

## Волновые процессы в двухслойной системе несмешивающихся токонесущих жидкостей

И.Д. Борисов, С.А. Пославский, Ю.И. Руднев

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина

Исследуются волновые процессы в двухслойной системе несмешивающихся токонесущих жидкостей, заполняющих цилиндрический сосуд прямоугольного сечения. Показано, что равновесное состояние рассматриваемой системы, отвечающее плоской поверхности раздела жидкостей и однородному распределению электрического тока, при определенных условиях теряет устойчивость, сменяясь волновым режимом движения. На основе галеркинских аппроксимаций уравнений магнитной гидродинамики проведены расчеты границы области устойчивости в пространстве безразмерных параметров системы. Выяснен характер влияния основных параметров на пороги волнообразования и формы генерируемых волн.

2000 Mathematics Subject Classification 76W05.

### Введение

Исследования механизмов генерации волн и сопровождающих их физических эффектов в электропроводных жидкостях имеют важное прикладное значение. Большой интерес проявляется, в частности, к МГД-процессам, наблюдаемым в электролизерах для производства алюминия. Хорошо известно [1], что при определенных условиях стационарное состояние расплавов электролита и алюминия теряет устойчивость, сменяясь волновым режимом движения. Это приводит к значительному снижению выхода алюминия по току и увеличению удельных энергозатрат на его производство.

Физический механизм потери устойчивости, приводящий к появлению волн на поверхности раздела "металл – электролит", был описан в работе [2]. В основе этого механизма лежит взаимодействие вертикального магнитного поля с горизонтальными токами, появляющимися в электролите и металле при возмущениях их поверхности раздела. В [3] – [9] и целом ряде других работ были предложены упрощенные модели на основе теории мелкой воды для описания динамики поверхности раздела расплавов.



Данная работа продолжает исследования, начатые в [10]. По сравнению с [10] дополнительно учитывается ряд факторов, оказывающих существенное влияние на развитие волновых процессов в алюминиевых электролизерах. К числу таких факторов относятся, в частности, контактные сопротивления на границах раздела электропроводных сред. Показано также, что значительное влияние на пороги генерации волн оказывают токи, индуцируемые движением жидкостей. Исследовано влияние горизонтальных компонент индукции внешнего магнитного поля.

### 1. Физическая постановка задачи

Рассматривается система двух несмешивающихся жидкостей, заполняющих цилиндрическую полость, ограниченную плоскими горизонтальными поверхностями электродов и непроводящей боковой стенкой, как показано на рис.1. Пусть  $\Omega_1, \Omega_2$  – области, занимаемые нижней и верхней жидкостями,  $\Omega_3, \Omega_4$  – верхний и нижний электроды, соответственно. Верхний электрод, для определенности, будем считать анодом, нижний – катодом. Пусть  $\partial\Omega_k$

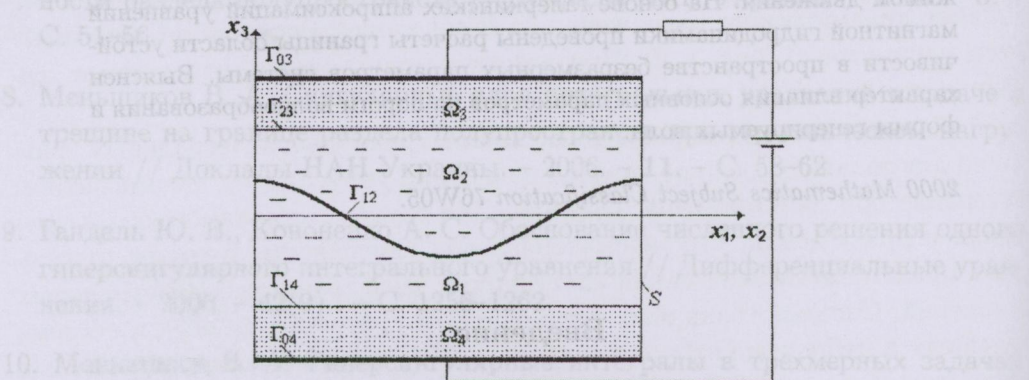


Рис. 1: Схема МГД – системы

- граница области  $\Omega_k$ ,  $\Gamma_{ik} := \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_k$ ,  $i, k = \overline{1, 4}$ ,  $i < k$  – общий участок границ двух соприкасающихся областей  $\Omega_i, \Omega_k$ . Отметим, что в принятых обозначениях  $\Gamma_{12}$  означает поверхность раздела жидкостей. Верхнюю грань анода и нижнюю грань катода обозначим  $\Gamma_{03}, \Gamma_{04}$ , соответственно. Боковую поверхность цилиндрической области  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, 4}$  будем обозначать через  $S_k$ .

Введем прямоугольную систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , связанную с сосудом. Ось  $Ox_3$  этой системы направим вертикально вверх; направления осей  $Ox_1, Ox_2$  и выбор начала системы координат будут уточнены ниже. Базисные орты осей  $Ox_k$  обозначим через  $\vec{e}_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$ .

Прохождение тока по рассматриваемой электрической цепи приводит к появлению электромагнитных сил с объемной плотностью  $\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B}$ , где



$\vec{j}$  – объемная плотность тока,  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля. Необходимые условия равновесия жидкостей имеют вид:

$$-\nabla p_0^{(k)} + \rho_k \vec{g} + \vec{j}^{(k)} \times \vec{B}^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega_k, k = 1, 2, \quad (1)$$

$$p_0^{(1)} = p_0^{(2)} \text{ на } \Gamma_{12}, \quad (2)$$

где  $p_0^{(k)}$  – гидростатическое давление,  $\rho_k$  – плотность  $k$ -й жидкости,  $\vec{g}$  – ускорение силы тяжести. Верхний индекс в круглых скобках в (1)–(2) и далее означает номер области, в которой определена та или иная функция.

Рассмотрим равновесное состояние, отвечающее горизонтальной поверхности раздела жидкостей  $x_3 \equiv 0$  и однородному распределению электрического тока

$$\vec{j} = -j_0 \vec{e}_3 \quad (j_0 = \text{const} > 0) \text{ в } \Omega_k, k = \overline{1, 4}. \quad (3)$$

Нетрудно убедиться в том, что условия равновесия (1)–(2) будут выполнены, если магнитное поле в областях, занятых жидкостями, представимо в виде:

$$\vec{B}^{(k)} = \frac{\mu_0 j_0}{2} \vec{x} \times \vec{e}_3 + \nabla \Phi(x_1, x_2) \times \vec{e}_3 + \vec{B}^0 \text{ в } \Omega_k, k = 1, 2, \quad (4)$$

где  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума (магнитная постоянная),  $\Phi(x_1, x_2)$  – произвольная гармоническая функция,  $\vec{B}^0$  – постоянная составляющая индукции магнитного поля. Гидростатическое давление в жидкостях определяется при этом следующим равенством:

$$p_0^{(k)} = -\rho_k g x_3 - \frac{\mu_0 j_0^2}{4} (x_1^2 + x_2^2) - j_0 \Phi(x_1, x_2) + (\vec{j}_0 \times \vec{B}^0) \cdot \vec{x} + \text{const}, k = 1, 2. \quad (5)$$

Отметим, что вектор-функция  $\vec{B}(\vec{x})$  удовлетворяет уравнениям Максвелла для магнитного поля:

$$\text{rot } \vec{B}^{(k)} = \mu_0 \vec{j}_0, \text{ div } \vec{B}^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega_k, k = \overline{1, 4};$$

При соответствующем выборе функции  $\Phi(x_1, x_2)$  и векторной константы  $\vec{B}^0$  представление (4) позволяет с той или иной степенью точности аппроксимировать магнитные поля промышленных алюминиевых электролизеров.

## 2. Математическая формулировка эволюционной задачи

Пусть  $J$  – суммарный ток, протекающий по рассматриваемой МГД-системе. Как показывают эксперименты, существует критическое значение силы тока  $J_{\text{кр}}$  такое, что при  $J > J_{\text{кр}}$  равновесное состояние жидкостей теряет устойчивость, сменяясь волновым режимом движения. В этом режиме на поверхности раздела жидкостей генерируются крупномасштабные волны. Опираясь на экспериментальные данные, можно утверждать также, что при малых значениях  $\Delta J := J - J_{\text{кр}} > 0$  возникающие колебания жидкостей носят линейный



характер. Для описания этих колебаний воспользуемся линеаризованными уравнениями магнитной гидродинамики.

Обозначим через  $\zeta(t, x_1, x_2)$  отклонение поверхности раздела от равновесного положения, через  $\vec{v}(t, \vec{x})$  - поле скоростей жидкостей. Функции  $\zeta(t, x_1, x_2)$ ,  $\vec{v}(t, \vec{x})$  будем считать малыми величинами первого порядка малости. Гидродинамическое давление  $\tilde{p}$ , плотность электрического тока  $\tilde{j}$  и потенциал электрического поля  $\tilde{\psi}$ , отвечающие волновому режиму движения жидкостей, представим в виде суммы равновесных значений этих величин и их малых возмущений:

$$\tilde{p}(t, \vec{x}) = p_0(\vec{x}) + p(t, \vec{x}), \quad \tilde{j}(t, \vec{x}) = \vec{j}_0(\vec{x}) + \vec{j}(t, \vec{x}), \quad \tilde{\psi}(t, \vec{x}) = \psi_0(\vec{x}) + \psi(t, \vec{x}).$$

В линейном приближении малые движения жидкостей вблизи равновесного состояния описываются следующей системой уравнений, граничных и начальных условий:

$$\rho_k \frac{\partial \vec{v}^{(k)}}{\partial t} = -\nabla p^{(k)} + \eta_k \Delta \vec{v}^{(k)} + \vec{j}^{(k)} \times \vec{B}^{(k)} \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = 1, 2; \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}^{(k)} = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = 1, 2; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_3^{(1)} = v_3^{(2)}, \quad v_\alpha^{(1)} = v_\alpha^{(2)}, \quad \alpha = 1, 2 \quad \text{на } \Gamma_{12}; \quad (8)$$

$$\left\{ \eta \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) \right\}_{\Gamma_{12}} = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad \text{на } \Gamma_{12}; \quad (9)$$

$$\left\{ -p + \eta \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right\}_{\Gamma_{12}} = g(\rho_1 - \rho_2) \zeta \quad \text{на } \Gamma_{12}; \quad (10)$$

$$\vec{v}^{(k)} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_k \setminus \Gamma_{12}, \quad k = 1, 2; \quad (11)$$

$$\vec{j}^{(k)} = \begin{cases} \sigma_k (-\nabla \psi^{(k)} + \vec{v}^{(k)} \times \vec{B}), & k = 1, 2; \\ -\sigma_k \nabla \psi^{(k)}, & k = 3, 4; \end{cases} \quad (12)$$

$$\Delta \psi^{(k)} = \begin{cases} \operatorname{div} (\vec{v}^{(k)} \times \vec{B}) & \text{в } \Omega_k, \quad k = 1, 2; \\ 0 & \text{в } \Omega_k, \quad k = 3, 4; \end{cases} \quad (13)$$

$$\{\psi\}_{\Gamma_{12}} = -\varkappa_{12}(\vec{n} \cdot \vec{j}) - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} j_0 \zeta, \quad \{\vec{n} \cdot \vec{j}\}_{\Gamma_{12}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{12}; \quad (14)$$

$$\{\psi\}_{\Gamma_{ik}} = \varkappa_{ik} \sigma_k \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial n}, \quad \left\{ \sigma \frac{\partial \psi}{\partial n} \right\}_{\Gamma_{ik}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{ik}, \quad ik = 14, 23; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_k, \quad k = \overline{1, 4}; \quad (16)$$

$$\psi^{(3)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{03}; \quad \psi^{(4)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{04}; \quad (17)$$



$$\zeta|_{t=0} = \zeta_0(x_1, x_2) \text{ на } \Gamma_{12}; \vec{v}^{(k)}|_{t=0} = \vec{v}_0^{(k)}(\vec{x}) \text{ в } \Omega_k, k = 1, 2. \quad (18)$$

Здесь  $\eta_k$  - динамическая вязкость  $k$ -й жидкости;  $\sigma_k (= \text{const})$  - удельная электропроводность среды в области  $\Omega_k$ ;  $\varkappa_{ik} (= \text{const})$  - удельное контактное сопротивление на поверхности  $\Gamma_{ik}$ . Вектор единичной нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $\Gamma_{ik}$  предполагается направленным в сторону области с большим индексом. Фигурные скобки означают скачок заключенной в них величины на поверхности раздела сред:  $\{A\}_{\Gamma_{ik}} := (A^{(k)} - A^{(i)})|_{\Gamma_{ik}}$ .

Уравнения движения жидкостей (6) записаны в безындукционном приближении. Равенства (8) - (10) - представляют собой, соответственно, линеаризованные кинематические и динамические условия на поверхности раздела жидкостей. На твердой стенке, как обычно, приняты условия прилипания частиц жидкости (11). Для возмущений тока и потенциала электрического поля принят закон Ома (12). Соотношения (14) - (15) представляют собой линеаризованные условие сопряжения для потенциала электрического поля с учетом контактного сопротивления и условие непрерывности нормальной компоненты электрического тока на поверхностях раздела сред.

Предполагается, что верхняя грань анода  $\Gamma_{03}$  и нижняя грань катода  $\Gamma_{04}$  представляют собой проводящие пластины, удельная электропроводность которых значительно превышает удельную электропроводность электродов. В этом случае потенциал электрического поля на каждой из поверхностей  $\Gamma_{03}$ ,  $\Gamma_{04}$  можно считать постоянным, а для возмущений потенциала принять однородные условия (17). При этом дополнительно предполагается, что суммарный ток, протекающий по рассматриваемой электрической цепи, в процессе движения жидкостей остается неизменным,  $J = \text{const}$ .

В начальных условиях (18) вектор-функции  $\vec{v}_0^{(k)}(\vec{x})$ ,  $k = 1, 2$  должны удовлетворять уравнениям (7) и условиям (8), (9), (11), а функция  $\zeta_0(x_1, x_2)$  - условию

$$\int_{\Gamma_{12}} \zeta_0(x_1, x_2) d\Gamma = 0. \quad (19)$$

Вопрос об устойчивости равновесного состояния жидкостей сводится к исследованию устойчивости тривиального решения эволюционной задачи (6) - (18) относительно начальных возмущений  $\zeta_0(x, y)$ ,  $\vec{v}_0(\vec{x})$ .

### 3. Галеркинская аппроксимация эволюционной задачи

Приближенное решение задачи (6) - (18) будем отыскивать, применяя метод Галеркина. Предварительно введем поле малых смещений частиц жидкостей  $\vec{u}(t, \vec{x})$ , связанное с полем скоростей  $\vec{v}(t, \vec{x})$  следующим соотношением:

$$\vec{v}^{(k)}(t, \vec{x}) = \frac{\partial \vec{u}^{(k)}(t, \vec{x})}{\partial t} \text{ в } \Omega_k, k = 1, 2. \quad (20)$$



Введем систему базисных функций  $\{\zeta_m(x_1, x_2)\}_{m=1}^{\infty}$ , определенных на поверхности  $\Gamma_{12}$  и удовлетворяющих условию (19), а также систему соленоидальных вектор-функций  $\{\vec{u}_m(\vec{x})\}_{m=1}^{\infty}$ , определенных в области  $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$  и удовлетворяющих условиям:

$$\{\vec{u}_m\}_{\Gamma_{12}} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{u}_m|_{\Gamma_{12}} = \zeta_m, \quad \left\{ \eta \left( \frac{\partial u_{\alpha m}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3m}}{\partial x_{\alpha}} \right) \right\}_{\Gamma_{12}} = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Поле смещений частиц жидкостей и отклонение поверхности  $\Gamma_{12}$  от равновесного положения приближенно представим в виде:

$$\vec{u}^{(k)}(t, \vec{x}) \simeq \sum_{m=1}^N q_m(t) \vec{u}_m^{(k)}(\vec{x}), \quad k = 1, 2; \quad \zeta \simeq \sum_{m=1}^N q_m(t) \zeta_m(x_1, x_2), \quad (21)$$

где  $q_m(t)$  – функции времени  $t$ , подлежащие определению. Согласно (20) для поля скоростей  $\vec{v}^{(k)}(t, \vec{x})$  имеет место представление вида:

$$\vec{v}^{(k)}(t, \vec{x}) \simeq \sum_{m=1}^N \dot{q}_m(t) \vec{u}_m^{(k)}(\vec{x}), \quad k = 1, 2 \quad \left( \dot{q}_m(t) := \frac{dq_m(t)}{dt} \right). \quad (22)$$

Сразу же отметим, что число базисных функций  $N$  в (21), (22) будет определяться из условий практической сходимости вычислительного процесса, описанного ниже.

Обозначим через  $\psi'_m(\vec{x})$ ,  $\vec{j}'_m(\vec{x})$  возмущения потенциала электрического поля и токов, отвечающие отклонениям поверхности раздела жидкостей  $\zeta = \zeta_m$  при  $\vec{v} = 0$ . Согласно (12)–(17) функции  $\vec{j}'_m(\vec{x})$ ,  $\psi'_m(\vec{x})$  являются решением следующей краевой задачи:

$$\vec{j}'_m^{(k)} = -\sigma_k \nabla \psi'_m^{(k)} \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = \overline{1, 4}; \quad (23)$$

$$\Delta \psi'_m^{(k)} = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = \overline{1, 4}; \quad (24)$$

$$\{\psi'_m\}_{\Gamma_{12}} = \varepsilon_{12} \sigma_1 \frac{\partial \psi'_m^{(1)}}{\partial n} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} j_0 \zeta_m, \quad \left\{ \sigma \frac{\partial \psi'_m}{\partial n} \right\}_{\Gamma_{12}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{12}; \quad (25)$$

$$\{\psi'_m\}_{\Gamma_{ik}} = \varepsilon_{ik} \sigma_k \frac{\partial \psi'_m^{(k)}}{\partial n}, \quad \left\{ \sigma \frac{\partial \psi'_m}{\partial n} \right\}_{\Gamma_{ik}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{ik}, \quad ik = 14, 23; \quad (26)$$

$$\frac{\partial \psi'_m^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_k, \quad k = \overline{1, 4}; \quad (27)$$

$$\psi'_m^{(3)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{03}; \quad \psi'_m^{(4)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{04}; \quad (28)$$

Введем функции  $\psi''_m(\vec{x})$ ,  $\vec{j}''_m(\vec{x})$ , определяемые по функциям  $\vec{u}_m(\vec{x})$  как решение краевой задачи:

$$\vec{j}''_m^{(k)} = \begin{cases} \sigma_k \left( -\nabla \psi''_m^{(k)} + \vec{u}_m^{(k)} \times \vec{B} \right), & k = 1, 2; \\ -\sigma_k \nabla \psi''_m^{(k)}, & k = 3, 4; \end{cases} \quad (29)$$



$$\Delta \psi_m^{(k)} = \begin{cases} \operatorname{div}(\vec{u}_m^{(k)} \times \vec{B}), & k = 1, 2; \\ 0, & k = 3, 4; \end{cases} \quad (30)$$

$$\{\psi_m''\}_{\Gamma_{12}} = -\varkappa_{12}(\vec{n} \cdot \vec{j}_m^{(1)}), \left\{ \sigma \frac{\partial \psi_m''}{\partial n} \right\}_{\Gamma_{12}} = \left\{ \sigma \vec{n} \cdot (\vec{u}_m \times \vec{B}) \right\}_{\Gamma_{12}} \quad \text{на } \Gamma_{12}; \quad (31)$$

$$\{\psi_m''\}_{\Gamma_{ik}} = \varkappa_{ik} \sigma_k \frac{\partial \psi_m^{(k)}}{\partial n}, \left\{ \sigma \frac{\partial \psi_m''}{\partial n} \right\}_{\Gamma_{ik}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{ik}, \quad ik = 14, 23; \quad (32)$$

$$\frac{\partial \psi_m^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_k, \quad k = \overline{1, 4}; \quad (33)$$

$$\psi_m^{(3)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{03}; \quad \psi_m^{(4)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{04}; \quad (34)$$

Используя введенные функции, возмущения потенциала электрического поля, отвечающие полю скоростей (22) и возмущениям поверхности раздела жидкостей (21), представим в виде:

$$\psi^{(k)} = \sum_{m=1}^N \left( q_m(t) \psi_m^{(k)}(\vec{x}) + \dot{q}_m(t) \psi_2^{(k)}(\vec{x}) \right), \quad k = \overline{1, 4}. \quad (35)$$

Подставляя (22), (35) в уравнение (6) и умножая скалярно обе части полученного равенства на  $\vec{u}_i^*$  (звездочка означает комплексно сопряженную величину), после интегрирования по области  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  с использованием формулы Грина для оператора Стокса [10] и условий (9), (10) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $q_m(t)$ :

$$\mathcal{A} \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + (\mathcal{D} + \mathcal{Q}) \frac{dq(t)}{dt} + (\mathcal{B} + \mathcal{M}) q(t) = 0. \quad (36)$$

$$q(t) := (q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t))^T$$

Здесь  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  – матрицы кинетической и потенциальной энергий,  $\mathcal{M}$  – матрица МГД – взаимодействия,  $\mathcal{D}$  – матрица вязкой диссипации,  $\mathcal{Q}$  – матрица джоулевой диссипации энергии,  $q(t)$  – вектор-столбец с компонентами  $q_m(t)$ . Все матрицы, входящие в (36), определены ниже.

Представим правые части в начальных условиях (18) в виде разложений в ряды по базисным функциям:

$$\zeta_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \zeta_m(x_1, x_2), \quad \vec{v}_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \vec{u}_m(\vec{x}).$$

Коэффициенты  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  выберем в качестве начальных значений для искомых функций  $q_m(t)$ ,  $\dot{q}_m(t)$ , соответственно:

$$q(0) = \alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T, \quad \frac{dq(0)}{dt} = \beta := (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)^T. \quad (37)$$



Матрицы  $A$  и  $B$  в уравнении (36) имеют вид:

$$A := [a_{ik}]_{i,j=1}^N, \quad a_{ik} = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \rho \vec{u}_i^* \vec{u}_k d\Omega, \quad i, k = \overline{1, N}; \quad (38)$$

$$B := [b_{ik}]_{i,j=1}^N, \quad b_{ik} = \int_{\Gamma_{12}} g (\rho_1 - \rho_2) \zeta_i^* \zeta_k d\Gamma, \quad i, k = \overline{1, N}; \quad (39)$$

Отметим, что данное выше название матриц  $A$  и  $B$  объясняется тем, что квадратичные формы  $\dot{q}^* A \dot{q}$  и  $q^* B q$  представляют собой, соответственно, кинетическую и потенциальную энергию жидкостей.

Матрица  $D$  определяет диссипацию энергии, обусловленную вязкостью жидкостей,

$$D := [d_{ik}]_{i,k=1}^N, \quad d_{ik} = D(\vec{u}_i^*, \vec{u}_k), \quad i, k = \overline{1, N}, \quad (40)$$

$$D(\vec{\xi}, \vec{\chi}) := \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \sum_{m,n=1}^3 \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial \xi_m}{\partial x_n} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_m} \right) \left( \frac{\partial \chi_m}{\partial x_n} + \frac{\partial \chi_n}{\partial x_m} \right) d\Omega;$$

Матрица МГД-взаимодействия  $M$  связана с работой электромагнитных сил на перемещениях частиц жидкостей,

$$M := [m_{ik}]_{i,k=1}^N, \quad m_{ik} = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \sigma \vec{u}_i^* \cdot (\nabla \psi'_k \times \vec{B}) d\Omega, \quad i, k = \overline{1, N}. \quad (41)$$

Для матрицы  $Q$  имеет место следующее представление:

$$Q := [q_{ik}]_{i,k=1}^N, \quad q_{ik} = - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \sigma \vec{u}_i^* \cdot \left( (-\nabla \psi''_k + \vec{u}_k \times \vec{B}) \times \vec{B} \right) d\Omega, \quad i, k = \overline{1, N}. \quad (42)$$

Воспользовавшись формулой Грина (для оператора Лапласа) и учитывая уравнения и граничные условия краевой задачи (29)–(34), преобразуем (42) к виду:

$$q_{ik} = \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma} \vec{j}_i^{''*} \cdot \vec{j}_k^{''} d\Omega + \left( \varepsilon_{12} \int_{\Gamma_{12}} + \varepsilon_{14} \int_{\Gamma_{14}} + \varepsilon_{23} \int_{\Gamma_{23}} \right) (\vec{n} \cdot \vec{j}_i^{''*}) (\vec{n} \cdot \vec{j}_k^{''}) d\Gamma, \quad (43)$$

$$i, k = \overline{1, N}.$$

Здесь  $\Omega := \bigcup_{m=1}^4 \Omega_m$ ,  $\sigma$  – кусочно-постоянная функция, определенная в  $\Omega$  и совпадающая с  $\sigma_m$  в каждой из областей  $\Omega_m$ ,  $m = \overline{1, 4}$ . Из (43) легко следует положительная определенность матрицы  $Q$ . Квадратичная форма  $\dot{q}^* Q \dot{q}$  представляет собой энергию, выделяемую (в единицу времени) в виде джоулева тепла в областях  $\Omega_m$ ,  $m = \overline{1, 4}$  и на контактных сопротивлениях разделяющих их поверхностей. По этой причине  $Q$  названа выше матрицей джоулевой диссипации энергии.



Метод Галеркина позволил редуцировать исходную начально-краевую задачу (6)–(18) к задаче Коши (36), (37) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Можно показать, что при  $N \rightarrow \infty$  приближенное решение, определяемое согласно (21), (36), (37), сходится к (обобщенному) решению задачи (6)–(18).

Отыскивая решения уравнения (36) вида  $q(t) = \exp(\lambda t)c$ , приходим, как обычно, к алгебраической спектральной задаче:

$$(\lambda^2 A + \lambda(D + Q) + (B + M))c = 0, \quad (44)$$

$$c := (c_1, c_2, \dots, c_N)^T.$$

Пусть  $\lambda_k^N := \gamma_k^N + i\omega_k^N$  ( $i := \sqrt{-1}$ ),  $k = \overline{1, 2N}$  – собственные значения квадратичного пучка матриц (44). Условие устойчивости (неустойчивости) решений уравнения (36), как известно, имеет вид:

$$\max_{k=\overline{1, 2N}} \gamma_k^N < 0 (> 0) \text{ — условие устойчивости (неустойчивости)}. \quad (45)$$

В дальнейшем (45) принимается в качестве условия устойчивости (неустойчивости) равновесия рассматриваемой МГД-системы.

Пусть  $c_k^N := (c_{1k}^N, c_{2k}^N, \dots, c_{Nk}^N)^T$ ,  $k = \overline{1, 2N}$  – собственный вектор спектральной задачи (44), отвечающий собственному значению  $\lambda_k^N$ . В общем случае компоненты собственных векторов  $c_{lk}^N$  принимают комплексные значения,  $c_{lk}^N := c'_{lk}^N + ic''_{lk}^N$ ,  $k = \overline{1, 2N}$ ,  $l = \overline{1, N}$ . Зная  $\lambda_k^N, c_k^N$ , нетрудно выписать общее решение уравнения (36) и, тем самым, приближенное решение начально-краевой задачи (6)–(18). Для функций  $\zeta(t, \vec{x})$ , описывающих колебания поверхности раздела жидкостей, будем иметь, в частности,

$$\zeta \simeq \zeta^N(t, x_1, x_2) := \sum_{k=1}^{2N} \sum_{l=1}^N a_k \exp(\gamma_k^N t) (c'_{lk}^N \cos \omega_k^N t - c''_{lk}^N \sin \omega_k^N t) \zeta_l(x_1, x_2) \quad (46)$$

где  $a_k$  – постоянные, определяемые из начальных условий (37).

Отметим, что выражение (46) имеет место в предположении о том, что все собственные числа  $\lambda_k^N$  – простые.

Введем  $N$ -мерный вектор-столбец  $d := \lambda c$ . Заметим также, что  $A$  – положительно определенная матрица, так что существует обратная матрица  $A^{-1}$ . Преобразуем (44) к эквивалентной спектральной задаче:

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -A^{-1}(B + M) & -A^{-1}(D + Q) \end{array} \right) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \quad (47)$$

где  $I$  – единичная  $N \times N$  – матрица. Спектральная задача (47) более удобна для проведения численных расчетов.



#### 4. Реализация метода Галеркина

Практическая реализация метода Галеркина сводится к построению систем базисных функций  $\{\zeta_i(x_1, x_2)\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $\{\vec{u}_i(\vec{x})\}_{i=1}^{\infty}$ , отысканию решений краевых задач (23)–(28), (29)–(34), определению матричных коэффициентов уравнения (36) с последующим решением спектральной задачи (47).

Ограничимся рассмотрением сосуда с прямоугольным поперечным сечением. Вязкость обеих жидкостей будем считать малой. В качестве базисных функций  $\{\zeta_i(x_1, x_2)\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $\{\vec{u}_i(\vec{x})\}_{i=1}^{\infty}$  выберем собственные функции задачи о свободных нормальных колебаниях жидкостей в отсутствие токов и магнитного поля.

Эффективным методом решения задач гидродинамики в случае маловязких жидкостей является, как известно, метод пограничного слоя [12]. В соответствии с общей процедурой этого метода представим функции  $\vec{u}_i(\vec{x})$  в виде:

$$\vec{u}_i = \nabla \chi_i(\vec{x}) + \vec{w}_i(\vec{x}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (48)$$

где  $\chi_i(\vec{x})$  – потенциал поля смещений частиц идеальной жидкости, отвечающий  $i$ -й моде собственных колебаний,  $\vec{w}_i(\vec{x})$  – погранслойные функции, учитывающие влияние вязкости в тонких слоях, примыкающих к твердым стенкам и к поверхности раздела жидкостей.

В рассматриваемом случае функции  $\chi_i(\vec{x})$ ,  $\vec{w}_i(\vec{x})$  легко выписываются в явном виде (соответствующие выражения приведены в [10]). Это позволяет получить в явном виде выражения для элементов всех матриц в (36).

*Матрицы кинетической и потенциальной энергий.* Матрицы  $A$ ,  $B$  определяются, в основном, потенциальными составляющими поля смещений частиц жидкостей. Пренебрегая погранслойными функциями, для мод колебаний поверхности раздела жидкостей  $\zeta_i$  примем следующие выражения:

$$\zeta_i = a \cos(\kappa_{1i}x_1) \cos(\kappa_{2i}x_2) \quad (0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2), \quad (49)$$

$$\kappa_{1i} := \frac{\pi p_{1i}}{l_1}, \quad \kappa_{2i} := \frac{\pi p_{2i}}{l_2}, \quad p_{1i}, p_{2i} = 0, 1, 2, \dots, \quad p_{1i} + p_{2i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

где  $a$  – произвольный амплитудный множитель,  $l_1, l_2$  – горизонтальные размеры сосуда вдоль осей  $Ox_1, Ox_2$ , соответственно. Произвол в выборе  $a$  используется в дальнейшем для нормировки элементов матриц при проведении вычислений.

Будем считать для определенности, что целочисленные параметры  $p_{1i}, p_{2i}$  в (49) выбраны так, чтобы волновые числа  $\kappa_i$  образовывали неубывающую последовательность,

$$0 < \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \kappa_3 \leq \dots, \quad \kappa_i := (\kappa_{1i}^2 + \kappa_{2i}^2)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

При таком упорядочивании элементы матриц кинетической и потенциальной энергий имеют вид [10]:

$$a_{ij} = a^2 \frac{(\rho_1 \operatorname{cth} \kappa_i h_1 + \rho_2 \operatorname{cth} \kappa_i h_2) S \varepsilon_i}{\kappa_i} \delta_{ij}, \quad b_{ij} = a^2 (\rho_1 - \rho_2) g S \varepsilon_i \delta_{ij}. \quad (50)$$



$$S := l_1 l_2, \quad \varepsilon_i := \begin{cases} 1/2, & (\kappa_{1i} \kappa_{2i} = 0) \\ 1/4, & (\kappa_{1i} \kappa_{2i} \neq 0) \end{cases}$$

Здесь  $h_1, h_2$  – толщины слоев нижней и верхней жидкостей,  $S$  – площадь поперечного сечения сосуда,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

*Матрица вязкой диссипации энергии.* В отличие от матриц кинетической и потенциальной энергий матрица вязкой диссипации  $\mathcal{D}$  определяется, в основном, погранслойными функциями  $w_i(\vec{x})$  в представлении (48) поля смещений частиц жидкостей. В [10] при определении элементов матрицы  $\mathcal{D}$  предполагается, что толщина слоя каждой жидкости значительно меньше горизонтальных размеров сосуда,  $h_k/l_k \ll 1, k = 1, 2$ . Сохраняя это предположение, воспользуемся выражениями, полученными в [10]:

$$d_{ij} = a^2 \sqrt{\frac{\omega_i^0}{2}} \left( \frac{\rho_1 \sqrt{\nu_1}}{\text{sh}^2(\kappa_i h_1)} + \frac{\rho_2 \sqrt{\nu_2}}{\text{sh}^2(\kappa_i h_2)} + \frac{(\text{cth}(\kappa_i h_1) + \text{cth}(\kappa_i h_2))^2 \rho_1 \rho_2 \sqrt{\nu_1 \nu_2}}{\rho_1 \sqrt{\nu_1} + \rho_2 \sqrt{\nu_2}} \right) S \varepsilon_i \delta_{ij}; \quad (51)$$

$$\omega_i^0 := \left( \frac{g(\rho_1 - \rho_2) \kappa_i}{\rho_1 \text{cth}(\kappa_i h_1) + \rho_2 \text{cth}(\kappa_i h_2)} \right)^{1/2}.$$

Здесь  $\omega_i^0$  – собственные частоты колебаний рассматриваемой двухслойной системы жидкостей в отсутствие вязкости, магнитного поля и токов,  $\nu_k := \eta_k/\rho_k$  – кинематическая вязкость  $k$ -й жидкости.

*Матрица МГД – взаимодействия.* Выпишем элементы матрицы МГД – взаимодействия, считая горизонтальные составляющие  $B_1, B_2$  индукции магнитного поля линейными функциями координат  $x_1, x_2$ , а вертикальную составляющую  $B_3$  константой,

$$B_i = B^0(\xi_{i0} + \xi_{i1}x_1/l_1 + \xi_{i2}x_2/l_2), \quad i = 1, 2; \quad B_3 = B^0 (= \text{const}) \quad (52)$$

Это соответствует случаю, когда в качестве гармонической функции в выражении (4) выбирается функция

$$\Phi = \mu_0 j_0 [k_1((x_1 - l_1/2)^2 - (x_2 - l_2/2)^2)/2 + k_2(x_1 - l_1/2)(x_2 - l_2/2)], \quad (53)$$

где  $k_1, k_2$  – заданные безразмерные параметры, а коэффициенты  $\xi_{ij}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_{10} &= f_1 + k_B \left[ (k_1 - \frac{1}{2}) k_L^{1/2} - k_2 k_L^{-1/2} \right], \quad \xi_{11} = k_B k_2 k_L^{-1/2}, \\ \xi_{20} &= f_2 + k_B \left[ (k_1 + \frac{1}{2}) k_L^{-1/2} + k_2 k_L^{1/2} \right], \quad \xi_{22} = -k_B k_2 k_L^{1/2}, \\ \xi_{12} &= -k_B (k_1 - \frac{1}{2}) k_L^{1/2}, \quad \xi_{21} = -k_B (k_1 + \frac{1}{2}) k_L^{-1/2} \end{aligned} \quad (54)$$

$$f_1 := \frac{B_1^0}{B^0}, \quad f_2 := \frac{B_2^0}{B^0}, \quad k_L := \frac{l_2}{l_1}, \quad k_B := \frac{\mu_0 J}{B^0 S^{1/2}}.$$



Функции  $\psi_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $k = \overline{1, 4}$  в выражениях (41) для элементов матрицы МГД-взаимодействия определяются по функциям  $\zeta_i$  как решения краевой задачи (23)–(28). Для цилиндрического сосуда прямоугольного сечения эти решения легко выписываются в явном виде:

$$\begin{aligned}\psi_i^{(1)} &= \frac{j_0}{\sigma_1} \left[ \alpha_i^{(1)} \operatorname{ch}(\kappa_i(h_1 + x_3)) + \beta_i^{(1)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_1 + x_3)) \right] \zeta_i(x_1, x_2), \\ \psi_i^{(2)} &= \frac{j_0}{\sigma_2} \left[ \alpha_i^{(2)} \operatorname{ch}(\kappa_i(h_2 - x_3)) + \beta_i^{(2)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_2 - x_3)) \right] \zeta_i(x_1, x_2), \\ \psi_i^{(3)} &= \frac{j_0}{\sigma_2} \beta_i^{(3)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_2 + h_3 - x_3)) \zeta_i(x_1, x_2), \\ \psi_i^{(4)} &= \frac{j_0}{\sigma_1} \beta_i^{(4)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_1 + h_4 + x_3)) \zeta_i(x_1, x_2),\end{aligned}\quad (55)$$

Коэффициенты  $\alpha_i^{(k)}$ ,  $\beta_i^{(k)}$  в (55) определены выражениями:

$$\begin{aligned}\alpha_i^{(1)} &= \beta_i^{(4)} (\operatorname{sh}(\kappa_i h_4) + \varkappa_{14} \sigma_4 \kappa_i \operatorname{ch}(\kappa_i h_4)), & \beta_i^{(1)} &= \beta_i^{(4)} (\sigma_4 / \sigma_1) \operatorname{ch}(\kappa_i h_4), \\ \alpha_i^{(2)} &= \beta_i^{(3)} (\operatorname{sh}(\kappa_i h_3) + \varkappa_{23} \sigma_3 \kappa_i \operatorname{ch}(\kappa_i h_3)), & \beta_i^{(2)} &= \beta_i^{(3)} (\sigma_3 / \sigma_2) \operatorname{ch}(\kappa_i h_3), \\ \beta_i^{(3)} &= -(1 - \sigma_2 / \sigma_1) s_{1i} / d_i, & \beta_i^{(4)} &= (1 - \sigma_2 / \sigma_1) s_{2i} / d_i, \\ d_i &:= r_{2i} s_{1i} + (\sigma_2 / \sigma_1) r_{1i} s_{2i} + \varkappa_{12} \sigma_2 \kappa_i s_{1i} s_{2i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_{1i} &= \operatorname{ch}(\kappa_i h_1) \operatorname{sh}(\kappa_i h_4) + [\sigma_4 / \sigma_1 \operatorname{sh}(\kappa_i h_1) + \varkappa_{14} \sigma_4 \kappa_i \operatorname{ch}(\kappa_i h_1)] \operatorname{ch}(\kappa_i h_4), \\ r_{2i} &= \operatorname{ch}(\kappa_i h_2) \operatorname{sh}(\kappa_i h_3) + [\sigma_3 / \sigma_2 \operatorname{sh}(\kappa_i h_2) + \varkappa_{23} \sigma_3 \kappa_i \operatorname{ch}(\kappa_i h_2)] \operatorname{ch}(\kappa_i h_3), \\ s_{1i} &= \operatorname{sh}(\kappa_i h_1) \operatorname{sh}(\kappa_i h_4) + [\sigma_4 / \sigma_1 \operatorname{ch}(\kappa_i h_1) + \varkappa_{14} \sigma_4 \kappa_i \operatorname{sh}(\kappa_i h_1)] \operatorname{ch}(\kappa_i h_4), \\ s_{2i} &= \operatorname{sh}(\kappa_i h_2) \operatorname{sh}(\kappa_i h_3) + [\sigma_3 / \sigma_2 \operatorname{ch}(\kappa_i h_2) + \varkappa_{23} \sigma_3 \kappa_i \operatorname{sh}(\kappa_i h_2)] \operatorname{ch}(\kappa_i h_3).\end{aligned}$$

Подставляя (55) в (41) и учитывая при этом (48), получим явные выражения для элементов матрицы МГД-взаимодействия:

$$\begin{aligned}m_{ij} &= a^2 J_0 B_0 \left\{ \left( \frac{\kappa_{1i} \kappa_{2j}}{\kappa_i} K_{1ij} K_{2ji} - \frac{\kappa_{2i} \kappa_{1j}}{\kappa_i} K_{1ji} K_{2ij} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left[ h_1 \frac{\alpha_j^{(1)} I_{1ji}^{(1)} + \beta_j^{(1)} I_{2ji}^{(1)}}{\operatorname{sh}(\kappa_i h_1)} + h_2 \frac{\alpha_j^{(2)} I_{1ji}^{(2)} + \beta_j^{(2)} I_{2ji}^{(2)}}{\operatorname{sh}(\kappa_i h_2)} \right] + \\ &\quad + \frac{\kappa_j}{\kappa_i} (\kappa_{2i} b_{1ij} - \kappa_{1i} b_{2ij}) \left[ h_1 \frac{\alpha_j^{(1)} I_{2ji}^{(1)} + \beta_j^{(1)} I_{1ij}^{(1)}}{\operatorname{sh}(\kappa_i h_1)} + h_2 \frac{\alpha_j^{(2)} I_{2ji}^{(2)} + \beta_j^{(2)} I_{1ij}^{(2)}}{\operatorname{sh}(\kappa_i h_2)} \right] + \\ &\quad \left. + (\kappa_{1j} b_{2ji} - \kappa_{2j} b_{1ji}) \left[ h_1 \frac{\alpha_j^{(1)} I_{2ij}^{(1)} + \beta_j^{(1)} I_{3ij}^{(1)}}{\operatorname{sh}(\kappa_i h_1)} + h_2 \frac{\alpha_j^{(2)} I_{2ij}^{(2)} + \beta_j^{(2)} I_{3ij}^{(2)}}{\operatorname{sh}(\kappa_i h_2)} \right] \right\}\end{aligned}\quad (56)$$

$$b_{1ij} := \xi_{10} K_{2ij} \delta_{1ij} + \xi_{11} K_{2ij} K_{1ij}^0 + \xi_{12} K_{2ij}^1 \delta_{1ij}$$

$$b_{2ij} := \xi_{20} K_{1ij} \delta_{2ij} + \xi_{22} K_{1ij} K_{2ij}^0 + \xi_{22} K_{1ij}^1 \delta_{2ij}\quad (50)$$



$$\delta_{sij} := \begin{cases} 0, & \kappa_{si} \neq \kappa_{sj} \\ 1, & \kappa_{si} = \kappa_{sj} = 0 \\ 1/2, & \kappa_{si} = \kappa_{sj} \neq 0 \end{cases},$$

$$I_{1ij}^{(m)} := \begin{cases} \frac{\text{sh}(2\kappa_i h_m)}{4\kappa_i h_m} + \frac{1}{2}, & \kappa_i = \kappa_j \\ \frac{\text{sh}((\kappa_i + \kappa_j)h_m)}{2(\kappa_i + \kappa_j)h_m} + \frac{\text{sh}((\kappa_i - \kappa_j)h_m)}{2(\kappa_i - \kappa_j)h_m}, & \kappa_i \neq \kappa_j \end{cases},$$

$$I_{2ij}^{(m)} := \begin{cases} \frac{1}{4\kappa_i h_m} (\text{ch}(2\kappa_i h_m) - 1), & \kappa_i = \kappa_j \\ \frac{\text{ch}((\kappa_i + \kappa_j)h_m) - 1}{2(\kappa_i + \kappa_j)h_m} + \frac{\text{ch}((\kappa_i - \kappa_j)h_m) - 1}{2(\kappa_i - \kappa_j)h_m}, & \kappa_i \neq \kappa_j \end{cases},$$

$$I_{3ij}^{(m)} := \begin{cases} \frac{\text{sh}(2\kappa_i h_m)}{4\kappa_i h_m} - \frac{1}{2}, & \kappa_i = \kappa_j \\ \frac{\text{sh}((\kappa_i + \kappa_j)h_m)}{2(\kappa_i + \kappa_j)h_m} - \frac{\text{sh}((\kappa_i - \kappa_j)h_m)}{2(\kappa_i - \kappa_j)h_m}, & \kappa_i \neq \kappa_j \end{cases},$$

$$K_{sij} := (1 - (-1)^{p_{si}+p_{sj}}) \frac{p_{si}}{\pi(p_{si}^2 - p_{sj}^2)}$$

$$K_{sij}^0 := \begin{cases} \frac{1}{2}, & \kappa_{si} = \kappa_{sj} = 0, \\ \frac{1}{4}, & (\kappa_{si} \neq 0) \wedge (\kappa_{si} = \kappa_{sj}), \\ -(1 - (-1)^{p_{si}+p_{sj}}) \frac{p_{si}^2 + p_{sj}^2}{\pi^2(p_{si}^2 - p_{sj}^2)^2}, & (\kappa_{si} \neq \kappa_{sj}) \end{cases}$$

$$K_{sij}^1 := \begin{cases} 0, & \kappa_{si} = 0, \\ -\frac{1}{4\pi p_{si}}, & (\kappa_{si} \neq 0) \wedge (\kappa_{si} = \kappa_{sj}) \\ -\frac{(-1)^{p_{si}+p_{sj}} p_{si}}{\pi(p_{si}^2 - p_{sj}^2)}, & (\kappa_{si} \neq 0) \wedge (\kappa_{si} \neq \kappa_{sj}) \end{cases}$$

Матрица джоулевой диссипации энергии. Возмущения потенциала электрического поля  $\psi_i^{(k)}$ , определяющие элементы матрицы джоулевой диссипации энергии, являются решениями краевой задачи (29)–(34). Отыскивая



$\psi_i^{(k)}$  в погранслоном приближении, получим

$$\begin{aligned}
 \psi_m^{(1)} &= \frac{\mu_0 j_0 (\kappa_m x_3 \operatorname{ch}(\kappa_m(x_3 + h_1)) - \operatorname{sh}(\kappa_m(x_3 + h_1)))}{2\kappa_m^2 \operatorname{sh}(\kappa_m h_1)} \zeta_m(x_1, x_2) + \\
 &+ \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \hat{\alpha}_{mi}^{(1)} \operatorname{ch}(\kappa_i(h_1 + x_3)) + \hat{\beta}_{mi}^{(1)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_1 + x_3)) \right] \zeta_i(x_1, x_2) + \\
 &+ \left( \frac{\exp(-\theta_{1m}(h_1 + x_3))}{\kappa_m \operatorname{sh} \kappa_m h_1} - \frac{\rho_2 \sqrt{\nu_2} (\operatorname{cth} \kappa_m h_1 + \operatorname{cth} \kappa_m h_2)}{\kappa_m (\rho_1 \sqrt{\nu_1} + \rho_2 \sqrt{\nu_2})} \exp(\theta_{1m} x_3) \right) \times \\
 &\times \frac{1}{\theta_{1m}} \left( B_2 \frac{\partial \zeta_m(x_1, x_2)}{\partial x_1} - B_1 \frac{\partial \zeta_m(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right), \quad \theta_{1m} := \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega_m^0}{\nu_1}}, \\
 \psi_m^{(2)} &= \frac{-\mu_0 j_0 (\kappa_m x_3 \operatorname{ch}(\kappa_m(x_3 - h_2)) + \operatorname{sh}(\kappa_m(x_3 - h_2)))}{2\kappa_m^2 \operatorname{sh}(\kappa_m h_1)} \zeta_m(x_1, x_2) + \\
 &+ \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \hat{\alpha}_{mi}^{(2)} \operatorname{ch}(\kappa_i(h_2 - x_3)) + \hat{\beta}_{mi}^{(2)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_2 - x_3)) \right] \zeta_i(x_1, x_2) + \\
 &+ \left( \frac{-\exp(-\theta_{2m}(h_1 - x_3))}{\kappa_m \operatorname{sh} \kappa_m h_2} + \frac{\rho_1 \sqrt{\nu_1} (\operatorname{cth} \kappa_m h_1 + \operatorname{cth} \kappa_m h_2)}{\kappa_m (\rho_1 \sqrt{\nu_1} + \rho_2 \sqrt{\nu_2})} \exp(-\theta_{2m} x_3) \right) \times \\
 &\times \frac{1}{\theta_{2m}} \left( B_2 \frac{\partial \zeta_m(x_1, x_2)}{\partial x_1} - B_1 \frac{\partial \zeta_m(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right), \quad \theta_{2m} := \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega_m^0}{\nu_2}}, \\
 \psi_m^{(3)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\beta}_{mi}^{(3)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_2 + h_3 - x_3)) \zeta_i(x_1, x_2), \\
 \psi_m^{(4)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\beta}_{mi}^{(4)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_1 + h_4 + x_3)) \zeta_i(x_1, x_2).
 \end{aligned} \tag{57}$$

Коэффициенты  $\hat{\alpha}_{mi}^{(k)}$ ,  $\hat{\beta}_{mi}^{(k)}$  в (57) определены выражениями:

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_{mi}^{(1)} &= \hat{\beta}_{mi}^{(4)} (\operatorname{sh}(\kappa_i h_4) + \varkappa_{14} \sigma_4 \kappa_i \operatorname{ch}(\kappa_i h_4)), \\
 \hat{\alpha}_{mi}^{(2)} &= \hat{\beta}_{mi}^{(3)} (\operatorname{sh}(\kappa_i h_3) + \varkappa_{23} \sigma_3 \kappa_i \operatorname{ch}(\kappa_i h_3)), \\
 \hat{\beta}_{mi}^{(1)} &= \hat{\beta}_{mi}^{(4)} (\sigma_4 / \sigma_1) \operatorname{ch}(\kappa_i h_4) + (\kappa_i \kappa_m \operatorname{sh}(\kappa_m h_1))^{-1}, \\
 \hat{\beta}_{mi}^{(2)} &= \hat{\beta}_{mi}^{(3)} (\sigma_3 / \sigma_2) \operatorname{ch}(\kappa_i h_3) + (\kappa_i \kappa_m \operatorname{sh}(\kappa_m h_2))^{-1}, \\
 \hat{\beta}_{mi}^{(3)} &= \hat{\gamma}_{mi} (s_{1i} T_{mi} + r_{1i} R_{mi}) / d_i, \\
 \hat{\beta}_{mi}^{(4)} &= \hat{\gamma}_{mi} (-(\sigma_2 / \sigma_1) s_{2i} T_{mi} + (r_{2i} + \varkappa_{12} \sigma_2 \kappa_i s_{2i}) R_{mi}) / d_i,
 \end{aligned}$$

где

$$\hat{\gamma}_{mi} := k_{2m} b_{1mi} - k_{1m} b_{2mi},$$



$$T_{mi} := \frac{1}{\kappa_i \kappa_m} \left( \frac{\text{sh}(\kappa_i h_1)}{\text{sh}(\kappa_m h_1)} - \frac{\text{sh}(\kappa_i h_2)}{\text{sh}(\kappa_m h_2)} \right) + \varkappa_{12} \sigma_2 \frac{\text{ch}(\kappa_m h_2) - \text{ch}(\kappa_i h_2)}{\kappa_m \text{sh}(\kappa_m h_1)},$$

$$R_{mi} := \frac{1}{\kappa_i \kappa_m} \left( \frac{\text{ch}(\kappa_m h_1) - \text{ch}(\kappa_i h_1)}{\text{sh}(\kappa_m h_1)} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{\text{ch}(\kappa_m h_2) - \text{ch}(\kappa_i h_2)}{\text{sh}(\kappa_m h_2)} \right).$$

Подставляя (57) в (42), получим представления элементов матрицы джоулевой диссипации  $q_{ij}$  в виде интегралов по области  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ . Эти интегралы можно выписать в явном виде, однако, соответствующие формулы весьма громоздки и здесь не приводятся. Следует отметить также, что для практических расчетов более удобно (и эффективнее) использовать численное интегрирование.

## 5. Результаты вычислений

*Безразмерные параметры задачи.* С точки зрения приложений наибольший интерес в данной задаче представляют критические значения геометрических и физических параметров рассматриваемой МГД-системы, соответствующие режиму возбуждения волн.

Введем безразмерный параметр МГД-взаимодействия

$$W = \frac{JB^0}{g(\rho_1 - \rho_2)S},$$

характеризующий соотношение электромагнитных и гравитационных сил. Сразу же отметим, что  $W$  является основным параметром, определяющим поведение рассматриваемой системы.

Обозначим через  $p$  совокупность всех остальных безразмерных параметров системы. В число этих параметров входят, в частности, геометрические параметры:  $k_L := l_2/l_1$ ,  $\bar{h}_k := h_k/L$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , где  $L$  — характерный линейный размер сосуда. В качестве характерного линейного размера во всех представленных далее расчетах принималась величина  $L := S^{1/2}$ .

В число безразмерных физических параметров входят отношение плотностей жидкостей  $\bar{\rho} := \rho_2/\rho_1$ , числа Рейнольдса  $Re_k := g^{1/2} L^{3/2}/\nu_k$ ,  $k = 1, 2$ , электрофизические параметры  $\bar{\sigma}_k := \sigma_k/\sigma_1$ ,  $k = \overline{2, 4}$ ,  $\bar{\varkappa}_{14} := \varkappa_{14}\sigma_4/L$ ,  $\bar{\varkappa}_{23} := \varkappa_{23}\sigma_3/L$ ,  $\bar{\varkappa}_{12} := \varkappa_{12}\sigma_2/L$ . Указанные безразмерные параметры необходимо дополнить коэффициентами  $f_1, f_2, k_1, k_2$ , определяющими конфигурацию магнитного поля, а также параметром  $k_B$ , характеризующим отношение индукций "собственного" и внешнего магнитных полей.

Таким образом, поведение рассматриваемой системы помимо  $W$  определяется следующей совокупностью параметров:

$$p := (k_L, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4, \bar{\rho}, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_4, \bar{\varkappa}_{12}, \bar{\varkappa}_{14}, \bar{\varkappa}_{23}, Re_1, Re_2, f_1, f_2, k_1, k_2, k_B).$$

Собственные числа спектральной задачи (44) зависят, очевидно, от  $W, p$ , так что

$$\lambda_k = \gamma_k(W, p) + i\omega_k(W, p), \quad k = 1, 2, \dots$$



В силу этих зависимостей условие (45) определяет области устойчивости (и неустойчивости) равновесных состояний системы в пространстве параметров  $(W, p)$ . Граница области устойчивости в этом пространстве определяется уравнением:

$$\max_k \operatorname{Re}(\lambda_k(W, p)) := \max_k \gamma_k(W, p) = 0.$$

Разрешая это уравнение, найдем, очевидно, критические значения параметра  $W$  в зависимости от  $p$ :  $W_{\text{кр}} = W_{\text{кр}}(p)$ . Зная  $W_{\text{кр}}(p)$ , уравнение границы области устойчивости представим в виде:

$$W = W_{\text{кр}}(p). \quad (58)$$

При  $W < W_{\text{кр}}$  равновесное состояние жидкостей устойчиво, тогда как при  $W > W_{\text{кр}}$  — неустойчиво. Значениям  $W = W_{\text{кр}}$  отвечают периодические (по  $t$ ) колебания жидкостей.

Обозначим через  $\lambda_{\text{кр}} := i\omega_{\text{кр}}$ ,  $c_{\text{кр}} := (c'_1 + ic''_1, \dots, c'_N + ic''_N)$  — собственное значение и собственный вектор квадратичного пучка матриц (44), определяющие критическое значение параметра  $W$ . Периодические колебания поверхности раздела жидкостей описываются уравнением:

$$x_3 = \sum_{k=1}^N (c'_k \cos(\omega_{\text{кр}} t) - c''_k \sin(\omega_{\text{кр}} t)) \zeta_k(x_1, x_2). \quad (59)$$

Согласно (58) построение границы области устойчивости равновесных состояний сводится к вычислению собственных чисел спектральной задачи (47) с последующим уточнением значений параметров  $W, p$ , при которых максимальная вещественная часть собственных чисел обращается в нуль. Решение спектральной задачи осуществлялось численно с использованием  $QR$  — алгоритма. Для уточнения параметров  $W, p$ , отвечающих нулевому значению максимальной вещественной части собственных чисел использовалась стандартная процедура метода дихотомии. Для реализации описанного процесса вычислений разработана программа расчета критических значений  $W_{\text{кр}}$  при произвольных значениях остальных безразмерных параметров  $p$ .

На рис.2 приведены графики зависимости  $W_{\text{кр}}$  от соотношения горизонтальных размеров сосуда  $k_L = l_2/l_1$ . Для остальных параметров, если они не указаны на рис. 2, выбирались следующие значения (приблизительно соответствующие промышленным алюминиевым электролизерам):  $\bar{h}_1 = 0.035$ ,  $\bar{h}_2 = 0.07$ ,  $\bar{h}_3 = 0.05$ ,  $\bar{h}_4 = 0.05$ ,  $\bar{\rho} = 0.913$ ,  $\bar{\sigma}_2 = 0.6 \cdot 10^{-4}$ ,  $\bar{\sigma}_3 = 0.82 \cdot 10^{-2}$ ,  $\bar{\sigma}_3 = 0.82 \cdot 10^{-2}$ ,  $\bar{\alpha}_{14} = 0.2$ ,  $\bar{\alpha}_{23} = 0.2$ ,  $\bar{\alpha}_{12} = 0$ ,  $Re_1 = 0.8 \cdot 10^8$ ,  $Re_2 = 0.4 \cdot 10^8$ ,  $k_1 = 0.37$ ,  $k_2 = 0.03$ ,  $f_1 = f_2 = 0$ .

Область устойчивости равновесных состояний на рис.2 расположена ниже соответствующей кривой. Изломы критических кривых объясняются сменой форм колебаний жидкостей при изменении  $k_L$ .

Как показали расчеты, обычно две пары коэффициентов  $(c'_{k_1}, c''_{k_1})$ ,  $(c'_{k_2}, c''_{k_2})$  в правой части уравнения (59) значительно превосходят по величине все остальные коэффициенты. Функции  $\zeta_{k_1}(x_1, x_2)$ ,  $\zeta_{k_2}(x_1, x_2)$  будем



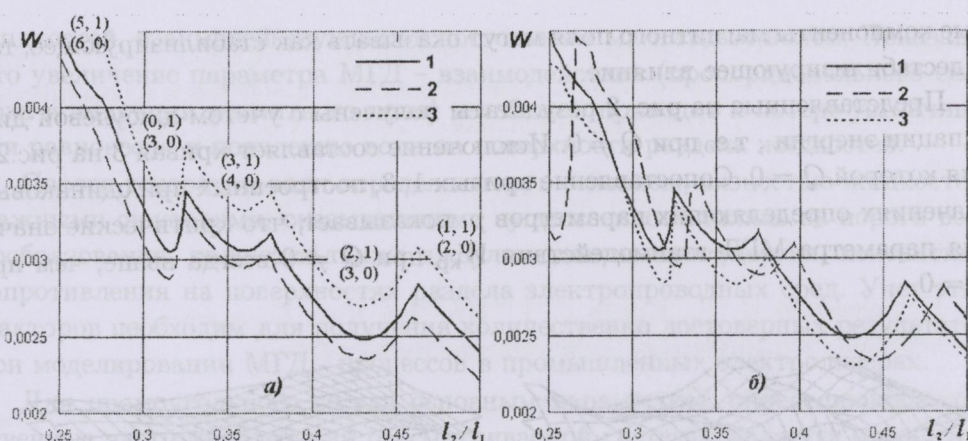


Рис. 2: Зависимость  $W_{кр}$  от соотношения горизонтальных размеров:

- а) 1 -  $\bar{\alpha}_{14} = \bar{\alpha}_{23} = 0$ ; 2 -  $\bar{\alpha}_{14} = 0.25$ ,  $\bar{\alpha}_{23} = 0$ ; 3 -  $\bar{\alpha}_{14} = 0$ ,  $\bar{\alpha}_{23} = 0.213$ ;  
 б) 1 -  $k_1 = 0.37$ ,  $k_2 = 0.03$ ; 2 -  $k_1 = k_2 = 0$ ; 3 -  $k_1 = 0.37$ ,  $k_2 = 0.03$  ( $Q = 0$ ).

называть главными взаимодействующими модами колебаний. Номера главных взаимодействующих мод  $(p_{1k_i}, p_{2k_i})$  указаны на рис. 2а над гладкими участками критических кривых.

Смена форм колебаний сопровождается скачкообразными изменениями собственной частоты  $\omega_{кр}$ . Вычисления показали, что собственная частота  $\omega_{кр}$  близка к собственным частотам гидродинамических колебаний системы, отвечающих главным взаимодействующим модам в отсутствие магнитного поля и токов. При совпадении этих частот параметр  $W_{кр}$  принимает локально минимальные значения. Таким образом, генерируемые на поверхности раздела жидкостей волны носят характер своеобразного резонансного взаимодействия собственных мод колебаний с совпадающими или близкими частотами.

Важным фактором, влияние которого на устойчивость МГД-системы практически не исследовалась ранее, являются контактные сопротивления на поверхностях раздела электропроводных сред. Проведенные вычисления показали, в частности, что учет контактного сопротивления  $\bar{\alpha}_{14}$  на поверхности  $\Gamma_{14}$  приводит к понижению критических значений параметра  $W$ ; о количественном влиянии  $\bar{\alpha}_{14}$  можно судить, сравнивая кривые 1 и 2 на рис. 2а. Контактное сопротивление  $\bar{\alpha}_{23}$  на поверхности  $\Gamma_{23}$ , напротив, расширяет область устойчивости, причем, как видно из сравнения кривых 1 и 3 на рис. 2а, повышение порогов волнообразования может быть весьма значительным.

Как известно [2], [10], пороги возбуждения волновых движений жидкостей определяются, в основном, вертикальной составляющей индукции магнитного поля  $B_3 = B^0$ . Проведенные расчеты показали, что влияние горизонтальных компонент индукции  $B_1, B_2$  начинает сказываться, если их значения на порядок превосходят  $B^0$ . Кривые 1, 2 на рис. 2б показывают, что горизонталь-



ные компоненты магнитного поля могут оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние.

Представленные на рис. 2 результаты получены с учетом джоулевой диссипации энергии, т.е. при  $Q \neq 0$ . Исключение составляет кривая 3 на рис.2б, для которой  $Q = 0$ . Сопоставление кривых 1, 3, построенных при одинаковых значениях определяющих параметров  $p$ , показывает, что критические значения параметра МГД-взаимодействия  $W_{кр}$  при  $Q \neq 0$  всегда выше, чем при  $Q = 0$ .

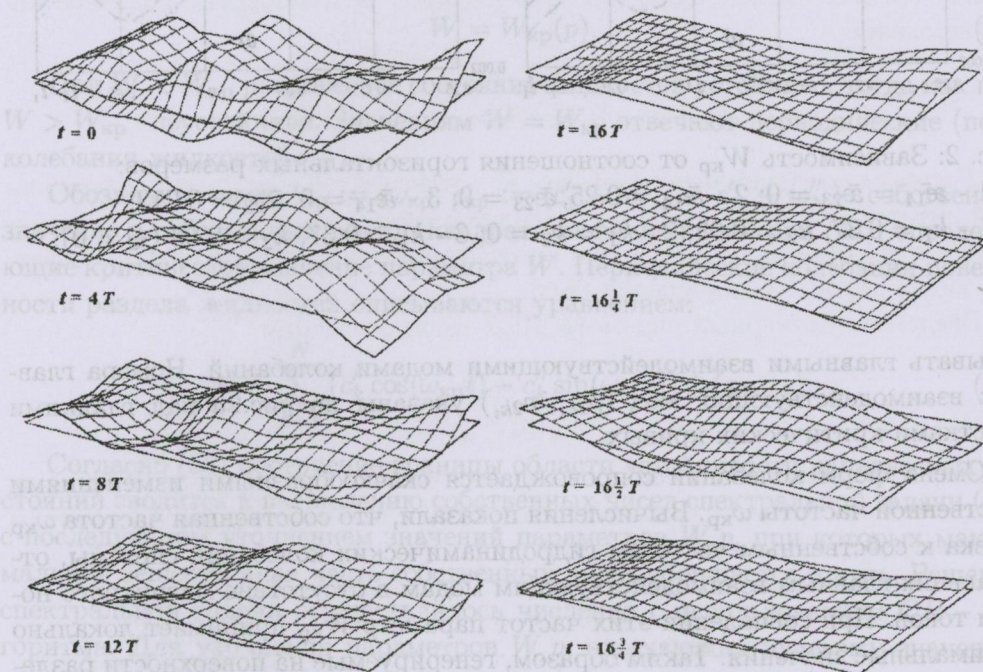


Рис. 3: Формы волн на поверхности раздела жидкостей

На рис.3 показаны формы поверхности раздела жидкостей в различные моменты времени, отвечающие критическим значениям определяющих параметров. При  $t = 0$  значения коэффициентов  $c_i$  задавались случайным образом. Вычисления показали, что с течением времени колебания поверхности достаточно быстро принимают периодический характер, определяемый, в основном, главными модами. Период и круговая частота колебаний связаны соотношением  $T = 2\pi/\omega_{кр}$ .

### Заключение

В рамках линейной теории проведено исследование устойчивости равновесных состояний ограниченной системы несмешивающихся токонесущих



жидкостей, взаимодействующих с постоянным магнитным полем. Показано, что увеличение параметра МГД – взаимодействия (пропорционального силе тока и индукции магнитного поля) неизбежно приводит к потере устойчивости равновесия и появлению волн на поверхности раздела жидкостей.

Пороги генерации волн определяются, в основном, вязкостью жидкостей. Важными факторами, оказывающими существенное влияние на пороги волнообразования, являются также джоулева диссипация энергии, контактные сопротивления на поверхностях раздела электропроводных сред. Учет этих факторов необходим для получения количественно достоверных результатов при моделировании МГД - процессов в промышленных электролизерах.

Для прямоугольного сосуда основным параметром, определяющим собственные частоты колебаний рассматриваемой системы, является отношение горизонтальных размеров. Рациональный выбор этого отношения (при сохранении площади поперечного сечения и других геометрических и физических параметров) позволяет существенно повысить пороги волнообразования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Urata N., Mori S., Ikeuchi H. Instabilities of the metal surface in electrolytic alumina reduction cells // Keikinzoku. – 1976. – N 1. – P. 573–600.
2. Sele T. Instabilities of the metal surface in electrolytic alumina reduction cells // Metallurgical Transactions B. – 1977. – Vol. **8B**. – P. 613–618.
3. Sneyd A. D., Wang A. Interfacial instability due to MHD mode coupling in aluminium reduction cells // J. Fluid Mech. – 1994. – Vol. **263**. – P. 243–259.
4. Bojarevich V., Romerio M. V. Long waves instability of liquid metal - electrolyte interface in aluminium electrolysis cells: a generation of Sele's criterion // Euro. J. Mech. B/Fluids. – 1994. – Vol. **13**, N 1. – P. 33–56.
5. Davidson P. A., Lindsay J. R. Stability of interfacial waves in aluminium reduction cells // J. Fluid Mech. – 1998. – Vol. **362**. – P. 273–295.
6. Morris S. J. S., Davidson P. A. Hydromagnetic edge waves and instability in reduction cells // J. Fluid Mech. – 2003. – Vol. **493**. – P. 121–130.
7. Деркач А. С., Скворцов А. П., Цибуков И. К., Шрамко В. А., Калимов А. Г., Сведенцов М. Л. Трехмерная модель расчета МГД – параметров алюминиевого электролизера // Цветные металлы. – 2000. – № 1. – С. 30–34.
8. Lukyanov A., El G., Molokov S. Instability of MHD-modified interfacial gravity waves revisited // Phys. Lett. A. – 2001. – Vol. **290**. – P. 165–172.



9. Алаторцев А. В., Кузьмин Р. Н., Савенкова Н. П., Проворова О. Г. Динамическая модель магнитно-гидродинамических процессов в алюминиевом электролизере // Прикладная физика. – 2004. – N 5. – Р. 33–41.
10. Борисов И. Д., Пославский С. А., Руднев Ю. И. Устойчивость равновесия системы несмешивающихся токонесущих жидкостей в магнитном поле // Прикладна гідромеханіка. – 2006. – Т. 8, N 4. – Р. 3–14.
11. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
12. Черноусько Ф. Л. Динамика твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – 342 с.



Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна  
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

УДК 517.982.22

№ 826, 2008, с.185–196

## Banach spaces of functions with the uniform Dini property

Le Minh Can

*V.N. Karazin Kharkov National University*

For a metric space  $K$  we define by  $D(K)$  the space of all functions on  $K$ , whose modulus of continuity is satisfied the Dini condition at 0. We prove that  $D(K)$  is dual if  $K$  is compact and  $D(K)$  is separable if  $K$  is a convex compact subset of a Banach space. Other properties are studied for the special case when  $K = [0, 1]$ .

*2000 Mathematics Subject Classification* 42A70

### 1. Introduction

The famous Dini theorem says that for a continuous function  $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfying the Dini condition at a point  $t_0 \in (0, 2\pi)$  its Fourier series converges to  $f(t_0)$  at the point  $t_0$ . Consequently if the modulus of continuity of a periodic function fulfills the Dini condition at 0, then the corresponding Fourier series converges to the original function at all points. In this paper we introduce and study the natural Banach space  $D(K)$  of functions which arise from the above remark. The space definition makes sense on a general setting of continuous functions on arbitrary metric compact  $K$ . At first we describe the behaviour of Fourier series for  $f \in D(\mathbb{T})$ : we show that it converges uniformly, but not necessarily in the norm of  $D(\mathbb{T})$ . On the other hand, the theorem on Cesaro convergence holds true in  $D(\mathbb{T})$  norm in its full strength. We show that  $D(\mathbb{T})$  is non-reflexive and moreover contains a copy of  $\ell_1$ . To do this we perform a study of  $D(K)$  for a very special  $K = \{t_1, t_2, \dots\} \subset [0, 1]$ , where  $(t_n)_{n=1}^\infty$  behaves like a geometric progression. In this special case we prove that  $D(K)$  has the Schur property, but has no cotype. Then we pass to the properties of  $D(K)$  as a Banach space. We show that  $D(K)$  is dual if  $K$  is compact and  $D(K)$  is separable if  $K$  is a convex compact subset of a Banach space.

### 2. Basic definitions and notation

Now we introduce the following notion of the Dini space.



**Definition 1** Let  $K$  be a metric space,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  be a real function. The modulus of continuity  $\bar{f}(r)$  of the function  $f$  is defined by

$$\bar{f}(r) = \sup\{|f(t) - f(\tau)| : t, \tau \in K, \rho(t, \tau) \leq r\}.$$

Denote  $\|f\|_0 = \int_0^1 \frac{\bar{f}(r)}{r} dr$ ,  $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in K\}$ ,  $\|f\| = \max\{\|f\|_0, \|f\|_\infty\}$ . We call the space

$$D(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} : \|f\| < \infty\}$$

with the norm  $\|\cdot\|$  the Dini space.

Recall the following well-known definitions.

**Definition 2** A sequence  $(x_n)_{n=1}^\infty$  in a Banach space  $X$  is called a basic sequence if it is a basis for  $[x_n]_{n=1}^\infty$ .

**Definition 3** Let  $(e_n)_{n=1}^\infty$  be a basis for a Banach space  $X$ . Suppose that  $(p_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{N}$  is a strictly increasing sequence of integers with  $p_0 = 0$  and that  $(a_n)_{n=1}^\infty$  are scalars. Then a sequence of nonzero vectors  $(u_n)_{n=1}^\infty$  in  $X$  of the form

$$u_n = \sum_{p_{n-1}+1}^{p_n} a_j e_j$$

is called a block basic sequence of  $(e_n)_{n=1}^\infty$ .

It is well-known that every block basic sequence  $(u_n)_{n=1}^\infty$  is a basic sequence.

**Definition 4** A Banach space  $X$  has M-cotype  $r$  with constant  $C > 0$  if the inequality

$$\max\left\{\left\|\sum \alpha_i x_i\right\| : \alpha_i = \pm 1\right\} \geq C \left(\sum \|x_i\|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

holds for any finite collection of elements  $(x_i)_{i=1}^n$ .

It is well-known that M-cotype is an isomorphic invariant and the space  $\ell_1$  has M-cotype  $r = 2$  (see [2]).

### 3. Fourier series in $D(\mathbb{T})$

Denote by  $D(\mathbb{T})$  the subspace of  $D[0, 2\pi]$  consisting of functions satisfying the condition  $f(0) = f(2\pi)$ .

Let  $f$  be an absolutely integrable function on  $[0, 2\pi]$ . Then the  $n$ -th partial sum of its Fourier series at a point  $x$  equals

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt.$$



Let  $\varphi(t, x) = f(t + x) - f(x)$ , then

$$(S_n f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t, x) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt.$$

**Theorem 1 (Dini's criterion)** (see [3], Section 699) Let  $f$  be a continuous function on  $[0, 2\pi]$  and  $f(0) = f(2\pi)$ . If there exists  $h > 0$  such that for all  $x \in [0, 2\pi]$  the integral  $\int_0^h \frac{|\varphi(t, x)|}{t} dt$  converges uniformly relatively to  $x$  then the Fourier series of  $f$  converges to  $f$  uniformly.

If  $f \in D(\mathbb{T})$  then  $\varphi(t, x) \leq \bar{f}(t)$ . But  $\int_0^1 \frac{\bar{f}(t)}{t} dt < \infty$ , therefore the Fourier series of  $f$  converges to it uniformly, i.e.  $\|S_n f - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ .

**Theorem 2** There exists a function  $f \in D(\mathbb{T})$  such that the Fourier series of  $f$  does not converge to  $f$  in the norm of  $D(\mathbb{T})$ .

*Proof.* Denote by  $S_n$  the operator of the  $n$ -th partial sum of the Fourier series. By the Banach-Steinhaus theorem, it is sufficient to show that  $\sup\{\|S_n\|_0 : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ . Fix any  $n \in \mathbb{N}$  and set  $\delta = \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}$ . Then  $\sin(n + \frac{1}{2})t = 0$  for all  $t = k\delta$ ,  $k \in [-n, n] \cap \mathbb{Z}$ .

We will discuss the case when  $n$  is an even integer. We build on  $[-\pi, \pi]$  an odd piece-wise linear function  $f_n$  as follows:

$$f_n(t) = \begin{cases} (t - 2j\delta), & \text{if } t \in [2j\delta, (2j+1)\delta] \\ -[t - (2j+2)\delta], & \text{if } t \in [(2j+1)\delta, (2j+2)\delta] \end{cases}$$

where  $j$  is from zero to  $\frac{n-2}{2}$  and  $f_n(t) = 0$  if  $t \in [n\delta, \pi]$ . Put  $f_n(-t) = -f_n(t)$  for  $t \geq 0$ . By the construction, we have

$$\|f_n\|_0 = \int_0^{2\delta} dr + \int_{2\delta}^1 \frac{2\delta}{r} dr = 2\delta(1 + \ln \frac{1}{2\delta}).$$

Let  $r \in [0, \frac{\delta}{2}]$ . Notice that  $(f_n(t + \frac{r}{2}) - f_n(t - \frac{r}{2})) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} \geq 0$  on  $[j\delta, (j+1)\delta]$  and  $[f_n(t + \frac{r}{2}) - f_n(t - \frac{r}{2})] = r$  on  $[j\delta + \frac{r}{2}, (j+1)\delta - \frac{r}{2}]$ , therefore

$$\begin{aligned} \overline{S_n f_n}(r) &\geq (S_n f_n)(\frac{r}{2}) - (S_n f_n)(-\frac{r}{2}) \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^{n-1} \int_{j\delta}^{(j+1)\delta} \left( f_n(t + \frac{r}{2}) - f_n(t - \frac{r}{2}) \right) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-(n+\frac{1}{2})\delta}^{-n\delta} r \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{n\delta}^{(n+\frac{1}{2})\delta} r \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^{n-1} \int_{j\delta + \frac{r}{2}}^{(j+1)\delta - \frac{r}{2}} \left( f_n(t + \frac{r}{2}) - f_n(t - \frac{r}{2}) \right) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt - \frac{1}{\pi} \delta r \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^{n-1} r(\delta - r) \frac{1}{|j + \frac{1}{2}|\delta} - \frac{1}{\pi} \delta r \geq M \frac{r}{\pi} \ln n, \end{aligned}$$



where  $M > 0$  is some constant not depending on  $n$ . Hence

$$\|S_n f_n\|_0 \geq M \int_0^{\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\pi} \ln n dr + M \int_{\frac{\delta}{2}}^1 \frac{\frac{\delta}{2\pi} \ln n}{r} dr = \frac{M\delta \ln n}{2\pi} (1 + \ln \frac{2}{\delta}).$$

Therefore  $\|S_n\| \geq \frac{\|S_n f_n\|_0}{\|f_n\|} \sim \ln n \rightarrow \infty$ . The theorem is proved.

Cesaro's  $n$ -th average is defined as :

$$(\sigma_n f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (S_j f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) F_n(t) dt$$

where  $F_n(t) = \frac{1}{\pi n} \left( \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$  is the Fejer kernel. Notice that  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$ .

**Theorem 3 (Fejer)** (see [3], Section 743) Let  $f$  be a continuous, periodic function on  $\mathbb{R}$  with the period  $2\pi$ . Then  $(\sigma_n f)_{n=1}^{\infty}$  converges uniformly to  $f$ .

**Theorem 4** Let  $f \in D[0, 2\pi]$  and  $f(0) = f(2\pi)$ . Then  $(\sigma_n f)_{n=1}^{\infty}$  converges to  $f$  in the norm of  $D[0, 2\pi]$ .

*Proof.* By the previous theorem it is sufficient to show that  $(\sigma_n f)_{n=1}^{\infty}$  converges to  $f$  in the norm  $\|\cdot\|_0$ . Denote  $\xi_n(x) = (\sigma_n f)(x) - f(x)$ , then for all  $x, y : |x-y| \leq r$  we have

$$\begin{aligned} |\xi_n(x) - \xi_n(y)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) + f(y) - f(x) - f(y+t)) F_n(t) dt \right| \\ &\leq 2\bar{f}(r) \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi} \\ &= 2\bar{f}(r), \end{aligned}$$

therefore  $\overline{\xi_n}(r) \leq 2\bar{f}(r)$ . Since  $\|\xi_n\|_{\infty} \rightarrow 0$ , the sequence of functions  $\frac{\overline{\xi_n}(r)}{r}$  converges to zero almost everywhere on  $[0, 1]$ . By Lebesgue's theorem  $\int_0^1 \frac{\overline{\xi_n}(r)}{r} \rightarrow 0$ , i.e.  $\|\xi_n\|_0 \rightarrow 0$ .

#### 4. The space $D(K)$ and isomorphic properties of $D[0, 1]$ .

At first, we show that the space  $D(K)$  is dual if  $K$  is compact, i.e. there exists a Banach space  $Y$  such that  $Y^* = D(K)$ . To do this, we need the following well-known theorem.

**Theorem 5** Let  $X$  be a Banach space and  $\tau$  be a locally convex topology on  $X$ , which is weaker than the norm topology. If the closed unit ball  $B_X$  of  $X$  is  $\tau$ -compact then  $X$  is a dual space.



This theorem can be deduced from the bipolar theorem. In fact, if we denote  $Y = \{f \in X^* : f \text{ is continuous in the topology } \tau\}$  considered as a subspace of  $X^*$ , then  $X$  can be identified with the space  $Y^*$  and  $\sigma(X, Y)$  coincides with  $\tau$  on  $B_X$ .

**Theorem 6** *If  $K$  is compact then  $D(K)$  is a dual space.*

*Proof.* On  $D(K)$  consider the topology  $\tau$  generated by the norm  $\|\cdot\|_\infty$ . We will show that the closed unit ball  $B_{D(K)}$  of  $D(K)$  is  $\tau$ -compact. Let  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset B_{D(K)}$  be such a sequence that converges to some function  $f \in C(K)$  in the norm  $\|\cdot\|_\infty$ . Then  $(\bar{f}_n)_{n=1}^\infty$  converges point-wise to  $\bar{f}$ . By Fatou's lemma,  $f \in B_{D(K)}$  and therefore  $B_{D(K)}$  is  $\tau$ -closed.

Suppose that  $B_{D(K)}$  is not pre-compact in the topology  $\tau$ . Then by Arzela's theorem

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists \{t, \tau\} \subset K, \rho(t, \tau) < \delta, \exists f \in B_{D(K)}, |f(t) - f(\tau)| \geq \varepsilon.$$

Hence  $\bar{f}(r) \geq \varepsilon$  for all  $r \geq \delta$  and  $\|f\|_0 \geq \int_\delta^1 \frac{\varepsilon}{r} dr = \varepsilon \ln \frac{1}{\delta}$ . Since  $\delta$  is arbitrary, there exists a function  $f \in B_{D(K)}$  such that  $\|f\|_0 > 1$ , which is impossible. It follows that  $B_{D(K)}$  is  $\tau$ -compact and by the previous theorem  $D(K)$  is a dual space.

By the remark made before the previous theorem,  $D(K)$  is the dual space to the space  $M(K)$  of all regular Borel measures in  $K$  equipped with the norm from  $D(K)^*$ .

**Theorem 7** *For a bounded sequence  $(f_n)_{n=1}^\infty$  in  $D(K)$  the following three conditions are equivalent:*

1.  $(f_n)_{n=1}^\infty$  converges uniformly.
2.  $(f_n)_{n=1}^\infty$  converges point-wise.
3.  $(f_n)_{n=1}^\infty$  converges in the topology  $\sigma(D(K), M(K))$ .

*Proof.* The reason for this is that  $B_{D(K)}$  is a uniform compact, so every weaker Hausdorff topology on  $B_{D(K)}$  coincides with the uniform one.

From this place to the end of this section we will denote

$$T = \{t_n : t_n \in [0, 1], t_\infty = 0, t_1 = 1, t_n > t_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0\}.$$

Obviously, the space  $D(T)$  can be identified with a subspace of  $D[0, 1]$ .

**Theorem 8** *If there exist  $c \geq d > 1$  such that  $d \leq \frac{t_n}{t_{n+1}} \leq c$  for all  $n \in \mathbb{N}$  then on the subspace  $D_0(T) = \{f \in D(T) : f(0) = 0\}$  the norm  $\|\cdot\|$  is equivalent to the norm  $\|\cdot\|_1$ :*

$$\|f\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sup\{|f(t_j)| : j \geq n\}$$



*Proof.* For an arbitrary integer  $j < n$  we have

$$t_{n-j} - t_{n+1-j} \geq (d-1)t_{n+1-j} \geq d^j(d-1)t_{n+1}.$$

Since  $d > 1$ , there exists  $j_0 = j_0(d)$  such that  $t_{n-j} - t_{n+1-j} > t_{n+1}$  for all  $j \geq j_0$ . Hence  $\bar{f}(t_{n+1}) \leq 2 \sup\{|f(t_i)| : i \geq n+1-j_0\}$ . By the definition

$$\begin{aligned} \|f\|_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_{n+1}}^{t_n} \frac{\bar{f}(r)}{r} dr \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}(t_n) \ln \frac{t_n}{t_{n+1}} \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sup_{i \geq n} |f(t_i)| + \sum_{n=1}^{j_0} \bar{f}(t_n) \right) \ln c \leq 2(j_0 + 1) \ln c \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{i \geq n} |f(t_i)|. \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\|f\|_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_{n+1}}^{t_n} \frac{\bar{f}(r)}{r} dr \geq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}(t_{n+1}) \ln \frac{t_n}{t_{n+1}} \geq \ln d \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{i \geq n+1} |f(t_i)|$$

and

$$\begin{aligned} \|f\|_0 &\geq \int_{t_1-t_2}^1 \frac{\bar{f}(r)}{r} dr \geq \int_{t_1-t_2}^1 \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{r} dr \\ &= |f(t_1) - f(t_2)| \ln \frac{t_1}{t_1-t_2} \geq (|f(t_1)| - |f(t_2)|) \ln \frac{c}{c+1}. \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} 3\|f\|_0 + \frac{\ln d}{\ln \frac{c}{c-1}} \|f\|_0 &\geq \ln d \left( 3 \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{i \geq n+1} |f(t_i)| + |f(t_1)| - |f(t_2)| \right) \\ &\geq \ln d \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{i \geq n} |f(t_i)|. \end{aligned}$$

Hence  $\|\cdot\|_0$  and  $\|\cdot\|_1$  are equivalent. From this it is easy to see that  $\|\cdot\|$  is equivalent to  $\|\cdot\|_1$  on  $D_0(T)$ .

Denote  $D_0 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{j \geq n} |x_j| < \infty\}$  and by  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  the canonical basis of  $D_0$ . Obviously,  $D_0$  is isomorphic to the space  $D_0(K)$  and it can be considered as a subspace of  $D[0, 1]$ .

**Theorem 9**  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  is a basis for  $D_0$ .



*Proof.* Denote by  $S_n$  the operator of the  $n$ -th partial sum:

$$S_n x = S_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

and let us show that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - S_n x\| = 0$ .

Notice that  $(\|x - S_n x\|)_{n=1}^{\infty}$  is a non-increasing sequence. Therefore, if there exists  $x \in D_0$  such that  $(\|x - S_n x\|)_{n=1}^{\infty}$  does not converge to zero, then there exists  $\varepsilon > 0$  such that  $\|x - S_n x\| \geq \varepsilon$  for all  $n \in \mathbb{N}$ . In detail:

$$\|x - S_n x\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{j \geq k} |x_j| + n \sup_{j \geq n} |x_j| \geq \varepsilon.$$

Since the first summand converges to zero as  $n \rightarrow \infty$ , there exists  $n_0 \in \mathbb{N}$  such that  $\sup_{j \geq n} |x_j| \geq \frac{\varepsilon}{2n}$  for all  $n \geq n_0$ . Therefore

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{j \geq n} |x_j| \geq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

which is impossible since  $x \in D_0$ .

**Theorem 10** Let  $(u_n)_{n=1}^{\infty}$  be a normalized block basic sequence in  $D_0$ ,  $u_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j e_j$ . Then there exists a subsequence  $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  which is equivalent to the canonical basis of  $\ell_1$ .

*Proof.* By the definition,

$$\|u_n\| = p_{n-1} \max_{p_{n-1}+1 \leq j \leq p_n} |a_j| + \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} \max_{k \geq j} |a_k|.$$

Denote  $\alpha_n = \max_{p_{n-1}+1 \leq j \leq p_n} |a_j|$  and  $\beta_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} \max_{k \geq j} |a_k|$ . Then  $p_{n-1} \alpha_n \leq \|u_n\| \leq p_n \alpha_n$ . Since  $\|u_n\| = 1$ , we have that

$$\frac{1}{p_n} \leq \alpha_n \leq \frac{1}{p_{n-1}}.$$

For a given  $\varepsilon > 0$  we choose  $(p_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  so that  $p_{n_1} = p_1$  and  $p_{n_k} \leq \varepsilon p_{n_{k+1}-1}$ . Denote  $u_{n_k} = \sum_{j=(p_{n_k-1}+1)}^{p_{n_k}} a_j e_j$  and put  $M = [u_{n_k}]_{k=1}^{\infty}$ . We will show that  $M$  is isomorphic to  $\ell_1$ .



Define an operator  $G$  from  $M$  to  $\ell_1$  by  $Gx = G \sum_{k=1}^{\infty} x_k u_{n_k} = (x_1, x_2, \dots)$ . Since

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq |x_1| + \sum_{k=2}^{\infty} \left( (p_{n_{k-1}} - p_{n_k}) \alpha_{n_k} + \beta_{n_k} \right) |x_k| \\ &= |x_1| + \sum_{k=2}^{\infty} \left( 1 - p_{n_{k-1}} \alpha_{n_k} \right) |x_k| \geq |x_1| + \sum_{k=2}^{\infty} (1 - \varepsilon) |x_k| \\ &\geq (1 - \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = (1 - \varepsilon) \|Tx\|, \end{aligned}$$

operator  $G$  is correctly defined ( i.e.  $Gx \in \ell_1$  ) and continuous. On the other hand,

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j u_{n_j} \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|Tx\|.$$

It is easy to see that the set  $GM$  is dense in  $\ell_1$ . Therefore  $G$  is an isomorphism between  $M$  and  $\ell_1$ .

We will show that in  $D_0$  the norm convergence coincides with the weak convergence. For that, we need the following theorem.

**Theorem 11 (The Bessaga-Pełczyński selection principle)** (see [1], Prop. 1.3.10) Let  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  be a basis for a Banach space  $X$  with dual functionals  $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ . Suppose  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  is a sequence in  $X$  such that

1.  $\inf_n \|x_n\| > 0$  and
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_k^*(x_n) = 0$  for all  $k \in \mathbb{N}$

Then  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  contains a subsequence  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  which is equivalent to some block basic sequence of  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ .

**Theorem 12** In the space  $D_0$  the norm convergence coincides with the weak convergence.

*Proof.* Assume that there exists a sequence  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D_0$  such that  $x_n$  weakly converges to zero but does not converge to zero in the norm. By passing to a subsequence, we can suppose that  $\inf_n \|x_n\| = \varepsilon > 0$ . Denote  $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Then  $0 \notin \overline{S}^{\|\cdot\|}$  and  $0 \in \overline{S}^{weak}$ . By the previous theorem,  $S$  contains a subsequence  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  equivalent to some block basic sequence of  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ . Therefore without loss of generality, we can suppose that  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  is a block basic sequence of  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ .

Denote  $y_k = \frac{1}{\|x_{n_k}\|} x_{n_k}$ . This sequence contains a subsequence  $(y_{k_j})_{j=1}^{\infty}$  equivalent to the canonical basis of  $\ell_1$ . Therefore  $(y_{k_j})_{j=1}^{\infty}$  does not converge weakly to zero. On the other hand, for any  $f \in D_0^*$  we have

$$|f(y_{k_j})| = \left| \frac{1}{\|x_{n_{k_j}}\|} f(x_{n_{k_j}}) \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} |f(x_{n_{k_j}})| \rightarrow 0.$$



It means that  $(y_{k_j})_{j=1}^\infty$  weakly converges to zero, which is impossible.

The next theorem shows that although  $D_0$  in some sense is similar to  $\ell_1$ , it is not isomorphic to  $\ell_1$ .

**Theorem 13** *The space  $D_0$  does not have M-cotype  $r$  for any  $r > 0$ .*

*Proof.* Suppose that  $D_0$  has M-cotype  $r > 0$  for some  $C > 0$ . Consider the sequence  $x_n = \frac{1}{n}e_n$ . We have  $\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^r\right)^{\frac{1}{r}} = n^{\frac{1}{r}}$  and

$$\max\left\{\left\|\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right\| : \alpha_j = \pm 1\right\} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

Therefore  $C \leq n^{-\frac{1}{r}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . Hence  $C = 0$ .

## 5. The separability problem

**Theorem 14** *If  $K$  is not pre-compact then  $D(K)$  has a subspace isomorphic to  $\ell_\infty$ .*

*Proof.* Since  $K$  is not pre-compact, there exists  $\varepsilon > 0$  and a sequence  $(t_n)_{n=1}^\infty \subset K$  such that  $\rho(t_n, t_m) > \varepsilon$  for all  $n \neq m$ . Denote  $B_n = \{t \in K : \rho(t, t_n) < \varepsilon/4\}$ . For every  $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$  we build  $f_\alpha$  as follows:

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_n(\varepsilon/4 - \rho(t, t_n)), & \text{if } t \in B_n \\ 0, & \text{if } t \notin \bigcup_{n=1}^\infty B_n \end{cases}$$

Then  $f_\alpha \in D(K)$  and it is easy to see that the map  $\alpha \mapsto f_\alpha$  is an isomorphism between  $\ell_\infty$  and the subspace  $\overline{\text{Lin}}\{f_\alpha : \alpha \in \ell_\infty\}$  of the space  $D(K)$ .

By this theorem, in particular, we obtain that if  $K$  is not pre-compact then the space  $D(K)$  is not separable. We will prove that if  $K$  is a convex compact in a Banach space then  $D(K)$  is separable.

**Theorem 15** *If  $K_n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k \in [0, 1], k = \overline{1, n}\}$  then  $D(K_n)$  is separable.*

*Proof.* We will show that for a given  $n$  there exists a countable subset  $G_n \subset D(K_n)$  such that for every  $f \in D(K_n)$  there exists  $(f_k)_{k=1}^\infty \subset G_n$  with



the following properties :

1.  $\bar{f}_k(r) \leq \alpha_n r + \beta_n \bar{f}(r)$ , where  $\alpha_n, \beta_n$  are constants depending only on  $n$ .
2.  $f_k \rightarrow f$  uniformly.

From these it will follow that  $f_k \rightarrow f$  in  $D(K_n)$  and therefore  $G_n$  is dense in  $D(K_n)$ . We will show that by induction. Firstly, consider the case  $n = 1$ .

Let  $[0, 1] = \bigcup_{j=0}^{N-1} [t_j, t_{j+1}]$ , where  $t_j = \frac{j}{N}$ . For a given  $f \in D[0, 1]$  we build a piece-wise linear function  $f_N$  as follows :

$$f_N(t) = \frac{f(t_{j+1}) - f(t_j)}{t_{j+1} - t_j} (t - t_j) + f(t_j) \quad \text{if } t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Then  $f_N \rightarrow f$  uniformly on  $[0, 1]$  and it is easy to see that  $\bar{f}_N(r) \leq 5\bar{f}(r)$ . We define  $f_{N,k}$  as a piece-wise linear function, taking rational values at points  $t_j$  and  $|f_{N,k}(t_j) - f_N(t_j)| \leq \frac{1}{k}$ . Then  $(\overline{f_{N,k}} - f_N)(r) \leq \frac{2r}{k} N$ . Hence  $\bar{f}_{N,k}(r) \leq \frac{2r}{k} N + 5\bar{f}(r)$ . Therefore the sequence  $(f_{N,N})_{N=1}^{\infty}$  satisfies conditions 1 and 2. We can take  $G_1$  as the set of all piece-wise linear functions with nodes at  $\frac{j}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  and taking at points  $\frac{j}{N}$  rational values.

Suppose that the set  $G_n$  exists in the space  $D(K_n)$ . We will show the existence of  $G_{n+1}$  in  $D(K_{n+1})$ . For convenience, denote  $x = (y, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$  where  $y \in \mathbb{R}^n$ .

Let  $f \in D(K_{n+1})$ . Define the function  $f_N$  as follows: on every interval  $[t_j, t_{j+1}]$  if  $t = \alpha t_j + (1 - \alpha)t_{j+1}$  then  $f_N(y, t) = \alpha f(y, t_j) + (1 - \alpha)f(y, t_{j+1})$ . It is not difficult to see that  $\bar{f}_N(r) \leq 6\bar{f}(r)$  and  $f_N \rightarrow f$  uniformly.

By the assumption, for every  $t_j$  there exists an approximation  $g_{j,k}(y)$  of the function  $f(y, t_j)$  such that  $g_{j,k}(y) \rightarrow f(y, t_j)$  uniformly and  $\bar{g}_{j,k}(r) \leq \alpha_n r + \beta_n \bar{f}(\cdot, t_j)(r) \leq \alpha_n r + \beta_n \bar{f}(r)$ . Build  $f_{N,k}(y, t)$  :

$$f_{N,k}(y, \alpha t_j + (1 - \alpha)t_{j+1}) = \alpha g_{j,k}(y) + (1 - \alpha)g_{j+1,k}(y).$$

For all pair of points  $(y, t), (z, \tau) \in K : \|(y, t) - (z, \tau)\| \leq r$  we have

$$|f_{N,k}(y, t) - f_{N,k}(z, \tau)| \leq |f_{N,k}(y, t) - f_{N,k}(z, t)| + |f_{N,k}(z, t) - f_{N,k}(z, \tau)|.$$

But

$$\begin{aligned} |f_{N,k}(z, t) - f_{N,k}(z, \tau)| &\leq |f_{N,k}(z, t) - f_N(z, \tau)| + |f_{N,k}(z, \tau) - f_N(z, t)| \\ &\quad + |f_N(z, t) - f_N(z, \tau)| \\ &\leq 2N|t - \tau| \max_{1 \leq j \leq N} |g_{j,k}(z) - f(z, t_j)| + \bar{f}_N(r) \\ &\leq 2N|t - \tau| \max_{1 \leq j \leq N} |g_{j,k}(z) - f(z, t_j)| + 6\bar{f}(r) \end{aligned}$$



and the first summand

$$\begin{aligned} |f_{N,k}(y, t) - f_{N,k}(z, t)| &\leq \alpha |g_{j,k}(y, t_j) - g_{j,k}(z, t_j)| + (1 - \alpha) |g_{j+1,k}(y, t_{j+1}) \\ &\quad - g_{j+1,k}(z, t_{j+1})| \\ &\leq \alpha_n r + \beta_n \bar{f}(r). \end{aligned}$$

Hence  $\overline{f_{N,k}}(r) < 2rN \max_{1 \leq j \leq N} |g_{j,k}(z) - f(z, t_j)| + \alpha_n r + (\beta_n + 6) \bar{f}(r)$ .

For a given  $N > 0$ ,  $\max_{1 \leq j \leq N} |g_{j,k}(z) - f(z, t_j)| \rightarrow 0$  because  $g_{j,k}(z) \rightarrow f(z, t_j)$  uniformly. Therefore there exists  $k_N$  such that  $\max_{1 \leq j \leq N} |g_{j,k}(z) - f(z, t_j)| \leq \frac{1}{N}$ . As a result,  $\overline{f_{N,k_N}}(r) \leq (\alpha_n + 2)r + (\beta_n + 6) \bar{f}(r)$ . We can take  $G_{n+1}$  as the set of all functions  $g(y, t)$  piece-wise linear in the second variable with nodes in  $\{\frac{j}{N} : N \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \dots, N\}$  and belonging to  $G_n$  in the first variable at the nodes.

Obviously, we can take  $\alpha_n = 2n$  and  $\beta_n = 6n$ . From this theorem we obtain that  $D[0, 1]$  is a separable dual space and thus does not contain a copy of  $c_0$ .

**Corollary 1** *If  $K \subset \mathbb{R}^n$  is a convex compact then  $D(K)$  is separable.*

*Proof.* Without loss of generality we can suppose that  $\mathbb{R}^n$  is the normed space with the Euclidian norm. Let  $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ . Then there exists a unique point  $\bar{x} \in K$  such that  $\rho(x, \bar{x}) = \rho(x, K)$ . Consider the map  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow K$ :

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \in K \\ \bar{x}, & \text{if } x \notin K \end{cases}$$

It is easy to see that  $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \|x - y\|$  for all  $x, y$ . Therefore if  $f \in D(K)$  then  $f \circ \varphi$  is an extension of  $f$  on  $\mathbb{R}^n$  with preservation of norm. Since  $K$  is compact, there exists  $\lambda > 0$  such that  $K \subset \lambda K_n$ . Thus every function  $f \in D(K)$  can be extended to a function  $F \in D(\lambda K_n)$ . The space  $D(\lambda K_n)$  is separable and so is  $D(K)$ .

**Theorem 16** *If  $X$  is a Banach space and  $K \subset X$  is a convex compact then the space  $D(K)$  is separable.*

*Proof.* Consider the subspace  $Y = \overline{\text{Lin}}\{x : x \in K\}$ . It is separable because of compactness of  $K$ . By the Banach-Mazur theorem (see [1], Theorem 1.4.3),  $Y$  isometrically embeds into  $C[0, 1]$ . But  $C[0, 1]$  has a basis, therefore we can suppose that  $K$  is a compact in a Banach space  $X$  with a basis.

Denote by  $S_n$  the operator of the  $n$ -th partial sum in  $X$  with respect to a given basis. Then  $S_n \rightarrow I$  point-wise, hence  $S_n$  converges to  $I$  uniformly on  $K$ .

For a given  $n$  introduce a subspace  $E_n \subset D(K)$  by  $E_n = \{g : g(x) = g(S_n x)\}$ . Evidently,  $E_n$  is isomorphic to the corresponding  $D(S_n K)$ , so by corollary 1 it is separable. Let us show that  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  is dense in  $D(K)$ .



Let  $f \in D(K)$  and denote  $f_n(x) = f(S_n x)$ . Then  $f_n \in E_n$  and

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(S_n x) - f(x)| \leq \bar{f}(\|x - S_n x\|) \rightarrow 0.$$

Therefore  $f_n \rightarrow f$  uniformly on  $K$  and the sequence of functions  $\frac{(f_n - f)(r)}{r}$  converges to zero almost everywhere. Denote  $\alpha = \sup_n \|S_n\|$ . Then

$$\begin{aligned} |[f_n(x) - f(x)] - [f_n(y) - f(y)]| &\leq |f(x) - f(y)| + |f_n(x) - f_n(y)| \\ &\leq \bar{f}(\|x - y\|) + \bar{f}(\|S_n x - S_n y\|) \\ &\leq \bar{f}(\|x - y\|) + \bar{f}(\alpha \|x - y\|). \end{aligned}$$

Hence  $f_n \rightarrow f$  in  $D(K)$  and the theorem is proved.

## REFERENCES

1. Fernando Albiac, Nigel Kalton. *Topics in Banach Space Theory*. – New York: Springer, 2006. – 373 p.
2. Kadets M.I., Kadets V.M. *Series in Banach spaces. Conditional and unconditional convergence*. – Basel: Birkhauser, 1997. – 159 p.
3. Fikhtengol'ts G.M. *A course of differential and integral calculus*. – Moscow: Fizmatlit, 2002. – V.3. – 727 p. (in Russian)



## О расстановке операторных коэффициентов перед членами ряда

Наталия Бойко

Харьковский национальный университет  
пл. Свободы 4, 61077 Харьков, Украина  
maletska.nata@gmail.com

Изучаются эффекты, связанные с заменой в определении безусловной сходимости ряда расстановки коэффициентов  $\pm 1$  на расстановку операторных коэффициентов из некоторого фиксированного множества. Получены аналоги теории коти́па и теоремы М.И.Каде́ца о безусловной сходящихся рядах в равномерно выпуклом пространстве.

2000 *Mathematics Subject Classification* 46B20.

### 1. Введение

Всюду в тексте  $X$  и  $Y$  используются для обозначения банаховых пространств;  $L(X, Y)$  – пространство непрерывных линейных операторов, действующих из  $X$  в  $Y$ ;  $L(X) := L(X, X)$ ;  $S_X$  – единичная сфера пространства  $X$ .

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  элементов пространства  $X$  называется безусловно сходящимся, если для любой расстановки коэффициентов  $c_n = \pm 1$  перед членами ряда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$  сходится.

Безусловно сходящиеся ряды – это полезный аппарат теории банаховых пространств, и теория безусловно сходящихся рядов пересекается со многими смежными разделами математики: гармоническим анализом, теорией вероятностей и др. Подробнее об условной и безусловной сходимости можно прочитать в [3].

Введем следующее обобщение безусловной сходимости.

**Определение 1** Пусть  $X, Y$  – банаховы пространства,  $G \subset L(X, Y)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  – ряд в  $X$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  назовем  $G$ -сходящимся, если для любого набора операторов  $T_1, T_2, \dots$  из  $G$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} T_n x_n$  сходится.

Цель настоящей работы – изучить элементарные свойства  $G$ -сходимости и по возможности построить для  $G$ -сходимости аналоги теорем, известных для безусловной сходимости рядов.



Структура работы. В первом разделе мы изучаем связь между  $G$ -сходимостью и безусловной сходимостью ряда. Во втором разделе определяется модуль выпуклости по отношению к семейству операторов  $G$  и доказывается аналог теоремы М.И.Кадеца о безусловно сходящихся рядах в равномерно выпуклых пространствах. В третьем, последнем разделе работы, строится аналог теории  $M$ -котипа для  $G$ -сходимости, где  $G$  – полугруппа операторов с некоторым дополнительным свойством "правильности".

## 2. Связь $G$ - и безусловной сходимостей

Докажем несколько утверждений, характеризующих связь между  $G$ -сходимостью и безусловной сходимостью.

**Утверждение 1** Если  $G$  – ограниченное семейство, то любой абсолютно сходящийся ряд  $G$ -сходится.

*Доказательство.* Обозначим  $M = \sup\{\|T\| : T \in G\}$ . Тогда для любых наборов  $T_k \in G$  имеем  $\sum_n \|T_n x_n\| \leq M \cdot \sum_n \|x_n\| < \infty$ .  $\square$

**Утверждение 2** Пусть  $G \subset L(X, Y)$  – произвольное семейство операторов и  $\sum_n x_n$  – ряд в пространстве  $X$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

А.  $\sum_n x_n$  –  $G$ -сходящийся ряд

В. Для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой индекс  $N$ , что для любых  $m > n > N$  и любого выбора  $T_k \in G$  выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{k=n}^m T_k x_k \right\| < \varepsilon.$$

*Доказательство.* То, что из условия В следует А, является очевидным, и интерес представляет только доказательство импликации А  $\Rightarrow$  В.

Будем рассуждать "от противного". Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Пусть для любого  $N$  существует такой набор  $T_k$  и существуют такие  $m > n > N$ , что  $\left\| \sum_{k=n}^m T_k x_k \right\| \geq \varepsilon$ . Тогда существуют  $U_k \in G$  и  $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \dots$  такие, что  $\left\| \sum_{k=n_i}^{m_i} U_k x_k \right\| \geq \varepsilon$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Определим  $U_k \in G$  при  $k \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} [n_i, m_i]$  произвольным образом. Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} U_k x_k$  не будет подчиняться критерию Коши сходимости. Противоречие.  $\square$

**Определение 2** Пусть  $G \subset L(X, Y)$ . Поточечной оболочкой семейства  $G$  назовем множество  $rw(G)$  тех операторов  $S \in L(X, Y)$ , что для любого  $x \in X$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует  $T \in G$  с  $\|Tx - Sx\| < \varepsilon$ .

Отметим, что  $rw(G)$ , вообще говоря, шире замыкания множества  $G$  в топологии поточечной сходимости пространства  $L(X, Y)$ .

**Теорема 1** Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  – это  $G$ -сходящийся ряд. Тогда для семейства  $\tilde{G} = rw(conv G)$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  будет  $\tilde{G}$ -сходиться.



*Доказательство.* Так как ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$   $G$ -сходится, следовательно, для него верно утверждение 2. Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ , и пусть  $N = N(\varepsilon)$  подчиняется условию **В.** данного утверждения, то есть  $\|\sum_{k=n}^m T_k x_k\| < \varepsilon$  при  $n, m > N$  и  $T_k \in G$ . Доказательство теоремы равносильно доказательству верности такой оценки суммы с операторами из семейства  $\tilde{G}$ . Для доказательства необходимой оценки будем в данной сумме последовательно, начиная с последнего, заменять коэффициенты из  $G$  на операторы из  $\tilde{G}$ . На каждом шаге мы при этом сможем проверять верность необходимых оценок и сохранность связи между  $\varepsilon$  и соответствующим ему значением  $N = N(\varepsilon)$ . Поэтому сначала проверим, что оценка суммы не изменится  $\|\sum_{k=n}^m T_k x_k\|$ , если последний в ней оператор  $T_m$  из  $G$  будет заменен на произвольный оператор  $S_m$  из  $\tilde{G}$ . Так как  $S_m \in \tilde{G}$ , для любого  $\delta > 0$  существует такой набор  $T'_j \in G$ , что  $\|\sum_{j=1}^l \lambda_j T'_j x_m - S_m x_m\| < \delta$ , где  $\sum_{j=1}^l \lambda_j = 1$  и  $\lambda_j \geq 0$ . Значит,  $\|\sum_{k=n}^{m-1} T_k x_k + S_m x_m\| \leq \|\sum_{k=n}^{m-1} T_k x_k + \sum_{j=1}^l \lambda_j T'_j x_m\| + \delta \leq \sum_{j=1}^l \lambda_j \|\sum_{k=n}^{m-1} T_k x_k + T'_j x_m\| + \delta \leq \sum_{j=1}^l \lambda_j \varepsilon + \delta = \varepsilon + \delta$ . Следовательно, в силу произвольности  $\delta$ , выполнено и неравенство  $\|\sum_{k=n}^{m-1} T_k x_k + S_m x_m\| \leq \varepsilon$ . Таким образом, мы показали, что при замене одного коэффициента из  $G$  на коэффициент из  $\tilde{G}$  оценка суммы из условия **В.** утверждения 2 остается верным. Точно таким же образом, опираясь на уже полученную оценку, можно показать, что неравенство из условия **В.** утверждения 2 выполнено и при замене двух операторов  $T_k$  на  $S_k$ , затем трех и так по цепочке для всех  $(m - n)$  операторов из суммы. То есть для каждого  $\varepsilon > 0$  и соответствующего ему  $N = N(\varepsilon)$  верно неравенство  $\|\sum_{k=n}^m S_k x_k\| < \varepsilon$  при  $n, m > N$  и  $S_k \in \tilde{G}$ . Значит, для ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  выполнено условие **В.** утверждения 2, следовательно, данный ряд  $\tilde{G}$ -сходится.  $\square$

**Определение 3** Семейство операторов  $G \subset L(X, Y)$  назовем правильным, если  $0 \in pw(convG)$ .

**Теорема 2** Пусть  $G \subset L(X, Y)$  – правильное семейство операторов в банаховом пространстве  $X$ . Тогда для любого  $G$ -сходящегося ряда  $\sum_n x_n$  в  $X$  все ряды  $\sum_n T_n x_n$ ,  $T_n \in G$  сходятся безусловно. В частности, если  $G$  содержит ограниченный снизу оператор, то и сам ряд  $\sum_n x_n$  сходится безусловно.

*Доказательство.* По теореме 1 любой  $G$ -сходящийся ряд также и  $pw(convG)$ -сходится. А так как  $G$  – правильное семейство, то есть,  $pw(convG)$  содержит 0, то при подстановке 0 перед произвольным количеством элементов ряда  $\sum_n T_n x_n$  его сходимости не нарушится. Что и требовалось доказать, так как безусловная сходимость ряда эквивалентна тому, что ряд сходится при любой расстановке коэффициентов 0 и 1 перед его слагаемыми.  $\square$

Сформулируем достаточное условие того, чтобы из безусловной сходимости ряда следовала его  $G$ -сходимость.

**Теорема 3** Пусть существует такая последовательность операторов  $\{U_1, U_2, \dots\} \subset L(X, Y)$ , что  $\sum_1^{\infty} \|U_k\| = C < \infty$  и что  $G \subset cl\{\sum_{k=1}^N a_k U_k :$



$N \in \mathbb{N}$ ,  $|a_k| \leq 1$ . Тогда из безусловной сходимости ряда  $\sum_1^\infty x_k$  в пространстве  $X$  следует его  $G$ -сходимость.

*Доказательство.* Теорему достаточно доказать для случая  $G = \{\sum_{i=1}^N a_k U_k : N \in \mathbb{N}, |a_k| \leq 1\}$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и выберем такое  $L$ , что для любых  $n > m > L$  и любого набора коэффициентов  $|t_k| \leq 1$  выполнено  $\|\sum_{k=m}^n t_k x_k\| < \varepsilon$ . Рассмотрим ряд  $\sum_1^\infty T_k x_k$ ,  $T_k \in G$ ,  $T_k = \sum_{i=1}^{N_k} t_k^i U_i$ ,  $t_k^i \in [-1, 1]$ . Положим для удобства  $t_k^i = 0$  при  $i > N_k$ . Тогда для любых  $n > m > N$  имеем

$$\left\| \sum_{k=m}^n T_k x_k \right\| = \left\| \sum_{k=m}^n \sum_{i=1}^\infty t_k^i U_i x_k \right\| \leq \sum_{i=1}^\infty \|U_i(\sum_{k=n}^m t_k^i x_k)\| \leq C \cdot \varepsilon,$$

то есть данный ряд удовлетворяет критерию Коши сходимости ряда, а, значит, сходится.  $\square$

**Следствие 1** Пусть семейство операторов  $G \subset L(X, Y)$  компактно и конечномерно. Тогда любой безусловно сходящийся ряд  $\sum_1^\infty x_k$  в  $X$  будет  $G$ -сходящимся рядом.

В случае, если компактное семейство операторов  $G$  бесконечномерно, из безусловной сходимости ряда не всегда следует его  $G$ -сходимость, что иллюстрирует следующий пример.

*Пример 1.* Рассмотрим пространство  $c_0$ . В качестве компактного семейства  $G \subset (c_0)^*$  возьмем объединение нуля и такой последовательности функционалов  $T_n : T_n(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = b_n a_n$ , где  $b_n$  стремятся к нулю, но ряд из  $b_n$  не сходится. Обозначим через  $\{e_n\}_1^\infty$  канонический базис пространства  $c_0$ . Покажем, что существует последовательность  $a_n \in \mathbb{R}$  такая, что  $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$  безусловно сходится, но не  $G$ -сходится. Для этого достаточно выбрать  $a_n \geq 0$ ,  $a_n \rightarrow 0$  так, чтобы ряд  $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$  расходился. Существование таких  $a_n$  следуют из того, что  $(b_n)_{n=1}^\infty \notin l_1 = c_0^*$ .

Рассмотрим более подробно эффект, описанный в этом примере. Для этого введем следующие определения.

**Определение 4** Числовая последовательность  $b = (b_1, b_2, \dots)$  называется допустимой для пространства  $X$ , если для любого безусловно сходящегося ряда  $\sum_1^\infty x_n$  в этом пространстве ряд  $\sum_1^\infty |b_n| \|x_n\|$  сходится.

Сумма двух допустимых последовательностей, в силу неравенства треугольника, тоже является допустимой последовательностью. Таким образом, множество всех допустимых последовательностей для данного пространства  $X$  образует линейное пространство, которое мы будем обозначать  $E_X$ . В этом пространстве можно определить норму следующим образом

$$\|b\| := \sup \left\{ \sum_{n=1}^N |b_n| \|x_n\| : N \in \mathbb{N}, x_n \in X, \sup_{a_k = \pm 1} \left\| \sum_{k=1}^N a_k x_k \right\| \leq 1 \right\}$$



**Теорема 4** Последовательность  $b = (b_1, b_2, \dots)$  принадлежит  $E_X$  тогда и только тогда, когда  $\|b\| < \infty$ .

*Доказательство.* Докажем необходимость этого условия от противного. Пусть  $b = (b_1, b_2, \dots)$  – допустимая последовательность и  $\|b\| = \infty$ . Тогда можно выбрать такое  $n_1$  и такой набор элементов  $\{x_k\}_{k=1}^{n_1}$ , что

$$\sum_{k=1}^{n_1} |b_k| \|x_k\| \geq 1, \quad \sup_{a_k = \pm 1} \left\| \sum_{k=1}^{n_1} a_k x_k \right\| \leq 1.$$

При отбрасывании первых элементов последовательности  $b = (b_1, b_2, \dots)$  норма этой последовательности, очевидно, останется бесконечной. Следовательно, существует такое  $n_2$  и такой набор элементов  $\{y_k\}_{k=n_1+1}^{n_2}$ , что  $\sum_{k=n_1+1}^{n_2} |b_k| \|y_k\| \geq 2, \sup_{a_k = \pm 1} \left\| \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k y_k \right\| \leq 1$ . Обозначим  $x_k = \frac{1}{2} y_k, k = n_1 + 1, \dots, n_2$ . Продолжая этот процесс, мы получим такой безусловно сходящийся ряд  $\sum_1^\infty x_n$  в  $X$ , что частные суммы ряда  $\sum_1^\infty |b_n| \|x_n\|$  неограниченно возрастают. То есть этот ряд расходится, что противоречит предположению допустимости последовательности  $b$ .

Достаточность конечности нормы последовательности для того, чтобы данная последовательность была допустимой, легко устанавливается следующим образом. Рассмотрим произвольный безусловно сходящийся ряд  $\sum_1^\infty x_n$ . В силу его безусловной сходимости существует такая константа  $C$ , что  $\sup_{a_k = \pm 1} \left\| \sum_{k=1}^N a_k x_k \right\| \leq C$  для любого  $N \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого  $N$  выполнено неравенство  $\sum_1^N |b_n| \|x_n\| \leq C \|b\|$ , что в свою очередь означает сходимость ряда  $\sum_1^\infty |b_n| \|x_n\|$ .  $\square$

**Теорема 5** Пусть  $b = (b_1, b_2, \dots)$  – допустимая последовательность,  $G = \{T_1, T_2, \dots\} \subset L(X, Y)$  подчиняется условию  $\|T_n\| \leq b_n$ . Тогда любой безусловно сходящийся ряд  $\sum x_k$  в  $X$  будет  $G$ -сходиться.

*Доказательство.* Возьмем произвольный набор операторов  $U_k$  из  $G$  и докажем сходимость ряда  $\sum U_k x_k$ . Так как  $\sum x_k$  безусловно сходится, следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что для любых  $m > n > N$  для любой расстановки плюс-минусов выполнено неравенство  $\left\| \sum_{k=n}^m \pm x_k \right\| < \varepsilon$ . Оценим величину  $\left\| \sum_{k=n}^m U_k x_k \right\|$  при  $m > n > N$ . Обозначим  $A_i = \{k \in [n, m] : U_k = T_i\}$ ,  $y_i = \sum_{k \in A_i} x_k$ ,  $D = \{i : A_i \neq \emptyset\}$ . Тогда для любой расстановки плюс-минусов  $\left\| \sum_{i \in D} \pm y_i \right\| \leq \varepsilon$ . Соответственно  $\left\| \sum_{k=n}^m U_k x_k \right\| = \left\| \sum_{i \in D} T_i y_i \right\| \leq \sum_{i \in D} \|T_i\| \|y_i\| \leq \varepsilon \|b\|$ .  $\square$

Следующие теоремы призваны выявить, какие именно последовательности содержит пространство  $E_X$  при различных  $X$ .

**Теорема 6**  $E_X \supset l_1$  для любого  $X$ .

*Доказательство.* По предыдущей теореме  $E_X$  содержит все последовательности, норма которых конечна. Пусть последовательность  $b = (b_1, b_2, \dots) \in l_1$ ,  $x_n \in X$ ,  $\sup_{a_k = \pm 1} \left\| \sum_{k=1}^N a_k x_k \right\| \leq 1$ . Тогда  $\sup_k \|x_k\| \leq 1$  и



$$\sum_{n=1}^N |b_n| \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|, \|b\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|. \quad \square$$

**Теорема 7**  $E_{c_0} = l_1$

*Доказательство.* Включение  $E_{c_0} \supset l_1$  уже доказано в предыдущей теореме. Докажем обратное включение. Пусть  $b = (b_1, b_2, \dots) \notin l_1$ . Тогда для любого  $C > 0$  существует такое  $n$ , что  $\sum_{k=1}^n |b_k| > C$ . Возьмем в качестве последовательности  $x_k$  канонический базис пространства  $c_0$ . Тогда  $\sum_{k=1}^n |b_k| \|x_k\| > C$ , но  $\sup_{\alpha_k = \pm 1} \|\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\| = 1$ . Следовательно,  $\|b\|_{E_{c_0}} = \infty$ , т.е.  $b \notin E_{c_0}$ .  $\square$

**Теорема 8**  $E_{l_2} = l_2$

*Доказательство.* Докажем сначала, что  $l_2$  вложено в  $E_{l_2}$ , то есть, что любая последовательность  $b$  из  $l_2$  является допустимой для пространства  $l_2$ . По неравенству Коши-Буняковского  $\sum_{k=1}^N |b_k| \|x_k\| \leq \|b\|_{l_2} (\|x_1\|, \|x_2\|, \dots)_{l_2}$ . Так как последовательность  $b$  взята из  $l_2$ , ее норма в этом пространстве конечна. А конечность нормы в  $l_2$  последовательности  $(\|x_1\|, \|x_2\|, \dots)$  следует из сходимости, по теореме Орлича, ряда из квадратов норм элементов безусловно сходящегося ряда в  $l_2$  (см. [1] и также [3], с. 49). Таким образом норма последовательности  $b$  в пространстве  $E_{l_2}$  конечна.

Докажем теперь, что последовательность  $b$ , не лежащая в  $l_2$ , не может принадлежать пространству  $E_{l_2}$ , то есть, что норма  $b$  в  $E_{l_2}$  бесконечна.

Так как ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$  расходится, для любой константы  $C$  существует такое натуральное  $N$ , что  $\sum_{k=1}^N b_k^2 > C$ . Рассмотрим  $x_k = \frac{b_k}{(\sum_{k=1}^N b_k^2)^{1/2}} \cdot e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , где  $e_k$  — элементы канонического базиса пространства  $l_2$ . Тогда  $\sup_{\alpha_k = \pm 1} \|\sum_{k=1}^N \alpha_k x_k\| = 1$ , но  $\sum_{k=1}^N |b_k| \|x_k\| > \sqrt{C}$ , т.е.  $\|b\|_{E_{l_2}} = \infty$ .  $\square$

**Определение 5** Банахово пространство  $X$  имеет  $M$ -тип  $p$  с константой  $C > 0$ , если неравенство

$$\max_{\alpha_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \geq C \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

выполнено для всех конечных наборов элементов  $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ .

**Теорема 9** Пусть пространство  $X$  имеет  $M$ -тип  $p$ . Тогда  $E_X \supset l_p$ .

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность  $b$  из  $l_p$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^N |b_k| \|x_k\| \leq \left( \sum_{k=1}^N \|x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{k=1}^N |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$



$$\leq \frac{1}{C} \max_{a_k=\pm 1} \left\| \sum_{k=1}^N a_k x_k \right\| \times \left( \sum_{k=1}^N |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где  $C$  - это константа из определения  $M$ -котипа. То есть  $\|b\|_{E_X} \leq \frac{1}{C} \|b\|_{p'}$ .  $\square$

**Определение 6** Расстоянием Банаха-Мазура между нормированными пространствами  $X$  и  $Y$  называется величина  $d(X, Y) = \inf \{ \|T\| \cdot \|T^{-1}\| : T \in L(X, Y), T - \text{изоморфизм} \}$

**Определение 7** Пространство  $X$  финитно представимо в пространстве  $Y$  ( $X \xrightarrow{f} Y$ ) если для любого  $\varepsilon > 0$  и для любого конечномерного подпространства  $Z \subset X$  существует конечномерное подпространство  $Z_1 \subset Y$  такое, что  $d(Z, Z_1) < 1 + \varepsilon$

Из того, что норма в  $E_X$  определяется через конечные наборы элементов пространства  $X$ , с очевидностью вытекает следующая теорема.

**Теорема 10** Пусть  $X \xrightarrow{f} Y$ . Тогда  $E_X \supset E_Y$ .

**Следствие 2** Пусть пространство  $X$  не имеет котипа. Тогда  $E_X = l_1$

*Доказательство.* По теореме 6  $E_X \supset l_1$  для всех  $X$ . То, что пространство  $X$  не имеет котипа, равносильно финитной представимости пространства  $c_0$  в  $X$ . Следовательно, по теореме 10  $E_{c_0} = l_1 \supset E_X$ . Значит  $E_X = l_1$ .  $\square$

**Следствие 3** Пусть  $l_p \xrightarrow{f} X$ . Тогда  $E_X \subset l_{p'}$

Так как пространство  $l_2$  финитно представимо в любом бесконечномерном пространстве  $X$ , с учетом теоремы 10 мы получаем следующее следствие.

**Следствие 4**  $E_X \subset l_2$  для любого бесконечномерного  $X$ .

### 3. Модуль выпуклости по отношению к семейству операторов

**Определение 8** Модулем выпуклости пространства  $X$  по отношению к семейству операторов  $G \subset L(X)$  назовем функцию

$$\delta^G(t) = \inf_{\|x\|=\|y\|=1} \{ \sup \{ \|x + tTy\| : T \in G \} - 1 \}$$

Пространство  $X$  назовем выпуклым по отношению к семейству операторов  $G$ , если  $\delta^G(t) \geq 0$  и равномерно выпуклым по отношению к семейству операторов  $G$ , если  $\delta^G(t) > 0$  при всех  $t > 0$ . Частным случаем равномерной  $G$ -выпуклости будут хорошо известные равномерная выпуклость (при



$G = \{I, -I\}$  и комплексная равномерная выпуклость (при  $G = \{e^{i\theta}I : \theta \in (0, 2\pi]\}$ ).

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие только что введенное определение:

*Пример 2.* В пространстве  $L_p[-\infty, +\infty]$  рассмотрим семейство операторов сдвига  $G = \{T_s : (T_s(f))(u) = f(s+u)\}$ . В этом случае для любых  $x, y \in S_{L_p}$

$$\sup_s \|x + tT_s(y)\| = \sup_s \left( \int_{-\infty}^{\infty} (x(u) + ty(u+s))^p du \right)^{1/p} \geq (1+t^p)^{1/p}.$$

Это значение достигается либо точно для  $x$  и  $y$  с ограниченными носителями при таких  $s$ , при которых носители функций  $x$  и  $T_s y$  не пересекаются, либо в пределе при  $s \rightarrow \infty$ , если носитель хотя бы одной из функций  $x$  или  $y$  неограничен. Следовательно,  $\delta^G(t) = (1+t^p)^{1/p} - 1$ . При  $t \rightarrow 0$  функция  $\delta^G(t)$  будет эквивалентна  $\frac{1}{p}t^p$ .

*Пример 3.* Пусть  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Тогда  $L_p(\mathbb{T})$  не является выпуклым по отношению к семейству всех операторов сдвига на окружности. Действительно, если взять в качестве  $x$  постоянную функцию на окружности, а в качестве  $y = -x$ , то

$$\sup_T \|x + tTy\| = \|x + ty\| = \|x - tx\| = |1 - t|,$$

а так как  $t > 0$  полученное выражение будет меньше 1. Значит  $\delta^G(t)$  будет отрицательным.

*Пример 4.* Рассмотрим в пространстве  $L_p[0, 1]$  семейство операторов умножения

$$G = \{T_g : T_g f = f \cdot g; g : [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\}\}.$$

Очевидно, что  $\sup \|x(u) + tg(u)y(u)\|$  по  $g : [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\}$  будет достигаться при том  $g$ , при котором оба слагаемых  $x(u)$  и  $tg(u)y(u)$  будут иметь одинаковый знак при всех  $u$ . Поэтому для поиска модуля выпуклости заданного пространства по отношению к данному семейству операторов можно рассматривать только положительные во всех точках функции  $x$  и  $y$ . Соответственно, требуется найти

$$\inf \left\{ \left( \int_0^1 (x(u) + ty(u))^p du \right)^{1/p} : x, y \geq 0; \|x\| = \|y\| = 1 \right\}.$$

Этот инфимум, очевидно, будет достигаться на тех  $x$  и  $y$ , носители которых не пересекаются и будет равен  $(1+t^p)^{1/p} - 1$ .

Для  $L_\infty$  модуль выпуклости относительно рассматриваемого семейства операторов будет равен 0 для  $t \leq 1$ , это значение будет достигаться при любых  $x$  и  $y$  с непересекающимися носителями.

*Пример 5.* Вычислим модуль выпуклости гильбертового пространства по отношению к семейству  $G$  всех изометрий этого пространства. Максимум



по рассматриваемому семейству  $G$  выражения  $\|x + tTy\|$  достигается при такой изометрии, которая совмещает направление вектора  $Ty$  с направлением вектора  $x$ . Следовательно,  $\sup \|x + tTy\|$  при любых единичных по норме элементах  $x$  и  $y$  равен  $1 + t$ . А значит  $\delta^G(t) = t$ .

**Утверждение 3** Если семейство операторов  $G$  – правильное семейство на  $X$ , то  $\delta^G \geq 0$ .

*Доказательство.* По условию для всех  $y$  из  $X$  нулевой элемент принадлежит множеству  $Z_y$  – замыканию выпуклой оболочки  $\{Ty : T \in G\}$ , следовательно, для всех элементов  $x \in S_X$  сумма  $x + tZ_y$  будет содержать точку  $x$ , то есть точку с нормой 1. А значит, так как  $Z_y$  является замыканием выпуклой оболочки, существует такой оператор  $T$  из  $G$ , что  $\|x + tTy\| \geq 1$ . Это, в свою очередь, означает, что  $\delta^G \geq 0$ .  $\square$

В обратную сторону только что доказанное утверждение не выполняется, что иллюстрирует следующий пример.

**Определение 9**  $l_\infty^2$  – это двумерное пространство, состоящее из пар вещественных чисел с нормой  $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ .

*Пример 6.* Рассмотрим в  $l_\infty^2$  семейство  $G$ , состоящее из двух операторов  $P_1$  и  $P_2$  – операторов проектирования на первую и вторую координатные оси соответственно. Тогда для любых  $x, y \in S_{l_\infty^2}$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  и для любого  $t > 0$

$$\sup_{k \in \{1, 2\}} \|x + tP_k y\| = \max\{\|x + t(y_1, 0)\|, \|x + t(0, y_2)\|\} = \max\{\max\{|x_1 + ty_1|,$$

$$|x_2 + t \cdot 0|\}, \max\{|x_1 + t \cdot 0|, |x_2 + ty_2|\}\} \geq \max\{|x_1|, |x_2|\} = \|x\| = 1.$$

Следовательно, в рассматриваемом примере  $\delta^G(t) \geq 0$ , при этом семейство операторов не является правильным.

**Утверждение 4** Функция  $\delta^G(t)/t$  не убывает с ростом  $t$ .

*Доказательство.* Для данных  $x$  и  $y$  из  $S_X$  и данного  $t_1 > 0$  для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой оператор  $T \in G$ , при котором  $\|x + t_1Ty\| \geq \delta^G(t_1) + 1 - \varepsilon$ . Тогда для любого  $t_2 > t_1$  имеем

$$\begin{aligned} \|x + t_2Ty\| &= \left\| \frac{t_2}{t_1}x + t_2Ty + \left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right)x \right\| \geq \frac{t_2}{t_1}\|x + t_1Ty\| - \left|1 - \frac{t_2}{t_1}\right| \geq \\ &\geq \frac{t_2}{t_1}(1 + \delta^G(t_1) - \varepsilon) - \frac{t_2}{t_1} + 1 = 1 + \frac{t_2}{t_1}\delta^G(t_1) - \frac{t_2}{t_1}\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как правое выражение в последнем неравенстве не зависит от выбора  $x$  и  $y$ , мы можем в левом выражении взять требуемую определением верхнюю и нижнюю грани и перейти к неравенству между значениями модуля выпуклости

$$\delta^G(t_2) \geq \frac{t_2}{t_1}\delta^G(t_1) - \frac{t_2}{t_1}\varepsilon,$$



при  $t_2 > t_1$ . В виду произвольности  $\varepsilon$ , утверждение доказано.  $\square$

Следующая теорема - это прямое обобщение теоремы М.И.Кадеца о рядах в равномерно выпуклом пространстве (см. [2], [4]).

**Теорема 11** Пусть  $X$  - банахово пространство,  $G \subset B_{L(X)}$  и  $X$  равномерно выпукло по отношению к семейству  $G$ . Тогда для любого  $G$ -сходящегося ряда  $\sum_n x_n$  в  $X$  будет сходиться ряд  $\sum_n \delta^G(\|x_n\|)$ .

*Доказательство.* Отбросив первые несколько слагаемых можно добиться, что  $\|\sum_{i=1}^n T_i x_i\| \leq 1$  для всех  $n$  и всех  $T_i \in G$ . Докажем индукцией по  $n$ , что

$$\sup_{T_i \in G} \left\| \sum_{i=1}^n T_i x_i \right\| \geq \sum_{k=1}^n \delta^G(\|x_k\|). \quad (1)$$

При  $n = 1$  неравенство  $\delta^G(\|x_1\|) \leq \|x_1\|$  очевидно.

Пусть (1) выполнено при  $n = N$ , докажем (1) при  $n = N + 1$ .

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ , пусть  $T_i^0 \in G, i = 1, 2, \dots, N$  выбраны так, что

$$\left\| \sum_{i=1}^N T_i^0 x_i \right\| \geq \sum_{k=1}^N \delta^G(\|x_k\|) - \varepsilon.$$

Обозначим  $y = \sum_{i=1}^N T_i^0 x_i$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{T_i \in G} \left\| \sum_{i=1}^{N+1} T_i x_i \right\| &\geq \sup_{T \in G} \left\| \sum_{i=1}^N T_i^0 x_i + T x_{N+1} \right\| = \|y\| \sup_{T \in G} \left\| \frac{y}{\|y\|} + T \frac{x_{N+1}}{\|y\|} \right\| \geq \\ &\geq \|y\| \cdot \left( 1 + \delta^G \left( \frac{\|x_{N+1}\|}{\|y\|} \right) \right) = \|y\| + \|y\| \delta^G \left( \frac{\|x_{N+1}\|}{\|y\|} \right) \geq \sum_{k=1}^{N+1} \delta^G(\|x_k\|) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Последний знак неравенства мы можем поставить в силу утверждения 4.  $\square$

В качестве следствия данной теоремы рассмотрим ее применение к приведенным выше примерам равномерно выпуклых пространств по отношению к некоторому семейству операторов.

**Пример 7.** Если  $\sum_n x_n$  - это  $G$ -сходящийся ряд в пространстве  $L_p[-\infty, +\infty]$ , где  $G$  - это семейство операторов сдвига, то по доказанной выше теореме  $\sum_n \|x_n\|^p < \infty$ .

**Пример 8.** Пусть  $\sum_n x_n$  - это  $G$ -сходящийся ряд в гильбертовом пространстве, где  $G$  - это семейство всех изометрий этого пространства. Тогда сходится и ряд  $\sum_n \|x_n\|$ , то есть ряд  $\sum_n x_n$  сходится абсолютно.

**Пример 9.** Если  $\sum_n x_n$  - это  $G$ -сходящийся ряд в пространстве  $L_p[0, 1]$ , где  $G$  - это семейство операторов умножения на функции  $g : [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\}$ , то по теореме 11 будет сходиться ряд  $\sum_n \|x_n\|^p$ .



4.  $GM$ -котип

Пусть  $X, Y$  – банаховы пространства,  $G \subset L(X, Y)$  – ограниченное семейство операторов. Будем говорить, что в пространстве  $X$  нет ограничений на  $G$ -сходящиеся ряды, если для любой последовательности скаляров  $a_k \rightarrow 0$  существует  $G$ -сходящийся ряд  $\sum_1^\infty x_k$  в  $X$  с  $\|x_k\| = a_k$ . Как следует из теоремы 11, в  $G$ -равномерно выпуклом пространстве есть ограничения на  $G$ -сходящиеся ряды.

В настоящем параграфе мы докажем, что если в  $X$  есть какие-то ограничения на  $G$ -сходящиеся ряды, и  $G \subset L(X)$  – правильная полугруппа операторов, то в  $X$  есть и ограничения специального вида: существует такой показатель  $p \geq 1$ , что для любого  $G$ -сходящегося ряда  $\sum x_k$  в  $X$  выполнено условие  $\sum_1^\infty \|x_k\|^p < \infty$ . Аналогичные результаты для безусловной сходимости рядов были получены Б. Море (B. Maurey) и Ж. Пизье (G. Pisier), а также С. Раковым. Изложение этих результатов можно найти, например, в [3], гл. 5, §2.

Для данного ограниченного семейства  $G \subset L(X, Y)$  введем в рассмотрение величины  $C(n, G) := \inf_{\|x_k\| \geq 1} \sup_{T_k \in G} \|\sum_{k=1}^n T_k x_k\|$ .

Аналогично теореме 5.2.1 из [3] доказывается, что если  $G \subset L(X, Y)$  – ограниченное правильное семейство операторов, и в  $X$  есть ограничения на  $G$ -сходящиеся ряды, то  $\sup_n C(n, G) = \infty$ .

**Лемма 2** Пусть  $G \subset L(X)$  – правильное семейство, образующее полугруппу с единицей по отношению к композиции. Тогда  $C(1, G) \geq 1$ ,  $C(n, G)$  не убывает с ростом  $n$ , и

$$C(n \cdot m, G) \geq C(n, G) \cdot C(m, G).$$

*Доказательство.* Первое утверждение немедленно следует из того, что  $I \in G$ . Второе следует из того, что  $G$  – это правильное семейство операторов, следовательно,  $\sup_{T \in G} \|x + Ty\| \geq \|x\|$  для всех  $x, y$ .

Докажем третье утверждение леммы. Пусть  $\{x_i\}_{i=1}^{nm} \subset X, \|x\| \geq 1$ . Запишем последовательность  $\{x_i\}_{i=1}^{nm}$  в виде таблицы:  $y_{r,l}$ , где  $r \in \{1, \dots, n\}$ ,  $l \in \{1, \dots, m\}$ . Для всех  $l$  выберем операторы  $T_{r,l} \in G, r = 1, \dots, n$ , таким образом, что

$$\left\| \sum_{r=1}^n T_{r,l} y_{r,l} \right\| \geq C(n, G),$$

и обозначим суммы  $\sum_{r=1}^n T_{r,l} y_{r,l}$  через  $z_l$ . Тогда, учитывая что  $G$  – это полугруппа операторов, мы можем записать

$$\begin{aligned} \sup_{T_k \in G} \left\| \sum_{k=1}^{nm} R_k x_k \right\| &\geq \sup_{R_k \in G} \left\| \sum_{k=1}^m T_k z_k \right\| \geq C(m, G) \cdot \min_k (\|z_k\|) \geq \\ &\geq C(m, G) \cdot C(n, G), \end{aligned}$$

что, в виду произвольности элементов  $x_k$ , завершает доказательство леммы.  $\square$



**Определение 10** Пусть  $G \subset L(X)$  – ограниченное семейство. Пространство  $X$  обладает  $GM$ -котипом  $p$  с константой  $C$ , если для любого  $n$  и произвольного набора  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  выполнено неравенство

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^n T_k x_k \right\| : T_k \in G \right\} \geq C \left( \sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из неравенства треугольника легко вывести, что в этом определении  $p$  должно быть больше или равным 1.

Очевидным образом, если  $X$  имеет  $GM$ -котип  $p$ , то из  $G$ -сходимости ряда  $\sum_1^\infty x_k$  в  $X$  следует сходимость ряда  $\sum_1^\infty \|x_k\|^p$ .

Основной результат параграфа можно сформулировать следующим образом:

**Теорема 12** Пусть  $G \subset L(X)$  – ограниченное правильное семейство, образующее полугруппу с единицей по отношению к композиции, и для каких-то  $n_1 \in \mathbb{N}$  и  $\delta > 0$  выполнено неравенство  $C(n_1, G) \geq 1 + \delta$ . Тогда  $X$  имеет нетривиальный  $GM$ -котип.

*Доказательство.* Зафиксируем некоторое  $\alpha > 1$  и такое  $p > 1$ , что  $(1 + \delta)^{p-\varepsilon} \geq n_1$ . Покажем, что пространство  $X$  обладает  $GM$ -котипом  $p$  с константой  $C = \left( \frac{1-\alpha^{-\varepsilon}}{n_1} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$ .

Возьмем произвольный набор элементов  $\{x_i\}_{i=1}^{n_1}$  из  $X$ . Разобьем множество индексов  $\{1, \dots, n\}$  на дизъюнктные подмножества  $A_k, k = 0, 1, 2, \dots$  следующим образом:

$$A_k = \left\{ j : \frac{(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{1/p}}{\alpha^k} \geq \|x_j\| > \frac{(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{1/p}}{\alpha^{k+1}} \right\}.$$

Обозначим  $m_k = |A_k|$ ,  $D = \{k : m_k \neq 0\}$ . Тогда

$$\sum_{j \in A_k} \|x_j\|^p \leq m_k \frac{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p}{\alpha^{kp}},$$

откуда

$$\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p = \sum_{k \in D} \sum_{j \in A_k} \|x_j\|^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p}{\alpha^{kp}}$$

Следовательно,  $\sum_{k \in D} m_k / \alpha^{kp} \geq 1$ . Докажем существование индекса  $k \in D$ , для которого

$$C \leq \frac{C(m_k, G)}{\alpha^{k+1}}. \quad (2)$$

Предположим противное, то есть, что  $C > \frac{C(m_k, G)}{\alpha^{k+1}}$  для всех  $k$ . Для каждого  $k \in D$  при некотором  $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$  выполнено неравенство  $n_1^r \leq m_k < n_1^{r+1}$ ,



следовательно, по лемме  $(1 + \delta)^r \leq C(m_k, G)$ . Получаем, что  $m_k < (1 + \delta)^{r(p-\varepsilon)} n_1 \leq C(m_k, G)^{p-\varepsilon} n_1$ .

Тогда

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{k \in D} \frac{m_k}{\alpha^{kp}} \leq \sum_{k \in D} \frac{C(m_k, G)^{p-\varepsilon}}{\alpha^{kp}} \cdot n_1 < \sum_{k \in D} \frac{C^{p-\varepsilon} \cdot \alpha^{(k+1)(p-\varepsilon)} \cdot n_1}{\alpha^{kp}} = \\ &= C^{p-\varepsilon} \sum_{k \in D} \frac{n_1}{\alpha^{k\varepsilon}} \cdot \alpha^{p-\varepsilon} \leq C^{p-\varepsilon} \frac{n_1}{1 - \alpha^{-\varepsilon}} \cdot \alpha^{p-\varepsilon} = 1. \end{aligned}$$

Противоречие. Обозначим через  $j_0$  то значение  $k$ , при котором имеет место неравенство (2).

Так как  $G$  — это правильное семейство операторов, то

$$\sup_{T_i \in G} \left\| \sum_{i=1}^n T_i x_i \right\| \geq \sup_{T_i \in G} \left\| \sum_{i \in A} T_i x_i \right\|$$

для всех наборов  $A \subset \{1, \dots, n\}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \sup_{T_i \in G} \left\| \sum_{i=1}^n T_i x_i \right\| &\geq \sup_{T_i \in G} \left\| \sum_{i \in A_{j_0}} T_i x_i \right\| \geq \min_{i \in A_{j_0}} \|x_i\| \cdot C(m_{j_0}, X) \geq \\ &\geq C(m_{j_0}, X) \cdot \frac{(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{1/p}}{\alpha^{j_0+1}} \geq C \cdot \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Таким образом, пространство  $X$  обладает  $GM$ -котипом  $p$  с константой  $C$ .  $\square$

Отметим, что условия, наложенные на семейство  $G$  в последней теореме, нельзя отбросить, что показывают следующие примеры.

**Пример 10.** В пространстве  $X = c_0$  рассмотрим правильное семейство  $G = \{\lambda I : \lambda \in [-2, 2]\}$  не являющееся полугруппой. В этом случае,  $C(n, G) = 2$  при всех значениях  $n$  и утверждение теоремы 12 не выполняется.

Пусть  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$  — невозрастающая последовательность положительных чисел,  $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k = \infty$ ,  $\omega_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Пространством Лоренца называется пространство стремящихся к 0 последовательностей  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , для которых  $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^* \omega_k < \infty$ , где через  $(x_k^*)$  обозначена невозрастающая перестановка последовательности  $(x_k)$ .

**Пример 11.** Рассмотрим пространство  $X = C[0, 1]$ . Выберем в  $X$  подпространство  $Y$ , изометричное  $(C[0, 1] \oplus C[0, 1] \oplus \dots)_{d(\omega)}$  — сумме по  $d(\omega)$  последовательности изометрических копий  $C[0, 1]$ . Такое  $Y$  существует ввиду универсальности пространства  $C[0, 1]$ . Обозначим через  $J_k \in L(X, Y)$  операторы изометрического вложения пространства  $C[0, 1]$  в  $k$ -тое слагаемое пространства  $Y$  и рассмотрим семейство  $G = (J_k)_{k=1}^{\infty}$ .

Докажем, что  $C(n, G) \geq \sum_{k=1}^n \omega_k$ . Пусть  $\{x_k\}_{k=1}^n \in X$ ,  $\|x_k\| \geq 1$ . Тогда

$$\left\| \sum_{k=1}^n T_k x_k \right\| = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^* \cdot \omega_k \geq \sum_{k=1}^n \omega_k.$$



Докажем, что  $C(n, G) \leq \sum_{k=1}^n \omega_k$ . Для этого рассмотрим набор  $\{e_k\}_{k=1}^n \subset X$ ,  $\|e_k\| = 1$ , состоящий из функций с непересекающимися носителями. Пусть  $T_k \in G$ , обозначим  $A_i = \{k : T_k = J_i\}$  и  $A = \{i : A_i \neq \emptyset\}$ . Тогда

$$\left\| \sum_{k=1}^n T_k e_k \right\| = \left\| \sum_{i \in A} \sum_{k \in A_i} T_k e_k \right\| = \left\| \sum_{i \in A} J_i \left( \sum_{k \in A_i} e_k \right) \right\| = \sum_{i=1}^{|A|} \omega_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i.$$

Последний знак равенства мы можем поставить так как  $\left\| \sum_{k \in A_i} e_k \right\| = 1$ .

Отметим, что рассматриваемое семейство  $G$  – это правильное семейство, так как  $\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n J_k x \right\| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \omega_k \cdot \|x\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ .

Таким образом в последнем примере  $C(n, G) = \sum_{k=1}^n \omega_k$ . Этим показано, что, вообще говоря, величина  $C(n, G)$  может возрастать сколь угодно медленно. Отметим, что если  $X$  имеет  $GM$ -котип  $p$ , то  $C(n, G)$  возрастает не медленнее, чем  $n^{1/p}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Orlicz W., Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (II) // *Studia Math.* – 1933. – 4. – P.41-47.
2. Кадец М.И., Безусловно сходящиеся ряды в равномерно выпуклом пространстве // *УМН.* – 1956. – 11, 5. – С.185-190.
3. Kadets M.I. and Kadets V.M., *Series in Banach Spaces: conditional and unconditional convergence. – Operator Theory Advances and Applications*, 94. Birkhäuser. – 1997.
4. Diestel J., *Geometry of Banach Spaces, Selected Topics.* – Springer-Velag. – 1975.



## АНОТАЦІЇ

УДК 517.948

**Застосування підходу А.Н. Колмогорова при вивченні випадкових послідовностей, пов'язаних з ортогональними многочленами**

Загороднюк С. М., Клоц Л. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 3–37.

Слідуючи ідеям А.Н. Колмогорова, ми розглядаємо випадкові послідовності, як елементи абстрактного комплексного гільбертового простору  $H$ . Ми вивчаємо класи послідовностей, що пов'язані з системами ортогональних многочленів на дійсній осі та на одиничній окружності (поліноміальні і  $P$ -стаціонарні послідовності). Введено поняття канонічного інтегрального представлення для довільної послідовності у гільбертовому просторі. Користуючись методами теорії операторів і теорії ортогональних многочленів ми встановлюємо ряд результатів, аналогічних результатам теорії стаціонарних послідовностей (різницеві рівняння на кореляційну функцію, розклад спектральної функції в ряд, закони великих чисел та інше)

Бібліогр.: 34 найм.

УДК 517.9

**Проблеми керованості для рівняння струни та тригонометрична проблема моментів Маркова**

Халіна К. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 38–51.

У цій роботі досліджується проблема керованості для хвильового рівняння на відрізку, керованого крайовими умовами. Релейні керування, що розв'язують проблему  $\varepsilon$ -керованості цього рівняння, побудовано за допомогою розв'язків тригонометричної проблеми моментів Маркова. Крім цього, дана оцінка похибки обчислення та точності влучення для кінцевого стану керованої системи.

Бібліогр.: 13 найм.

УДК 517.5

**Про одну властивість дискретних множин в  $\mathbb{R}^k$** 

Колбасіна Є. Ю. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 52–66.

Ми вводимо клас  $S$ -множин в  $\mathbb{R}^k$ . Це спеціальний клас дискретних множин, що узагальнює клас дискретних періодичних множин. Ми вивчаємо властивості  $S$ -множин. Зокрема, ми доводимо, що клас  $S$ -множин співпадає з класом рівномірно протяжних дискретних множин у сенсі Лашковича.

Бібліогр.: 6 найм.



УДК 517

**Асимптотика базисных функций обобщенного ряда Тейлора для класса  $H_{p,2}$**

Макарічев В. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 67–86.

Доведено існування асимптотики базисних функцій  $\varphi_{n,0}$  та  $\psi_{n,\alpha_n}$  узагальненого ряду Тейлора для класу  $H_{p,2}$ . Отримано перший член асимптотичного розвинення цих функцій.

Бібліогр.: 12 найм.

УДК 517.911.5

**Теорема Красносельського - Крейна для диференціальних рівнянь з багатовисновковими розв'язками**

Скрипник Н. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 87–99.

У статті розглядається можливість обґрунтування теореми про неперервну залежність рішень від параметра і методу усереднення для диференціальних рівнянь і включень з похідною Хукухарі у разі, коли права частина не задовольняє умові Ліпшиця по фазовій змінній.

Бібліогр.: 22 найм.

УДК 517.948

**Про задачу розсіювання для функціональної моделі Л. де Бранжа**

Розуменко О. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 100–114.

Для функціональної моделі недисипативного оператора побудована схема розсіювання Лакса – Філіпса. Обчислені хвильові оператори та оператор розсіювання.

Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.518.85; 517.518.88

**Узагальнена інтерполяційна задача для стільтьєсівських функцій у виродженому випадку**

Дюкарев Ю. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 115–127.

У цій статті розглянута вироджена узагальнена інтерполяційна задача для стільтьєсівських функцій. Запропоновано новий спосіб зведення вироджених інтерполяційних задач до повністю невизначених інтерполяційних задач. Всі розв'язки вироджених інтерполяційних задач описані в термінах дрібно-лінійних перетворень.

Бібліогр.: 14 найм.



УДК 517.9

**Розкладення Тейлора для  $\alpha$ -голоморфних формальних степеневих рядів**

В е р б і н і н а К. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 128–133 .

Нехай  $\alpha$  - квазінільпотентний елемент банахової алгебри,  $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$  - формальний степеневий ряд над  $\mathbb{C}$ . Стаття містить деякі аналоги розкладення Тейлора  $f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n$ .

Бібліогр.: 14 найм.

УДК 517.521

**О тождественности Області Граничных Точек та Області Сум за фильтром у збіжних за фільтром рядів**

Л е о н о в О. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 134–140 .

Ми досліджуємо фільтри  $\mathcal{F}$  для яких виконується рівність  $SR_{\mathcal{F}} = LPR$ . Ми характеризуємо фільтри  $\mathcal{F}$  для яких у кожного  $\mathcal{F}$ -збіжного ряду є збіжна до 0 підпоследовність. З виконання цієї властивості разом із властивістю яку ми називаємо властивістю необмежених пропусків  $\mathcal{F}$  впливає рівність  $LPR = SR_{\mathcal{F}}$ . Властивість необмежених пропусків  $\mathcal{F}$  (існування  $A \in \mathcal{F}$ ,  $A = (a_n)$  такого, що последовність  $g_n = a_{n+1} - a_n$  необмежена) є необхідною умовою цієї рівності. Рівність не виконується для жодного ультрафільтру.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 514.76

**Внутрішня геометрія грасманова многовиду псевдоевклідового простору**

Г у р г е н і д з е М. О., С т е г а н ц е в а П. Г. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 141–150 .

Вивчається сукупність неізотропних площин псевдоевклідового простору індекса 1. Введено диференційовану структуру, визначено метрику, знайдено вигляд метрики в локальних координатах, отримані вирази для символів Кристофеля першого та другого роду та рівняння геодезичних ліній.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 539.3

**Метод граничних інтегральних рівнянь у просторових динамічних задачах механіки руйнування матеріалів з міжшаровими тріщинами**



Меньшиков В. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 151–164.

Одержано систему граничних інтегральних рівнянь для матеріалів із тріщинами на поверхні поділу середовищ при динамічному навантаженні. У випадку плоскої поверхні поділу й гармонійного навантаження представлено співвідношення для сингулярних ядер інтегральних рівнянь. На основі методу граничних елементів розраховані параметри механіки руйнування для біматеріалів із круговими тріщинами в площині поділу при навантаженні хвилями розтягу-стиску й зсуву.

Мал.: 5. Бібліогр.: 10 найм.

УДК 537.84

### **Хвильові процеси у двошаровій системі незмішних струмонесучих рідин**

Борисов І. Д., Пославський С. О., Руднєв Ю. І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 165–184.

Досліджуються хвильові рухи у двошаровій системі незмішних струмонесучих рідин, які заповнюють циліндричну посудину прямокутного перерізу. Показано, що рівноважний стан розглянутої системи, який відповідає плоскій поверхні розділу рідин й однорідному розподілу електричного струму, за певних умов втрачає рівновагу, змінюючись хвильовим режимом руху. На основі гальоркінських апроксимацій рівнянь магнітної гідродинаміки проведені розрахунки межі області стійкості у просторі безрозмірних параметрів системи. З'ясовано характер впливу основних параметрів на пороги хвилеутворення і форми хвиль.

Мал.: 3. Бібліогр.: 12

УДК 517.982.22

### **Банахів простір функцій, що задовольняють рівномірну умову Діні**

Лемінькан – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 185–196.

Для метричного простору  $K$  ми розглядаємо простір  $D(K)$  функцій на  $K$ , модуль неперервності яких задовольняє умову Діні в нулі. Ми доводимо, що простір  $D(K)$  є спряженим простором, якщо  $K$  – це компакт, та сепарабельним, якщо  $K$  – опуклий компакт у банаховому просторі. Більш детально вивчається простір  $D(K)$  у випадку  $K = [0, 1]$ .

Бібліогр.: 3 найм.



УДК 514.177

**Про розміщення операторних коефіцієнтів перед членами ряду**

Б о й к о Н. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2008, № 826. Математика, прикладна математика і механіка, с. 197–210.

Вивчаються ефекти, пов'язані з заміною в визначенні безумовної збіжності ряду расстановки коефіцієнтів  $\pm 1$  на расстановку деякої множини операторів. Отримані аналоги теорії котипа і теореми М.И. Кадеца о рядах, що безумовно збігаються у рівномірно опуклому просторі.

Бібліогр.: 4 найм.



## ЗМІСТ

- Загороднюк С.М., Клѐц Л.** Применение подхода А.Н. Колмогорова при изучении случайных последовательностей, связанных с ортогональными многочленами 3
- Халіна К.С.** Проблеми керованості для рівняння струни та тригонометрична проблема моментів Маркова 38
- Колбасина Е.Ю.** Об одном свойстве дискретных множеств в  $\mathbb{R}^k$  52
- Макаричев В.А.** Асимптотика базисных функций обобщенного ряда Тейлора для класса  $H_{\rho,2}$  67
- Скрипник Н.В.** Теорема Красносельского - Крейна для дифференциальных уравнений с многозначными решениями 87
- Розуменко О. В.** О задаче рассеяния для функциональной модели Л. де Бранжа 100
- Дюкарев Ю.М.** Обобщенная интерполяционная задача для стилтесовских функций в вырожденном случае 115
- Verbinina K.** The Taylor expansion for  $\alpha$ -holomorphic formal power series 128
- Leonov Alexander** On the coincidence of the Limit Point Range and the Sum Range along a filter of filter convergent series 134
- Гургенидзе М.А., Стеганцева П.Г.** Внутренняя геометрия грасманова многообразия псевдоевклидова пространства 141
- Меньшиков В. А.** Метод граничных интегральных уравнений в пространственных динамических задачах механики разрушения материалов с межслоевыми трещинами 151
- Борисов И.Д., Пославский С.А., Руднев Ю.И.** Волновые процессы в двухслойной системе несмешивающихся токонесущих жидкостей 165



Le Minh Can Banach spaces of functions with the uniform Dini property	185
Бойко Н. О расстановке операторных коэффициентов перед членами ряда	197
АНОТАЦІЇ	211
Kolbasina Ye.Yu. On a property of discrete sets in $\mathbb{R}^k$	211
Matkharichev V.A. The asymptotics of the basic functions of a generalized Taylor series for the $H_{\alpha,2}$ function class	217
Schepnik N.V. The Kravtsovskiy-Krein Theorem for Differential Equations with Multivalued Solutions	287
Rezumenko O.V. On the scattering problem for the L. de Branges functional model	100
Dukarev Yu.M. The generalized interpolation problem for Stieltjes functions in degenerate case	115
Verbitskiy K. The Taylor expansion for a holomorphic formal power series	123
Leonov Alexander On the coincidence of the Limit Point Range and the Sum Range along a filter convergent series	134
Gurgenidze M.A., Steganzova P.G. The intrinsic geometry of the Grassmannian manifold of the pseudo-Euclidean space	141
Menshikov V. A. Method of boundary integral equations in 3D dynamic fracture mechanics problems for materials with interface cracks	151
Borisov I.D., Pozdnyakov S.A., Rudnev Yu. I. Wave processes in two-layer-system of immiscible current-carrying liquids	165
Le Minh Can Banach spaces of functions with the uniform Dini property	185



## CONTENTS

<b>Zagorodnyuk S.M., Klotz L.</b> An application of Kolmogorov's approach in the study of stochastic sequences related to orthogonal polynomials	3
<b>Khalina K.S.</b> The controllability problem for the wave equation and the Markov trigonometric moment problem	38
<b>Kolbasina Ye.Yu.</b> On a property of discrete sets in $\mathbb{R}^k$	52
<b>Makarichev V.A.</b> The asymptotics of the basic functions of a generalized Taylor series for the $H_{\rho,2}$ function class	67
<b>Scripnik N.V.</b> The Krasnoselsky-Krein Theorem for Differential Equations with Multivalued Solutions	87
<b>Rozumenko O. V.</b> On the scattering problem for the L. de Branges functional model	100
<b>Dukarev Yu.M.</b> The generalized interpolation problem for Stieltjes functions in degenerate case	115
<b>Verbinina K.</b> The Taylor expansion for $\alpha$ -holomorphic formal power series	128
<b>Leonov Alexander</b> On the coincidence of the Limit Point Range and the Sum Range along a filter of filter convergent series	134
<b>Gurgenidze M.A., Stegantseva P.G.</b> The intrinsic geometry of the Grassmannian manifold of the pseudo-Euclidean space	141
<b>Menshykov V. A.</b> Method of boundary integral equations in 3D dynamic fracture mechanics problems for materials with interface cracks	151
<b>Borisov I.D., Poslavsky S.A., Rudnyev Yu. I.</b> Wave processes in two-layer-system of immiscible current-carrying liquids	165
<b>Le Minh Can</b> Banach spaces of functions with the uniform Dini property	185



Boyko N. On arrangement of operators coefficients of series members 197

SUMMARY 211

- Information for Manuscript Preparation
- Abstracts
- Editorial Board

Збірник наукових праць

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна  
№ 826 Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Ціна договорів  
Наклад 100 прим.  
Обл.- вид. арж. - 16,7  
Умовн.- друк. арж. - 14,3  
Формат 70 x 108/16. Папір офсетний. Друк ризотраф.  
Принесено до друку 02.12.08 р.

21-12

Віддруковано ФГОП "Потрива"  
61144 Харків-144, вул. Т.Ш.Шибаніна, 79 - а. к. 137 тел. 302-01-52  
61077 Харків, м. Сабода, 4. Харківський національний університет  
ім. В.Н. Каразіна  
Свідоцтво про державну реєстрацію БОУ № 918011 від 03.01.2003 р.



Visit our Web-page

<http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/>

to find

- Information for Manuscript Preparation
- Abstracts
- Editorial Board

*Збірник наукових праць*

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна  
№ 826 Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Підписано до друку 02.12.08 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Умовн.- друк. арк. – 14,3

Обл.- вид. арк. – 16,7

Наклад 100 прим.

Ціна договірна

24-45

61077, Харків, м. Свободи, 4, Харківський національний університет  
імені В.Н.Каразіна

Віддруковано ФОП "Петрова"

61144 Харків-144, вул. Гв. Широнінців, 79 -в, к. 137. тел. 362-01-52

Свідоцтво про державну реєстрацію ВОО № 948011 від 03.01.2003 р.



Воро

С. 111

іна