УДК 517.512

Н. А. Давыдов

СУММИРОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ РЕГУЛЯРНЫМИ МАТРИЦАМИ

1. Настоящая заметка продолжает работу [1]. Чтобы предложения, доказываемые в п. 1—3 настоящей заметки, содержали в себе соответствующие предложения для преобразования

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k,$$

где $\|a_{nk}\|$ — регулярная положительная матрица, а также для регулярного положительного преобразования

$$t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S_k \quad (0 \leqslant x < \infty),$$

мы рассмотрим преобразование вида

$$t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S_k,$$

в котором функции $a_k(x)$ определены на множестве $E \subset [0; \infty)$, для которого $+\infty$ есть предельная точка, $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} a_k(x) = 0$ для каждого фиксированного $k = 0, 1, 2, \ldots, a_k(x) \geqslant 0$ для $x \in E$ и

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \to 1 \; (x \to +\infty, \; x \in E).$$

Здесь в п. 1—3 всюду будем пользоваться обозначениями: $\{S_k\}$ — ограниченная расходящаяся последовательность действительных чисел;

$$\underline{S} = \varliminf_{k \to \infty} S_k, \; \overline{S} = \varlimsup_{k \to \infty} S_k, \; \{S_{k'_\nu}\} \text{ и } \{S_{k''_\nu}\} —$$

— подпоследовательности последовательности $\{S_k\}$, множества всех частичных пределов которых содержатся соответственно в отрезках[1] $[\underline{S}; a]$ и $[b; \overline{S}]$, где $\underline{S} \leqslant a < b \leqslant \overline{S}$;

$$\underline{t} = \varliminf_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} t(x), \quad \overline{t} = \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} t(x).$$

Лемма 1. *Справедливы неравенства*

$$\underline{t} \leqslant \overline{S} - (\overline{S} - a) \varliminf_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k'_\nu}(x), \tag{1}$$

$$\overline{t} \geqslant \underline{S} + (b - \underline{S}) \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k''_\nu}(x). \tag{2}$$

Доказательство. Зададимся числом $\varepsilon > 0$. Тогда для $\nu > \nu''_0(\varepsilon)$ имеем

$$S_{k''_\nu} > b - \varepsilon; \quad S_{m''_\nu} > \underline{S} - \varepsilon,$$

где

$$\{m''_\nu\} = \{0, 1, 2, \ldots\} \diagdown \{k''_\nu\}.$$

---

[1] При $a = \underline{S}$ и $b = \overline{S}$ соответствующие отрезки вырождаются в точки.

В силу регулярности матрицы $\{a_k(x)\}$ получаем при $x \in E$, $x \to +\infty$:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_0''} a_{k_\nu''}(x) S_{k_\nu''} \to 0, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu_0''} a_{m_\nu''}(x) S_{m_\nu''} \to 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu''}(x) = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu''}(x) + o(1).$$

Пользуясь этим и положительностью матрицы $\{a_k(x)\}$, убеждаемся в том, что

$$t(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu''}(x) S_{k_\nu''} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu''}(x) S_{m_\nu''} =$$

$$= \sum_{\nu=\nu_0''+1}^{\infty} a_{k_\nu''} S_{k_\nu''} + \sum_{\nu=\nu_0''+1}^{\infty} a_{m_\nu''}(x) S_{m_\nu''} +$$

$$+ o(1) \geqslant (b-\varepsilon) \sum_{\nu=\gamma_0''+1}^{\infty} a_{k_\nu''}(x) + (\underline{S}-\varepsilon) \sum_{\nu=\nu_0''+1}^{\infty} a_{m_\nu''}(x) +$$

$$+ o(1) = (b-\varepsilon) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu''}(x) + (\underline{S}-\varepsilon)\left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu''}(x) + o(1)\right) =$$

$$= \underline{S} + (b-S) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu''}(x) - \varepsilon + o(1).$$

Отсюда

$$\overline{t} \geqslant \underline{S} + (b-\underline{S}) \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu''}(x) - \varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ из последнего неравенства получим неравенство (2).

Обозначив через

$$\{m_\nu'\} = \{0, 1, 2, \ldots\} \setminus \{k_\nu'\},$$

для $\nu > \nu_0'(\varepsilon)$ имеем

$$S_{k_\nu'} < a + \varepsilon, \quad S_{m_\nu'} < \overline{S} + \varepsilon.$$

В силу регулярности матрицы $\{a_k(x)\}$ получаем при $x \in E$, $x \to +\infty$:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_0} a_{k_\nu'}(x) S_{k_\nu'} \to 0, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu_0} a_{m_\nu'}(x) S_{m_\nu'} \to 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu'}(x) \quad 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu'}(x) + o(1).$$

Пользуясь этим и положительностью матрицы $\{a_k(x)\}$, убеждаемся в том, что

$$t(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k'_\nu}(x) S_{k'_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m'_\nu} S_{m'_\nu} = \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty}{}' a_{k'_\nu}(x) S_{k'_\nu} + \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty}{}' a_{m'_\nu}(x) S_{m'_\nu} +$$

$$+ o(1) \leqslant (a+\varepsilon) \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty}{}' a_{k'_\nu}(x) + (\overline{S}+\varepsilon) \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty}{}' a_{m'_\nu}(x) + o(1) =$$

$$= (a+\varepsilon) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k'_\nu}(x) + (\overline{S}+\varepsilon)\left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k'_\nu}(x)\right) +$$

$$+ o(1) = \overline{S} - (\overline{S} - a) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k'_\nu}(x) + \varepsilon + o(1).$$

Отсюда

$$\underline{t} \leqslant \overline{S} - (\overline{S} - a) \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k'_\nu}(x) + \varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ из последнего неравенства получаем неравенство (1). Лемма доказана.

2. Следующие теоремы 1—3 легко доказываются с помощью леммы 1.

Теорема 1. *Если*

$$\overline{S} - \underline{S} < (\overline{S} - a) \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k'_\nu}(x) + (b - \underline{S}) \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} \sum a_{k''_\nu}(x), \qquad (3)$$

то ограниченная действительная последовательность $\{s_k\}$ *не суммируется регулярной положительной дискретной или полунепрерывной матрицей* $\{a_k(x)\}$.

В самом деле, в силу леммы последовательность $\{S_k$ не суммируется матрицей $\{a_k(x)$, если

$$\overline{S} - (\overline{S} - a) \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k'_\nu}(x) < \underline{S} + (b - \underline{S}) \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k''_\nu}(x),$$

т. е. если справедливо неравенство (3).

Наибольший интерес представляет частный случай теоремы 1, когда $a = \underline{S}$ и $b = \overline{S}$. Именно справедлива

Теорема 2. *Ограниченная расходящаяся действительная последовательность* $\{S_k\}$ *не суммируется регулярной положительной дискретной или полунепрерывной матрицей* $\{a_k(x)$, *если*

$$\varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k^{(1)}_\nu}(x) + \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k^{(2)}_\nu}(x) > 1,$$

где

$$\lim_{\nu\to\infty} S_{k_\nu^{(1)}} = \underline{\lim}_{k\to\infty} S_k, \quad \lim_{\nu\to\infty} S_{k_\nu^{(2)}} = \overline{\lim}_{k\to\infty} S_k$$

Частными случаями теоремы являются первые части теорем 1 и 4 работы [1], утверждающие несуммируемость последовательности регулярной положительной дискретной или полунепрерывной матрицей $\{a_k(x)\}$ при условии

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu^{(1)}}(x) = a' \geqslant \frac{1}{2}, \quad \overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu^{(2)}}(x) = a'' \geqslant \frac{1}{2},$$

$$\max\{a', a''\} > \frac{1}{2}.$$

Следующая теорема позволяет судить о размере ядра функции

$$t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S_k, \quad x\in E.$$

Теорема 3. *Если*

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu'}(x) = \overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu''}(x) = 1, \tag{4}$$

то

$$\underline{t} \leqslant a < b \leqslant \overline{t}.$$

В частном случае, когда $a = \underline{S}$ и $b = \overline{S}$, из теоремы 3 получаем вторые части теорем 1 и 4 работы [1], утверждающие, что при условиях (4) ядро функции

$$t(x) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S_k$$

$(x\in E)$ совпадает с ядром последовательности $\{S_k\}$.

3. Теорема 2 легко переносится на ограниченные последовательности комплексных чисел. Именно справедлива

Теорема 4. *Ограниченная расходящаяся последовательность комплексных чисел $\{z_k\}$ не суммируется регулярной положительной дискретной или полунепрерывной матрицей $\{a_k(x)\}$, если*

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu^{(1)}}(x) + \overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu^{(2)}}(x) > 1^1,$$

[1] Для ограниченной последовательности $\{z_k\}$, имеющей только два различных частичных предела, это условие является не только достаточным, но (в силу теоремы 6 работы [1]) при условии $\{k_\nu^{(1)}\} \cup \{k_\nu^{(2)}\} = \{0, 1, 2\ldots\}$ и необходимым для того, чтобы последовательность $\{z_k\}$ не суммировалась регулярной положительной матрицей $\{a_k^{(x)}\}$, $x\in E$.

где

$$\lim_{\nu\to\infty} z_{k_\nu^{(1)}} = z^*, \quad \lim_{\nu\to\infty} z_{k_\nu^{(2)}} = z^{**}, \quad z^* \text{ и } z^{**}$$

— аффиксы концов диаметра множества всех частных пределов последовательности.

Доказательство. Пусть $z_k = S_k^1 + iS_k^{(2)}$, где $\{S_k^{(1)}\}$ и $\{S_k^{(2)}\}$ — последовательности действительных чисел. Диаметр множества всех частичных пределов последовательности $\{z_k\}$ можно считать параллельным действительной оси, так как в противном случае этого можно добиться умножением всех членов Z_k на постоянное число вида $e^{i\varphi}$. Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) z_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S_k^{(1)} + i \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S_k^{(2)}$$

и так как при выполнении условий теоремы 4 для последовательности $\{S_k^{(1)}\}$ выполнены все условия теоремы 2, то справедливость теоремы 4 вытекает из этой теоремы 2.

4. ***Лемма 2.*** *Пусть $A = \|a_{nk}\|$ — регулярная матрица и $\{p_i\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда среди чисел*

$$a^{\{p_i\}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{np_i}|$$

существует наименьшее, и справедливо равенство

$$\min_{\{p_i\}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{np_i}| = \underline{\lim_{k\to\infty}} \max_{n=1,2,\ldots} |a_{nk}|. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим:

$$d_k = \max_{n=1,2,\ldots} |a_{nk}|, \; d = \underline{\lim_{k\to\infty}} d_k, \; d_k = |a_{n_k k}|.$$

Для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{p_i\}$ имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{np_i}| \geqslant \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{n_{p_\nu} p_i}| \geqslant \overline{\lim_{\nu\to\infty}} |a_{n_{p_\nu} p_\nu}| \geqslant$$
$$\geqslant \underline{\lim_{k\to\infty}} \max_{n=1,2,\ldots} |a_{nk}|. \tag{6}$$

Лемма 2 будет доказана, если построим такую возрастающую последовательность натуральных чисел $\{p_i'\}$, для которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{np_i'}| \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}} \max_{n=1,2,\ldots} |a_{nk}|. \tag{7}$$

Возьмем подпоследовательность $d_{k_\nu} \to d \; (\nu \to \infty)$. Пользуясь регулярностью матрицы $A = \|a_{nk}\|$, построим две возрастающие последовательности натуральных чисел $\{n_i\}$ и $\{k_{\nu_i}\}$ такие, что

$$|a_{nk_1}| + \sum_{j=1}^{i-1} |a_{nk_{\nu_j}}| < \frac{1}{i} \text{ для всех } n \geqslant n_i \tag{8}$$

и

$$\sum_{j=k_{\nu_{i+1}}} |a_{nj}| < \frac{1}{i+1} \text{ для } n_i < n \leqslant n_{i+1} \; (i = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Используя (8) и (9), для $n_i < n \leqslant n_{i+1}$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_n k_{\nu_j}| = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{nk_{\nu_j}}| + |a_{nk_{\nu_j}}| + \sum_{j=i+1}^{\infty}{}' |a_{nk_{\nu_j}}| <$$

$$< \frac{1}{i} + |a_{nk_{\nu_i}}| + \frac{1}{i+1} < \frac{2}{i} + \max_{n=1,2,\ldots} |a_{nk_{\nu_i}}| = \frac{2}{i} + d_{k\nu_i} \to d \; (n \to \infty).$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{j \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{nk_{\nu_i}}| \leqslant d.$$

Таким образом, для возрастающей последовательности натуральных чисел

$$p_i' = k_{\nu_i} \; (i = 1, 2, \ldots)$$

справедливо неравенство (7), которое в силу (6) является равенством. Лемма доказана.

Следствием леммы 2 является

Теорема 5. *Регулярная матрица* $\|a_{nk}\|$ *суммирует некоторую расходящуюся последовательность из* 0 *и* 1, *если*

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} \max_{n=1,2,\ldots} |a_{nk}| = 0.$$

В самом деле, по лемме 2 существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{p_i'\}$ такая, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_n p_i'| = \underline{\lim}_{k \to \infty} \max_{n=1,2,\ldots} |a_{nk}| = 0$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n p_i' \to 0 \; (n \to \infty).$$

Взяв

$$S_k = \begin{cases} 1, \text{ если } k = p_i', \; (i = 1, 2, \ldots) \\ 0, \text{ если } k = m_i', \end{cases}$$

где

$$\{m_i'\} = \{0, 1, 2, \ldots\} \setminus \{p_i'\},$$

имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{np_i'} S_{p_i'} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{nm_i'} S_{m_i'} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Теорема доказана.

Теорема 5 обобщает нашу теорему 2 работы [3]. Из нее следует также теорема Агнью [2, с. 234].

Замечание. Лемма 2 позволяет сделать вывод о том, что теоремы 2 и 3 нашей работы [1] равносильны Равносильны будут и теорема 7 и следствие 1 той же работы [1].

5. Число $d(A) = \overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \max\limits_{n=1, 2, \ldots} |a_{nk}|$, по нашему мнению, заслуживает определенного внимания. Ряд фактов, относящихся к теории суммирования рядов с помощью матрицы $A = \|a_{nk}\|$, выражаются посредством этого числа. Действительно, справедливы следующие утверждения, содержащиеся в работе [1] и в настоящей заметке:

1) Если $d(A) = 0$, то регулярная матрица $A = \|a_{nk}\|$ суммирует некоторую расходящуюся последовательность из 0 и 1 и, значит, неравенство $d(A) > 0$ является необходимым условием для того, чтобы регулярная матрица $A = \|a_{nk}\|$ была неэффективна на множестве ограниченных последовательностей.

2) Если $d(A) > 0$, то регулярная положительная матрица $A = \|a_{nk}\|$ не суммирует ни одной неограниченной последовательности, все члены которой содержатся в угле раствора, меньше π

3) Если $d(A) > \frac{1}{2}$, то регулярная положительная матрица $A = \|a_{nk}\|$ не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности.

4) Если $d(A) = 1$, то ядро преобразованной с помощью регулярной положительной матрицы $A = \|a_{nk}\|$ ограниченной последовательности $\{z_k\}$ совпадает с ядром этой последовательности $\{z_k\}$.

5) Для любой ограниченной последовательности действительных чисел $\{S_k\}$ границы неопределенности преобразованной с помощью регулярной положительной матрицы $A = \|a_{nk}\|$ последовательности

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k \; (n = 1, 2, \ldots)$$

определяются неравенствами

$$\underline{t} \leqslant \overline{S} - (\overline{S} - \underline{S})\, d(A),$$

$$\overline{t} \geqslant \underline{S} + (\overline{S} - \underline{S})\, d(A).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов Н. А. Суммирование ограниченных последовательностей регулярными положительными матрицами. — «Мат. заметки», 1973, т. 13, № 2, с. 179—188.
2. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., «Наука», 1960. 112 с.
3. Давыдов Н. А. О неэффективности регулярных матриц. — УМН, т. XX, вып. 6 (126), 1965, с. 78—80.