

## Дифракция плоской акустической волны на сфере с круговым отверстием

В.А. Резуненко

*Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, Украина*

Найдена и обращена главная часть матричного оператора задачи дифракции плоской акустической волны на сфере с круговым отверстием. Регуляризация задачи базируется на использовании интегрального преобразования типа Абеля. В результате получена эффективно разрешимая бесконечная система алгебраических уравнений Фредгольма II рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве  $l_2$ . Рассмотрены некоторые варианты постановки и обобщения задачи.

*2000 Mathematics Subject Classification* 65N12, 35A25, 78A45.

### 1. Введение.

Известно, что в литературе по математической физике, по теории дифракции имеется сравнительно мало работ, посвященных решению задач акустики на сфере с круговым отверстием [1]–[4]. Однако, актуальность таких задач следует, в частности, из того, что замкнутая сфера и сфера с круговым отверстием применяется в качестве хорошего прототипа многих устройств: отражателей, резонаторов, узлов волноводов, преобразователей акустических колебаний в электрические. Многочисленные применения сферических поверхностей стимулируют развитие методов решения прямых и обратных задач математической физики, теории дифракции и вычислительной электродинамики [5]–[9].

В данной работе применяется и уточняется метод регуляризации для решения задачи дифракции плоской акустической волны на сфере с круговым отверстием произвольных геометрических параметров. В результате регуляризации задача отыскания акустического потенциала скоростей в трехмерном пространстве сведена сначала к решению интегрального уравнения типа Абеля I рода для вспомогательной функции, а затем к решению бесконечной системы алгебраических уравнений Фредгольма II рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве  $l_2$ . В работе показана, в частности, эффективная разрешимость полученной системы алгебраических уравнений, в частности показано, что скорость сходимости метода редукции пропорциональна  $N^{-3/2}$ , где  $N$  порядок редукции системы. Рассмотрены некоторые варианты постановки и обобщения задачи.



## 2. Постановка задачи.

Пусть центр сферы с круговым отверстием (центр сферического кругового сегмента) размещён в начале декартовой и сферической систем координат, у которых совмещена полярная ось  $OZ$ . Полагаем  $a_0$  - радиус сферического сегмента,  $\theta_0$  - полярный угол, измеряющий сегмент (на сегменте  $0 \leq \theta < \theta_0$ ). Плоскость отверстия в сфере перпендикулярна оси  $OZ$ . Пусть плоская акустическая волна распространяется из бесконечности в  $R^3$  вдоль оси  $OZ$ . Полагаем сферический сегмент тонким и жёстким, а окружающую его материальную среду - вакуумом. Требуется найти дифракционные вторичные поля и полные акустические поля. Зависимость полей от времени полагаем гармонической вида  $\exp(-i\omega t)$  ( $\omega$  - круговая частота). Для рассматриваемых полей полные потенциалы скоростей  $U$  должны удовлетворять уравнению Гельмгольца  $\Delta U + k^2 U = 0$ , граничным условиям, например, частные производные по переменной  $r$  должны быть непрерывны на всей поверхности сегмента и на отверстии при  $r = a_0, 0 \leq \theta \leq \pi$ , условию конечности интеграла акустической энергии  $W$  в любой ограниченной области  $V$  пространства  $R^3$ :  $W = \int_V |U|^2 dV < \infty$  и условию излучения на бесконечности. В такой постановке задача Неймана для уравнения Гельмгольца имеет единственное решение [10].

## 3. Парные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра.

Плоскую акустическую волну зададим потенциалом скоростей  $U_0$ , который в сферической системе координат представим так:

$$U_0 = \sum_{n=0}^{\infty} F_n j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad 0 \leq r < \infty, \quad (1)$$

где  $j_n(kr)$  - сферические функции Бесселя (в обозначениях Дебая) первого рода порядка  $n$  аргумента  $kr$ , где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  - длина волны,  $P_n(\cos \theta)$  - полиномы Лежандра первого рода степени  $n$  порядка 0 аргумента  $\cos \theta$ . В (1) коэффициенты  $F_n$  характеризуют направление распространения плоской волны из верхнего  $z > 0$  или нижнего  $z < 0$  полупространства в  $R^3$ :

$$F_n = (2n+1)F_{n,0}; \quad F_{n,0} = i^n, z > 0; \quad F_{n,0} = (-i)^n, z < 0. \quad (2)$$

Пусть в  $R^3$  выделены две области, для которых соответственно  $0 \leq r < a_0$ ,  $r > a_0$  и  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Вторичные потенциалы в этих областях представим рядами Фурье, аналогичными (1):

$$U_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n F_n j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad 0 \leq r < a_0, \quad (3)$$

$$U_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n F_n h_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad a_0 < r < \infty. \quad (4)$$



Отметим, что в (4) используются сферические функции Ханкеля  $h_n(kr)$  первого рода порядка  $n$ . Из граничных условий для отыскания коэффициентов  $B_n, n = 0, 1, 2, \dots$  ряда (4) устанавливаем парные сумматорные функциональные уравнения по полиномам Лежандра:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{B_n F_n[h_n(ka_0)]' + F_n[j_n(ka_0)]'\} P_n(\cos \theta), \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n F_n \frac{1}{[j_n(ka_0)]'} P_n(\cos \theta), \quad \theta_0 < \theta \leq \pi, \quad (6)$$

в которых штрих  $\{'\}$ , как обычно, обозначает производную по аргументу  $ka_0$ . Системы вида (5), (6) встречаются во многих прикладных задачах на сферических и иных поверхностях. Каждый тип уравнений отличается видом коэффициентов при полиномах Лежандра и скоростью роста (или убывания) коэффициентов при  $n \rightarrow \infty$  на частичных интервалах основного интервала. Так, в [7]–[9] применяется метод регуляризации матричного оператора задачи дифракции с помощью интегрального преобразования типа Абеля, в [5]–[7] применяется метод задачи Римана – Гильберта, в [11], аналог косинус-преобразования Фурье на конечном отрезке, в [12] – метод интегрального преобразования Канторовича – Лебедева. Общего эффективного метода решения таких уравнений пока не найдено. В данной работе применяется и уточняется метод регуляризации парных сумматорных уравнений [5]–[9]. В результате получаем систему алгебраических уравнений Фредгольма II рода с компактным оператором в  $l_2$ .

#### 4. Интегральные уравнения первого рода.

Рассмотрим вспомогательную систему функциональных уравнений относительно искомых коэффициентов  $D_n$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) D_n P_n(\cos \theta) = R1(\theta), \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (7)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n P_n(\cos \theta) = S1(\theta), \quad \theta_0 < \theta \leq \pi, \quad (8)$$

где функции  $R1(\theta), S1(\theta), \theta \in [0, \pi]$  полагаем заданными, допускающими разложения вида левых частей в (7), (8):

$$R1(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) R_n P_n(\cos \theta), \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (9)$$

$$S1(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n P_n(\cos \theta), \quad \theta_0 < \theta \leq \pi. \quad (10)$$



Полагаем, что искомые коэффициенты  $D_n$  и коэффициенты Фурье  $R_n, S_n, n \geq 0$  функций  $R_1(\theta), S_1(\theta)$  в уравнениях (7), (8) принадлежат пространству  $l_2$  с некоторым весом, так что ряды в (7), (8) есть ряды Фурье функций из  $L_2[0, \pi]$ . Поиск коэффициентов  $D_n$  сведём к решению интегральных уравнений типа Абеля и получим новую систему функциональных уравнений по элементарным функциям. Для этого преобразуем сначала уравнение (7). Используя связь между полиномами Лежандра и их производными

$$(2n+1)P_n(x) = \frac{d}{dx}P_{n+1}(x) - \frac{d}{dx}P_{n-1}(x), \quad (11)$$

заменяем  $(2n+1)P_n(\cos \theta)$  соответствующей разностью (11). Затем, используя принадлежность коэффициентов  $D_n$  и коэффициентов  $R_n$  пространству  $l_2$ , проинтегрируем уравнение (7) почленно. Возникающая константа интегрирования равна нулю, так как для  $\theta = 0$  при  $n \geq 0$  и при  $n = -1$  все полиномы  $P_n(\cos(0))$  равны 1. Заметим, если интегрировать по  $\theta$  уравнение (8), то константа интегрирования не обращается в ноль и равна коэффициенту  $D_0$ , так как, в частности для  $\theta = \pi$  при  $n \geq 0$  все  $P_n(\cos(\pi))$  равны  $(-1)^n$ , а при  $n = -1$   $P_n(\cos(\pi)) = 1$ . Факт отличия константы интегрирования от нуля приводит к усложнению алгоритма решения системы уравнений (7), (8) [10].

Теперь, в уравнение (8) и в проинтегрированное уравнение (7), подставим вместо полиномов Лежандра интегральные представления Мелера - Дирихле:

$$\pi/\sqrt{2}P_n(\cos \theta) = \int_0^\theta (\cos y - \cos \theta)^{(-1/2)} \cos[(n + \frac{1}{2})y] dy. \quad (12)$$

$$\pi/\sqrt{2}P_n(\cos \theta) = \int_\theta^\pi (\cos \theta - \cos y)^{(-1/2)} \sin[(n + \frac{1}{2})y] dy. \quad (13)$$

В уравнении (8) и в проинтегрированном уравнении (7) поменяем порядки суммирования и интегрирования, так как коэффициенты  $D_n, R_n \in l_2$ . Этим получаем интегральные уравнения Вольтерра первого рода типа Абеля вида:

$$\int_0^\theta F(y)(\cos y - \cos \theta)^{(-1/2)} dy = 0, \quad \int_\theta^\pi G(y)(\cos \theta - \cos y)^{(-1/2)} dy = 0. \quad (14)$$

Здесь искомые функции  $F(y), G(y)$  принадлежат пространству  $L_2[0, \pi]$ . Спектр интегральных операторов Абеля (14) имеет единственную предельную точку  $\{0\}$ . Решение уравнений (14) существует и единственно [14]. Решение уравнений [14] строится применением композиции с ядром вида  $(\cos t - \cos z)^{(-1/2)}$ ,  $t, z \in [0, \pi]$ . В результате получаем однородные сумматорные уравнения по тригонометрическим функциям на взаимно дополняющих частях  $[0, \theta_0)$  и  $(\theta, \pi]$  сегмента  $[0, \pi]$ , которые запишем так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin[(n + \frac{1}{2})y] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} R_1 n \sin[(n + \frac{1}{2})y], & y \in [0, \theta_0), \\ \sum_{n=0}^{\infty} S_1 n \sin[(n + \frac{1}{2})y], & y \in (\theta_0, \pi]. \end{cases} \quad (15)$$



### 5. Системы алгебраических уравнений второго рода. Выводы.

Выполним переход от функциональных уравнений (5), (6) к функциональным уравнениям (7), (8), а затем к уравнению вида (15) — рядам по элементарным функциям. Для этого введём в (5), (6) обозначения

$$D_n^{(1)} = \frac{B_n F_n}{[j_n(ka_0)]'}, \quad \varepsilon_n = 1 + 4i(ka_0)^3 \frac{[j_n(ka_0)]' [h_n(ka_0)]'}{(2n+1)}, \quad (16)$$

$$R1_n^{(1)} = D_n^{(1)} \varepsilon_n + i4(ka_0)^3 \frac{[j_n(ka_0)]'}{(2n+1)}, \quad S1_n = 0. \quad (17)$$

При этом отметим, что введение в (5), (6) параметра малости  $\varepsilon_n$  (16) выполняем разбиение матричного оператора  $A$  в функциональных уравнениях (5), (6) на две части  $A = A1 + A2$ , такие что  $A1$  имеет обратный  $A1^{-1}$ , а произведение операторов  $A1^{-1}A2$  является вполне непрерывным оператором в  $L_2[0, \pi]$ . Обратный оператор к оператору  $A1$  строим методом, близким к методу задачи Римана - Гильберта. При этом используем полноту и ортогональность функций  $\sin[(n+1/2)y]$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  в  $L_2[0, \pi]$ .

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений второго рода

$$D_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(1)} \varepsilon_m \beta_{n,m}^{(0)} + 4i(ka_0)^3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_m [j_m(ka_0)]'}{2m+1} \beta_{n,m}^{(0)}, \quad (18)$$

в которой

$$\beta_{n,m}^{(0)} = \pi^{-1} \left\{ \frac{\sin(n-m)\theta_0}{n-m} - \frac{\sin(n+m+1)\theta_0}{n+m+1} \right\}, \quad n \neq m, \quad (19)$$

$$\beta_{n,n}^{(0)} = \pi^{-1} \{ \theta_0 - \sin(2n+1)\theta_0 / (2n+1) \}, |\beta_{n,m}^{(0)}| \leq \theta_0, n = m = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

В системе (18) (СЛАУ-11) матричный оператор вполне непрерывен в  $l_2$  и правый столбец принадлежит  $l_2$ . Это обеспечивается тем, что для величин  $\beta_{n,m}^{(0)}$  (19) выполняются оценки сверху (20), а параметр малости  $\varepsilon_n$  (16) имеет асимптотическое представление

$$\varepsilon_n = K_0(n+1/2)^{-2} + O(n^{-4}), |K_0| < \infty, n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Система (18) имеет единственное решение в  $l_2$ . Отметим, что спектр матричного оператора этой системы не содержит единицу. Для произвольных параметров  $ka_0$  и  $\theta_0$  система разрешима численно, например, методом редукции. Заметим, что зависимость матричных элементов системы (18) от параметра  $\theta_0$  по строкам и столбцам симметрична, так как  $\beta_{n,m} = \beta_{m,n}$ .

Зависимость матричных элементов от параметра  $ka_0$  симметризуется асимптотически при  $n \rightarrow \infty$  линейной подстановкой  $D_n^{(2)} = D_n^{(1)} / (n+1/2)$ . Элементы правого столбца системы (18) есть быстро и равномерно сходящиеся ряды по  $\theta_0$  на  $[0, \pi]$ . Поэтому скорость сходимости метода редукции для системы (18) пропорциональна  $N^{-3/2}$ , где  $N$  - порядок редукции,  $N \rightarrow \infty$



Система разрешима и аналитически - методом последовательных приближений для малых углов  $\theta_0$ , близких к нулю, и больших углов, близких к  $\pi$ . Так, для случая больших углов, когда  $(\pi - \theta_0) \ll 1$ , резонансные вынужденные акустические колебания сферы с отверстием описываются приближённо функциями  $j_n(kr)P_n(\cos \theta)$ . Для замкнутой сферы приведенные резонансные частоты  $x = ka_0$ , как известно, есть решения уравнений  $[j_n(x)]' = 0, n = 0, 1, 2, \dots$  [16, 17], а отклонения частот вынужденных колебаний незамкнутой сферы от частот замкнутой сферы пропорциональны третьей степени величины отверстия в сфере  $O((\pi - \theta_0)^3)$ . Отметим факт быстрого убывания параметра малости  $\varepsilon_n, n \rightarrow \infty$  (21), входящего в систему функциональных уравнений (15), в которых в правой части следует использовать коэффициент  $R1_n^1$  (17), содержащий  $\varepsilon_n$ . Это факт позволяет выполнить выделение и обращение следующей главной части системы функциональных уравнений (7), (8), эквивалентной (18) и получить новую СЛАУ-11, у которой убывание матричных элементов по строке будет быстрее, пропорционально  $n^{-4}, n \rightarrow \infty$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. - М.: -Мир, - 1976. - 542 с.
2. Thomson D.P. Diffraction by a spherical cap. // Proc. Cambridge Philos. Soc. - 1963. - Т. 59 - С. 197-209.
3. Савин В.Г., Моргун П.О. Преобразование акустических импульсов в электрические сферической пьезокерамической оболочкой. // Электроника и связь. - 2006. - N. 6. - С. 36-42.
4. Морс Ф.М. и Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.2. -М.: ИЛ. -1960. -493 с.
5. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопапов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. // Журн. техн. физ. - 1962. - Т. 32,4. - С. 381-394.
6. Шестопапов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. - Харьков: Изд. ХГУ, - 1973. - 288 с.
7. Шестопапов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. - Харьков: Основа, - 1997. - 284 с.
8. Свищев Ю.В., Тучкин Ю.А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах. // ДАН УССР, сер. А. - 1987. - Т. 12. - с. 56-60.



9. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопалов В.П. Излучение волн сферой с круговым отверстием. //Журн. вычисл. матем.и матем. физ.- 1977. - Т.17,2. С. 394-406.
10. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. - М.: Мир, - 1987. - 312 с.
11. Резуненко В.А. Электростатическое поле сферического сегмента и секционированного закругления конуса.//Вісник ХНУ. "Математика, прикладна математика і механіка". Харків, ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2007, № 57, випуск 580, с.114-123.
12. Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т. О симметричном облучении конечного конуса.// Радиофизика и электроника. -2000. -Т.35.4. -С.29-37.
13. Виноградов С.С. Мягкая сферическая "шапка" в поле плоской звуковой волны. Журн. вычисл. матем.и матем. физ.- 1978. - Т.18,5. С. 1320-1324.
14. Садовничий В.А. Теория операторов.- М.: Высшая школа, - 1999. - 368 с.
15. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. -Киев: Наукова Думка, - 1977. - 362 с.
16. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. -М.:Гостехиздат - 1957. -251 с. (English translation: Kevin B.Ya. Distribution of zeros of entier functions. AMS. R.I. -1980. 680p.)
17. Справочник по специальным функциям.Под ред. Абрамовиц М., Стиган И. -М.: ИЛ. -1979. -790 с.

Статья получена: 10.04.2009; окончательный вариант: 21.04.2009;  
принята: 27.04.2009.



## Редукция аксиом линейного пространства

R. Leśniewicz

*Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki,  
Wielkopolska str., 15, Institute of Mathematics, Szczecin, Poland*

Предлагается определение линейного (векторного) пространства на основе только 4 аксиом.

*2000 Mathematics Subject Classification* 15A03.

Понятие линейного пространства, называемого также векторным пространством, хорошо известно более ста лет. С определением этого понятия современные студенты знакомятся на лекциях по математике уже на первом году обучения как математических, так и технических специальностей.

Определение линейного пространства данное на лекциях и в учебниках содержит 7 или 8 условий, которые должны выполняться для этого пространства, так называемых аксиом. Не буду их приводить, поскольку они хорошо известны.

Много лет назад профессор Збигнев Семадени предложил мне задачу уменьшения количества аксиом в определении линейного пространства.

Теперь я могу представить определение этого пространства, содержащего только четыре аксиомы. Очевидно, что замена ранее употребляемых определений моим определением, предложенным ниже, не изменит сути понятия линейного пространства. Мое определение является некоторой дидактической любопытной подробностью. Вот это определение:

*Линейным (векторным) пространством над полем  $K$ , или коротко линейным пространством, назовем не пустое множество  $X$ , в котором определены две операции: сложение элементов, состоящее в том, что каждой паре элементов  $x, y \in X$  поставлен в соответствие элемент множества  $X$ , называемый их суммой и обозначаемый через  $x + y$ ; и умножение элементов на числа, состоящее в том, что каждому числу  $\alpha \in K$  и каждому элементу  $x \in X$  поставлен в соответствие элемент множества  $X$ , называемый их произведением и обозначаемый через  $\alpha x$ , а также для произвольных элементов  $x, y, z \in X$  и*



произвольных чисел  $\alpha, \beta \in K$  выполняются следующие условия (аксиомы):

$$(L1) \quad (x + y) + z = (z + y) + x;$$

$$(L2) \quad (\alpha + \beta)(x + y) = (\alpha x + \alpha y) + (\beta x + \beta y);$$

$$(L3) \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$$

$$(L4) \quad x = 1x + 0y.$$

Элементы множества  $X$  называются векторами. Условия  $(L2)$ ,  $(L3)$  записаны согласно общеизвестным требованиям уменьшения количества скобок, а умножение элементов на числа имеет приоритет в отношении сложения элементов.

Эта система аксиом содержит закон для сложения векторов  $(L1)$ , закон раздельности операций  $(L2)$ , закон ассоциативности для умножения векторов на числа  $(L3)$ , закон  $(L4)$ , который назовем стартовым законом.

Читатель легко заметит, что приведенные условия выполняются для известного ему определения линейного пространства. Требуется лишь проверить, что в линейном пространстве, определенном аксиомами  $(L1)-(L4)$ , будут справедливы все известные аксиомы.

**Утверждение 1.** Для произвольного элемента  $x$  линейного пространства  $X$  справедливо равенство

$$1x = x.$$

**Доказательство.** Подставим в  $(L4)$  вместо  $x$  произведение  $1x$  и на основании  $(L3)$  получим

$$1x = 1(1x) + 0y = (1 \cdot 1)x + 0y = 1x + 0y = x.$$

Далее из не пустого множества  $X$  выбираем элемент, обозначим его через  $u$ . Определим в линейном пространстве  $X$  нулевой вектор или коротко ноль, который обозначим через  $\Theta$ , положив  $\Theta := 0u$ .

**Утверждение 2.** Для произвольного элемента  $x$  линейного пространства  $X$  справедливо равенство

$$\Theta = 0x.$$

**Доказательство.** Положим в  $(L4)$  вместо  $x$  произведение  $0x$ , а вместо  $y$  подставим  $u$ . Тогда на основании  $(L3)$  имеем

$$0x = 1(0x) + 0u = (1 \cdot 0)x + 0u = 0x + 0u. \quad (1)$$

Меняя местами  $x$  и  $u$ , получаем

$$0u = 0u + 0x. \quad (2)$$



Подставляя  $u$  вместо  $x$  в (1) или (2), также имеем

$$0u = 0u + 0u. \quad (3)$$

Теперь, используя последовательно (1), (1), (L1), (3), (2), получаем

$$0x = 0x + 0u = (0x + 0u) + 0u = (0u + 0u) + 0x = 0u + 0x = 0u = \Theta.$$

Принимая во внимание результаты утверждений 1 и 2, из (L4) получаем

**Утверждение 3.** Для произвольного элемента  $x$  линейного пространства  $X$  справедливо равенство

$$x = x + \Theta.$$

Теперь можем установить

**Утверждение 4.** Для произвольных элементов  $x, y$  линейного пространства  $X$  справедливо равенство

$$x + y = y + x,$$

т.е. коммутативность операции сложения.

**Доказательство.** В (L1) вместо  $y$  положим  $\Theta$  и вместо  $z$  положим  $y$ , тогда имеем

$$(x + \Theta) + y = (y + \Theta) + x,$$

откуда на основании утверждения 3 получаем доказываемое равенство.

На основании этого утверждения легко получаем из (L1)

**Утверждение 5.** Для произвольных элементов  $x, y, z$ , линейного пространства  $X$  справедливо равенство

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

то есть ассоциативность сложения.

Далее установим

**Утверждение 6.** Для произвольных элементов  $x, y$  линейного пространства  $X$  и произвольного числа  $\alpha \in K$  справедливо равенство

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

**Доказательство.** На основании (L2), а также утверждений 2 и 3 получаем

$$\begin{aligned} \alpha(x + y) &= (\alpha + 0)(x + y) = (\alpha x + \alpha y) + (0x + 0y) = (\alpha x + \alpha y) + (\Theta + \Theta) = \\ &= (\alpha x + \alpha y) + \Theta = \alpha x + \alpha y. \end{aligned}$$



Справедливо также

**Утверждение 7.** Для произвольного элемента  $x$  линейного пространства  $X$  и произвольных чисел  $\alpha, \beta \in K$  справедливо равенство

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

**Доказательство.** Используя последовательно (L4), (L2), (L3) и утверждение 3, получаем

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)x &= (\alpha + \beta)(1x + 0x) = (\alpha(1x) + \alpha(0x)) + (\beta(1x) + \beta(0x)) = \\ &= ((\alpha \cdot 1)x + (\alpha \cdot 0)x) + ((\beta \cdot 1)x + (\beta \cdot 0)x) = (\alpha x + 0x) + (\beta x + 0x) = \\ &= (\alpha x + \Theta) + (\beta x + \Theta) = \alpha x + \beta x. \end{aligned}$$

Продолжая, определяем противоположный элемент к элементу  $x \in X$  равенством  $-x := (-1)x$ . Итак получаем

**Утверждение 8.** Для произвольного элемента  $x$  линейного пространства  $X$  справедливы равенства

$$-(-x) = x, \quad x + (-x) = \Theta.$$

**Доказательство.** Первое равенство получаем на основании (L3) и утверждения 1:

$$-(-x) = (-1)((-1)x) = ((-1)(-1))x = 1x = x,$$

а второе — на основании последовательного применения утверждений 1, 7 и 2:

$$x + (-x) = 1x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = \Theta.$$

В заключение установим

**Утверждение 9.** Для произвольных элементов  $x, y, z$  линейного пространства  $X$  справедлива импликация

$$\text{если } x + y = y + z, \quad \text{то } x = y.$$

**Доказательство.** Пусть  $x + z = y + z$ , тогда имеем также равенство

$$(x + z) + (-z) = (y + z) + (-z).$$

На основании утверждений 3, 8, 5 следует, что

$$\begin{aligned} x &= x + \Theta = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) = \\ &= y + (z + (-z)) = y + \Theta = y. \end{aligned}$$



Полагаю, что выше приведенные утверждения полностью удовлетворяют как читателей, знающих определение линейного пространства на основе 7 аксиом, так и читателей, знающих определение этого пространства на основе 8 аксиом.

Статья получена: 11.02.2009; окончательный вариант: 13.04.2009; принята: 16.04.2009.



## Системы с нецелым числом степеней свободы

В. П. Трегубов

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация

Представлены результаты исследования особенностей механических систем с нецелым числом степеней свободы. Установлено, что такие системы, в отличие от систем с традиционными упруговязкими свойствами, при любых значениях коэффициента вязкого трения имеют максимум амплитудно-частотной характеристики, а при обращении этих коэффициентов в бесконечность имеют дополнительные резонансные частоты.

*2000 Mathematics Subject Classification* 92C10.

### 1. Введение.

Термин "нецелое число степеней свободы" появился в первой половине XX века. В выпущенной в 1937 году книге А. А. Андропова и С. Э. Хайкина "Теория колебаний" были описаны линейные системы с  $\frac{1}{2}$  степени свободы. Одна из них рассматривалась как вырождение линейного осциллятора с малой массой, другая — как электрический контур с малой индуктивностью. В обоих случаях поведение системы описывалось обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. В связи с этим, здесь и позднее понятие нецелого числа степеней свободы связывалось с порядком уравнения (или системы уравнений), описывающего поведение системы. К сожалению, и в указанном первом издании, и в последующих изданиях (уже в соавторстве с А.А.Виттом) [1] обсуждение этих систем ограничилось особенностями задания начальных данных.

В 1964 году вышло первое издание книги Я. Г. Пановко и И. И. Губановой "Устойчивость и колебания упругих систем" [2]. В ней при изложении теории колебаний линейных систем были рассмотрены и системы с нецелым числом степеней свободы, в том числе системы с полутора степенями свободы, движение которых описывается дифференциальным уравнением третьего порядка. Эти системы по-прежнему рассматривались как вырождение систем с конечным числом степеней свободы при пренебрежимо малом значении одной из масс.



Однако существуют два класса систем, при описании которых мы приходим к уравнениям или системам уравнениям нечетного порядка, что и считается часто признаком нецелого числа степеней свободы. К первому классу относятся некоторые электромеханические, биомеханические и другие не чисто механические системы, в которых приходится учитывать процессы, описываемые уравнения первого порядка. Примером может служить работа [3], в которой поведение вибратора шлейфного осциллографа описывается уравнением третьего порядка. К другому классу относятся чисто механические системы, содержащие в своей структуре устройства или материалы, силовая характеристика которых включает не только силу, деформацию и скорость деформации, но и скорость изменения силы. Примеры таких систем и исследование некоторых их особенностей приводятся ниже.

## 2. Системы с полутора степенями свободы.

Мы будем рассматривать только механические системы с сосредоточенными параметрами цепной структуры. Для систем с целым числом степеней свободы порядок соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, равен  $2n$ , где  $n$  — число степеней свободы. Для механической системы цепной структуры, в которой силы, развиваемые деформируемыми элементами, являются линейными функциями смещения и скорости, система уравнений имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n (a_{ij}\ddot{x}_i + b_{ij}\dot{x}_i + c_{ij}x_i) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1)$$

В случае, если развиваемое усилие в деформируемом элементе зависит не только от деформации и скорости изменения деформации, но также и от скорости изменения самой силы, то эта зависимость в простейшем случае имеет вид:

$$\alpha \dot{F} + \beta F = -b\dot{x} - cx. \quad (2)$$

Такие зависимости были установлены, в частности, при исследовании механических свойств межпозвоночных дисков [4], стенки кровеносного сосуда [5] и некоторых электромеханических систем. В частности, соотношению (2) удовлетворяет сила, развиваемая комбинацией из трёх элементов, изображенной на рис.1 и являющейся одной из обобщенных реологических моделей.

В этом случае выражение (2) примет следующий конкретный вид:

$$\frac{b}{c_2} \dot{F} + \frac{c_1 + c_2}{c_2} F = -b\dot{x} - c_1 x. \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение движения массы  $m$  под действием этой силы будет иметь третий порядок, а именно:

$$a\ddot{\ddot{x}} + d\ddot{x} + b\dot{x} + c_1 x = 0, \quad (4)$$

а в случае кинематического возбуждения основания  $y = A_0 \sin(\omega t)$ :

$$a\ddot{\ddot{x}} + d\ddot{x} + b\dot{x} + c_1 x = b\dot{y} + c_1 y, \quad (4')$$



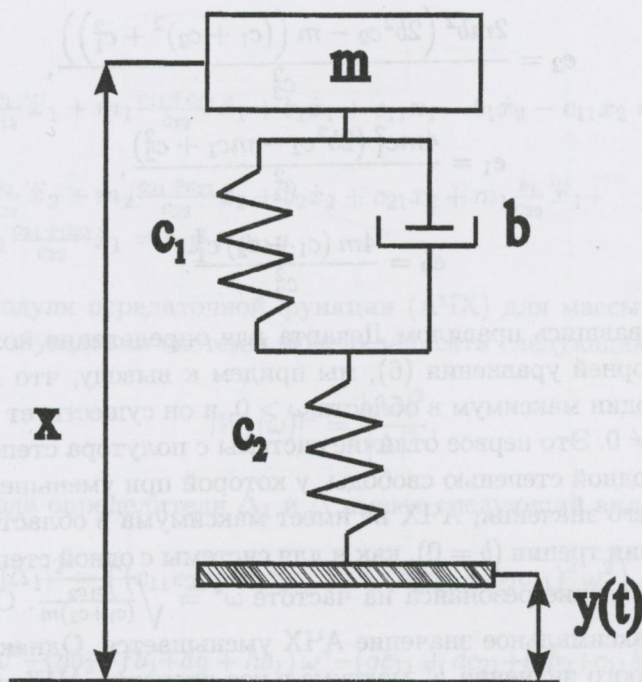


Рис. 1: Система с полутора степенями свободы

В уравнениях (4) и (4') коэффициенты  $a$  и  $b$  задаются выражениями [1]:

$$a = m \frac{b}{c_2}, d = m \frac{c_1 + c_2}{c_2}.$$

К уравнению, аналогичному уравнению (4'), приплы также авторы работы [3] при исследовании свойств вибратора шлейфного осциллографа.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) системы, изображенной на рис.1, может быть записана следующим образом [6]:

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{b^2\omega^2 + c_1^2}{a^2\omega^6 + (d^2 - 2ab)\omega^4 + (b^2 - 2c_1d)\omega^2 + c_1^2}}, \quad (5)$$

где  $H(\omega) = \frac{A(\omega)}{A_0}$ .

Записав производную от квадрата АЧХ убедимся, что наличие экстремумов определяется бикубическим уравнением:

$$e_3\omega^6 + e_2\omega^4 + e_1\omega^2 + e_0 = 0, \quad (6)$$

где

$$e_3 = \frac{-4m^2b^4}{c_2^2},$$



$$e_2 = \frac{2mb^2 (2b^2c_2 - m((c_1 + c_2)^2 + c_1^2))}{c_2^2},$$

$$e_1 = \frac{4mc_1^2 (2b^2c_2 - mc_1 + c_2^2)}{c_2^2},$$

$$e_0 = \frac{4m(c_1 + c_2)c_1^3}{c_2^2}.$$

Воспользовавшись правилом Декарта для определения количества положительных корней уравнения (6), мы приходим к выводу, что АЧХ такой системы имеет один максимум в области  $\omega > 0$ , и он существует всегда, то есть при любых  $b \neq 0$ . Это первое отличие системы с полутора степенями свободы от системы с одной степенью свободы, у которой при уменьшении  $b$ , начиная с некоторого его значения, АЧХ не имеет максимума в области  $\omega > 0$ .

В отсутствие трения ( $b = 0$ ), как и для системы с одной степенью свободы, наблюдается явление резонанса на частоте  $\omega^* = \sqrt{\frac{c_1c_2}{(c_1+c_2)m}}$ . С ростом коэффициента  $b$  максимальное значение АЧХ уменьшается. Однако после достижения некоторого значения  $b^*$  максимальное значение АЧХ снова начинает расти и при  $b = \infty$  обращается в бесконечность, теперь уже при  $\omega^{**} = \sqrt{\frac{c_2}{m}}$  как это показано на рис.2.

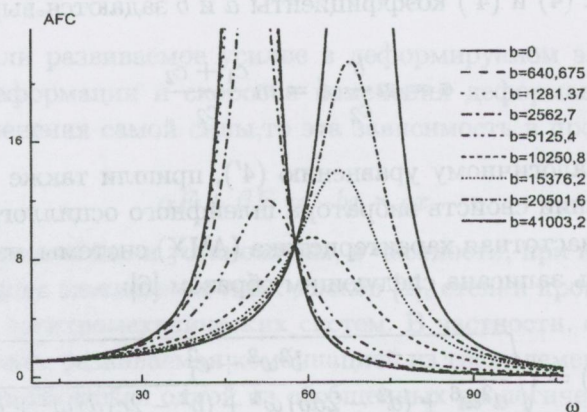


Рис. 2: АЧХ системы с полутора степенями свободы

Таким образом, система с полутора степенями свободы имеет две резонансные частоты: при  $b = 0$  и при  $b = \infty$ .

Двухмассовые и многомассовые системы.

Далее было исследовано поведение АЧХ двухмассовой системы, построенной по аналогичному принципу (рис.3). Движение этой механической системы описывается системой двух дифференциальных уравнения третьего



порядка:

$$\begin{cases} m_1 \frac{b_1}{c_{12}} \ddot{x}_1 + m_1 \frac{c_{11}+c_{12}}{c_{12}} \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + c_{11}x_1 - b_1 \dot{x}_2 - c_{11}x_2 = 0, \\ m_2 \frac{b_2}{c_{22}} \ddot{x}_2 + m_2 \frac{c_{21}+c_{22}}{c_{22}} \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + c_{21}x_2 + m_1 \frac{b_1}{c_{22}} \ddot{x}_1 + \\ + m_1 \frac{c_{21}+c_{22}}{c_{22}} \dot{x}_1 = b_2 \dot{y} + c_{21}y. \end{cases} \quad (7)$$

Квадрат модуля передаточной функции (АЧХ) для массы  $m_1$  при кинематическом возбуждении системы можно записать следующим образом:

$$|W_1(\omega)|^2 = \frac{|\Delta_1|^2}{|\Delta|^2}, \quad (8)$$

а входящие сюда определители  $\Delta_1$  и  $\Delta$  имеют следующий вид:

$$|\Delta_1|^2 = \left( (c_{11}c_{21} - b_1b_2\omega^2)^2 + (b_1c_{21} + b_2c_{11})^2\omega^2 \right),$$

$$|\Delta|^2 = (-a f \omega^6 + (ab_2 + f b_1 + d g + h b_1) \omega^4 - (g c_{11} + d c_{21} + b_1 b_2 + c_{11} k) \omega^2 + c_{11} c_{21})^2 + ((a g + f d) \omega^5 - (a c_{21} + f c_{11} + g b_1 + d b_2 + h c_{11} + k b_1) \omega^3 + (b_2 c_{11} + b_1 c_{21}) \omega)^2.$$

При записи определителя  $\Delta$  для краткости использованы следующие обозначения:

$$a = m_1 \frac{b_1}{c_{12}}, d = m_1 \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{12}}, f = m_2 \frac{b_2}{c_{22}}, g = m_2 \frac{c_{21} + c_{22}}{c_{22}},$$

$$h = m_1 \frac{b_2}{c_{22}}, k = m_1 \frac{c_{21} + c_{22}}{c_{22}}.$$

При обращении в нуль обоих коэффициентов вязкого трения  $b_1$  и  $b_2$  АЧХ (8) обращается в бесконечность при значениях  $\omega_1^*$  и  $\omega_2^*$ , являющихся корнями полинома, стоящего в знаменателе: ;

$$|W_1(\omega, b_1, b_2)| \rightarrow \frac{1}{|a\omega^4 - d\omega^2 + 1|}, b_1 \rightarrow \infty, b_2 \rightarrow \infty,$$

$$\text{где } a = \frac{m_1 m_2}{c_{12} c_{22}}, d = m_1 \frac{c_{11} + c_{22}}{c_{11} c_{22}} + \frac{m_2}{c_{22}}.$$

По существу эти значения  $\omega_1^*$  и  $\omega_2^*$  являются дополнительными резонансными частотами. Сама же механическая система, изображенная на Рис.3, в отличие от традиционных систем, сохраняет колебательные свойства при всех значениях  $b$  (Рис.4).

С помощью компьютерного моделирования было установлено, что это явление сохраняется и для многомассовых систем цепной структуры, построенных по той же схеме. Здесь следует заметить, что исследованные системы составлялись как последовательная комбинация элементов, каждый из которых обладал полутора степенями свободы. При этом порядок системы уравнений может быть и четным. Так, движение рассмотренной выше двухмассовой



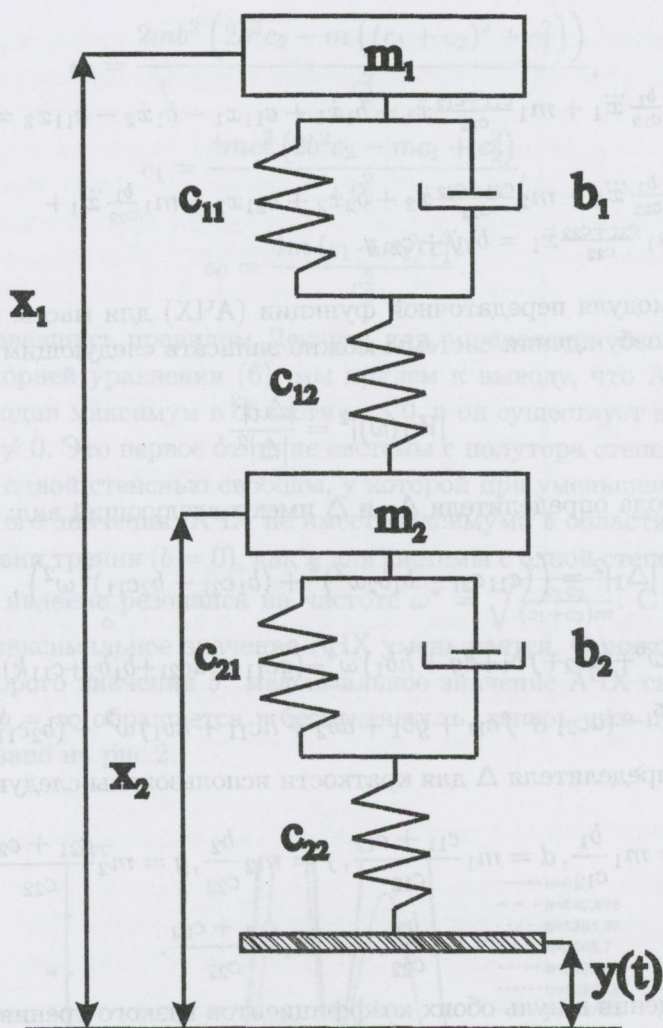


Рис. 3: Двухмассовая система

механической системы описывается системой дифференциальных уравнений шестого порядка (7), и значит число степеней свободы должно равняться трем. В то же время ожидаемой третьей резонансной частоты не возникает и в отсутствии трения их по-прежнему две. Это означает, что сформулированное ранее правило, связывающее число степеней свободы с порядком системы уравнений, работает не всегда, поскольку, видимо, является слишком формальным.

### 3. Заключение.

Продemonстрированные в статье некоторые особенности систем с нецелым числом степеней свободы имеют практическое значение для двух типов задач. К первому типу относятся задачи, в которых нужно построить механическую модель объекта, в котором есть элементы с силовой характеристикой



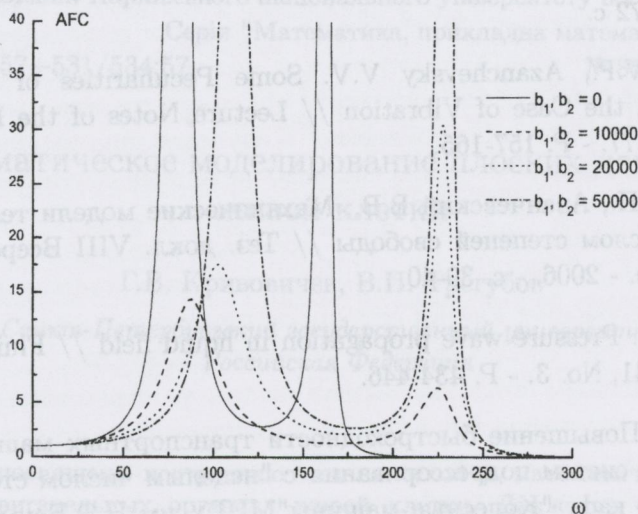


Рис. 4: АЧХ двухмассовой системы

вида (2). К таким задачам, в частности, относятся задачи моделирования живых систем, таких как моделирование динамики позвоночника при вибрационных воздействиях [7] и модельное изучение распространения пульсовой волны по кровеносным сосудам [8]. Ко второму типу относятся такие задачи, при решении которых в последнее время особенности систем с нецелым числом степеней свободы преднамеренно используются для синтеза объекта с заданными свойствами. В качестве примера можно привести задачу о построении оптимальной системы поддрессирования [9]. Все это требует дальнейшего исследования особенностей систем с нецелым числом степеней свободы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А. и Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959 – 915 с.
2. Пановко Я.Г. и Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987 – 352 с.
3. Львович А.Ю., Сабанеев В.С. О выборе оптимальных параметров вибратора шлейфного осциллографа // Вестник Ленинградского университета, - 1963 г. - № 1. - С. 106-114.
4. Orne D., King. Y. Liu, A mathematical model of spinal response to impact // Journal of Biomechanics. - 1971. - Vol. 4, No. 1. - P. 49-71.



5. Левтов В.А., Регирер С.А., Шадрина Н.Х. Реология крови. – М.: Медицина, 1982 – 272 с.
6. Tregoubov V.P., Azanchevsky V.V. Some Peculiarities of Human Body Modelling in the Case of Vibration // Lecture Notes of the ICB Seminars. - 2006. - Vol.77. - P. 157-165.
7. Трегубов В.П., Азанчевский В.В. Механические модели тела человека с нецелым числом степеней свободы // Тез. докл. VIII Всеросс. конф. по биомеханике. - 2006. - с. 39-40.
8. Kizilova N.N. Pressure wave propagation in liquid field // Fluid dynamics. - 2006. - Vol. 41, No. 3. - P. 434-446.
9. Сарач Е.Б. Повышение быстроходности транспортных машин путем использования систем поддрессирования с "нецелым числом степеней свободы". Сб. тр. каф. "Колесные машины" МГТУ им Н.Э.Баумана. - 2003. - С. 28-34.

Статья получена: 27.10.2008; окончательный вариант: 06.04.2009;  
принята: 27.04.2009.



## Математическое моделирование плоских движений живой клетки

Г.В. Кривовичев, В.П. Трегубов

*Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация*

Работа посвящена построению механической и математической моделей двигательных органелл живой клетки. Движения органеллы рассматриваются как частный случай биологической подвижности. Рассматривается новый подход к моделированию, основанный на решении первой основной задачи динамики. При решении задачи рассматривались движения, характерные для образцов органелл в норме и мутантных образцов. Сформулировано предположение о виде зависимости обобщенных сил от обобщенных координат и скоростей. В результате компьютерного моделирования получены различные рисунки биения, характерные для органелл живых клеток.

*2000 Mathematics Subject Classification 92C37.*

**Введение.** Одной из интересных задач познания с давних времен является общая проблема биологической подвижности. Биологическая подвижность проявляется в природе в самых различных формах. Это подвижность сложных организмов в целом, их отдельных органов и систем, сокращение мышц и движение одноклеточных организмов. В настоящее время изучение механизмов биологической подвижности привело к пониманию того, что все они формируются на микро- и наноуровнях в результате конформационных изменений и взаимодействий белковых молекул [6]. При этом следует отметить, что экспериментальные исследования биологической подвижности наталкиваются на целый ряд проблем, связанных в основном с тем, что живой объект не может функционировать в условиях вакуума, в которых только и возможно применение техники электронной микроскопии. В результате подобных исследований можно получить сведения только о структуре живого микрообъекта в неживом состоянии. Подобные трудности выдвигают методы математического и компьютерного моделирования на первое место в данной области исследований. Прежде всего, математические модели позволяют провести количественные оценки и проверить те или иные гипотезы о механизме формирования биологической подвижности. Кроме того, они позволяют свя-



зать положения, сформулированные на микроуровне, с процессами, наблюдаемыми на макроуровне, где измерения становятся возможными.

Наиболее плодотворно математические модели способствовали развитию теории такого проявления биологической подвижности, как мышечное сокращение. Не меньшее внимание привлекает и изучение другого проявления биологической подвижности — движения одноклеточных организмов. Эти организмы осуществляют движение в окружающей их жидкой среде с помощью двигательных органелл двух типов — жгутика, который совершает своего рода волнообразные движения и является хвостовым двигателем клетки, и ресничек, покрывающих клетки сплошным покровом и осуществляющих ее продвижение за счет согласованных гребковых движений.

Интерес к данным объектам вызван не только стремлением постигнуть механизмы формирования биологической подвижности, но и потребностями медицины, поскольку жгутиковый и ресничковый транспорт обеспечивает ряд жизненно важных функций у человека. Жгутики обеспечивают подвижность сперматозоидов. Реснички, выстилающие эпителий дыхательных путей, обеспечивают так называемый мукоцилиарный транспорт, которым производится очистка этих путей от загрязнений, попадающих вместе с вдыхаемым воздухом. Реснички, покрывающие поверхность яйцевода, осуществляют продвижение яйцеклетки [13, 14]. В результате изменений в подвижности ресничек и жгутиков происходят нарушения указанных функций, что, в свою очередь приводит к различным заболеваниям, в том числе и с летальным исходом [14].

Большинство из существующих математических моделей реснички или жгутика рассматривают их как деформируемое твердое тело [9, 15, 17, 19, 20] или же как совокупность деформируемых твердых тел [11, 12, 16]. Некоторые из этих моделей могут описывать лишь малые изгибные деформации, что сильно ограничивает их практическую применимость. К тому же реологические соотношения для материала выбираются без каких-либо достаточных обоснований. Между тем, проведение экспериментальных исследований ресничек и жгутиков является весьма проблематичным из-за их малых размеров. Кроме того, вопрос о применимости гипотезы сплошной среды для этих объектов остается открытым [22].

Подход к моделированию движений органелл клеток во всех работах, начиная с пионерских исследований (см., к примеру [15]) до публикаций последних лет (например, [16]) основан на решении второй основной задачи динамики. В этом случае внутренние силы считаются известными, но содержащими неизвестные параметры, которые являются параметрами модели. Варьируя далее эти параметры, авторы стремятся приблизить модельное движение к движению, наблюдаемому в эксперименте.

Подобный подход оказывается весьма громоздким и неэкономичным по отношению к вычислительным и временным ресурсам. К тому же имеет место проблема отсутствия единственности набора параметров, определяемого таким образом.



В настоящей работе, посвященной математическому моделированию движения реснички, предлагается использовать подход, основанный на решении первой основной задачи динамики. При таком подходе сначала по известному движению определяются внутренние силы как функции времени, а затем формулируются гипотезы о том, как эти силы могут быть реализованы, то есть, представлены, например, как совокупность позиционных и диссипативных сил, дополненных соответствующим управлением.

**Описание объекта и механическая модель.** Ресничка представляет собой тонкий волосообразный отросток, достигающий в длину около 5-15 мкм и имеющий около 0.25 мкм в диаметре. Циклические гребковые движения ресничек можно условно разбить на 2 фазы, называемые эффективным и восстановительным гребками (рис. 1). При эффективном гребке ресничка, оста-

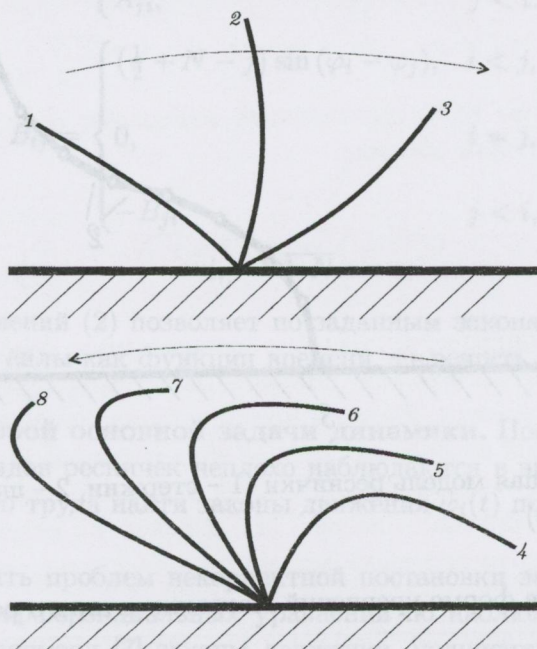


Рис. 1: Цикл гребкового движения реснички: эффективный (1-3) и восстановительный (4-8) гребки

ваясь достаточно жесткой, совершает размашистое гребковое движение, при котором осуществляется проталкивание жидкости над поверхностью клетки. При восстановительном гребке, который является более медленным, чем эффективный, ресничка, заметно изгибаясь, движется в противоположном направлении и восстанавливается до того положения, из которого стартует следующий эффективный гребок.

При моделировании движения реснички вводятся следующие основные предположения:

- 1) Рассматриваются только плоские движения реснички.
- 2) Не рассматривается внутренняя структура реснички.



3) Не рассматривается динамика окружающей ресничку жидкости.

Предлагаемая механическая модель реснички представляет собой совокупность абсолютно твердых стержней одинаковой массы и длины, последовательно соединенных посредством шарниров. Эта конструкция шарнирно соединяется с неподвижным основанием, которое моделирует собой поверхность живой клетки (рис. 2). Уравнения движения этой механической систе-

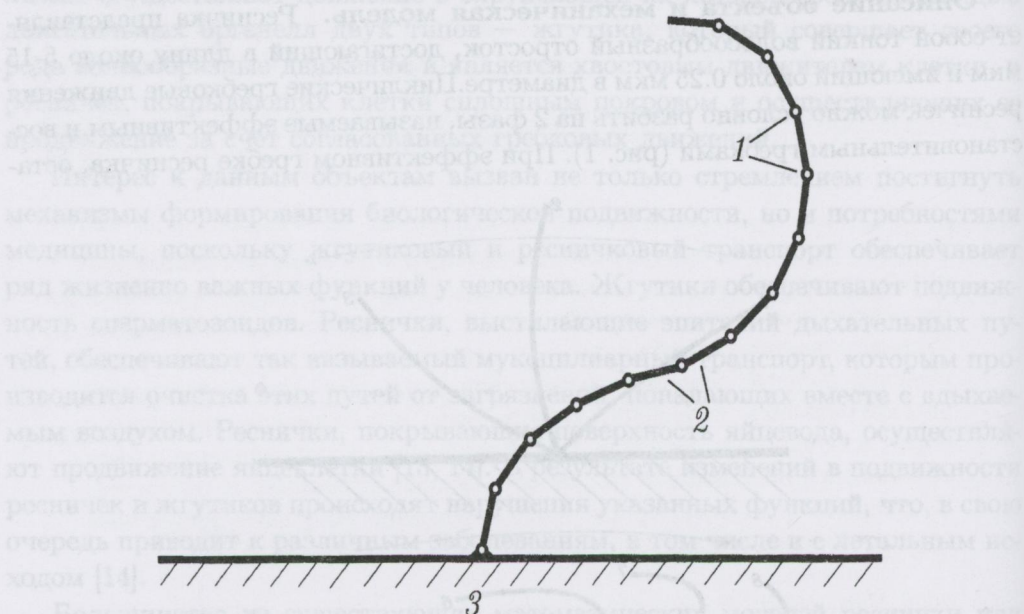


Рис. 2: Механическая модель реснички (1 – стержни, 2 – шарниры, 3 – неподвижное основание)

мы выписываются в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

в которых  $T$  — кинетическая энергия,  $N$  — число степеней свободы,  $q_i$  — обобщенные координаты,  $\dot{q}_i$  — обобщенные скорости,  $Q_i$  — обобщенные силы.

В качестве обобщенных координат выбираются углы между стержнями и вертикальной осью системы координат, неподвижно связанной с поверхностью клетки и расположенной плоскости движения модели  $\varphi_i$ . Предполагается, что поворот одного стержня относительно другого осуществляется за счет приложенного в соединяющем их шарнире вращающего момента, генерация которого отождествляется с деятельностью активных элементов внутренней структуры реснички.

После проведения всех необходимых операций нелинейные уравнения дви-



жения (1) в безразмерном виде принимают следующую форму:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij}(\varphi_i, \varphi_j) \ddot{\varphi}_j + \sum_{j=1}^N B_{ij}(\varphi_i, \varphi_j) \dot{\varphi}_j^2 = Q_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Здесь  $A_{ij}(\varphi_i, \varphi_j)$  и  $B_{ij}(\varphi_i, \varphi_j)$  задаются следующими соотношениями:

$$A_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + N - j\right) \cos(\varphi_i - \varphi_j), & i < j, \\ \left(\frac{1}{3} + N - i\right), & i = j, \\ A_{ji}, & j < i. \end{cases}$$

$$B_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + N - j\right) \sin(\varphi_i - \varphi_j), & i < j, \\ 0, & i = j, \\ -B_{ji}, & j < i, \end{cases}$$

$$i, j = \overline{1, N}.$$

Система уравнений (2) позволяет по заданным законам движения получить обобщенные силы как функции времени, т.е. решить первую задачу динамики.

**Решение первой основной задачи динамики.** Поскольку перемещения некоторых видов ресничек неплохо наблюдаются в эксперименте, то не составляет особого труда найти законы движения  $\varphi_i(t)$  по данным наблюдений.

Чтобы избежать проблем некорректной постановки задачи определения правых частей дифференциальных уравнений по наблюдениям в конечное число моментов времени [7] законы движения, полученные в эксперименте поточно, аппроксимируются с помощью дважды непрерывно дифференцируемой функции [2] с использованием сглаживающих кубических сплайнов. Выбор именно такого способа аппроксимации связан с тем, что сглаживающие сплайны решают задачу не только приближения, но и сглаживания исходных данных и не вызывают нежелательных осцилляций и «шумов», как, к примеру, интерполяционные сплайны [3]. Выбор параметра сглаживания осуществлялся с помощью метода невязок А.Н. Тихонова в сочетании с методом секущих [7].

Было обработано 11 различных рисунков биения ресничек, взятых в основном из экспериментальных работ (к примеру, см. [10, 21]). При этом рассматривались реснички не только в норме, но и мутантные их образцы [10].

Здесь следует отметить, что обобщенные силы получены из системы (2) для обобщенных координат, в качестве которых были выбраны углы поворота относительно вертикали. Использование таких обобщенных координат



позволило получить выражения для  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  в виде простых формул, которые не являются громоздкими, а следовательно, легко могут быть запрограммированы на ЭВМ. Теперь, когда перед нами стоит задача выполнения следующего шага, а именно, представления обобщенных сил как функций обобщенных координат и скоростей, удобнее перейти к углам относительно поворота стержней, поскольку реальный физический смысл для объекта будут иметь обобщенные силы, вызывающие изменение элементов объекта друг относительно друга, а не относительно вертикальной оси. Изначальное использование углов относительного поворота в качестве обобщенных координат привело бы к более громоздким для записи и восприятия уравнениям движения, чем уравнения (2). Данные углы связаны с обобщенными координатами  $\varphi_i$  очевидными формулами:

$$\psi_1 = \varphi_1, \quad \psi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, \quad i = \overline{2, N}.$$

Обобщенные силы  $Q_i^{rel}$ , вызывающие изменения относительных углов, связаны с  $Q_i$  следующим образом:

$$Q_i^{rel} = \sum_{j=i}^N Q_j, \quad i = \overline{1, N}.$$

На рис. 3 А,Б приведены графики безразмерных обобщенных сил как функций безразмерного времени, полученных в результате решения первой основной задачи динамики. Расчеты производились на основе рисунков биения жгутиков зеленой водоросли *Chlamydomonas reinhardtii*, взятых из работы [10]. Случай, полученный для органеллы в норме представлен на рис. 3А, случай мутантного образца — на рис. 3Б. В целом по результатам решения первой основной задачи динамики можно сделать следующие выводы:

1) За время восстановительного гребка обобщенные силы действуют асинхронно — соответствующие разным степеням свободы силы имеют качественно различное поведение, что проявляется в наличии локальных экстремумов в разных точках временного промежутка у данных сил как у функций времени, в отличие, к примеру, от случая эффективного гребка, когда обобщенные силы, соответствующие разным степеням свободы имеют локальные экстремумы примерно в одних и тех же точках (рис. 3 А).

2) Изменение обобщенных сил как функций времени для случая органеллы в норме и для мутантного образца заметно различается. Конечно, различия в характере биения органелл в норме и в патологии можно видеть и на результатах обработки киноциклограмм (к примеру, см. [10]), но поскольку данные различия связаны с нарушениями в процессах конформационных перестроек белковых молекул вдоль длины органеллы, за счет которых и формируется движение, то гораздо важнее было увидеть, как изменяются во времени обобщенные силы, из-за которых и формируются те или иные движения модели. Как можно видеть из рис. 3 Б, обобщенные силы, полученные



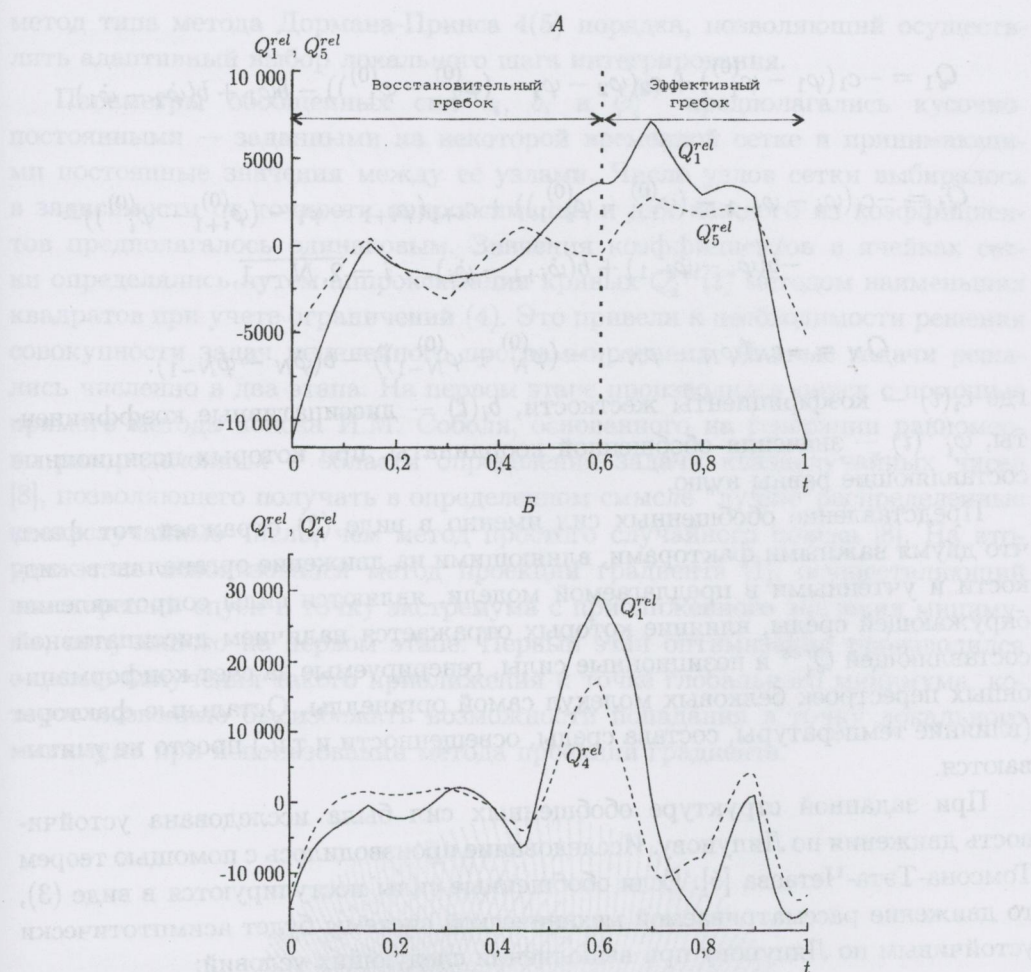


Рис. 3: Графики обобщенных сил, полученных в результате решения первой основной задачи динамики (А - случай реснички в норме, Б - случай мутантного образца)

для мутантных образцов органелл, отличаются от случая образцов в норме как качественно, так и количественно.

**Структура обобщенных сил.** Предположим, что обобщенные силы можно представить в виде суммы:

$$Q_i(t, \Phi, \dot{\Phi}) = Q_i^{pos}(t, \Phi) + Q_i^{res}(t, \dot{\Phi}), \quad i = \overline{1, N}. \quad (3)$$

где  $Q_i^{pos}$  — позиционная составляющая,  $Q_i^{res}$  — диссипативная составляющая,  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)^T$ ,  $\dot{\Phi} = (\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_N)^T$ . Предположим, что обобщенные силы являются кусочно-линейными функциями обобщенных координат и скоростей соответственно, при этом (3) в покомпонентной форме примут следующий вид [4]:



$$Q_1 = -c_1(\varphi_1 - \varphi_1^{(0)}) + c_2(\varphi_2 - \varphi_1 - (\varphi_2^{(0)} - \varphi_1^{(0)})) - b\dot{\varphi}_1 + b(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1),$$

$$Q_i = -c_i(\varphi_i - \varphi_{i-1} - (\varphi_i^{(0)} - \varphi_{i-1}^{(0)})) + c_{i+1}(\varphi_{i+1} - \varphi_i - (\varphi_{i+1}^{(0)} - \varphi_i^{(0)})) - b(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}) + b(\dot{\varphi}_{i+1} - \dot{\varphi}_i), \quad i = \overline{2, N-1},$$

$$Q_N = -c_N(\varphi_N - \varphi_{N-1} - (\varphi_N^{(0)} - \varphi_{N-1}^{(0)})) - b(\dot{\varphi}_N - \dot{\varphi}_{N-1}).$$

где  $c_i(t)$  — коэффициенты жесткости,  $b_i(t)$  — диссипативные коэффициенты,  $\varphi_i^{(0)}(t)$  — значения обобщенной координаты, при которых позиционные составляющие равны нулю.

Представление обобщенных сил именно в виде (3) отражает тот факт, что двумя важными факторами, влияющими на движение органеллы в жидкости и учтенными в предлагаемой модели, являются силы сопротивления окружающей среды, влияние которых отражается наличием диссипативной составляющей  $Q_i^{res}$  и позиционные силы, генерируемые за счет конформационных перестроек белковых молекул самой органеллы. Остальные факторы (влияние температуры, состава среды, освещенности и т.п.) просто не учитываются.

При заданной структуре обобщенных сил была исследована устойчивость движения по Ляпунову. Исследование производилось с помощью теорем Томсона-Тэта-Четаева [5]. Если обобщенные силы постулируются в виде (3), то движение рассматриваемой механической системы будет асимптотически устойчивым по Ляпунову при выполнении следующих условий:

$$c_i + b_i \geq 0, i = \overline{1, N}, \quad (4)$$

обеспечивающих неотрицательность суммы потенциальной энергии и диссипативной функции Релея, что гарантирует свойство асимптотической устойчивости движения механической системы [5]. Насколько известно авторам настоящей статьи, вопрос об устойчивости движения механической модели органеллы при заданной структуре обобщенных сил в других работах не рассматривался. Это, по всей видимости, связано с тем, что авторы этих работ ставили своей целью воспроизвести только один период движения органеллы, не обращая внимание на динамику механической модели на всей временной оси.

**Вычислительный эксперимент.** Численные расчеты проводились для (2) при начальных условиях  $\varphi_i(0) = \varphi_{i0}$  и  $\dot{\varphi}_i(0) = \dot{\varphi}_{i0}$ . Эта задача Коши решалась численно с помощью явных одношаговых методов, относящихся к группам методов Рунге-Кутты-Фельберга и Дормана-Принса различных порядков, в результате в качестве наиболее оптимального как по временным затратам, так и по точности, был выбран метод Кэша-Карпа [18] — вложенный



метод типа метода Дормана-Принса 4(5) порядка, позволяющий осуществлять адаптивный выбор локального шага интегрирования.

Параметры обобщенных сил  $c_i$ ,  $b_i$  и  $\varphi_i^{(0)}$  предполагались кусочно-постоянными — заданными на некоторой временной сетке и принимающими постоянные значения между ее узлами. Число узлов сетки выбиралось в зависимости от точности аппроксимации и для каждого из коэффициентов предполагалось одинаковым. Значения коэффициентов в ячейках сетки определялись путем аппроксимации кривых  $Q_i^{rel}(t)$  методом наименьших квадратов при учете ограничений (4). Это привело к необходимости решения совокупности задач нелинейного программирования. Данные задачи решались численно в два этапа. На первом этапе производился поиск с помощью прямого метода поиска И.М. Соболя, основанного на генерации равномерно распределенных в области определения задачи квазислучайных чисел [8], позволяющего получать в определенном смысле "лучше" распределенные квазислучайные числа, чем метод простого случайного поиска [8]. На втором этапе использовался метод проекции градиента [1], осуществляющий наискорейший спуск в точку экстремума с приближенного значения минимума, полученного на первом этапе. Первый этап оптимизации производился с целью получения такого приближения к точке глобального минимума, которое позволило бы избежать возможности попадания в точку локального минимума при использовании метода проекции градиента.

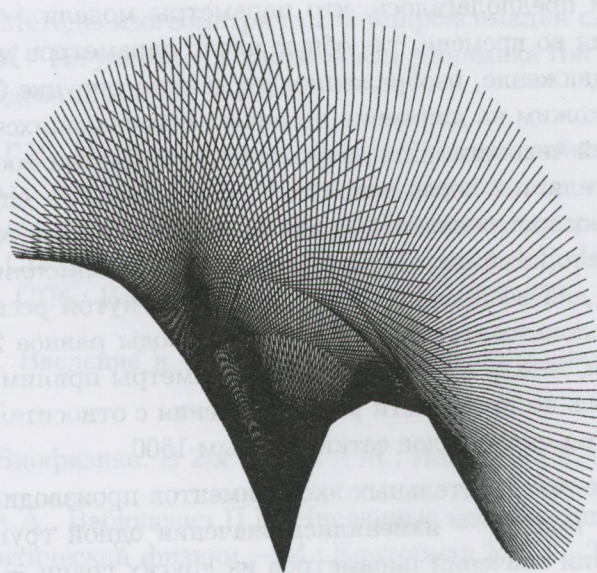


Рис. 4: Результат вычислительных экспериментов: рисунок биения, характерный для реснички

В качестве результата численного моделирования можно продемонстрировать рисунок биения, изображенный на рис. 4 — это случай 7 степени сво-



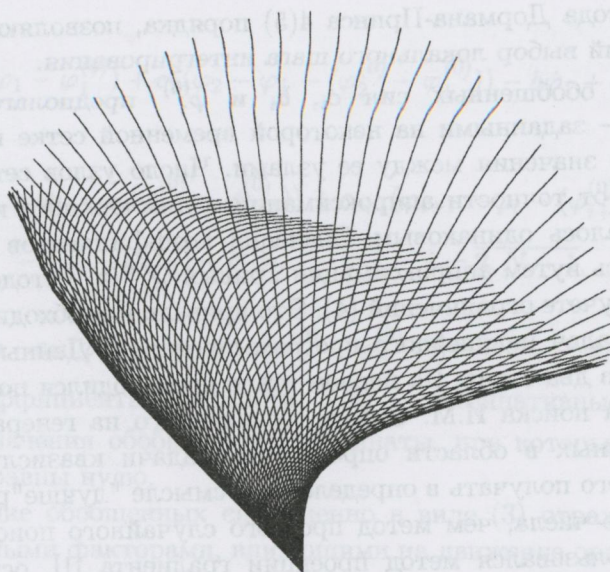


Рис. 5: Результат вычислительных экспериментов: рисунок биения, характерный для реснички пленчаторотой инфузории *Paramecium multimicronucleatum*

боды, при этом предполагалось, что параметры модели —  $c_i, b, \varphi_i^{(0)}$  принимают 3 значения во времени, т.е. общее число параметров модели составило 21. Гребковое движение, изображенное на данном рисунке биения, является качественно похожим на движение ресничек, встречающихся в эпителии дыхательных путей человека. Для данного рисунка биения восстановительный гребок осуществляется слева-направо, эффективный — справа-налево. На рис. 5 показан воспроизведенный моделью рисунок биения, характерный для ресничек пленчаторотой инфузории *Paramecium multimicronucleatum*, взятый из работы [19], для воспроизведения формы изогнутой реснички оказалось достаточным использовать число степеней свободы равное 20, а за счет измельчения сетки, между узлами которой параметры принимают постоянные значения, удалось воспроизвести рисунок биения с относительной погрешностью 0.03-0.07 при числе узлов сетки, равным 1500.

Также в ходе вычислительных экспериментов производилось варьирование параметров модели — изменялись значения одной группы параметров при фиксировании значений параметров из других групп — т.е., к примеру, изменялись  $c_i$  при условии фиксирования значений  $b$  и  $\varphi_i^{(0)}$ . Как оказалось, основное влияние параметры  $c_i$  оказывают на частоту биения органеллы — при увеличении  $c_i$  наблюдается и увеличение частоты, хотя есть и некоторое влияние на амплитуду нелинейных колебаний. Изменение параметра  $b$  оказывает примерно одинаковое влияние как на частоту, так и на амплитуду колебаний. Параметры  $\varphi_i^{(0)}$  оказывают основное влияние только на амплиту-



ду колебаний.

**Заключение.** Таким образом, механическая и математическая модели оказались в состоянии воспроизвести гребковое движение, типичное для ресничек эпителия верхних дыхательных путей [17] и для ресничек некоторых микроорганизмов [19].

Проведенные вычислительные эксперименты позволяют говорить об обоснованности предложенного подхода к моделированию изучаемого процесса и об адекватности предлагаемых моделей, поскольку, в принципе, за счет увеличения числа частоты сетки, на которой задаются параметры, можно добиться воспроизведения желаемого рисунка биения практически с любой желаемой точностью. Кроме того, представляется перспективной возможность применения моделей в прикладных задачах, возникающих в биологии и медицине.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980 г. – 520 с.
2. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 224 с.
3. Квасов Б.И. Методы изометрической аппроксимации сплайнами. – М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт компьютерных исследований, 2006. – 416 с.
4. Кривовичев Г.В. Математическое моделирование гребковых движений одноклеточных организмов // Процессы управления и устойчивость: Труды 38-й международной научной конференции аспирантов и студентов. Россия, СПб., 9-12 апреля 2007 г. / Под ред. А.В. Платонова, Н.В. Смирнова. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007 г. – С. 267–272.
5. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
6. Рубин А.Б. Биофизика. В 2-х т. Т. 2. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – 469 с.
7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
8. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. – М.: Наука, 1981. – 110 с.
9. Brokaw C.J. Computer simulation of flagellar movement I. Demonstration of stable bend propagation and bend initiation by the sliding filament model // Biophys. J. – 1972. – V. 12. – P. 564–586.



10. Brokaw C.J., Luck D.J.L., Huang B. Analysis of the movement of *Chlamydomonas* flagella: the function of the radial-spoke system is revealed by comparison of wild-type and mutant flagella // *J. Cell Biol.* – 1983. – V. 92. – P. 722–732.
11. Dillon R.H., Fauci L.J. An integrative model of internal axoneme mechanics and external fluid dynamics in ciliary beating // *J. Theor. Biol.* – 2000. – V. 207. – P. 415–430.
12. Dillon R.H., Fauci L.J., Yang X. Sperm motility and multiciliary beating: an integration mechanical model // *Comp. Math. Appl.* – 2006. – V. 52. – P. 749–758.
13. Eley L., Yates L.M., Goodship J.A. Cilia and disease // *Curr. Opin. Gen. Dev.* – 2005. – V. 15. – P. 308–314.
14. Klysik M. Ciliary syndromes and treatment // *Pathol. Res. Pract.* – 2008. – V. 204. – P. 77–88.
15. Machin K.E. Wave propagation along flagella // *J. Exp. Biol.* – 1958. – V. 35. – P. 796–806.
16. Mitran S.M. Metachronal wave formation in a model of pulmonary cilia // *Comp. Struct.* – 2007. – V. 85. – P. 763–774.
17. Murase M. The dynamics of cellular motility. – NY.: John Wiley and Sons, 1992. – 358 p.
18. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical recipes in C: The art of scientific computing. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 1018 p.
19. Rikmenspoel R., Rudd W.G. The contractile mechanism in cilia // *Biophys. J.* – 1973. – V. 13. – P. 955–993.
20. Rikmenspoel R. The equation of motion for sperm flagella // *Biophys. J.* – 1978. – V. 23. – P. 177–206.
21. Satir P. Studies on cilia. III. Further studies on the cilium tip and "sliding filament" model of ciliary motility // *J. Cell Biol.* – 1968. – V. 39. P. 77–94.
22. Zhu C., Bao G., Wang N. Cell mechanics: mechanical response, cell adhesion and molecular deformation // *Ann. Rev. Biomed. Eng.* – 2000. – V. 02. – P. 189–226.

Статья получена: 01.10.2008; окончательный вариант: 23.04.2009;  
принята: 27.04.2009.



## Non-smooth systems of generalized MIMO triangular form

Svyatoslav S. Pavlichkov

*Taurida National University, Ukraine*

Following work [Korobov V.I., Pavlichkov S.S. Global properties of the triangular systems in the singular case // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – 342. – P. 1426-1439], we consider the class of MIMO (multi-input and multi-output) triangular systems of the so-called "generalized triangular form" defined by the same conditions as in [Korobov V.I., Pavlichkov S.S. Global properties of the triangular systems in the singular case // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – 342. – P. 1426-1439] except the following one: in comparison with the above-mentioned work, we remove the assumption about  $C^1$  - smoothness of the dynamics and assume that the dynamics satisfies the local Lipschitz condition w.r.t. states and controls only. In the current work, is proven that such a new class is globally controllable (by means of controls from class  $C^\mu$  with an arbitrary  $\mu \geq 0$  including  $C^\infty$ ). The background of the proof is a modification of the construction proposed in [Korobov V.I., Pavlichkov S.S. Global properties of the triangular systems in the singular case // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – 342. – P. 1426-1439]. Whereas this new class is wider than that from [Korobov V.I., Pavlichkov S.S. Global properties of the triangular systems in the singular case // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – 342. – P. 1426-1439] to some extent, we prove its global controllability only (while in the above-mentioned work stronger results were obtained for the  $C^1$  - case).

2000 Mathematics Subject Classification 93C10, 93B10, 93B11, 93B05, 93B52.

### 1. Introduction.

This work is devoted to nonlinear systems of the form

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_{i+1}), & i = 1, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u); \end{cases} \quad (1)$$

which is called "triangular" form (TF). Beginning with Korobov's work [10], this class has been explored extensively in various directions - [1, 3, 6, 11, 12, 13, 17, 18, 20]. This interest was motivated by different strands of research in nonlinear



control theory: exact linearization and feedback equivalence [6, 7], stabilization and adaptive control [8, 14, 20], mechanics and other applications - [13].

Originally, TF was considered in the so-called "regular case"  $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ , which means [7, 10] that (1) can be brought to the Brunovsky linear canonical form by means of a diffeomorphism  $z = \Phi(x)$ ,  $v = \Psi(x, u)$  at least locally - see the well-known Jakubczyk-Respondek-Hunt-Su-Meyer-Krischenko conditions. Although (to our best knowledge) the first work devoted to the singular case was [17] (1986), during the last 15 years, the singular case has received a lot of attention - [3, 21, 12]. In the latter work [12], the authors tried to introduce and study as wide class of the TF as possible so that this new class could be potentially treated as a global nonlinear analog of the Brunovsky forms  $\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = u$ . This naturally leads to the class defined by the following conditions 1 and 2 only - [12]:

1. *The dynamics of the system (1) is continuously differentiable i.e.,  $f_i \in C^1$*

(It is natural to require some smoothness at least of class  $C^1$ , if we want to speak of this generalized TF in the context of feedback equivalence, which is apparently possible - see [15])

2. *All the functions  $f_i(t, x_1, \dots, x_i, \cdot)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , are surjective*

(It is necessary to require some dependence of each  $f_i$  on  $x_{i+1}$ , because, if some  $f_i$  does not depend on  $x_{i+1}$  at all, the triangular system has an uncontrollable part. Condition 2 is a global nonlinear analog of the local condition  $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ , and condition 2 seems to be as general as possible if one wants to speak of global controllability)

Note that system (1) can be MIMO, i.e.,  $x_i$  and  $u$  are not necessarily scalar in conditions 1, 2.

However, it is natural to try to generalize assumption 1 to some extent: instead of  $C^1$  - smoothness, one may want to require the local Lipschitz condition only. In this case, first, the construction from [12] should be revised significantly (because the assumption  $f_i \in C^1$  was essential in [12]), and, second, some properties obtained in [12, 15] are lost (it is impossible to speak of feedback equivalence and it is not clear how to obtain main Theorems 3.1, 3.2 from [12]).

Nevertheless, it appears that systems of such a new class are globally controllable at least. The goal of the current paper is to prove the global controllability for this new class.

## 2. Main result.

We consider a control system of the following form

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_{i+1}), & i = 1, \dots, \nu - 1; \\ \dot{x}_\nu = f_\nu(t, x_1, \dots, x_\nu, u); \end{cases} \quad t \in I = [t_0, T] \quad (2)$$



where  $x=(x_1, \dots, x_\nu)^T \in \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m_1+\dots+m_\nu}$  is the state (with  $x_i \in \mathbf{R}^{m_i}$  and  $n=m_1+\dots+m_\nu$ ),  $u \in \mathbf{R}^{m_{\nu+1}}$  is the control. We assume that the following conditions hold

- (i)  $f_i \in C(I \times \mathbf{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbf{R}^{m_{i+1}}; \mathbf{R}^{m_i})$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ ;
- (ii) Each  $f_i$  satisfies the local Lipschitz condition w.r.t.  $(x, u)$ , i.e., for every  $i = 1, \dots, \nu$  and every compact set  $K \subset \mathbf{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbf{R}^{m_{i+1}}$  there exists  $L_K > 0$  such that, for each  $t \in I$ , each  $(x_1^1, \dots, x_{i+1}^1)^T \in K$  and each  $(x_1^2, \dots, x_{i+1}^2)^T \in K$ , we have:

$$|f_i(t, x_1^1, \dots, x_{i+1}^1) - f_i(t, x_1^2, \dots, x_{i+1}^2)| \leq L_K \sum_{j=1}^{i+1} |x_j^1 - x_j^2|.$$

- (iii) For every  $i=1, \dots, \nu$ , and every  $(t, x_1, \dots, x_i) \in I \times \mathbf{R}^{m_1+\dots+m_i}$ , we have  $f_i(t, x_1, \dots, x_i, \mathbf{R}^{m_{i+1}}) = \mathbf{R}^{m_i}$ .

Our main result is as follows.

**Theorem 1** Assume that system (2) satisfies conditions (i), (ii), (iii). Then, for every  $\mu \in \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ , system (2) is globally controllable by means of controls from class  $C^\mu(I; \mathbf{R}^{m_{\nu+1}})$ .

Throughout the paper, for each  $\tau \in I$ , each  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , and each  $u(\cdot) \in L_\infty(I; \mathbf{R}^{m_{\nu+1}})$ , by  $t \mapsto x(t, \tau, x_0^0 u(\cdot))$  we denote the trajectory, of system (2), defined by this control  $u(\cdot)$  and by the initial condition  $x(\tau) = x^0$  on some maximal subinterval  $J \subset I$ . (Thus, by the well-known definition, Theorem 1 states that, whatever  $\mu \in \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ , for each  $x^0 \in \mathbf{R}^n$  and each  $x^T \in \mathbf{R}^n$  there is  $u(\cdot) \in C^\mu(I; \mathbf{R}^{m_{\nu+1}})$  such that  $x(t, t_0, x^0, u(\cdot))$  is defined for all  $t \in I$  and  $x(T, t_0, x^0, u(\cdot)) = x^T$ ).

## 2. Proof of Theorem 1

The background of the proof is a certain backstepping technique which was developed in our previous related works devoted to the triangular forms which are not feedback linearizable - [11, 12, 15]. Roughly speaking, this means that we resolve the problem of controllability by induction over  $\nu = 1, 2, \dots$ . The main obstacle we should obviate when following this pattern is that the dynamics of our system (2) is no longer of class  $C^1$  (instead we have assumptions (i)-(ii) only). On the other hand, in all the above-mentioned works, the assumption on  $C^1$ -smoothness was essential as this argument begins with studying the linearized control systems around a certain trajectory. To handle this problem, we note that, in [12], the controllability of the linearized control system was used locally in some neighborhood of some regular point only. The construction beyond this neighborhood does not refer to any  $C^1$ -smoothness at all (see [12], Section 6). Thus, it is natural to try to modify the argument from [12] accordingly. As we can see from the proof, the disadvantage of such an extension is that, in contrast to [12], we cannot speak of families of controls resolving the controllability problem and, in particular, we cannot prove the controllability of the uniformly bounded perturbations of system (2) (this is again because some properties of the linearized



control system are essential, when construction such families in [12]). However such a modification does work when proving global controllability (at least).

Fix an arbitrary  $p$  in  $\{1, \dots, \nu\}$ . Define  $k := m_1 + \dots + m_p$ ,  $y := (x_1, \dots, x_p)^T$  (with  $x_i \in \mathbf{R}^{m_i}$ ,  $i=1, \dots, p$ ) and consider the  $k$ -dimensional control system

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_{i+1}), & i = 1, \dots, p-1; \\ \dot{x}_p = f_p(t, x_1, \dots, x_p, v); \end{cases} \quad t \in I \quad (3)$$

with states  $y = (x_1, \dots, x_p)^T \in \mathbf{R}^k = \mathbf{R}^{m_1 + \dots + m_p}$  and controls  $v \in \mathbf{R}^{m_{p+1}}$ .

Given  $y \in \mathbf{R}^k$ ,  $\tau \in I$ , and  $v(\cdot)$  in  $L_\infty(I; \mathbf{R}^{m_{p+1}})$ , by  $t \mapsto y(t, \tau, y, v(\cdot))$  denote the trajectory, of system (3), defined by the control  $v(\cdot)$  and by the initial condition  $y(\tau, \tau, y, v(\cdot)) = y$  on some maximal subinterval  $J \subset I$ .

The proof of Theorem 1 is in two steps.

*Step 1.* Let us first reduce Theorem 1 to the following statement.

**Theorem 2** Let  $p$  be in  $\{1, \dots, \nu\}$ . Assume that, for every  $y^0 \in \mathbf{R}^k$  and every  $\delta > 0$ , there exists a family of functions  $\{y(\eta, \cdot) = (x_1(\eta, \cdot), \dots, x_p(\eta, \cdot))\}_{\eta \in \mathbf{R}^k}$  such that:

- 1) The map  $\eta \mapsto y(\eta, \cdot)$  is of class  $C(\mathbf{R}^k; C^1(I; \mathbf{R}^k))$
- 2) For each  $\eta \in \mathbf{R}^k$  we have

$$\dot{x}_i(\eta, t) = f_i(t, x_1(\eta, t), \dots, x_{i+1}(\eta, t)), \quad t \in I, \quad 1 \leq i \leq p-1;$$

(if  $p = 1$ , then we have 0 equalities, which means that Condition 2) is omitted by definition)

- 3)  $y(\eta, t_0) = y^0$  and  $|y(\eta, T) - \eta| < \delta$  for all  $\eta \in \mathbf{R}^k$

Then, for every  $(y^0, y_{k+1}^0) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m_{p+1}}$ , every  $\varepsilon > 0$  and every  $\mu \in \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ , there exists a family of controls  $\{\hat{v}_{(\eta, \beta)}(\cdot)\}_{(\eta, \beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m_{p+1}}}$  such that

- 4) The map  $(\eta, \beta) \mapsto \hat{v}_{(\eta, \beta)}(\cdot)$  is of class  $C(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m_{p+1}}; C^\mu(I; \mathbf{R}^{m_{p+1}}))$
- 5) For each  $(\eta, \beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m_{p+1}}$ , we have  $\hat{v}_{(\eta, \beta)}(T) = \beta$  and  $\hat{v}_{(\eta, \beta)}(t_0) = y_{k+1}^0$ .
- 6) For every  $(\eta, \beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m_{p+1}}$ , the trajectory  $t \mapsto y(t, t_0, y^0, \hat{v}_{(\eta, \beta)}(\cdot))$  is well-defined for all  $t \in I$  and  $|y(T, t_0, y^0, \hat{v}_{(\eta, \beta)}(\cdot)) - \eta| < \varepsilon$ .

Let us first show that Theorem 2 implies Theorem 1. Assume that Theorem 2 is proved.

For  $p = 1$ , consider the corresponding  $m_1$ -dimensional system (3) and pick any  $y_1^0 \in \mathbf{R}^{m_1}$ . Then, for each  $\delta > 0$ , we easily get the existence of a family  $\{y(\xi, \cdot)\}_{\xi \in \mathbf{R}^{m_1}} = \{x_1(\xi, \cdot)\}_{\xi \in \mathbf{R}^{m_1}}$  such that conditions 1)-3) of Theorem 2 hold (for instance, the family  $x_1(\xi, t) := y_1^0 + \frac{t-t_0}{T-t_0}(\xi - y_1^0)$  will suit). Then, for  $p=1$ , we obtain: for every  $\varepsilon > 0$  every  $(y_1^0, y_2^0) \in \mathbf{R}^{m_1+m_2}$  and every  $\mu \geq 1$ , there is a family of controls  $\{\hat{v}_{(\xi, \beta)}(\cdot)\}_{(\xi, \beta) \in \mathbf{R}^{m_1} \times \mathbf{R}^{m_2}}$  such that conditions 4), 5), 6) of Theorem 2 hold with  $p=1$ .

Suppose  $p=2$ . Given any  $\delta > 0$ , and any  $y^0 = (y_1^0, y_2^0) \in \mathbf{R}^{m_1+m_2}$ , put  $\varepsilon := \delta$ , and (for this  $\varepsilon > 0$ ) find the family  $\{\hat{v}_{(\xi, \beta)}(\cdot)\}_{(\xi, \beta) \in \mathbf{R}^{m_1} \times \mathbf{R}^{m_2}}$  obtained at the previous



step (with  $p = 1$ ). Then conditions 4)-6) for  $p = 1$  imply that the family  $\{y(\eta, \cdot)\}_{\eta=(\xi,\beta)\in\mathbf{R}^{m_1}\times\mathbf{R}^{m_2}}$  given by

$$y(\xi, \beta, t) := (y(t, t_0, y_1^0, \hat{v}_{(\xi,\beta)}(\cdot)), \hat{v}_{(\xi,\beta)}(t)), \quad t \in I, \quad \eta = (\xi, \beta) \in \mathbf{R}^{m_1} \times \mathbf{R}^{m_2}$$

satisfies all the conditions 1), 2), 3) of Theorem 2 with  $p = 2$ . Then we can apply Theorem 2 to  $p = 2$ , etc.

Arguing similarly by induction over  $p = 1, \dots, \nu$ , we obtain (for  $p = \nu$ ) that for each  $\varepsilon > 0$ , each  $\mu \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ , each  $x^0 \in \mathbf{R}^\nu$ , and each  $\alpha = y_{\nu+1}^0$  there exists a family of controls  $\{\hat{v}_{(\eta,\beta)}(\cdot)\}_{(\eta,\beta)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{m_{\nu+1}}}$  such that conditions 4), 5), 6) of Theorem 2 hold for  $p = \nu$ . Fix any  $\beta \in \mathbf{R}^{m_{\nu+1}}$  and define the family of controls  $\{u_\eta(\cdot)\}_{\eta\in\mathbf{R}^n}$  by  $u_\eta(t) := \hat{v}_{(\eta,\beta)}(t)$  for all  $\eta \in \mathbf{R}^n$ . Then  $\{u_\eta(\cdot)\}_{\eta\in\mathbf{R}^n}$  satisfies the following conditions:

(a)  $\eta \mapsto u_\eta(\cdot)$  is of class  $C(\mathbf{R}^n; C^\mu(I; \mathbf{R}^{m_{\nu+1}}))$

(b) For each  $\eta \in \mathbf{R}^n$ , the trajectory  $t \mapsto x(t, t_0, x^0, u_\eta(\cdot))$  is well-defined and  $|x(T, t_0, x^0, u_\eta(\cdot)) - \eta| < \varepsilon$ .

Given any  $\mu \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$  any  $\varepsilon > 0$  an arbitrary  $x^0 \in \mathbf{R}^n$ , and an arbitrary  $x^T \in \mathbf{R}^n$ , let  $\{u_\eta(\cdot)\}_{\eta\in\mathbf{R}^n}$  be a family of controls such that (a), (b) hold. Let us prove the existence of  $\eta^* \in \mathbf{R}^n$  such that  $x(T, t_0, x^0, u_{\eta^*}(\cdot)) = x^T$ . Indeed, by condition (a), the map  $\eta \mapsto \eta - x(T, t_0, x^0, u_\eta(\cdot)) + x^T$  is of class  $C(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$  (condition (b) implies that this map is well-defined). On the other hand, from condition (b), it follows that the image of this map belongs to  $\overline{B_\varepsilon(x^T)}$ . In particular,  $\eta \mapsto \eta - x(T, t_0, x^0, u_\eta(\cdot)) + x^T$  is a continuous map of a compact, convex set  $\overline{B_\varepsilon(x^T)}$  into  $\overline{B_\varepsilon(x^T)}$ , and then, using the Brouwer fixed-point theorem, we get the existence of  $\eta^* \in \mathbf{R}^n$  such that

$$\eta^* = \eta^* - x(T, t_0, x^0, u_{\eta^*}(\cdot)) + x^T, \quad \text{i.e.,} \quad x(T, t_0, x^0, u_{\eta^*}(\cdot)) = x^T.$$

Thus, for every  $x^0 \in \mathbf{R}^n$ , and every  $x^T \in \mathbf{R}^n$ , there is a control  $u_{\eta^*}(\cdot) \in C^\mu(I; \mathbf{R}^{m_{\nu+1}})$  such that  $x^T = x(T, t_0, x^0, u_{\eta^*}(\cdot))$ .

We have proved that Theorem 2 implies Theorem 1. Thus, it suffices to prove Theorem 2.

*Step 2: Proof of Theorem 2.* Fix an arbitrary  $p$  in  $\{1, \dots, \nu\}$  arbitrary  $(y^0, y_{k+1}^0) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m_{p+1}}$ , arbitrary  $\varepsilon > 0$ , and  $\mu \in \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ . Define  $\delta := \frac{\varepsilon}{4}$  and let  $\{y(\eta, \cdot)\}_{\eta\in\mathbf{R}^k}$  satisfy conditions 1)-3) of Theorem 2.

To prove Theorem 2, we modify the pattern proposed in [12]. Along with (3), we consider the  $k$  - dimensional system

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_{i+1}(t)), & i = 1, \dots, p-1; \\ \dot{x}_p(t) = \omega(t); \end{cases} \quad t \in I \quad (4)$$

where  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))^T \in \mathbf{R}^k$  is the state and  $\omega(t) \in \mathbf{R}^{m_p}$  is the control. For every  $y \in \mathbf{R}^k$ , every  $\tau \in I$ , and every  $\omega(\cdot) \in L_\infty(I; \mathbf{R}^{m_p})$ , let  $t \mapsto z(t, \tau, y, \omega(\cdot))$



denote the trajectory, of system (4), defined by this control  $\omega(\cdot)$  and by the initial condition  $z(\tau, \tau, y, \omega(\cdot)) = y$  on some maximal subinterval  $J \subset I$ . Using conditions 2), 3) of Theorem 2, we obtain:

$$y(\eta, t) = z(t, t_0, y^0, \dot{x}_p(\eta, \cdot)) \quad \text{for all } \eta \in \mathbf{R}^k, \quad t \in I \quad (5)$$

Then we apply the Gronwall-Bellmann lemma and (arguing as in [16] Lemma 4.3, page 97) obtain the existence of  $\sigma(\cdot)$  in  $C(\mathbf{R}^k; ]0, +\infty[)$  such that, for every  $\eta \in \mathbf{R}^k$  and every  $\omega(\cdot) \in L_\infty(I; \mathbf{R}^{m_{p+1}})$ , we have:

$$\forall t \in I \quad |z(t, t_0, y^0, \omega(\cdot)) - y(\eta, t)| < \delta,$$

$$\text{whenever} \quad \|\omega(\cdot) - \dot{x}_p(\eta, \cdot)\|_{L_\infty(I; \mathbf{R}^{m_{p+1}})} < \sigma(\eta) \quad (6)$$

Next, arguing as in the proof of Lemma 5.1 from [12], we construct a family  $\{v(\eta, \cdot)\}_{\eta \in \mathbf{R}^k}$  of controls defined on  $I$  and a function  $M(\cdot)$  in  $C(\mathbf{R}^k; ]0, +\infty[)$  such that:

(a<sub>1</sub>) For each  $\eta \in \mathbf{R}^k$ , the control  $v(\eta, \cdot)$  is a piecewise constant function on  $I$  and the map  $\eta \mapsto v(\eta, \cdot)$  is of class  $C(\mathbf{R}^k; L_1(I; \mathbf{R}^{m_{p+1}}))$ .

(a<sub>2</sub>) For every  $\eta \in \mathbf{R}^k$ , the trajectory  $t \mapsto y(t, t_0, y^0, v(\eta, \cdot))$  is defined for all  $t \in I$  and

$$|\dot{x}_p(\eta, \cdot) - f_p(t, y(t, t_0, y^0, v(\eta, \cdot)), v(\eta, t))| < \sigma(\eta) \quad \text{for all } t \in I, \quad \eta \in \mathbf{R}^k$$

(a<sub>3</sub>) For every  $\eta \in \mathbf{R}^k$ , we have  $\|v(\eta, \cdot)\|_{L_\infty(I; \mathbf{R}^k)} < M(\eta)$

**Remark.** Note that the proof of Lemma 5.1 from [12] does not actually require any smoothness of  $f_i$ . In [12], the condition  $f_i \in C^1$  is used only when studying the linearized control system in some neighborhood of some regular point. When proving Lemma 5.1 from [12], we need only the existence and uniqueness of the solution of the corresponding Cauchy problem. This is guaranteed by assumptions (i), (ii) from the current paper as well, and, therefore, it is possible to repeat this argument and get the existence of  $\{v(\eta, \cdot)\}$  and  $M(\cdot)$  satisfying (a<sub>1</sub>), (a<sub>2</sub>), (a<sub>3</sub>). The only difference between the current statement and Lemma 5.1 from [12] is that, in the current conditions (a<sub>1</sub>)-(a<sub>3</sub>) and in (5), (6), the trajectories  $t \mapsto z(t, t_0, y^0, \omega(\cdot))$  and  $t \mapsto y(t, t_0, y^0, v(\eta, \cdot))$  start from the initial instant  $t_0$  whereas, in [12] (formulae (25) and Lemma 5.1) similar trajectories start from the terminal instant  $T$ . Thus, to obtain the existence of  $\{v(\eta, \cdot)\}_{\eta \in \mathbf{R}^k}$  and  $M(\cdot) \in C(\mathbf{R}^k; ]0, +\infty[)$  which satisfy (a<sub>1</sub>), (a<sub>2</sub>), (a<sub>3</sub>), it suffices to repeat Section 6 from [12] modulo to the substitution  $t \mapsto (T-t)$ .

Combining (5), (6) and (a<sub>2</sub>) (and taking into account (a<sub>1</sub>) along with the form of systems (3), (4)), we obtain

$$|y(t, t_0, y^0, v(\eta, \cdot)) - y(\eta, t)| < \delta \quad \text{for all } t \in I, \quad \eta \in \mathbf{R}^k \quad (7)$$



Finally, using partitions of unity and arguing as in [12] (the most detailed presentation is given in [16]) we obtain the existence of a family of controls  $\{\hat{v}_{\eta,\beta}(\cdot)\}_{(\eta,\beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m_{p+1}}}$  which satisfies Conditions 4) and 5) of Theorem 2 and such that, for every  $(\eta, \beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m_{p+1}}$ , the trajectory  $t \mapsto y(t, t_0, y^0, \hat{v}_{(\eta,\beta)}(\cdot))$  is well-defined for all  $t \in I$  and

$$|y(t, t_0, y^0, \hat{v}_{(\eta,\beta)}(\cdot)) - y(t, t_0, y^0, v(\eta, \cdot))| < \delta \quad \text{for all } t \in I, \eta \in \mathbf{R}^k \quad (8)$$

Combining (7), (8) with Assumption 3) of Theorem 2, and taking into account that  $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ , we obtain that the family  $\{\hat{v}_{(\eta,\beta)}(\cdot)\}_{(\eta,\beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m_{p+1}}}$  satisfies Condition 6) of Theorem 2 as well.

The proof of Theorem 2 is complete. This completes the proof of Theorem 1.

## REFERENCES

1. Borisov V.F., Zelikin M.I. Chattering arcs in the time-optimal robots control problem // Applied Mathematics and Mechanics. – 1988. – **52**. – P. 939–946.
2. Brunovsky P. A classification of linear controllable systems // Kybernetika. – 1970. – **6**. – P. 173–188.
3. Celikovsky S., Nijmeijer H. Equivalence of nonlinear systems to triangular form: the singular case. // Systems and Control Letters. – 1996. – **27**. – P. 135–144.
4. Cheng D., Isidori A., Respondek W., Tarn T.J. Exact linearization of nonlinear systems with outputs // Math. Syst. Theory. – 1988. – **21**. – P. 63–83.
5. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Sontag E.D., Subbotin A.I. Asymptotic controllability implies feedback stabilization // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1997. – **42**. – P. 1394–1407.
6. Fliess M., Levine J., Martin Ph., Rouchon R. Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples // Int. J. Control. – 1995. – **61**. – P. 1327–1361.
7. Jakubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems // Bull. Acad. Sci. Polonaise Ser. Sci. Math. – 1980. – **28**. – P. 517–522.
8. Kokotovic P.V., Sussmann H.J. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems // Syst. and Contr. Lett. – 1989. – **13**. – P. 125–133.
9. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of Theory of Functions and Functional Analysis. – Translated from the First Russian Edition by Leo F. Boron, Graylock Press, Rochester, N.Y., 1957.



10. Korobov V.I. Controllability and stability of certain nonlinear systems // *Differencial'nie Uravneniya*. – 1973. – **9**. – P 614–619.
11. Korobov V.I., Pavlichkov S.S., Schmidt W.H. Global robust controllability of the triangular integro-differential Volterra systems // *J. Math. Anal. Appl.* – 2005. – **309**. – P. 743–760.
12. Korobov V.I., Pavlichkov S.S. Global properties of the triangular systems in the singular case // *J. Math. Anal. Appl.* – 2008. – **342**. – P. 1426–1439.
13. Kovalev A.M., Scherbak V.F. *Upravlyaemost', nabludaemost', identificiruemost' dinamicheskikh sistem*. – Naukova Dumka, Kiev, 1980.
14. Nam K., Arapostathis A. A model reference adaptive control scheme for pure-feedback nonlinear systems // *IEEE Trans. Autom. Contr.* – 1988. – **33**. – P. 803–811.
15. Pavlichkov S.S. Generalized coordinate-free triangular form: global controllability and feedback triangulation // *Vestn. Kharkovskogo Universiteta, Ser. Matem. Prikl. Matem., Mech.* – 2007. – **790**. – P. 89–114.
16. Pavlichkov S.S. PhD Thesis, Kharkov 2001.
17. Respondek W. Global aspects of linearization, equivalence to polynomial forms and decomposition of nonlinear control systems, in: M. Fliess and M. Hazewinkel eds. // *Algebraic and Geom. Meth. in Nonlinear Control Theory*. – 1986. – Reidel, Dordrecht. – P. 257–284.
18. Sklyar G.M., Sklyar K.V., Ignatovich S.Yu. On the extension of the Korobov's class of linearizable triangular systems by nonlinear control systems of the class  $C^1$  // *Systems and Control Letters*. – 2005. – **54**. – P. 1097–1108.
19. Sontag E.D. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. – NY.: Springer Verlag, 1990.
20. Tsiniias J. A theorem on global stabilization of nonlinear systems by linear feedback // *Syst. Contr. Lett.* – 1991. – **17**. – P. 357–362.
21. Tsiniias J., Partial-state global stabilization for general triangular systems // *Syst. Contr. Lett.* – 1995. – **24**. – P 139–145.

Article history: Received: 23 April 2009; Final form: 11 May 2008;

Accepted: 14 May 2008.



## АНОТАЦІЇ

УДК 514

**О комплексних підмноговидах з мінімальною голоморфною кривиною грасманового образу**

Л и к о в а О. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2009, № 850. Математика, прикладна математика і механіка, с. 3–10 .

У роботі досліджено комплексні підмноговиди  $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$  з мінімальною голоморфною кривиною грасманового образу.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 519.3: 517.98

**Порівняльний аналіз поняття компактного субдиференціалу**

С т о н я к і н Ф. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2009, № 850. Математика, прикладна математика і механіка, с. 11–21 .

У цій роботі здійснюється порівняння нещодавно запропонованого поняття компактного субдиференціалу з медіанною множиною К.М.Гарга, субдиференціалами Ф.Кларка, Ф.Мішеля – Ж.-П.Пено, субдиференціалом та супердиференціалом Б.М.Ппеничного, а також з контингентною похідною Ж.-П.Обена.

Бібліогр.: 14 найм.

УДК 517.956.227, 517.984

**О спектральних задачах, породжених модифікованою та класичною задачами Стефана**

В о й т и ц к и й В. І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2009, № 850. Математика, прикладна математика і механіка, с. 22–36 .

У роботі розглядається спектральна задача, яка виникає після лінеаризації модификованої та класичної задачі Стефана. За допомогою узагальнених формул Гріна задача зводиться до спектральної задачі для лінійних сомоспрямиених операторних матриць, діючих у гільбертовому просторі. Доведено, що спектр задачі складається з гілки додатніх нормальних власних значень та, можливо, зі скінченної або нескінченної кількості від'ємних власних значень. Система власних елементів є повною та ортогональною.

Бібліогр.: 17 найм.

УДК 533.72

**Гвинтові течії з густинами, що частково залежать від температур**

Г о р д е в с ь к и й В. Д. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2009, № 850. Математика, прикладна математика і механіка, с. 37–44 .

Побудовано наближені бімодальні розв'язки рівняння Больцмана з модами спеціального вигляду. Відповідні течії в газі з пружних куль є гвинтами,



які прискорюються та згущуються, причому їх густини частково залежать від температур. Здобуто деякі достатні умови довільної мализни змішаного відхилю між частинами рівняння.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.9

**Розв'язання задачі синтезу для нелінійної керованої системи**

Ч о к е Р і в е р о А. Е. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2009, № 850. Математика, прикладна математика і механіка, с. 45–51 .

У даній роботі, використовуючи запропонований В.І. Коробовим метод функції керованості, наведено розв'язання задачі глобального синтезу для нелінійної системи  $\dot{x}_1 = u$ ,  $\dot{x}_2 = x_1^3$ ,  $|u| \leq 1$ , т.е. знайдено множину позиційних обмежених керувань  $u = u(x_1, x_2)$ , які задовольняють нерівність  $|u(x_1, x_2)| \leq 1$ , і таких, що траєкторія системи  $\dot{x}_1 = u(x_1, x_2)$ ,  $\dot{x}_2 = x_1^3$ , яка починається в початковій точці  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ , закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу  $T(x_0)$ .

Мал.: 4. Бібліогр.: 15 найм.

УДК 531.36

**Вплив дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання у середовищі, що чинить опір, дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною**

К о н о н о в Ю. М., К и с е л е в а Н. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2009, № 850. Математика, прикладна математика і механіка, с. 52–56 .

Оцінений вплив дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання дзиги Лагранжа з довільною осесиметричною порожниною, яка повністю заповнена ідеальною рідиною. На прикладі еліпсоїдної порожнини проведені чисельні дослідження областей стійкості.

Мал.: 1. Бібліогр.: 5 найм.

УДК 517.948

**Розклад Вольда для поліноміальних послідовностей**

З а г о р о д н ю к С. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2009, № 850. Математика, прикладна математика і механіка, с. 57–70 .

У роботі одержано розклад Вольда для поліноміальних послідовностей у гільбертовому просторі  $H$ , тобто послідовностей вигляду  $x_n = p_n(A)x_0$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ , де  $A$  - самоспряжений оператор в  $H$ , а  $p_n$  - ортогональні многочлени на дійсній осі. Також вводиться і вивчається поняття індексу сингулярності для поліноміальних послідовностей.

Бібліогр.: 8 найм.



УДК 517.9:535.4

**Дифракція плоскої акустичної хвилі на сфері з круговим отвором**

Резуненко В. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2009, № 850. Математика, прикладна математика і механіка, с. 71–77.

Знайдена і обернена головна частина матричного оператора задачі дифракції плоскої акустичної хвилі на сфері з круговим отвором. Регуляризація задачі базується на застосуванні техніки інтегрального перетворення типу Абеля. В результаті одержано ефективно розв'язувану нескінчену систему алгебраїчних рівнянь Фредгольма II роду з компактним оператором у гільбертовому просторі  $l_2$ . Розглянуті окремі випадки формулювання проблеми.

Бібліогр.: 17 найм.

УДК 517.981

**Редукція аксіом лінійного простору**

Лешневич Р. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2009, № 850. Математика, прикладна математика і механіка, с. 78–82.

Пропонується означення лінійного (векторного) простору на основі тільки 4 аксіом.

УДК 531/534:57

**Системи з нецілим числом ступенів свободи**

Трегубов В. П. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2009, № 850. Математика, прикладна математика і механіка, с. 83–90.

Представлені результати дослідження особливостей механічних систем з нецілим числом ступенів свободи. Встановлено, що такі системи, на відміну від систем з традиційними упруговязкими властивостями, за будь-яких значеннях коефіцієнта в'язкого тертя мають максимум амплітудно-частотної характеристики, а при зверненні цих коефіцієнтів у нескінченність мають додаткові резонансні частоти.

Мал.: 4. Бібліогр.: 9 найм.

УДК 517.958:57+531/534:57

**Математичне моделювання плоских рухів живої клітини**

Кривовичев Г.В., Трегубов В.П. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2009, № 850. Математика, прикладна математика і механіка, с. 91–102.

Робота присвячена побудові механічної і математичної моделей рухової органели живої клітини. Рухи органели розглядаються як окремий випадок біологічної рухливості. Розглядається новий підхід до моделювання, який заснований на рішенні першої основної задачі динаміки. При рішенні задачі



розглядалися рухи, які характерні для рухових органел в нормі і для зразків мутантів. Сформульовано припущення про вигляд залежності узагальнених сил від узагальнених координат і швидкостей. В результаті комп'ютерного моделювання отримані різні паттерни биття, які характерні для рухових органел живих клітин.

Мал.: 5. Бібліогр.: 22 найм.

УДК 517.977.1+517.935.4

**Негладкі системи узагальненого трикутного виду з багатьма вхідними та виходами**

П а в л и ч к о в С. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2009, № 850. Математика, прикладна математика і механіка, с. 103–110 .

Слідом за роботою [Korobov V.I., Pavlichkov S.S. Global properties of the triangular systems in the singular case// J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **342**. – P. 1426–1439], ми розглядаємо клас трикутних систем з векторними входом та виходом так званого "узагальненого трикутного виду який задається тими ж умовами, що й у роботі [Korobov V.I., Pavlichkov S.S. Global properties of the triangular systems in the singular case// J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **342**. – P. 1426–1439] за винятком наступного: у порівнянні з вищезгаданою роботою, ми позбуваємося від вимоги належності правої частини системи класу  $C1$  і припускаємо замість цього що права частина задовольняє усього лише локальну умову Липшица за фазовими змінними та за по керуваннями. У даній роботі доведено, що цей новий клас є глобально керованим (у класі керувань  $C\mu$  з будь-яким  $\mu \geq 0$  включаючи  $C\infty$ ). Доведення ґрунтується на модифікації конструкції, запропонованої у роботі [Korobov V.I., Pavlichkov S.S. Global properties of the triangular systems in the singular case// J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **342**. – P. 1426–1439]. Хоча отриманий новий клас є більш широким у порівнянні з тим, що досліджувався в [Korobov V.I., Pavlichkov S.S. Global properties of the triangular systems in the singular case// J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **342**. – P. 1426–1439], ми доводимо тільки його глобальну керованість (у той час як у вищезгаданій роботі були отримані більш сильні результати для випадку  $C1$ ).

Бібліогр.: 21 найм.



## ЗМІСТ

|  |     |
|--|-----|
| <b>Лыкова О.В.</b> О комплексных подмногообразиях с минимальной голоморфной кривизной грассманова образа   | 3   |
| <b>Стонякин Ф.С.</b> Сравнительный анализ понятия компактного субдифференциала   | 11  |
| <b>Войтицкий В. И.</b> О спектральной задаче, порождённой модифицированной и классической задачами Стефана   | 22  |
| <b>Гордевский В. Д.</b> Винтовые потоки с плотностями, частично зависящими от температур   | 37  |
| <b>Choque Rivero A.E.</b> Solution of a Synthesis Problem of a Nonlinear Control System  | 45  |
| <b>Кононов Ю.Н., Киселёва Н. В.</b> Влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерного вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с идеальной жидкостью | 52  |
| <b>Загороднюк С.М.</b> Разложение Вольда для полиномиальных последовательностей  | 57  |
| <b>Резуненко В.А.</b> Дифракция плоской акустической волны на сфере с круговым отверстием  | 71  |
| <b>Leśniewicz R.</b> Редукция аксиом линейного пространства  | 78  |
| <b>Трегубов В.П.</b> Системы с нецелым числом степеней свободы   | 83  |
| <b>Кривовичев Г.В., Трегубов В.П.</b> Математическое моделирование плоских движений живой клетки   | 91  |
| <b>Pavlichkov S. S.</b> Non-smooth systems of generalized MIMO triangular form   | 103 |
| <b>АНОТАЦІЇ</b>  | 111 |



## CONTENTS

|  |     |
|--|-----|
| <b>Lykova O.V.</b> On complex submanifolds with minimal holomorphic curvature of the Grassmann image   | 3   |
| <b>Stonyakin F.S.</b> Comparison analysis of notion of compact subdifferential   | 11  |
| <b>Voytitsky V.I.</b> On the spectral problems generated by modified and classical Stefan problems   | 22  |
| <b>Gordevskyy V.D.</b> Spiral flows with densities, partially depending on the temperatures  | 37  |
| <b>Choque Rivero A.E.</b> Solution of a Synthesis Problem of a Nonlinear Control System  | 45  |
| <b>Kononov Yu.N., Kiseleva N.V.</b> Influence of dissipative and permanent moments on stability of uniform rotation in the resisting environment of whipping top Lagrange with an ideal liquid | 52  |
| <b>Zagorodnyuk S.M.</b> Wold's decomposition for polynomial sequences  | 57  |
| <b>Rezunencko V. A.</b> Diffraction the plane acoustic wave on the sphere with a circular aperture   | 71  |
| <b>Leśniewicz R.</b> Reduction of axioms of linear spaces  | 78  |
| <b>Tregubov V.P.</b> Systems with non-integer number degrees of freedom  | 83  |
| <b>Krivovichev G.V., Tregubov V.P.</b> Mathematical modelling of planar movements of living cells  | 91  |
| <b>Pavlichkov S. S.</b> Non-smooth systems of generalized MIMO triangular form   | 103 |
| <b>SUMMARY</b>   | 111 |







## Visit our Web-page

<http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/>

to find

- Information for Manuscript Preparation
- Abstracts
- Editorial Board

*Збірник наукових праць*

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна  
№ 850 Серія "Математика, прикладна математика і механіка"  
Російською, українською, англійською мовами

Підписано до друку 30.05.09 р.  
Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.  
Умовн.- друк. арк. – 7,5  
Обл.- вид. арк. – 8,7  
Наклад 100 прим.  
Ціна договірна

61077, Харків, пл. Свободи, 4, Харківський національний університет  
імені В.Н.Каразіна *8-44*  
Надруковано: ХНУ імені В.Н.Каразіна  
61077, Харків, пл. Свободи, 4, тел. 705-24-32

Свідцтво про державну реєстрацію ДК № 3367 від 13.01.09 р.



