$ следует, что $\forall\delta > 0$ равномерно по $|x| \geqslant \delta$, имеем $K_{\tau,\varepsilon}(x) \to K_\tau(x)$ $(\varepsilon \to +0)$, где

$$K_\tau(x) = C_\tau \cdot \frac{1}{|x|^{3-i\tau}},$$

$$C_\tau = i\Gamma(2 - i\tau)\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\tau}{2}.$$

Поэтому, если $x \bar{\in} \operatorname{supp} f$ $(f \in L^2)$, то

$$(S_\tau f)(x) = (K_\tau * f)(x) = \int_{R^3} K_\tau(x-y) f(y)\, d^3y.$$

Пусть I — некоторый куб с центром в нуле, а I^* — гомометичный ему куб вдвое большего объема.

Лемма 2.1. *Справедлива оценка*

$$\sup_{y\in I} \int_{R^3/I^*} |K_\tau(x-y) - K_\tau(x)|\, d^3x \leqslant C(1 + |\tau|)^{\frac{5}{2}},$$

где C — константа, не зависящая от τ и размером куба I.

Доказательство. Независимость величины, оцениваемой в лемме, от размера куба I следует из соображений однородности. Из вида ядер K_τ легко следует, что если $y \in I$, и $x \in R^3 \setminus I^*$, то

$$|K_\tau(x-y) - K_\tau(x)| \leqslant c \cdot \frac{|y|}{|x|^4}(1 + |\tau|)^{\frac{5}{2}},$$

где $c < \infty$ — абсолютная константа. Утверждение леммы теперь получается интегрированием последнего неравенства по x.

Лемма 2.2. *Пусть* $u(x) \in L^1(R^3)$, $\operatorname{supp} u(x) \in I$, $\int_I u(x)\, d^3x = 0$. *Тогда*

$$\int_{R^3/I^*} |(K_\tau * u)(x)|\, d^3x \leqslant C(1 + |\tau|)^{\frac{5}{2}} \cdot \int_I |u(x)|\, d^3x,$$

где $C < \infty$ — константа, не зависящая от u и размеров куба I, τ.

Доказательство. Так как $\int_{R^3} u(y)\, d^3y = 0$, то

$$\int_{R^3} K_\tau(x) u(y)\, d^3y = 0.$$

Поэтому

$$(K_\tau * u)(x) = \int_I (K_\tau(x-y) - K_\tau(x))\, u(y)\, d^3y$$

и

$$\int_{R^3 \setminus I^*} |(K_\tau * u)(x)|\, d^3x \leqslant \int_{R^3 \setminus I^*} \int_I |K_\tau(x-y) - K_\tau(x)| \cdot |u(y)|\, d^3x\, d^3y \leqslant$$

$$\leqslant \int_I |u(y)|\, d^3y \sup_{y\in I} \int_{R^3 \setminus I^*} |K_\tau(x-y) - K_\tau(x)|\, d^3x$$

Остается лишь воспользоваться предыдущей леммой.

Для изучения свойств оператора S_τ нам понадобится следующая фундаментальная «лемма о накрытии», принадлежащая Кальдерону и Зигмунду [2].

Лемма 2.3. *Пусть* $u \in L^1(R^3)$. *Пусть* s — *некоторое положительное число. Тогда функцию* u *можно представить в виде*

$$u(x) = v(x) + \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x),$$

так, что

$$\| v \|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} \| w_k \|_{L^1} \leqslant 3 \| u \|_{L^1},$$

$v(x) \leqslant 8s$ *почти всюду в* R^3,

$$\operatorname{supp} w_k \subset I_k, \quad \int_{I_k} w_k(x)\, d^3x = 0, \quad (1 \leqslant k \leqslant \infty),$$

где $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *некоторая система непересекающихся кубов такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes} I_k \leqslant \frac{1}{s} \int_{R^3} | u(x) |\, d^3x,$$

mes — *трехмерная мера Лебега.*

Кроме того,

$$\sup_{x \in R^3} | w_k(x) | \leqslant 2 \sup_{x \in R^3} | u(x) |.$$

Доказательство леммы 2.3 для R^n, где n — любое натуральное число, изложено, кроме оригинальной работы Кальдерона и Зигмунда, также и в [3], где она фигурирует как лемма 2.2, а также в ряде других источников.

Теорема 2.1. *Пусть* $u(x)$ — *ограниченная функция с компактным носителем,* s — *положительное число. Тогда*

$$\operatorname{mes}\{x : |(S_\tau u)(x)| > s\} \leqslant C(1 + |\tau|^{\frac{5}{2}}) \frac{\| u \|_{L^1}}{s},$$

где $C > \infty$ — *константа, не зависящая от* s, $\tau \in (-\infty, \infty)$, $u \in L^1$.

Доказательство. При $\tau = 0$ оператор S_τ — тождественный, поэтому можно считать, что $\tau \neq 0$. Разложим функцию $u(x)$ в соответствии с леммой 3. Так как $\sup | w_k, \ (x) | \leqslant 2 \sup | u(x) |$, $\sum_k \| w_k \|_1 < \infty$, то $\sum_k \| w_k \|_{L^2}^2 < \infty$, и так как кубы I_k не пересекаются, то ряд $\sum_k w_k$ сходится в L^2; так как $\sup_{R^3} | v(x) | < \infty$, $v \in L^1$, то $v \in L^2$. Так как $S_\tau \in \operatorname{Hom}(L^2)$, то

$$(S_\tau u)(x) = (S_\tau v)(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (S_\tau w_k)(x),$$

где ряд сходится в L^2. Согласно лемме 2.2,

$$\int_{R^3 \setminus I_k^*} |(S_\tau w_k)(x)|\, d^3x \leqslant C(1+|\tau|)^{\frac{5}{2}} \cdot \int_{I_k} |w_k(x)|\, d^3x. \tag{2.1}$$

Здесь I_k^* — куб, концентричный I_k, вдвое большего объема, и если $0 = \bigcup_k I_k^*$, то

$$\operatorname{mes} 0 \leqslant \frac{2}{s} \| u \|_{L^1}.$$

Ограничиваясь в левой части неравенства (2.1) интегрированием по $R^3 \setminus 0$ и суммируя по k, получаем

$$\int_{R^3 \setminus 0} \sum_{k=1}^{\infty} |(S_\tau w_k)(x)|\, d^3x \leqslant C(1+|\tau|)^{\frac{5}{2}} \| u \|_{L^1}.$$

Следовательно, мера множества тех точек в $R^3 \setminus 0$, в которых выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} |(S_\tau w_k)(x)| > \frac{s}{2}$, не превосходит $\frac{6C(1+|\tau|)^{\frac{5}{2}}}{s} \| u \|_{L^1}$. Таким образом, всюду в R^3, кроме исключительного множества, мера которого не превосходит $\frac{2+6C(1+|\tau|)^{\frac{5}{2}}}{s} \times$ $\times \| u \|_{L^1}$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(S_\tau w_k)(x)| \leqslant \frac{s}{2}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{mes}\left\{x : \sum_{k=1}^{\infty} |(S_\tau w_k)(x)| > \frac{s}{2}\right\} \leqslant \frac{2+6C(1+|\tau|)^{\frac{5}{2}}}{s} \| u \|_{L^1}. \tag{2.2}$$

Так как $|v(x)| \leqslant 8s$, то $\| v \|_{L^2}^2 \leqslant 8s \| v \|_{L^1}$. Так как $\| S_\tau \|_{L^2 \to L^2} = 1$, то $\| (S_\tau v) \|_{L^2}^2 \leqslant 8s \| v \|_{L^1}$, т. е.

$$\int_{R^3} |(S_\tau v)(x)|^2\, d^3x \leqslant 8s \| v \|_{L^1}.$$

Интегрируя в последнем неравенстве лишь по множеству тех x, в которых выполняется неравенство $|(S_\tau v)(x)| > \frac{s}{2}$, получим, что

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 \operatorname{mes}\left\{x : |(S_\tau v)(x)| > \frac{s}{2}\right\} \leqslant 8s \| v \|_{L^1},$$

или

$$\operatorname{mes}\left\{x : |S_\tau v)(x)| > \frac{s}{2}\right\} \leqslant \frac{32}{s} \| v \|_{L^1}. \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) следует, что

$$\operatorname{mes}\{x : |(S_\tau u)(x)| > s\} \leqslant \frac{34+6C(1+|\tau|)^{\frac{5}{2}}}{s} \| u \|_{L^1}.$$

Теорема 2. 2. *При $p \in (1, \infty)$ $S_\tau \in \mathrm{Hom}(L^p)$, и*

$$\| S_\tau \|_{L^p(R^3) \to L^p(R^3)} \leqslant C (1 + |\tau|)^{\frac{5}{2}} \left(p + \frac{1}{p-1}\right),$$

где $C < \infty$ — абсолютная константа.

Доказательство. Теорема 2 является непосредственным следствием теоремы 2. 1, равенства $\| S_\tau \|_{L^2 \to L^2} = 1$ и интерполяционной теоремы Марцинкевича (по поводу последней см., например, [4, с. 47]).

3. Оператор $T_\lambda = F^{-1} \left(\frac{\sin |x|}{|x|^\lambda} F \right)$.

Мы будем в этом параграфе рассматривать оператор T_λ при $\lambda \in \Pi = \{\lambda : 0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant 1\}$, имея в виду воспользоваться комплексной интерполяцией.

Так как $\left| \frac{\sin |x|}{|x|^\lambda} \right| \leqslant 1$ при $\lambda \in \Pi$, то $\forall \lambda \in \Pi$ $T_\lambda \in \mathrm{Hom}(L^2)$, и $\| T_\lambda \|_{L^2 \to L^2} \leqslant 1$. Поэтому для любой ограниченной финитной функции $f(x)$ с носителем, содержащимся в шаре $|x| \leqslant \rho_2 < \infty$ и $\forall \rho_1 < \infty$, будет выполняться неравенство

$$\int\limits_{|x| \leqslant \rho_1} |(T_\lambda f)(x)| \, d^3x \leqslant C_{\rho_1 \rho_2} \sup_{|x| \leqslant \rho_2} |f(x)|,$$

где $C_{\rho_1 \rho_2} < \infty$ — константа, не зависящая от f и λ.

Таким образом, (1. 2) выполняется с большим запасом. Так как $\left| \frac{\sin |x|}{|x|^{i\tau}} \right| \leqslant 1$, то $\| T_{i\tau} \|_{L^2 \to L^2} = 1$.

Чтобы воспользоваться теоремой 1. 1, нам нужно оценить $\| T_{1+i\tau} \|_{L^p \to L^p}$. Так как $\frac{\sin |x|}{|x|}$ — преобразование Фурье δ-функции, сосредоточенной на единичной сфере, то

$$\| T_1 \|_{L^p \to L^p} \leqslant 1 \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Так как $T_{1+i\tau} = T_1 S_\tau$, то $\| T_{1+i\tau} \| \leqslant \| S_\tau \|$.

Используя теорему 2. 2, получаем теперь, что $\forall p \in (1, \infty)$ и для любого вещественного τ оператор $T_{1+i\tau} \in \mathrm{Hom}(L^p)$, и

$$\| T_{1+i\tau} \|_{L^p \to L^p} \leqslant C (1 + |\tau|)^{\frac{5}{2}} \left(p + \frac{1}{p-1}\right),$$

где $C < \infty$ — абсолютная константа.

Пусть $r \in (1, \infty)$ — произвольное. Применим к оператор-функции T_λ теорему 1. 1 при значениях параметров $p_0 = 2$, $p_1 = r$. Получим, что $\forall \lambda \in [0, 1]$ и $\forall r \in (1, \infty)$ $T_\lambda \in \mathrm{Hom}(L^{p(r,\lambda)})$, где $\frac{1}{p(r, \lambda)} = \frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{r}$;

$$\| T_\lambda \|_{L^{p(r,\lambda)} \to L^{p(r,\lambda)}} \leqslant C \left(r + \frac{1}{r-1} \right)^{1-\lambda},$$

где $C < \infty$ — абсолютная константа.

В частности, нами доказана

Теорема 3. 1. *Если* $\lambda \in [0, 1]$, *то оператор*

$$F^{-1}\left(\frac{\sin|x|}{|x|^{\lambda}} F\right) \in \mathrm{Hom}\,(L^{p}(R^{3})),$$

для любого $p \in \left(\frac{2}{1+\lambda}, \frac{2}{1-\lambda}\right)$, $T_1 \in \mathrm{Hom}\,(L^{p}(R^{3}))$ *для любого* $p \in [1, \infty]$, $T_0 \in \mathrm{Hom}\,(L^{2}(R^{3}))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Торин Г. О. Теоремы выпуклости, Математика (сб. переводов). 1957, 1 : 3, с. 41—78.
2. Calderon A. P., Zugmund A. On the existence of certain singular integrals.—«Acta Math.», 1952, Vol. 88, p. 85—139.
3. Хермандер Л. Операторы, инвариантные относительно сдвига. М., ИЛ, 1962. 140 с.
4. Красносельский М. А. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., Физматгиз, 1966. 150 с.