УДК 517.5

М. З. Двейрин

ПОПЕРЕЧНИКИ И ε-ЭНТРОПИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

В настоящей работе рассматривается задача определения поперечников и ε-энтропии компактных классов функций, аналитических в единичном круге. При некоторых ограничениях на рассматриваемые классы удается найти точные значения поперечников и двустороннюю оценку ε-энтропии, из которой получается равенство по порядку роста при $\varepsilon \downarrow 0$, а иногда и асимптотика ε-энтропии.

Метод, примененный для оценки поперечников сверху, использовался в разное время К. И. Бабенко, Л. В. Тайковым для нахождения наилучших приближений на некоторых конкретных функциональных классах. После некоторого усовершенствования он оказался применимым при решении этой задачи сразу для целого семейства классов.

Из полученных в статье результатов следуют все известные оценки для ε-энтропии классов функций, аналитических в круге $|z| < 1$. В частности, равенство (17) показывает, что в соотношении IV работы [8] второй член указан неверно (подробное доказательство в [8] не приведено).

В частном случае классов функций с ограниченной по норме r-й (r-целое) производной некоторые поперечники были известны ранее (см. [2, 3, 9]).

Пусть степенные ряды

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \quad (b_k \neq 0;\ k = 0,\ 1,\ \ldots)$$

и

$$F_*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{-1} z^k$$

имеют единичный радиус сходимости Для всякой аналитической в круге $|z| < 1$ функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

можно построить аналитическую в том же круге функцию

$$f_*(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k a_k z^k,$$

называемую союзной (см. [1, с. 168]). Пусть K_ρ — круг $|z|<\rho$, $\overline{K}_\rho$ — его замыкание. Следуя [2], обозначим: A^K — пространство комплексных функций $f(z)$, аналитических на связном компакте K с нормой

$$\|f(z)\|_{C,K}=\max_{z\in K}|f(z)|;$$

$A_{K_1}^{\overline{K}_\rho}$ — класс функций $f(z)\in A^{\overline{K}_\rho}$, аналитически продолжимых в K_1 и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<\rho<1}\|f(z)\|_{C,\overline{K}_\rho}\leqslant 1;$$

$H_p^{\overline{K}_\rho}$ $(p\geqslant 1)$ — пространство функций, регулярных на $\overline{K}_\rho$, $\rho<1$ с нормой

$$\|f(z)\|_{H_p,\overline{K}_\rho}=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{ix})|^p dx\right\}^{1/p};$$

$H_{p,K_1}^{\overline{K}_\rho}$ — класс функций $f(z)\in H_p^{\overline{K}_\rho}$, аналитически продолжимых в K_1 и таких, что

$$\sup_{0<\rho<1}\|f(z)\|_{H_p,\overline{K}_\rho}\leqslant 1.$$

Будем говорить, что $f(z)\in FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}$ или $f(z)\in FH_{p,K_1}^{\overline{K}_\rho}$, если соответственно $f_*(z)\in A_{K_1}^{\overline{K}_\rho}$ или $f_*(z)\in H_{p,K_1}^{\overline{K}_\rho}$.

Рассмотрим функцию

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

принадлежащую одному из указанных классов. Обозначим его для краткости A. Величина

$$E_n(f)=\inf_{P_n(z)}\|f(z)-P_n(z)\|$$

есть наилучшее приближение функции f полиномами степени не выше n, а

$$E_n(A)=\sup_{f\in A}E_n(f)$$

есть наилучшее приближение на классе A полиномами степени не выше n. Здесь и далее под $\|\cdot\|$ следует понимать любую из $\|\cdot\|_{C,\overline{K}_\rho}$ и $\|\cdot\|_{H_p,\overline{K}_\rho}$.

Отправляясь от произвольной треугольной матрицы комплексных чисел

$$\Lambda = \{\lambda_{k,\,n}\},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ n = 0,\ 1,\ \ldots,$$

построим полином

$$V_{\Lambda,\,n}(f,\ z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{k,\,n} c_k z^k.$$

Величина

$$E_n(f,\ \Lambda) = \| f(z) - V_{\Lambda,\,n}(f,\ z) \|$$

характеризует скорость приближения функции $f(z)$ полиномами $V_{\Lambda,\,n}(f,\ z)$,

$$E_n(A,\ \Lambda) = \sup_{f \in A} E_n(f,\ \Lambda)$$

есть скорость приближения класса A полиномами $V_{\Lambda,\,n}$ или, что то же самое, линейным методом Λ.

Наилучшим линейным методом приближения функции класса A называется такая треугольная матрица $\Lambda^* = \{\lambda^*_{k,\,n}\}$ (если она существует), для которой

$$E_n(A,\ \Lambda^*) = \inf_{\Lambda} \sup_{f \in A} \| f(z) - V_{\Lambda,\,n}(f,\ z) \| = \sup_{f \in A} \| f(z) - V_{\Lambda^*,\,n}(f,\ z) \|.$$

Величина $E_n(A,\ \Lambda^*)$ есть наилучшее линейное приближение на классе A; в случае, если наилучший линейный метод не существует, под $E_n(A,\ \Lambda^*)$ будем понимать $\inf\limits_{\Lambda} E_n(A,\ \Lambda)$.

Определение. *Ядро $F(z)$ назовем допустимым в круге K_ρ, если при всех $r < \rho$, $|x| \leqslant \pi$,*

$$\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(b_n \sum_{k=1}^{\infty} b_{n+k}^{-1} r^k e^{ikx} \right) \geqslant 0. \tag{1}$$

Теорема 1. *Для того, чтобы*

$$E_{n-1}\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho},\ \Lambda^* \right) = |b_n^{-1}|\, \rho^n,\ \rho \leqslant 1,$$

необходимо и достаточно, чтобы ядро $F(z)$ было допустимым в круге K_ρ.

Доказательство достаточности можно провести совершенно аналогично тому, как это было сделано в [4]. При этом оказывается, что Λ^* есть матрица с элементами

$$\lambda^*_{k,\,n-1} = 1 - \frac{b_k\, |b_n^2|}{b_{2n-k} b_n^2}\, \rho^{2(n-k)}, \tag{2}$$

$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1;\ \ n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Пусть теперь

$$E_{n-1}\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho},\ \Lambda^* \right) = |b_n^{-1}|\, \rho^n.$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{f}(z) \equiv \tilde{f}(\alpha, n, z) = -\alpha b_n^{-1} z^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^{-1} z^k (1 - |\alpha|^2)\, \bar{\alpha}^{k-n-1};$$

$$\tilde{f}_*(z) = -\alpha z^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} (1 - |\alpha|^2) \bar{\alpha}^{k-n-1} z^k = z^n \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z}, \quad |\alpha| < 1. \tag{3}$$

Очевидно, что $\tilde{f}(z) \in FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}$, и, поскольку

$$E_{n-1}\left(\tilde{f}, \Lambda\right) = \|\tilde{f}(z)\|_{C, \overline{K}_\rho}$$

для любого линейного метода приближения, то

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^{-1} (1 - |\alpha|^2)\, \bar{\alpha}^{k-n-1} z^k - \alpha b_n^{-1} z^n \right\|_{C, \overline{K}_\rho} \leqslant |b_n^{-1}| \rho^n,$$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^{-1} (1 - |\alpha|^2) \bar{\alpha}^{k-n-1} z^{k-n} - \alpha b_n^{-1} \right\|_{C, \overline{K}_r} \leqslant |b_n^{-1}|,$$

для любого $r < \rho$

$$\left| -\alpha b_n^{-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^{-1} (1 - |\alpha|^2)\, \bar{\alpha}^{k-n-1} r^{k-n} \right| \leqslant |b_n^{-1}|,$$

$$|\alpha|^2 - 2(1 - |\alpha|^2) \operatorname{Re} b_n \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^{-1}\, \bar{\alpha}^{k-n} r^{k-n} +$$

$$+ (1 - |\alpha|^2)^2 \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_n b_k^{-1}\, \bar{\alpha}^{k-n-1} r^{k-n} \right|^2 \leqslant 1,$$

$$-2 \operatorname{Re} b_n \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^{-1} \bar{\alpha}^{k-n} r^{k-n} +$$

$$+ (1 - |\alpha|^2) \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_n b_k^{-1}\, \bar{\alpha}^{k-n-1} r^{k-n} \right|^2 \leqslant 1.$$

Рассматривая α на произвольном радиусе $\arg \alpha = x$, при $|\alpha| \uparrow 1$ получаем

$$\frac{1}{2} + \operatorname{Re} b_n \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^{-1} e^{-i(k-n)x} r^{k-n} \geqslant 0,$$

что в силу произвольности $x = \arg \alpha$ означает допустимость ядра $F(z)$ в круге K_ρ.

Теорема 1'. *Если ядро* $F(z)$ *допустимо в круге* K_ρ, *то*

$$E_{n-1}\left(FH_{p, K_1}^{\overline{K}_\rho}, \Lambda^*\right) = |b_n^{-1}| \rho^n, \ \rho \leqslant 1.$$

Доказывается так же, как это сделано в [4].

Пусть A — центрально-симметричный выпуклый компакт в банаховом пространстве X; $L_n \subset X$ — n-мерное линейное подпространство. Рассмотрим величины:

1) n-мерный поперечник множества A пространства x по А. Н. Колмогорову

$$d_n(A, X) = \inf_{L_n \subset X} \sup_{x \in A} \inf_{y \in L_n} \| x - y \|_X;$$

2) n-мерный линейный поперечник

$$d_n'(A, X) = \inf_{L_n \subset X} \inf_{U} \sup_{x \in A} \| x - Ux \|_X,$$

где внутренний inf берется по всем линейным операторам U, отображающим A в n-мерное подпространство $L_n \subset X$;

3) поперечник компакта A по И. М. Гельфанду

$$d^n(A, X) = \inf_{L^n \subset X} \inf_{\varepsilon > 0} \{ A \cap L^n \subset \varepsilon S \},$$

где L^n — подпространство X коразмерности n;

S — единичный шар пространства X;

4) n-мерный поперечник по П. С. Александрову $\alpha_n(A, X)$: точную нижнюю грань таких α, что существует непрерывное отображение $\varphi(x)$ компакта A в компакт размерности не выше n и

$$\sup_{x \in A} \| x - \varphi(x) \|_X \leqslant \alpha.$$

Б. С. Митягин и Г. М. Хенкин ввели еще одну геометрическую характеристику $\beta_n(A, X)$, названную ими n-мерным поперечником по С. Н. Бернштейну. По определению

$$\beta_n(A, X) = \sup_{L_n \subset X} \sup \{ b > 0 : bS \cap L_n \subset A \}.$$

Р. Л. Фрум-Кетковым [5] и В. М. Тихомировым [2, 3] доказаны неравенства

$$\beta_n(A, X) \leqslant \alpha_n(A, X) \leqslant d_n(A, X), \tag{4}$$

$$\beta_n(A, X) \leqslant d^n(A, X), \quad \beta_n(A, X) \leqslant d_n'(A, X), \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть допустимое в круге K_ρ ядро $F(z)$ удовлетворяет одному из условий:*

a) функция

$$I_n(z) = |b_n| + \sum_{k=1}^{n-1} (\gamma b_k \gamma_n^k z^{n-k} + \bar{\gamma} \bar{b}_k \bar{\gamma}_n^k z^{k-n}),$$

где

$$\gamma_n = \exp\left[\frac{-i \arg b_n b_0^{-1}}{n}\right], \quad \gamma = \exp[-i \arg b_0],$$

удовлетворяет условиям

$$I_n(z_p) \geqslant 0, \quad z_p = \exp\left[\frac{\pi i}{n} p\right], \quad p = 0, 1, \ldots, 2n-1$$

в) существует непрерывная функция $\lambda_n(t) \equiv \lambda(t)$, *представимая при* $t \in [-\pi; \pi]$ *интегралом Фурье-Стилтьеса*

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} d\omega(u),$$

где $\operatorname{Var} \omega(u) \leqslant |b_n|$ *и* $\lambda(t_k) = b_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n$ *в точках* $t_k \in [-\pi; \pi]$, *образующих какую-либо арифметическую прогрессию;*

c)

$$\frac{1}{2} + \operatorname{Re} b_n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} b_k e^{i(n-k)x} \geqslant 0.$$

Тогда для $0 < \rho \leqslant 1$

$$d_n\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}, A^{\overline{K}_\rho}\right) = d_n'\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}, A^{\overline{K}_\rho}\right) = d^n\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}, A^{\overline{K}_\rho}\right) =$$

$$= \beta_{n+1}\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}, A^{\overline{K}_\rho}\right) = \alpha_n\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}, A^{\overline{K}_\rho}\right) = |b_n^{-1}| \rho^n.$$

Доказательство. С помощью теоремы 1 получаем

$$d_n'\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}, A^{\overline{K}_\rho}\right) \leqslant E_{n-1}\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}, \Lambda^*\right) = |b_n^{-1}| \rho^n. \tag{6}$$

Если выполнено одно из условий (a или b), то (см. [1, с. 422; 6, с. 169])

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} c_k b_k z^k \right\|_{C, \overline{K}_\rho} \leqslant |b_n| \left\| \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \right\|_{C, \overline{K}_\rho} \tag{7}$$

для любого полинома $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ степени не выше n. Ниже будет показано, что неравенство (7) имеет место и при выполнении условия c. Из неравенства С. Н. Бернштейна

$$\| P_n(z) \|_{C, K_1} \leqslant \rho^{-n} \| P_n(z) \|_{C, \overline{K}_\rho}$$

и неравенства (7) следует, что $(n+1)$-мерная сфера

$$S_{n+1} = \left\{ P_n(z) : \| P_n(z) \|_{C, \overline{K}_\rho} \leqslant |b_n^{-1}| \rho^n \right\}$$

принадлежит $FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}$. Согласно теореме В. М. Тихомирова [2],

$$\beta_{n+1}\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}, A^{\overline{K}_\rho}\right) \geqslant |b_n^{-1}| \rho^n. \tag{8}$$

Обозначим через $\widetilde{L}^n$ подпространство $A^{\overline{K}_\rho}$ коразмерности n, образованное функциями $f(z) \in A^{\overline{K}_\rho}$, у которых $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$.

Поскольку $E_{n-1}\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho},\ \Lambda^*\right) = |b_n^{-1}|\,\rho^n$, то для

$$f(z) \in FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho} \cap \widetilde{L}^n,\ f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k$$

имеем

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k \right\|_{C,\ \overline{K}_\rho} \leqslant |b_n^{-1}|\,\rho^n \tag{9}$$

и

$$d^n\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho},\ A^{\overline{K}_\rho}\right) = \inf_{L^n} \inf_{\varepsilon>0} \left\{FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho} \cap L^n \subset \varepsilon S\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\varepsilon>0} \left\{FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho} \cap \widetilde{L}^n \subset \varepsilon S\right\} \leqslant |b_n^{-1}|\,\rho^n. \tag{10}$$

Из (4), (5), (6), (8) и (10) получаем утверждение теоремы 2.

Теорема 2′. *В условиях теоремы 2* ($0 < \rho \leqslant 1$)

$$d_n\left(FH_{p,\,K_1}^{\overline{K}_\rho},\ H_p^{\overline{K}_\rho}\right) = d_n'\left(EH_{p,\,K_1}^{\overline{K}_\rho},\ H_p^{\overline{K}_\rho}\right) = d^n\left(FH_{p,\,K_1}^{\overline{K}_\rho},\ H_p^{\overline{K}_\rho}\right) =$$

$$= \beta_{n+1}\left(FH_{p,\,K_1}^{\overline{K}_\rho},\ H_p^{\overline{K}_\rho}\right) = \alpha_n\left(FH_{p,\,K_1}^{\overline{K}_\rho},\ H_p^{\overline{K}_\rho}\right) = |b_n^{-1}|\,\rho^n.$$

Доказательство аналогично предыдущему, при этом используется теорема 1 и неравенство (7) для соответствующей нормы, которое, как будет показано ниже, имеет место при выполнении одного из условий (a, b или c).

1. Пусть выполнено условие a. Докажем следующую интерполяционную формулу:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \gamma b_k \gamma_n^k z^k = \frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{2n-1} I_n(z_p)\, z_p^{-n} \sum_{k=0}^{n} a_k (z z_p)^k. \tag{11}$$

Правая часть в (11) — полином степени не выше n. Убедимся, что его коэффициент при z^m равен $a_m b_m \gamma\gamma_n^m$.

$$\frac{1}{m!}\left[\frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{2n-1} I_n(z_p)\, z_p^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k (z z_p)^k\right]_{|z=0}^{(m)} =$$

$$= \frac{a_m}{2n} \sum_{p=0}^{2n-1} I_n(z_p)\, z_p^{m-n} = \frac{a_m}{2n} \sum_{p=0}^{2n-1} |b_n|\, z_p^{m-n} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} b_k \gamma_n^k \gamma \sum_{p=0}^{2n-1} z_p^{m-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \bar{b}_k \bar{\gamma}_n^k \bar{\gamma} \sum_{p=0}^{2n-1} z_p^{m+k} +$$

$$\left. + |b_0| \sum_{p=0}^{2n-1} z_p^m \right] = a_m b_m \gamma \gamma_n^m,$$

так как $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n-1} z_p^m = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ не кратно } 2n, \\ 2n, & \text{если } m \text{ кратно } 2n. \end{cases}$

Из интерполяционной формулы получаем

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \gamma_n^k \gamma z^k \right\| \leqslant \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right\| \frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{2n-1} | I_n(z_p) | =$$

$$= \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right\| \cdot \frac{1}{2n} \left| \sum_{p=0}^{2n-1} I_n(z_p) \right| = | b_n | \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right\|$$

в любой из норм $\| \cdot \|_{H_p, \overline{K}_\rho}$ или $\| \cdot \|_{C, \overline{K}_\rho}$.

2 Пусть выполнено условие b. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k e^{iut_k} z^k d\omega(u)$$

и

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k \right\| \leqslant \max_u \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k e^{it_0 u} \cdot e^{ik\Delta t u} \right\| \int_{-\infty}^{\infty} | d\omega(u) | \leqslant$$

$$\leqslant | b_n | \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right\|.$$

Здесь Δt есть разность прогрессии $t_0, \ t_1, \ \ldots, t_n$, норма — любая из рассматриваемых.

3 При выполнении условия c справедливость неравенства (7) видна из представления

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k = \frac{b_n}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{z}{\zeta} \right)^{n-k} \times$$

$$\times \left[1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(b_k b_n^{-1} \zeta^{n-k} + \overline{b}_k \overline{b}_n^{-1} \overline{\zeta}^{n-k} \right) \right] \frac{d\zeta}{\zeta}$$

и того, что

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right\|$$

для любого полинома.

Рассмотрим несколько частных случаев

1. Выбираем ядра

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k)} z^k + b_0; \ F_*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\alpha)} z^k + b_0^{-1},$$

в которых α — произвольное положительное число, а $b_0 = \dfrac{\Gamma(1+\alpha)}{2}$.

Для любой функции $f(z) = \sum\limits_{k=[\alpha]+1}^{\infty} c_k z^k$ получаем $f_*(z) = z^\alpha f^{(\alpha)}(z)$, где $f^{(\alpha)}(z)$ — дробная производная функции $f(z)$ порядка α с начальной точкой $K = 0$.

Условие допустимости и условие c теоремы 2 в этом случае имеют вид

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n+k+\alpha)}\cos kx\geqslant 0,\ n\geqslant 1,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k+\alpha)}{\Gamma(n-k)}\cos kx+b_0\cos nx\geqslant 0.$$

Поскольку последовательность $\left\{\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ при $\alpha>0$ выпукла вниз, то первое неравенство проверяется двойным преобразованием Абеля. Последовательность $\left\{\frac{\Gamma(n-k+\alpha)}{\Gamma(n-k)}\right\}_{k=0}^{n-1}$ выпукла вниз при $\alpha\geqslant 1$. Так как при нашем выборе b_0 является выпуклым продолжением этой последовательности, то выполнение условия c для $\alpha\geqslant 1$ также проверяется двойным преобразованием Абеля.

Если обозначить W^{α} класс функций, аналитических в единичном круге и таких, что

$$\|f^{(\alpha)}(z)\|_{C,\,K_1}\leqslant 1,$$

то, очевидно

$$E_{n-1}\left(FA_{\overline{K}_1}^{\overline{K}_\rho},\ \Lambda^*\right)=E_{n-1}(W^{\alpha},\ \Lambda^*)=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)}\rho^n$$

при $n>[\alpha]$, $\alpha>0$, и при $n>[\alpha]$, $\alpha\geqslant 1$

$$d_n\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho},\ A^{\overline{K}_\rho}\right)=d_n\left(W^{\alpha},\ A^{\overline{K}_\rho}\right)=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)}\rho^n.$$

Такое же равенство справедливо для всех видов поперечников, рассматриваемых в теореме 2 и 2′.

2. Пусть

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{-(k+1)^{\alpha}}z^k,\quad F_*(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{(k+1)^{\alpha}}z^k,$$

$$1\geqslant\alpha\geqslant\frac{1}{2},\quad 0<\beta<\frac{1}{e}.$$

Под $F_*\left(\frac{z}{\zeta}\right)$, рассматриваемой как функция от ζ при фиксированном z, $|z|<1$, будем понимать непрерывную при $|\zeta|>1$ функцию, у которой $\lim\limits_{|\zeta|\to\infty}F_*\left(\frac{z}{\zeta}\right)=1$. Из представления

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}f_*(\zeta)\,F_*\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

видно, что функция $f(z) \in FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}$ имеет производные всех порядков, непрерывные при $|z| \leqslant 1$. Ввиду неотрицательности при нашем выборе α и β вторых разностей коэффициентов

$$\frac{1}{2}\beta^{(n+1)^\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{(n+k+1)^\alpha} \cos kx \geqslant 0,$$

$$\beta^{-(n+1)^\alpha} + 2\sum_{k=1}^{n-1} \beta^{-(n-k+1)^\alpha} \cos kx + \beta^{-1} \cos nx \geqslant 0,$$

т. е. ядро $F(z)$ допустимо в круге K_1 и удовлетворяет условию a теоремы 2. Согласно теоремам 1 и 2, для этого класса бесконечно дифференцируемых функций

$$E_{n-1}\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}, \Lambda^*\right) = \beta^{(n+1)^\alpha}\rho^n,$$

$$d_n = d_n' = d^n = \beta_{n+1} = \alpha_n = \beta^{(n+1)^\alpha}\rho^n.$$

3. Рассмотрим пример допустимого в единичном круге ядра с комплексными коэффициентами:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 e^{\frac{i}{2(k+1)^4}} z^k. \tag{12}$$

Покажем, что ядро $F(z)$ является допустимым, т. е.

$$\frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left[(n+1)^2 e^{\frac{i}{2(n+1)^4}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{-i}{2(n+k+1)^4}} \frac{e^{ikx}}{(n+k+1)^2}\right] \geqslant 0.$$

Выделим вещественную часть

$$\frac{1}{2(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{2(n+1)^4} - \frac{1}{2(n+k+1)^4}\right) \frac{\cos kx}{(n+k+1)^2} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2(n+1)^4} - \frac{1}{2(n+k+1)^4}\right) \frac{\sin kx}{(n+k+1)^2}$$

и оценим в этом выражении вторую сумму

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2(n+1)^4} - \frac{1}{2(n+k+1)^4}\right) \frac{\sin kx}{(n+k+1)^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2(n+1)^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k+1)^2} < \frac{1}{2(n+1)^4(n+2)}.$$

Ядро $F(z)$ будет допустимым, если

$$\frac{1}{2(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{2(n+1)^4}-\frac{1}{2(n+k+1)^4}\right)\frac{\cos kx}{(n+k+1)^2}\geqslant 0.$$

Последовательность коэффициентов этого ряда, как легко проверить, выпукла вниз, что и обеспечивает выполнение последнего неравенства. Следовательно,

$$E_{n-1}\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho},\ \Lambda^*\right)=\frac{\rho^n}{(n+1)^2}.$$

Перейдем теперь к определению ε-энтропии классов $FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}$. Пусть A — множество в метрическом пространстве X. Система γ множеств $V\subset X$ образует ε-покрытие множества A, если диаметр $d(V)\leqslant 2\varepsilon$ и $A\subset\bigcup\limits_{V\in\gamma}V$.

Множество $V\in A$ называется ε-различимым в A, если для любых его точек x и y $\rho(x, y)>\varepsilon$.

Обозначим $N_\varepsilon(A)$ минимальное число множеств в ε-покрытии A; $n_\varepsilon(A)$ — максимальное число точек в ε-различимом в A подмножестве. Согласно лемме А. Н. Колмогорова (см. [7, с. 25]),

$$n_{2\varepsilon}(A)\leqslant N_\varepsilon(A).$$

ε-энтропией и ε-емкостью множества A называют соответственно

$$H_\varepsilon(A)=\log_2 N_\varepsilon(A)\ \text{ и }\ h_\varepsilon(A)=\log_2 n_\varepsilon(A).$$

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 ε-энтропия класса $FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}$ удовлетворяет неравенствам*

$$\sup\log_2\left[\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{2n+2}\frac{\rho^{n(n+1)}}{|b_0b_1\ldots b_n|^2}\right]\leqslant H_\varepsilon\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\log_2\left[\left(\frac{10e}{\varepsilon}\right)^{2n+2}\frac{\rho^{n(n+1)}}{|b_0b_1\ldots b_n|^2}\right],\ 0<\rho\leqslant 1,$$

где n определяется из условия $4|b_{n+1}^{-1}|\rho^{n+1}\leqslant\varepsilon<4|b_n^{-1}|\rho^n$.

Доказательство. Введем следующие множества:

$$U=\left\{f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k:\left\|\sum_{k=0}^{\infty}c_k\rho^kz^k\right\|_{C,\,K_1}\leqslant 1\right\},$$

$$\Phi_{n+1}=\left\{\sum_{k=0}^{n}b_k^{-1}c_kz^k:\left\|\sum_{k=0}^{n}c_kz^k\right\|_{C,\,K_1}\leqslant 1\right\},$$

$$V_{n+1}=\left\{\sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,\,n}^{*}b_{k}^{-1}c_{k}z^{k}:\left\|\sum_{k=0}^{n}c_{k}z^{k}\right\|_{C,\,\overline{K_1}}\leqslant 1\right\},$$

$$V'_{n+1}=\left\{\sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,\,n}^{*}b_{k}^{-1}c_{k}z^{k}:\left\|\sum_{k=0}^{\infty}c_{k}z^{k}\right\|_{C,\,K_1}\leqslant 1\right\}.$$

Здесь $\lambda_{k,\,n}^{*}=1-\frac{b_k\left|b_{n+1}^2\right|}{\overline{b}_{2n-k+2}b_{n+1}^2}\rho^{2(n-k+1)}$, а $\|\cdot\|_{C,\,K_1}=\sup\limits_{0<\rho<1}\|\cdot\|_{C,\,\overline{K}_\rho}$. Через T_{n+1} будем обозначать пространство полиномов степени не выше n; его можно рассматривать как $(2n+2)$-мерное пространство точек $\xi=(\alpha_0,\ \alpha_1,\ldots,\ \alpha_n)$ Соответствующий точке ξ полином $\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_n z^n$ обозначим $P_n(\xi,\ z)$. Очевидно, что $FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}\cap T_{n+1}=\Phi_{n+1}$. Множества Φ_{n+1}, V_{n+1}, V'_{n+1} и $U_{n+1}=$ $=U\cap T_{n+1}$ выпуклы, следовательно, измеримы по Жордану. Если точка $\xi=(c_0,\ c_1,\ldots,\ c_n)\in U_{n+1}$, то $L\xi=\left(c_0 b_0^{-1},\ c_1 b_1^{-1}\rho,\ldots,\ c_n b_n^{-1}\rho^n\right)\in\Phi_{n+1}$ и

$$\mu\left(\Phi_{n+1}\right)=\frac{\rho^{n(n+1)}}{\left|b_0 b_1\ldots b_n\right|^2}\mu\left(U_{n+1}\right),$$

где μ — мера Жордана. Кроме того, $\mu\left[U_{2\varepsilon,\,n+1}(\xi)\right]=(2\varepsilon)^{2n+2}\mu\left(U_{n+1}\right)$ ($U_{2\varepsilon,\,n+1}(\xi)$ — сфера радиуса 2ε с центром в точке ξ).

Пусть теперь $(\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\ \xi_k)$ — максимальное 2ε-различимое множество в Φ_{n+1}. Тогда совокупность сфер $U_{2\varepsilon,\,n+1}(\xi_i)$ покроет все Φ_{n+1}:

$$\Phi_{n+1}\subset\bigcup_{i=1}^{k}U_{2\varepsilon,\,n+1}(\xi_i).$$

Далее

$$\mu\left(\Phi_{n+1}\right)\leqslant k(2\varepsilon)^{2n+2}\mu\left(U_{n+1}\right)=k(2\varepsilon)^{2n+2}\frac{\left|b_0 b_1\ldots b_n\right|^2}{\rho^{n(n+1)}}\mu\left(\Phi_{n+1}\right).$$

Отсюда

$$h_{2\varepsilon}\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}\right)\geqslant h_{2\varepsilon}\left(\Phi_{n+1}\right)\geqslant\log_2 k\geqslant\log_2\left[\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{2n+2}\frac{\rho^{n(n+1)}}{\left|b_0 b_1\ldots b_n\right|^2}\right]$$

при любом натуральном n.

Оценим теперь $H_\varepsilon\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}\right)$ сверху. С помощью теоремы 1 для оператора

$$V_{\Lambda^*,\,n}(f)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,\,n}^{*}c_k z^k,\ V_{\Lambda^*,\,n}(f):T_{n+1}\to T_{n+1}$$

имеем неравенство

$$\left\|V_{\Lambda^*,\,n}\right\|\leqslant 1+\left|b_n\right|\left|b_{n+1}^{-1}\right|\leqslant 2, \tag{13}$$

откуда следует включение $V_{n+1}\subset 2\Phi_{n+1}$.

Рассмотрим также оператор

$$\sigma_{n+1}(P_n) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) c_k z^k,$$

определенный в пространстве T_{n+1} и обратный к нему оператор

$$\sigma_{n+1}^{-1}(P_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{n-k+1} c_k z^k.$$

Очевидно, что $\sigma_{n+1}(V'_{n+1}) \subset V_{n+1}$ и поэтому

$$V'_{n+1} \subset \sigma_{n+1}^{-1}(V_{n+1}) \subset 2\sigma_{n+1}^{-1}(\Phi_{n+1}). \tag{14}$$

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ — максимальное по числу элементов ε-различимое подмножество в $2\sigma_{n+1}^{-1}(\Phi_{n+1})$. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{p} U_{\varepsilon/2,\, n+1}(x_i) \subset G_{n+1}, \tag{15}$$

где G_{n+1} — $\frac{\varepsilon}{2}$-расширение множества $2\sigma_{n+1}^{-1}(\Phi_{n+1})$. Пусть $\xi \in G_{n+1}$. Это означает существование точки $\xi' \in 2\sigma_{n+1}^{-1}(\Phi_{n+1})$ с $\|\xi - \xi'\| \leqslant \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ в норме пространства T_{n+1}, порожденной сферой U_{n+1}. Множество $2\sigma_{n+1}^{-1}(\Phi_{n+1})$ содержит, в силу включения $\Phi_{n+1} \subset \sigma_{n+1}^{-1}(\Phi_{n+1})$ и неравенства

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} b_k c_k z^k \right\|_{C,\, \overline{K_1}} \leqslant |b_n| \rho^{-n} \left\| \sum_{k=0}^{n} c_k \rho^k z^k \right\|_{C,\, \overline{K_1}},$$

сферу радиуса $2\,|b_n^{-1}|\,\rho^n$.

Выбирая n так, что $\varepsilon < 4\,|b_n^{-1}|\,\rho^n$, и учитывая выпуклость множества $2\sigma_{n+1}^{-1}(\Phi_{n+1})$, получим, что $\xi \in 4\sigma_{n+1}^{-1}(\Phi_{n+1})$ и следовательно,

$$G_{n+1} \subset 4\sigma_{n+1}^{-1}(\Phi_{n+1}). \tag{16}$$

Из (15) и (16) окончательно получаем

$$\bigcup_{i=1}^{p} U_{\varepsilon/2,\, n+1}(x_i) \subset 4\sigma_{n+1}^{-1}(\Phi_{n+1}),$$

$$p\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2n+2} \mu(U_{n+1}) \leqslant 4^{2n+2} \mu\left[\sigma_{n+1}^{-1}(\Phi_{n+1})\right] =$$

$$= 4^{2n+2} \frac{(n+1)^{2n}}{(n!)^2} \mu(\Phi_{n+1}) \leqslant (4e)^{2n+2} \frac{\rho^{n(n+1)}}{|b_0 b_1 \ldots b_n|^2} \mu(U_{n+1}).$$

Отсюда

$$p \leqslant \left(\frac{8e}{\varepsilon}\right)^{2n+2} \frac{\rho^{n(n+1)}}{|b_0 b_1 \ldots b_n|^2}.$$

Если подчинить n условию $4\left|b_{n+1}^{-1}\right|\rho^{n+1} \leqslant \varepsilon$, то совокупность сфер $U_{5\varepsilon/4}(x_i)$ покроет $FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}$ ввиду теоремы 1 и (14):

$$FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho} \subset \bigcup_{i=1}^{p} U_{5\varepsilon/4}(x_i)$$

Поэтому

$$H_{5\varepsilon/4}\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}\right) \leqslant \log_2 p \leqslant \log_2\left[\left(\frac{8e}{\varepsilon}\right)^{2n+2} \frac{\rho^{n(n+1)}}{|b_0 b_1 \ldots b_n|^2}\right],$$

$$H_\varepsilon\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}\right) \leqslant \log_2\left[\left(\frac{10e}{\varepsilon}\right)^{2n+2} \frac{\rho^{n(n+1)}}{|b_0 b_1 \ldots b_n|^2}\right].$$

Теорема доказана.

Теорема 3′. *В условиях теоремы 2 для* ε*-энтропии* $H_\varepsilon\left(FH_{p,K_1}^{\overline{K}_\rho}\right)$ *справедлива оценка*

$$\sup_n \log_2\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n+2} \frac{\rho^{n(n+1)}}{|b_0 b_1 \ldots b_n|^2}\right] \leqslant H_\varepsilon\left(FH_{p,K_1}^{\overline{K}_\rho}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \log_2\left[\left(\frac{10e}{\varepsilon}\right)^{2n+2} \frac{\rho^{n(n+1)}}{|b_0 b_1 \ldots b_n|^2}\right],$$

где n *определяется из условия* $4\left|b_{n+1}^{-1}\right|\rho^{n+1} \leqslant \varepsilon < 4\left|b_n^{-1}\right|\rho^n$. Доказывается аналогично.

Заметим, что выполнения одного из условий — a, b или c теоремы 2 можно не требовать, утверждения теорем 3 и 3′ сохраняются при

$$\sup_n \int_0^{2\pi}\left|1 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} b_n^{-1} b_{n-k} e^{ikx}\right| dx < \infty.$$

Теоремы 3 и 3′ позволяют находить порядок, а во многих случаях и асимптотику ε-энтропии различных функциональных классов.

Рассмотрим пример 1. В этом случае из условия

$$\frac{4\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)}\rho^{n+1} \leqslant \varepsilon < \frac{4\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)}\rho^n$$

при $0 < \rho < 1$ следует, что

$$n = \frac{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}}{\log_2 \frac{1}{\rho}} - \alpha\frac{\log_2 \log_2 \frac{1}{\varepsilon}}{\log_2 \frac{1}{\rho}} + O(1)$$

и

$$H_\varepsilon\left(FA_{K_1}^{\overline{K}_\rho}\right) = \frac{\log_2^2 \frac{1}{\varepsilon}}{\log_2 \frac{1}{\rho}} - 2\alpha\frac{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}}{\log_2 \frac{1}{\rho}}\log_2\log_2\frac{1}{\varepsilon} + O\left(\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (17)$$

При $\rho = 1$ из неравенств $\frac{4\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)} \leqslant \varepsilon < \frac{4\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)}$ следует, что

$$n = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha} + O(1) \text{ и } H_\varepsilon = O\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}\right]. \tag{18}$$

В примере 2 из условия

$$4\beta^{(n+2)^\alpha}\rho^{n+1} \leqslant \varepsilon < 4\beta^{(n+1)^\alpha}\rho^n \quad (\rho < 1)$$

находим, что

$$n = \frac{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}}{\log_2 \frac{1}{\rho}} - \frac{\log_2^\alpha \frac{1}{\varepsilon}}{\log_2^{1+\alpha} \frac{1}{\rho}} \log_2 \frac{1}{\beta} + O\left(\log_2^{2\alpha-1} \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

и, пользуясь теоремой 3, получаем асимптотическое равенство для ε-энтропии рассматриваемого класса:

$$H_\varepsilon = \frac{\log_2^2 \frac{1}{\varepsilon}}{\log_2 \frac{1}{\rho}} - \frac{2\log_2 \frac{1}{\beta} \log_2^{1+\alpha} \frac{1}{\varepsilon}}{(1+\alpha)\log_2^{1+\alpha} \frac{1}{\rho}} + O\left(\log_2^{2\alpha} \frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{19}$$

Если $\rho = 1$, то из неравенств $4\beta^{(n+2)^\alpha} \leqslant \varepsilon < 4\beta^{(n+1)^\alpha}$ следует, что

$$H_\varepsilon = \frac{2\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}}{\log_2 \frac{1}{\beta}}\right)^{1/\alpha} \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + O\left[\log_2^{1/\alpha} \frac{1}{\varepsilon}\right]. \tag{20}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.—Л., «Наука», 1964. 170 с.
2. Тихомиров В. М. Одно замечание об n-мерных поперечниках множеств в банаховых пространствах.— УМН, 1960, т. 20, № 1, с. 227—230.
3. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений — УМН, 1960, т. 15, № 3, с. 81—120.
4. Белый В. И., Двейрин М. З. О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами.— «Метрические вопросы теории функций и отображений». 1971, № 4, с. 37—54.
5. Фрум-Кетков Р. Л. О метрическом поперечнике функциональных пространств — УМН, 1960, т. 20, № 4, с. 176—180.
6. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.—Л., ОГИЗ—Гостехиздат, 1947, с. 112.
7. Витушкин А. Г. Оценка сложности задачи табулирования. М., Физматгиз, 1959, с. 94.
8. Тихомиров В. М. Об ε-энтропии некоторых классов периодических функций.— УМН, 1962, т. 17, № 6, с. 163—169.
9. Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций.— «Мат. заметки», 1967, т. 1, № 2, с. 155—162.