

Обобщенная интерполяционная задача для стильтесовских функций в вырожденном случае

Ю.М. Дюкарев

Харьковский национальный университет, Украина

В этой статье рассмотрена вырожденная обобщенная интерполяционная задача для стилтесовских функций. Предложен новый способ сведения вырожденных интерполяционных задач ко вполне неопределенным интерполяционным задачам. Все решения вырожденной интерполяционной задачи описаны в терминах дробно-линейных преобразований.

2000 *Mathematics Subject Classification* 41A05, 30E05.

1. Введение. В невырожденном случае обобщенная интерполяционная задача для стилтесовских функций впервые была рассмотрена в статье [1]. В статье [2] были предложены некоторые подходы к вырожденной интерполяционной задаче для стилтесовских функций. Более полное исследование вырожденных задач можно провести с помощью метода подпространств типа \mathcal{K} , который впервые был предложен в статье [3] для вырожденной задачи Шура. Впоследствии, в статьях [4] - [7] и в монографии [8] методом подпространств типа \mathcal{K} были исследованы и некоторые другие интерполяционные задачи в вырожденном случае.

В этой статье рассмотрена обобщенная интерполяционная задача для стилтесовских функций в вырожденном случае, которая охватывает широкий класс конкретных вырожденных интерполяционных задач. В статье получены следующие новые результаты для вырожденной обобщенной интерполяционной задачи стилтесовского типа: а) введены пары согласованных подпространств типа \mathcal{K} (см. определение 8); б) с помощью согласованных подпространств типа \mathcal{K} сформулирована вспомогательная вполне неопределенная интерполяционная задача, резольвентная матрица которой (см. (28)) является резольвентной матрицей исходной вырожденной задачи; в) в терминах дробно-линейных преобразований над стилтесовскими парами специального вида дано описание множества всех решений вырожденной обобщенной интерполяционной задачи для стилтесовских функций (теорема 4).

Особенностью предложенной здесь схемы решения вырожденных задач является то обстоятельство, что вспомогательная интерполяционная задача

является вполне неопределенной. В предлагавшихся другими авторами схемах вспомогательная интерполяционная задача была вырожденной.

Особо отметим, что в этой и во всех процитированных выше статьях используются многие идеи и методы подхода В.П. Потапова к решению интерполяционных задач анализа [9] - [13].

2. Обобщенная интерполяционная задача. Введем основные определения и обозначения и приведем без доказательства некоторые результаты по обобщенной интерполяционной задаче для стилтесовских функций. Доказательства этих результатов имеются в статьях [1], [14].

Обозначим через $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, $\mathbb{C}_\pm = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$.

Пусть \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 – сепарабельные гильбертовы пространства и \mathcal{H} – некоторое унитарное пространство. Символом $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2\}$ обозначим множество всех ограниченных линейных операторов, действующих из \mathcal{G}_1 в \mathcal{G}_2 , символом $\{\mathcal{G}_1\}$ обозначим множество $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1\}$, а символом $\{\mathcal{G}_1\}_H$ – множество ограниченных эрмитовых операторов в \mathcal{G}_1 . Оператор $A \in \{\mathcal{G}_1\}_H$ называется неотрицательным, если $(f, Af) \geq 0$, $\forall f \in \mathcal{G}_1$. Множество неотрицательных операторов в \mathcal{G}_1 обозначим символом $\{\mathcal{G}_1\}_\geq$. Неотрицательный оператор $A \in \{\mathcal{G}_1\}_\geq$ называется строго положительным, если он обратим и $A^{-1} \in \{\mathcal{G}_1\}$. Множество строго положительных операторов в \mathcal{G}_1 обозначим символом $\{\mathcal{G}_1\}_>$. Пусть операторы $A, B \in \{\mathcal{G}_1\}_H$. Неравенство $A \geq B$ (соотв. $A > B$) означает, что $A - B \in \{\mathcal{G}_1\}_\geq$ (соотв. $A - B \in \{\mathcal{G}_1\}_>$).

Тождественный и нулевой операторы, действующие в пространстве \mathcal{G}_1 , обозначим символами $I_{\mathcal{G}_1}$ и $O_{\mathcal{G}_1}$. Нулевой оператор, действующий из пространства \mathcal{G}_1 в пространство \mathcal{G}_2 , обозначим символом $O_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}$. Когда из контекста ясно, в каком пространстве действует оператор, мы иногда будем опускать нижний индекс у нулевого и тождественного операторов. Через $0_{\mathcal{H}}$ обозначим нулевой вектор в пространстве \mathcal{H} .

Пусть Ω область в \mathbb{C} и $\mathcal{D} \subset \Omega$. Множество \mathcal{D} называется дискретным в Ω , если $\mathcal{D} \cap \mathcal{K}$ является конечным множеством для любого компакта $\mathcal{K} \subset \Omega$.

Определение 1. Голоморфная оператор-функция (ОФ) $s : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}$ называется стилтесовской, если

$$(s(z) - s^*(z))/(z - \bar{z}) \geq O_{\mathcal{H}}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad s(x) \geq O_{\mathcal{H}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_-.$$

Класс всех стилтесовских ОФ обозначим символом \mathcal{S} .

Определение 2. Пусть ОФ $p(z)$, $q(z)$ мероморфны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и принимают значения в $\{\mathcal{H}\}$. Пара $\operatorname{col} [p(z) \ q(z)]$ называется стилтесовской, если для нее

существует дискретное в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ множество точек D_{pq} такое, что

ОФ $p(z)$, $q(z)$ голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup D_{pq}\}$,

$p^*(z)p(z) + q^*(z)q(z) > O_{\mathcal{H}}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup D_{pq}\}$,

$[p^*(z), \bar{z}q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ zq(z) \end{bmatrix} \geq O_{\mathcal{H}}$, $\forall z \in \mathbb{C}_{\pm} \setminus D_{pq}$,

$[p^*(z), q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq O_{\mathcal{H}}$, $\forall z \in \mathbb{C}_{\pm} \setminus D_{pq}$, $J = \begin{bmatrix} O_{\mathcal{H}} & -iI_{\mathcal{H}} \\ iI_{\mathcal{H}} & O_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}$.

Определение 3. Пусть даны две стилтьесовские пары $\text{col}[p_1(z) \ q_1(z)]$ и $\text{col}[p_2(z) \ q_2(z)]$ и $D_{p_1q_1}$, $D_{p_2q_2}$ обозначают соответствующие множества из определения 2. И пусть для этих пар существуют дискретное в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ множество точек D и мероморфная ОФ $Q : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}$ такие, что

$D \supset \{D_{p_1q_1} \cup D_{p_2q_2}\}$,

ОФ p_1 , q_1 , p_2 , q_2 , Q голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup D\}$,

$Q^{-1}(z)$ существует и голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup D\}$,

$p_1(z) = p_2(z)Q(z)$, $q_1(z) = q_2(z)Q(z)$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup D\}$.

Тогда пары $\text{col}[p_1(z) \ q_1(z)]$ и $\text{col}[p_2(z) \ q_2(z)]$ называются эквивалентными.

Классы эквивалентности стилтьесовских пар обозначим через S_{∞} .

Пусть заданы операторы $K_1 \in \{\mathcal{G}_1\}_{\geq}$, $K_2 \in \{\mathcal{G}_2\}_{\geq}$, $L_1, L_2 \in \{\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1\}$, $v_1 \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_1\}$, $u_2 \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_2\}$. И пусть эти операторы удовлетворяют основному тождеству (ОТ)

$$K_1L_1 - L_2K_2 = -v_1u_2^*. \quad (1)$$

Рассмотрим операторы

$$T_1 = L_2L_1^*, \quad T_2 = L_1^*L_2, \quad u_1 = L_2u_2, \quad v_2 = L_1^*v_1. \quad (2)$$

Непосредственно из определений операторов T_1 и T_2 имеем

$$T_1L_2 = L_2T_2, \quad T_2L_1^* = L_1^*T_1. \quad (3)$$

Пусть операторы T_r таковы, что ОФ $R_{T_r}(z) = (I_{\mathcal{G}_r} - zT_r)^{-1}$, $r = 1, 2$ мероморфны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Множество особых точек ОФ R_{T_1} и R_{T_2} в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ обозначим символом \mathcal{Z} . И пусть $\bar{\mathcal{Z}} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \mathcal{Z}\}$. Из мероморфности R_{T_1} и R_{T_2} следует, что множества \mathcal{Z} и $\bar{\mathcal{Z}}$ дискретны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Из этих определений и из (3) следует, что $\forall z, t \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{Z}\}$

$$R_{T_1}(z)L_2 = L_2R_{T_2}(z), \quad R_{T_2}(z)L_1^* = L_1^*R_{T_1}(z), \\ (t - z)R_{T_r}(z)T_rR_{T_r}(t) = R_{T_r}(t) - R_{T_r}(z), \quad r = 1, 2. \quad (4)$$

Определение 4. Упорядоченный набор операторов

$$\mathcal{P} = \{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\}, \quad (5)$$

удовлетворяющих всем перечисленным выше условиям, называется *обобщенной интерполяционной задачей стилтьесовского типа*, а пространства $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ называются *масштабными пространствами*.

Определение 5. ОФ $s \in \mathcal{S}$ называется решением обобщенной интерполяционной задачи, если она удовлетворяет следующей системе основных матричных неравенств (ОМН) В.П. Потапова

$$\left[\begin{array}{c|c} K_r & R_{T_r}(z) \{v_r z^{r-1} s(z) - u_r\} \\ \hline * & \{z^{r-1} s(z) - \bar{z}^{r-1} s^*(z)\} / \{z - \bar{z}\} \end{array} \right] \geq O, \quad z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{Z \cup \bar{Z}\}, \quad r = 1, 2. \quad (6)$$

Множество всех решений обобщенной интерполяционной задачи обозначим символом \mathcal{F} .

Пусть дана обобщенная интерполяционная задача (5) и пусть масштабные пространства \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 представлены в виде ортогональной суммы своих подпространств (подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_r$ предполагаются ненулевыми)

$$\mathcal{G}_r = \tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r, \quad r = 1, 2. \quad (7)$$

Эти равенства понимаются в смысле естественного изоморфизма \mathcal{G}_r и $\tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r$. А именно, пусть \tilde{P}_r (соотв. \hat{P}_r) обозначает ортопроектор пространства \mathcal{G}_r на подпространство $\tilde{\mathcal{G}}_r$ (соотв. $\hat{\mathcal{G}}_r$). Тогда соответствующий изоморфизм имеет вид

$$\forall f \in \mathcal{G}_r \leftrightarrow \text{col} [\tilde{P}_r f, \hat{P}_r f] \in \tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r. \quad (8)$$

Пусть выполнены условия

$$L_1 \tilde{P}_2 = \tilde{P}_1 L_1 \tilde{P}_2, \quad \tilde{P}_1 L_2 = \tilde{P}_1 L_2 \tilde{P}_2. \quad (9)$$

В соответствии с (7) – (9) и (2) введем матричные обозначения ($r = 1, 2$)

$$\begin{aligned} K_r &= \begin{bmatrix} \tilde{K}_r & B_r \\ B_r^* & C_r \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 & D_1 \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_2 \hat{\mathcal{G}}_1} & \hat{L}_1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 & O_{\hat{\mathcal{G}}_2 \tilde{\mathcal{G}}_1} \\ E_2 & \hat{L}_2 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix}, \\ u_2 &= \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 \tilde{u}_2 \\ E_2 \tilde{u}_2 + \hat{L}_2 \hat{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \hat{u}_1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1^* \tilde{v}_1 \\ D_1^* \tilde{v}_1 + \hat{L}_1^* \hat{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_2 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}, \\ T_1 &= L_2 L_1^* = \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 \tilde{L}_1^* & O_{\hat{\mathcal{G}}_1 \tilde{\mathcal{G}}_1} \\ E_2 \tilde{L}_1^* + \hat{L}_2 D_1^* & \hat{L}_2 \hat{L}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_1 & O_{\hat{\mathcal{G}}_1 \tilde{\mathcal{G}}_1} \\ \tilde{D}_1 & \tilde{T}_1 \end{bmatrix}, \\ T_2 &= L_1^* L_2 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1^* \tilde{L}_2 & O_{\hat{\mathcal{G}}_2 \tilde{\mathcal{G}}_2} \\ D_1^* \tilde{L}_2 + \hat{L}_1^* E_2 & \hat{L}_1^* \hat{L}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_2 & O_{\hat{\mathcal{G}}_2 \tilde{\mathcal{G}}_2} \\ \tilde{D}_2 & \tilde{T}_2 \end{bmatrix}, \\ \tilde{P}_r &= \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \hat{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix}, \quad \hat{P}_r = \begin{bmatrix} O_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \hat{\mathcal{G}}_r} & I_{\hat{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix}, \\ R_{T_r}(z) &= \begin{bmatrix} R_{\tilde{T}_r}(z) & O_{\hat{\mathcal{G}} \tilde{\mathcal{G}}} \\ R_{\hat{T}_r}(z) \tilde{D}_r R_{\tilde{T}_r}(z) & R_{\hat{T}_r}(z) \end{bmatrix}, \quad R_{\tilde{T}_r}(z) = (I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} - z \tilde{T}_r)^{-1}, \end{aligned}$$

$$R_{\hat{T}_r}(z) = (I_{\hat{\mathcal{G}}_r} - z\hat{T}_r)^{-1}. \quad (10)$$

Отметим, что операторы в левых частях двух первых равенств являются операторами в пространствах \mathcal{G}_r , а в правых частях записаны матричные представления тех же самых операторов в пространствах $\tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r$. Матричные элементы операторов K_r имеют вид

$$\tilde{K}_r = \tilde{P}_r K_r|_{\tilde{\mathcal{G}}_r}, \quad B_r = \tilde{P}_r K_r|_{\hat{\mathcal{G}}_r}, \quad B_r^* = \hat{P}_r K_r|_{\tilde{\mathcal{G}}_r}, \quad C_r = \hat{P}_r K_r|_{\hat{\mathcal{G}}_r}.$$

В аналогичном смысле понимаем и остальные равенства в (10).

Из ОТ (1) и представлений (10) следует индуцированное ОТ

$$\tilde{K}_1 \tilde{L}_1 - \tilde{L}_2 \tilde{K}_2 = -\tilde{v}_1 \tilde{u}_2^*. \quad (11)$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{K}_1, \tilde{L}_1, \tilde{v}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2, \tilde{u}_2\} \quad (12)$$

является интерполяционной задачей стилтесовского типа с масштабными пространствами $\{\tilde{\mathcal{G}}_1, \tilde{\mathcal{G}}_2\}$.

Определение 6. Интерполяционная задача (12) называется *сужением* интерполяционной задачи (5) на подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$.

Определение 7. Обобщенная интерполяционная задача (5) называется *вполне неопределенной*, если

$$K_1 \in \{\mathcal{G}_1\}_>, \quad K_2 \in \{\mathcal{G}_2\}_>, \quad v_1 h = 0_{\mathcal{G}_1} \Leftrightarrow h = 0_{\mathcal{H}}, \quad u_2 h = 0_{\mathcal{G}_2} \Leftrightarrow h = 0_{\mathcal{H}}. \quad (13)$$

С обобщенной вполне неопределенной задачей (5) свяжем резольвентную матрицу

$$U_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} + z v_2^* R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} u_2 & -z v_1^* R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} v_1 \\ u_2^* R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} u_2 & I_{\mathcal{H}} - z u_1^* R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} v_1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Здесь $R_{T_r^*}(z) = (I_{\mathcal{G}_r} - z T_r^*)^{-1}$, $r = 1, 2$, а разбиение на блоки понимаем в соответствии с представлением $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Ясно, что ОФ U_1 голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \bar{\mathbb{Z}}\}$ и $U_1 : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \bar{\mathbb{Z}}\} \rightarrow \{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\}$.

Пусть дана вполне неопределенная обобщенная интерполяционная задача (5) и ее резольвентная матрица определена в (14). Тогда формула

$$s(z) = \{\gamma_1(z)p(z) + \delta_1(z)q(z)\} \cdot \{\alpha_1(z)p(z) + \beta_1(z)q(z)\}^{-1} \quad (15)$$

устанавливает биективное соответствие между решениями \mathcal{F} обобщенной интерполяционной задачи и классами эквивалентности \mathcal{S}_∞ стилтесовских пар. Здесь $\alpha_1(z)$, $\beta_1(z)$, $\gamma_1(z)$, $\delta_1(z)$ – блоки резольвентной матрицы $U_1(z)$, определенные в (14).

3. Вырожденная интерполяционная задача. В этом разделе мы будем рассматривать обобщенную интерполяционную задачу для стилтесовских функций

$$\mathcal{P} = \{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\} \quad (16)$$

в вырожденном случае. Он характеризуется тем, что хотя бы один из операторов K_r имеет нетривиальное ядро. Кроме того, масштабные пространства \mathcal{G}_r , $r = 1, 2$ будем считать конечномерными.

Определение 8. Пара подпространств $\tilde{\mathcal{G}}_r \subset \mathcal{G}_r$, $r = 1, 2$ называется согласованной парой подпространств типа \mathcal{K} для вырожденной обобщенной интерполяционной задачи (16), если выполнены следующие условия:

1) оба подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_r$ являются ненулевыми и хотя бы одно из этих подпространств не совпадает со всем пространством \mathcal{G}_r ;

2) выполнены условия

$$L_1 \tilde{P}_2 = \tilde{P}_1 L_1 \tilde{P}_2, \quad \tilde{P}_1 L_2 = \tilde{P}_1 L_2 \tilde{P}_2 \quad (17)$$

(\tilde{P}_r обозначает ортопроектор пространства \mathcal{G}_r на подпространство $\tilde{\mathcal{G}}_r$);

3) пространства \mathcal{G}_r представимы в виде прямой суммы

$$\mathcal{G}_r = \tilde{\mathcal{G}}_r \dot{+} \ker K_r; \quad (18)$$

4) сужение $\tilde{\mathcal{P}}$ интерполяционной задачи \mathcal{P} на пару подпространств $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$ является вполне неопределенной обобщенной интерполяционной задачей.

Пусть дана вырожденная обобщенная интерполяционная задача (16), для которой $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$ являются согласованной парой подпространств типа \mathcal{K} . Рассмотрим ортогональное разложение

$$\mathcal{G}_r = \tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r, \quad r = 1, 2. \quad (19)$$

В соответствии с этими ортогональными разложениями имеют место следующие матричные представления (см. [3], [4])

$$K_r = \begin{bmatrix} \tilde{K}_r & B_r \\ B_r^* & \hat{C}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ B_r^* K_r^{-1} & I_{\hat{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_r & O_{\hat{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \hat{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & \tilde{K}_r^{-1} B_r \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \hat{\mathcal{G}}_r} & I_{\hat{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Подставим в ОТ (1) блочные представления (10) для операторов L_1, L_2, v_1, u_2 и блочные представления (20) для операторов K_1, K_2 . Получим

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} \tilde{K}_1 \tilde{L}_1 - \tilde{L}_2 \tilde{K}_2 & \tilde{K}_1 D_1 + B_1 \hat{L}_1 - \tilde{L}_2 B_2 \\ \hline B_1^* \tilde{L}_1 - E_2 \tilde{K}_2 - \hat{L}_2 B_2^* & B_1^* D_1 + B_1^* \tilde{K}_1^{-1} B_1 \hat{L}_1 - E_2 B_2 - \hat{L}_2 B_2^* \tilde{K}_2^{-1} B_2 \end{array} \right] \\ & = - \left[\begin{array}{c|c} \tilde{v}_1 \tilde{u}_2^* & \tilde{v}_1 \hat{u}_2^* \\ \hline \hat{v}_1 \tilde{u}_2^* & \hat{v}_1 \hat{u}_2^* \end{array} \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

Из ОТ (1) следуют еще два тождества

$$T_r K_r - K_r T_r^* = v_r u_r^* - u_r v_r^*, \quad r = 1, 2.$$

Подставим в эти тождества блочные представления (10) для операторов T_r, v_r, u_r , $r = 1, 2$ и блочные представления (20) для операторов K_1, K_2 . Получим

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{K}_r \tilde{T}_r^* - \tilde{T}_r \tilde{K}_r & -\tilde{T}_r \tilde{B}_r + \tilde{K}_r \tilde{D}_r^* + \tilde{B}_r \hat{T}_r^* \\ \hline \tilde{B}_r^* \tilde{T}_r^* - \tilde{D}_r \tilde{K}_r - \hat{T}_r \tilde{B}_r^* & \tilde{B}_r^* \tilde{D}_r^* + \tilde{B}_r^* \tilde{K}_r^{-1} \tilde{B}_r \hat{T}_r^* - \tilde{D}_r \tilde{B}_r - \hat{T}_r \tilde{B}_r^* \tilde{K}_r^{-1} \tilde{B}_r \end{array} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{u}_r \tilde{v}_r^* - \tilde{v}_r \tilde{u}_r^* & \tilde{u}_r \tilde{v}_r^* - \tilde{v}_r \tilde{u}_r^* \\ \tilde{u}_r \tilde{v}_r^* - \tilde{v}_r \tilde{u}_r^* & \tilde{u}_r \tilde{v}_r^* - \tilde{v}_r \tilde{u}_r^* \end{bmatrix}, \quad r = 1, 2. \quad (22)$$

Теорема 1. Пусть дана вырожденная обобщенная интерполяционная задача $\mathcal{P} = \{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\}$ стилтьесовского типа, для которой $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$ являются согласованной парой подпространств типа \mathcal{K} . Пусть интерполяционная задача $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{K}_1, \tilde{L}_1, \tilde{v}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2, \tilde{u}_2\}$ является сужением интерполяционной задачи \mathcal{P} на подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$. И пусть \mathcal{F} и $\tilde{\mathcal{F}}$ обозначают соответственно множества решений интерполяционных задач \mathcal{P} и $\tilde{\mathcal{P}}$.

ОФ $s \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $s \in \tilde{\mathcal{F}}$ и

$$\Phi_r(z) z^{r-1} s(z) = \Psi_r(z), \quad r = 1, 2, \quad z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{Z \cup \bar{Z}\}. \quad (23)$$

Здесь

$$\Phi_r(z) = -B_r^* \tilde{K}_r^{-1} R_{\tilde{T}_r}(z) \tilde{v}_r + z R_{\tilde{T}_r}(z) \tilde{D}_r R_{\tilde{T}_r}(z) \tilde{v}_r + R_{\tilde{T}_r}(z) \tilde{v}_r, \quad (24)$$

$$\Psi_r(z) = -B_r^* \tilde{K}_r^{-1} R_{\tilde{T}_r}(z) \tilde{u}_r + z R_{\tilde{T}_r}(z) \tilde{D}_r R_{\tilde{T}_r}(z) \tilde{u}_r + R_{\tilde{T}_r}(z) \tilde{u}_r. \quad (25)$$

Доказательство. Пусть $s \in \mathcal{F}$. Тогда s удовлетворяет системе ОМН (6). Подставим представления операторов (10) и (19) в (6). Получим

$$\left[\begin{array}{c|c} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ \hline B_r^* \tilde{K}_r^{-1} & I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \tilde{K}_r & O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ \hline O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\tilde{\mathcal{G}}_r} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & \tilde{K}_r^{-1} B_r \\ \hline O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} & I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} R_{\tilde{T}_r}(z) & O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ \hline R_{\tilde{T}_r}(z) \tilde{D}_r R_{\tilde{T}_r}(z) & R_{\tilde{T}_r}(z) \end{array} \right] \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{v}_r \\ \tilde{u}_r \end{bmatrix} z^{r-1} s(z) - \begin{bmatrix} \tilde{u}_r \\ \tilde{v}_r \end{bmatrix} \right\} \geq O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \mathcal{H}} \cdot \frac{\{z^{r-1} s(z) - \bar{z}^{r-1} s^*(z)\}}{\{z - \bar{z}\}} \quad (20)$$

Умножим это неравенство слева и справа на операторы

$$\left[\begin{array}{c|c} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ \hline -B_r^* \tilde{K}_r^{-1} & I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} O_{\mathcal{H}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\mathcal{H}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ \hline O_{\mathcal{H}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} & I_{\mathcal{H}_r} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c|c} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & -\tilde{K}_r^{-1} B_r \\ \hline O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} & I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} O_{\mathcal{H}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\mathcal{H}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ \hline O_{\mathcal{H}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} & I_{\mathcal{H}_r} \end{array} \right]. \quad (21)$$

Получим

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{K}_r & O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ \hline O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\tilde{\mathcal{G}}_r} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \tilde{R}_{T_r}(z) [\tilde{v}_r z^{r-1} s(z) - \tilde{u}_r] & \Phi_r(z) z^{r-1} s(z) - \Psi_r(z) \\ \hline \Phi_r(z) z^{r-1} s(z) - \Psi_r(z) & \{z^{r-1} s(z) - \bar{z}^{r-1} s^*(z)\} / \{z - \bar{z}\} \end{array} \right] \geq O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \mathcal{H}}. \quad (26)$$

Отсюда ($r = 1, 2$)

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{K}_r & R_{\tilde{T}_r}(z) \{ \tilde{v}_r w(z) - \tilde{u}_r \} \\ \hline * & \{z^{r-1} s(z) - \bar{z}^{r-1} s^*(z)\} / \{z - \bar{z}\} \end{array} \right] \geq O, \quad \Phi_r(z) z^{r-1} s(z) = \Psi_r(z). \quad (27)$$

Таким образом, $s \in \tilde{\mathcal{F}}$ и выполнены соотношения (22).

Наоборот, пусть $s \in \tilde{\mathcal{F}}$ и выполнены соотношения (22). Тогда выполняются неравенства и равенства (27). Обращая приведенные только что результаты, получим, что s удовлетворяет системе ОМН (6), т.е. $s \in \mathcal{F}$. \square

Теорема 2. Пусть дана вырожденная обобщенная интерполяционная задача $\mathcal{P} = \{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\}$ стилтсесовского типа, для которой $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$ являются согласованной парой подпространств типа \mathcal{K} . Пусть интерполяционная задача $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{K}_1, \tilde{L}_1, \tilde{v}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2, \tilde{u}_2\}$ является сужением интерполяционной задачи \mathcal{P} на подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$. И пусть ОФ

$$\tilde{U}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\gamma}_1 & \tilde{\delta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} + z\tilde{u}_2^* R_{\tilde{T}_2^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} \tilde{u}_2 & -z\tilde{v}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 \\ \tilde{u}_2^* R_{\tilde{T}_2^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} \tilde{u}_2 & I_{\mathcal{H}} - z\tilde{u}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

является резольвентной матрицей вполне неопределенной интерполяционной задачи, а $\Phi_r(z)$, $\Psi_r(z)$, $r = 1, 2$ определены формулами (24) и (25).

Тогда имеют место равенства

$$\Psi_1(z) \tilde{\beta}_1(z) - \Phi_1(z) \tilde{\delta}_1(z) = R_{\tilde{T}_1}(z) \left(B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 - \hat{v}_1 \right), \quad (29)$$

$$\Phi_1(z) \tilde{\gamma}_1(z) - \Psi_1(z) \tilde{\alpha}_1(z) = R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{L}_2 \left(B_2^* \tilde{K}_2^{-1} \tilde{u}_2 - \hat{u}_2 \right), \quad (30)$$

$$\Psi_2(z) \tilde{\beta}_1(z) - z\Phi_2(z) \tilde{\delta}_1(z) = zR_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{L}_1^* \left(B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 - \hat{v}_1 \right), \quad (31)$$

$$z\Phi_2(z) \tilde{\gamma}_1(z) - \Psi_2(z) \tilde{\alpha}_1(z) = R_{\tilde{T}_2}(z) \left(B_2^* \tilde{K}_2^{-1} \tilde{u}_2 - \hat{u}_2 \right). \quad (32)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} & \Psi_1(z) \tilde{\beta}_1(z) - \Phi_1(z) \tilde{\delta}_1(z) \\ &= - \left\{ \left[-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \right] \tilde{u}_1 + R_{\tilde{T}_1}(z) \hat{u}_1 \right\} \tilde{v}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 z \\ & \quad - \left\{ \left[-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \right] \tilde{v}_1 + R_{\tilde{T}_1}(z) \hat{v}_1 \right\} \\ & \quad + \left\{ \left[-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \right] \tilde{v}_1 + R_{\tilde{T}_1}(z) \hat{v}_1 \right\} \tilde{u}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 z \\ &= - \left[-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \right] \left[\tilde{u}_1 \tilde{v}_1^* - \tilde{v}_1 \tilde{u}_1^* \right] R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 z \\ & \quad + R_{\tilde{T}_1}(z) \left[-\hat{u}_1 \tilde{v}_1^* + \hat{v}_1 \tilde{u}_1^* \right] R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 z \\ & \quad - \left[-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \right] \tilde{v}_1 - R_{\tilde{T}_1}(z) \hat{v}_1 \\ &= - \left[-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \right] (\tilde{K}_1 \tilde{T}_1^* - \tilde{T}_1 \tilde{K}_1) R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 z \\ & \quad + R_{\tilde{T}_1}(z) \left[-\tilde{B}_1^* \tilde{T}_1^* + \tilde{D}_1 \tilde{K}_1 + \tilde{T}_1 \tilde{B}_1^* \right] R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 z \\ & \quad - \left[-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \right] \tilde{v}_1 - R_{\tilde{T}_1}(z) \hat{v}_1 \\ &= - \left[-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \right] \tilde{K}_1 \tilde{T}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) + z R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \right] \tilde{T}_1 \tilde{K}_1 R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 z \\
 & + R_{\tilde{T}_1}(z) \left[-\tilde{B}_1^* \tilde{T}_1^* + \tilde{D}_1 \tilde{K}_1 + \tilde{T}_1 \tilde{B}_1^* \right] R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 z \\
 & - \left[-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) + z R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \right] \tilde{v}_1 - R_{\tilde{T}_1}(z) \hat{v}_1 \\
 & = \left[z Y_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{K}_1 \tilde{T}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} - z^2 R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{K}_1 \tilde{T}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \right. \\
 & \quad - z Y_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{T}_1 \tilde{K}_1 R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} + z^2 R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{T}_1 \tilde{K}_1 R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \\
 & \quad - z R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{B}_1^* \tilde{T}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} + z R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 \tilde{K}_1 R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \\
 & \quad \left. + z R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{T}_1 \tilde{B}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} + B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) - z R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \right] \tilde{v}_1 - R_{\tilde{T}_1}(z) \hat{v}_1 \\
 & = \left[z R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{D}_1 R_{\tilde{T}_1}(z) \left(-z \tilde{K}_1 \tilde{T}_1^* + z \tilde{T}_1 \tilde{K}_1 + (I - z \tilde{T}_1) \tilde{K}_1 - \tilde{K}_1 (I - z \tilde{T}_1^*) \right) \right. \\
 & \quad \times R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \\
 & \quad + B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) \left(z \tilde{K}_1 \tilde{T}_1^* - z \tilde{T}_1 \tilde{K}_1 + \tilde{K}_1 (I - z \tilde{T}_1^*) \right) R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \\
 & \quad \left. - z R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{B}_1^* \tilde{T}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} + z R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{T}_1 \tilde{B}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \right] \tilde{v}_1 - R_{\tilde{T}_1}(z) \hat{v}_1 \\
 & = \left[B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) (I - z \tilde{T}_1) \tilde{K}_1 R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \right. \\
 & \quad \left. - z R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{B}_1^* \tilde{T}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} + z R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{T}_1 \tilde{B}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \right] \tilde{v}_1 - R_{\tilde{T}_1}(z) \hat{v}_1 \\
 & = R_{\tilde{T}_1}(z) \left[(I - z \tilde{T}) B_1^* - z \tilde{B}_1^* \tilde{T}_1^* + z \tilde{T}_1 \tilde{B}_1^* \right] R_{\tilde{T}_1^*}(z) \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 - R_{\tilde{T}_1}(z) \hat{v}_1 \\
 & = R_{\tilde{T}_1}(z) \left(B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 - \hat{v}_1 \right).
 \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств первое равенство следует из (24), (25) и (28), а третье — из (22). Формула (29) доказана. Формулы (30)–(32) доказываются аналогичным образом. \square

Теорема 3. Пусть дана вырожденная обобщенная интерполяционная задача $\mathcal{P} = \{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\}$ стилтесовского типа, для которой $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$ являются согласованной парой подпространств типа \mathcal{K} . Пусть вполне неопределенная интерполяционная задача $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{K}_1, \tilde{L}_1, \tilde{v}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2, \tilde{u}_2\}$ является сужением интерполяционной задачи \mathcal{P} на подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$. И пусть резольвентная матрица задачи $\tilde{\mathcal{P}}$ определена в (28).

Тогда формула

$$s(z) = \left\{ \tilde{\gamma}_1(z) p(z) + \tilde{\delta}_1(z) q(z) \right\} \cdot \left\{ \tilde{\alpha}_1(z) p(z) + \tilde{\beta}_1(z) q(z) \right\}^{-1} \quad (33)$$

устанавливает биективное соответствие между решениями \mathcal{F} обобщенной интерполяционной задачи \mathcal{P} и классами эквивалентности стилтесовских пар, удовлетворяющих условиям

$$\hat{L}_2 \left(B_2^* \tilde{K}_2^{-1} \tilde{u}_2 - \hat{u}_2 \right) p(z) = \left(B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 - \hat{v}_1 \right) q(z), \quad (34)$$

$$\left(B_2^* \tilde{K}_2^{-1} \tilde{u}_2 - \hat{u}_2 \right) p(z) = \hat{L}_1^* \left(B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 - \hat{v}_1 \right) z q(z). \quad (35)$$

Доказательство. Заметим, что если некоторая стилтьесовская пара удовлетворяет условиям (34) и (35), то этим условиям удовлетворяют и все эквивалентные пары.

Пусть ОФ $s \in \mathcal{F}$. По теореме 1 $s \in \tilde{\mathcal{F}}$ и, следовательно, допускает представление (33). Кроме того, выполнены равенства (23). Подставим в (23) представление (33). Получим

$$\Phi_r(z)z^{r-1} \left\{ \tilde{\gamma}_1(z)p(z) + \tilde{\delta}_1(z)q(z) \right\} = \Psi_r(z) \left\{ \tilde{\alpha}_1(z)p(z) + \tilde{\beta}_1(z)q(z) \right\}, \quad r = 1, 2.$$

Отсюда

$$(z^{r-1}\Phi_r(z)\tilde{\gamma}_1(z) - \Psi_r(z)\tilde{\alpha}_1(z))p(z) = (\Psi_r(z)\tilde{\beta}_1(z) - z^{r-1}\Phi_r(z)\tilde{\delta}_1(z))q(z), \quad r = 1, 2.$$

Воспользовавшись формулами (29) - (32), получим (34) и (35).

Пусть теперь ОФ $s(z)$ допускает представление (33) и для стилтьесовской пары $\text{col } [p(z), q(z)]$ выполнены условия (34) - (35). Из (33) следует, что $s(z) \in \tilde{\mathcal{F}}$. Из условий (34) - (35) и теоремы 2 следуют условия (23). По теореме 1 $s(z) \in \mathcal{F}$. \square

Операторы $A_1 : \mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_1$, $A_2 : \mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_2$ зададим формулами

$$A_1 = B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 - \hat{v}_1, \quad A_2 = B_2^* \tilde{K}_2^{-1} \tilde{u}_2 - \hat{u}_2. \quad (36)$$

Лемма 1. *Стилтьесовская пара $\text{col } [p(z), q(z)]$ удовлетворяет условиям (34) и (35) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям*

$$A_2 p(z) = 0, \quad A_1 q(z) = 0. \quad (37)$$

Доказательство. Пусть стилтьесовская пара $\text{col } [p(z), q(z)]$ удовлетворяет условиям (34) и (35). Умножим (35) слева на оператор $-\hat{L}_2$ и сложим с (34). Получим

$$(I - z\hat{L}_2\hat{L}_1^*) (B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 - \hat{v}_1) q(z) = 0.$$

Отсюда и из того, что $\det(I - z\hat{L}_2\hat{L}_1^*)$ не равен тождественно нулю, следует второе из равенств (37). Первое равенство в (37) доказывается аналогичным образом. Очевидно, что из (37) следуют (34) и (35). \square

Рассмотрим ортогональные разложения

$$\mathcal{H} = \ker A_1 \oplus \text{im } A_1^*, \quad \mathcal{H} = \ker A_2 \oplus \text{im } A_2^*. \quad (38)$$

Лемма 2. *Подпространства $\text{im } A_1^* \subset \mathcal{H}$ и $\text{im } A_2^* \subset \mathcal{H}$ ортогональны.*

Доказательство. Докажем равенство

$$(A_1^* f_1, A_2^* f_2) = 0, \quad \forall f_1 \in \hat{\mathcal{G}}_1, \quad \forall f_2 \in \hat{\mathcal{G}}_2.$$

Достаточно доказать равенство $A_1 A_2^* = O$. Имеем

$$\begin{aligned} A_1 A_2^* &= (B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 - \tilde{v}_1) (\tilde{u}_2^* \tilde{K}_2^{-1} B_2 - \tilde{u}_2^*) \\ &= [B_1^* \tilde{K}_1^{-1}, -I] \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_2^* & \tilde{u}_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_2^{-1} B_2 \\ -I \end{bmatrix} \\ &= [B_1^* \tilde{K}_1^{-1}, -I] \left\{ - \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & B_1 \\ B_1^* & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 & D_1 \\ O_{\tilde{G}_2 \tilde{G}_1} & \tilde{L}_1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 & O_{\tilde{G}_2 \tilde{G}_1} \\ E_2 & \tilde{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_2 & B_2 \\ B_2^* & C_2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \tilde{K}_2^{-1} B_2 \\ -I \end{bmatrix} \\ &= -[O, B_1^* \tilde{K}_1^{-1} B_1 - C_1] \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 & D_1 \\ O_{\tilde{G}_2 \tilde{G}_1} & \tilde{L}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_2^{-1} B_2 \\ -I \end{bmatrix} \\ &\quad + [B_1^* \tilde{K}_1^{-1}, -I] \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 & O_{\tilde{G}_2 \tilde{G}_1} \\ E_2 & \tilde{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ B_2^* \tilde{K}_2^{-1} B_2 - C_2 \end{bmatrix} = O. \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств третье равенство следует из ОТ (1), а последнее — из равенств $C_r - B_r^* \tilde{K}_r^{-1} B_r = O$, $r = 1, 2$ (см. формулу (20)). \square

Пусть P_1 и P_2 обозначают операторы ортогонального проектирования на подпространства $\text{im } A_1^*$ и $\text{im } A_2^*$ соответственно. Из леммы 2 непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Стилтьесовская пара $\text{sol } [p(z), q(z)]$ удовлетворяет условиям (37) (или, что то же самое, условиям (34) и (35)) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям*

$$P_2 p(z) = O, \quad P_1 q(z) = O. \quad (39)$$

Рассмотрим ортогональное разложение пространства \mathcal{H} вида

$$\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}} \oplus \text{im } A_1^* \oplus \text{im } A_2^*. \quad (40)$$

Относительно такого разложения матричные представления операторов ортогонального проектирования P_1 и P_2 имеют вид

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{bmatrix} O_{\tilde{\mathcal{H}}} & O_{\text{im } A_1^*} \tilde{\mathcal{H}} & O_{\text{im } A_2^*} \tilde{\mathcal{H}} \\ O_{\tilde{\mathcal{H}} \text{ im } A_1^*} & I_{\text{im } A_1^*} & O_{\text{im } A_2^* \text{ im } A_1^*} \\ O_{\tilde{\mathcal{H}} \text{ im } A_2^*} & O_{\text{im } A_1^* \text{ im } A_2^*} & O_{\text{im } A_2^*} \end{bmatrix}, \\ P_2 &= \begin{bmatrix} O_{\tilde{\mathcal{H}}} & O_{\text{im } A_1^*} \tilde{\mathcal{H}} & O_{\text{im } A_2^*} \tilde{\mathcal{H}} \\ O_{\tilde{\mathcal{H}} \text{ im } A_1^*} & O_{\text{im } A_1^*} & O_{\text{im } A_2^* \text{ im } A_1^*} \\ O_{\tilde{\mathcal{H}} \text{ im } A_2^*} & O_{\text{im } A_1^* \text{ im } A_2^*} & I_{\text{im } A_2^*} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Теорема 4. *Пусть дана вырожденная обобщенная интерполяционная задача $\mathcal{P} = \{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\}$ стилтьесовского типа, для которой существует согласованная пара подпространств $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$ типа \mathcal{K} . Пусть вполне*

неопределенная интерполяционная задача $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{K}_1, \tilde{L}_1, \tilde{v}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2, \tilde{u}_2\}$ является сужением интерполяционной задачи \mathcal{P} на подпространства \mathcal{G}_1 и $\tilde{\mathcal{G}}_2$. И пусть резольвентная матрица интерполяционной задачи $\tilde{\mathcal{P}}$ определена в (24).

Тогда формула

$$s(z) = \left\{ \tilde{\gamma}_1(z)p(z) + \tilde{\delta}_1(z)q(z) \right\} \cdot \left\{ \tilde{\alpha}_1(z)p(z) + \tilde{\beta}_1(z)q(z) \right\}^{-1} \quad (41)$$

устанавливает биективное соответствие между решениями \mathcal{F} обобщенной интерполяционной задачи \mathcal{P} и такими классами эквивалентности стилтьесовских пар, в которых имеются пары $\text{col}[p(z), q(z)]$ вида

$$p(z) = \begin{bmatrix} \tilde{p}(z) & O_{\text{im } A_1^* \tilde{\mathcal{H}}} & O_{\text{im } A_2^* \tilde{\mathcal{H}}} \\ O_{\tilde{\mathcal{H}} \text{ im } A_1^*} & I_{\text{im } A_1^*} & O_{\text{im } A_2^* \text{ im } A_1^*} \\ O_{\tilde{\mathcal{H}} \text{ im } A_2^*} & O_{\text{im } A_1^* \text{ im } A_2^*} & O_{\text{im } A_2^*} \end{bmatrix},$$

$$q(z) = \begin{bmatrix} \tilde{q}(z) & O_{\text{im } A_1^* \tilde{\mathcal{H}}} & O_{\text{im } A_2^* \tilde{\mathcal{H}}} \\ O_{\tilde{\mathcal{H}} \text{ im } A_1^*} & O_{\text{im } A_1^*} & O_{\text{im } A_2^* \text{ im } A_1^*} \\ O_{\tilde{\mathcal{H}} \text{ im } A_2^*} & O_{\text{im } A_1^* \text{ im } A_2^*} & I_{\text{im } A_2^*} \end{bmatrix}.$$

Здесь матричные представления операторов указаны в смысле ортогонального разложения (40). Пара $\text{col}[\tilde{p}(z), \tilde{q}(z)]$ является произвольной стилтьесовской парой ОФ, принимающих значения во множестве операторов $\{\tilde{\mathcal{H}}\}$.

Доказательство. В теореме 3 условия (34) и (35) можно заменить эквивалентными условиями (39). После этого следует воспользоваться леммой 5.2 из статьи [4]. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюкарев Ю.М. Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стильтеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. 1 // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – Т. 6. – N 1/2. – С. 30 – 54.
2. Bolotnikov V., Sakhnovich L. On an operator approach to interpolation problems for Stieltjes functions // Integr. equ. oper. theory. – 1999. – N 35. – P. 423 – 470.
3. Дубовой В.К. Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шур для аналитических функций IV // Теория функций, функ. анализ и их приложения. – 1984. – Вып. 42. – С. 46 – 57.
4. Bolotnikov V. Degenerate Stieltjes moment problem and associated J – inner polynomials // Zeitschrift für analysis und ihre anwendungen. – 1995. – V.14. – N3. – P. 441 – 468.

5. Bolotnikov V. On degenerate Hamburger moment problem and extensions of nonnegative Hankel blok matrices // Integral Equations Operator Theory. – 1996. – 25. – N3. – P. 253 – 276.
6. Bolotnikov V., Dym H. On degenerate interpolation, entropy and extremal problems for Schur functions // Integral Equations Operator Theory. – 1998. – 28. – N2. – P. 275 – 292.
7. Дюкарев Ю.М. Вырожденная задача Неванлинны – Пика // Укр. мат. журн. – 2005. – Т.57. – N10. – С. 1334 – 1343.
8. Sakhnovich L.A Interpolation theory and its applications. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 197 p.
9. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика // ДАН Арм. ССР. – 1974. – 59. – Вып. 1. – С. 17 – 22.
10. Потапов В.П. Дробно-линейные преобразования матриц. Исследования по теории операторов и их приложениям: Сб. науч. тр. (изд. Марченко В.А.). – Киев: Наукова думка. – 1979. – С.75–97.
11. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны – Пика // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения: Сб. науч. тр. – Киев: Наукова думка. – 1981. – С. 25 – 49.
12. Потапов В.П. К теории матричных кругов Вейля. Функциональный анализ и прикладная математика: Сб. науч. тр. (изд. Марченко В.А.). – Киев: Наукова думка. – 1982. – С. 113 – 121.
13. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач. // Изв. АН СССР. Сер.матем. – 1983. – Т.47. – N3. – С. 455 – 497.
14. Дюкарев Ю.М. О неопределенности интерполяционных задач в классе Стилтьеса // Математический сборник. – 2005. – Т.196. – N3. – С. 61 – 88.

The Taylor expansion for a -holomorphic formal power series

K. Verbinina

V.N.Karazin Kharkov National University, Ukraine

Let a be a quasinilpotent element of a Banach algebra and $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ a formal power series over \mathbb{C} . Some analogs of the Taylor expansion $f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n$ are obtained.

2000 *Mathematics Subject Classification* 4630, 47A60.

1. Introduction

Holomorphic functional calculus goes far in the operator theory and its applications (for example, [1]-[5]). The essential part of this calculus are operator and Banach algebraic analogs of the Taylor expansion (see [3], Sections 3.19 and 26.4, [11], Chapter 1 and [14], Sections 10.36-10.38). Adduce one of the variants of such expansion. Let B be a Banach algebra, Ω an open set in \mathbb{C} , $a \in B$, the spectrum $\sigma(a)$ of a contains in Ω , and consider a function f holomorphic in Ω . Then there exists $\delta > 0$ such that for all $h \in B$, $\|h\| < \delta$, $ha = ah$ we get $\sigma(a+h) \subset \Omega$ and

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n, \quad (1)$$

(see [11], Chapter 1, §4, Proposition 11). At the end of 60-s S. Grabiner developed some formal power series functional (operational) calculus for quasinilpotent operators [6], [7]. Recall that an element of a Banach algebra is called quasinilpotent if its spectrum reduces to just one point $\{0\}$. S. Grabiner discussed the convergence of operator series $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$ with respect to the various operator topologies. In the work [8] he studied the case when an operator $f(a)$ is defined not everywhere (i.e., it can be unbounded). In [6] formal power series were used to solve some finite convolution integral equations. Note, however, that there are no the Taylor expansions in the Grabiner's functional calculus. We obtain in the present paper two analogs of the Taylor formula (1), for f a formal power series with the supplementary property of a -holomorphy (see Definition 2.1). The notion of a -holomorphic power series was studied in [10] in connection with

considering the holomorphic solutions of some linear differential equations in a Banach space (see also [12]). First, we consider the case the element a is nilpotent, h meets some additional condition, and f is an arbitrary h -holomorphic power series (Theorem 3.1). As the next step we put some restrictions to the growth of coefficients of a power series $f(\zeta)$ and the decrease of powers of a (Theorem 3.2).

2. Preliminaries

Let B be unital Banach algebra, $a \in B$, and $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ a formal power series over \mathbb{C} . Now set

$$f(za) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n z^n, z \in \mathbb{C}.$$

Then $f(za)$ is a power series with respect to z and with coefficients from B . Denote by $R_a(f)$ the radius of convergence for $f(za)$.

Definition 2.1 We say that $f(\zeta)$ is a -holomorphic if $R_a(f) > 0$.

Remark 2.2 Suppose that the power series f has a positive radius of convergence $R(f)$. Then such series is a -holomorphic for each $a \in B$. If $\rho(a)$ is the spectral radius of a and $|z|\rho(a) < R(f)$, then $f(za)$ stands for the result of applying the holomorphic function f to za .

Cite now some examples of the quasinilpotent elements a and the a -holomorphic formal power series with zero radius of convergence (see also [7] p.652, and [10]).

Example 2.3 Suppose that the element a is nilpotent, $a^m = 0$, then

$$f(za) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n a^n z^n,$$

that is, each formal power series $f(\zeta)$ is a -holomorphic and $R_a(f) = +\infty$.

Example 2.4 (integration operator) Let $H = L^2(0,1)$, $B = B(H)$ is the algebra of all bounded operators on H and a is the integration operator, i.e.

$(a\xi)(x) = \int_0^x \xi(y) dy, \xi \in L^2(0,1)$. It is well-known that

$$(a^n \xi)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} \xi(y) dy, \quad \|a^n\| \leq \frac{1}{n!}, \quad n \geq 1, \quad (2)$$

and $\sigma(a) = \{0\}$ (see, for example, [9] solution of № 641). Consider now the following formal power series: $\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \zeta^n$. It is easy to deduce from (6) and the Cauchy-Hadamard formula that φ is a -holomorphic, $R_a(\varphi) = 1$ and

$$(\varphi(za)\xi)(x) = \xi(x) + \int_0^x \frac{z\xi(y)}{(1 - z(x-y))^2} dy, |z| < 1.$$

3. Main results

Theorem 3.1 *Let B be a Banach algebra, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ be a formal power series over \mathbb{C} , $a, h \in B$ and $ha = ah$. Suppose a is nilpotent, $a^{m+1} = 0$, f is h -holomorphic and h satisfies the following condition:*

$$\exists \gamma > 1 \forall n \in \mathbb{N} : \|h^n\| \leq \gamma^n \|h^{n+1}\|. \quad (3)$$

Then f is $(a+h)$ -holomorphic,

$$f(z(a+h)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(za) h^n z^n, \quad (4)$$

and $R_{a+h}(f) \geq \gamma^{-m} R_h(f)$.

Proof: Note first that $f^{(n)}(za)$ is well defined since a is nilpotent. Now show that f is $(a+h)$ -holomorphic and $R_{a+h}(f) \geq \gamma^{-m} R_h(f)$. Let $k > m$, then $(a+h)^k = \sum_{j=0}^m C_k^j a^j h^{k-j}$ and $\|(a+h)^k\| \leq \sum_{j=0}^m C_k^j \|a^j\| \cdot \|h^{k-j}\| \leq M \sum_{j=0}^m C_k^j \|h^{k-j}\|$, where $M = \max\{\|a^j\| : 1 \leq j \leq m\}$. According to (3) we have:

$$\|h^{k-j}\| \leq \gamma^{k-j} \|h^{k-j+1}\| \leq \dots \leq \gamma^{k-j+(k-j+1)+\dots+(k-1)} \|h^k\| = \gamma^{kj - \frac{j^2+j}{2}} \|h^k\|.$$

Since $C_k^j \leq k^j$, we could obtain now

$$\sqrt[k]{M C_k^j |c_k| \cdot \|h^{k-j}\|} \leq \sqrt[k]{M k^j |c_k| \cdot \gamma^{kj - \frac{j^2+j}{2}} \|h^k\|} \leq M^{\frac{1}{k}} \gamma^j \gamma^{-\frac{j^2+j}{2k}} k^{\frac{j}{k}} \sqrt[k]{|c_k| \cdot \|h^k\|},$$

and

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{M C_k^j |c_k| \cdot \|h^{k-j}\|} \leq \frac{\gamma^j}{R_h(f)},$$

i.e., the power series $\sum_{k=m+1}^{\infty} C_k^j |c_k| \cdot \|a^j\| \cdot \|h^{k-j}\| z^k$ is convergent with $|z| < \gamma^{-j} R_h(f)$, $j = 0, \dots, m$. Hence the series $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (a+h)^k z^k$ is convergent in the disk $|z| < \gamma^{-m} R_h(f)$. Use these observations to obtain

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k C_k^n |c_k| \cdot \|a^{k-n}\| \cdot \|h^n\| \cdot |z|^k < +\infty, \quad (5)$$

where $|z| < \gamma^{-m} R_h(f)$. Hence

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (a+h)^k z^k &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\sum_{n=0}^k C_k^n a^{k-n} h^n \right) z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k C_k^n a^{k-n} z^{k-n} \right) h^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1) \dots (k-n+1) a^{k-n} z^{k-n} \right) h^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(za) h^n z^n, \end{aligned}$$

$|z| < \gamma^{-m} R_h(f)$. The theorem is completely proved. \square

Discuss now another analog of (1).

Theorem 3.2 Let B be a Banach algebra, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ be a formal power series over \mathbb{C} , $a, h \in B$ and $ha = ah$. Suppose that a, h and f satisfy the following conditions:

$$\exists M_1, M_2, M_3, \beta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : |c_n| \leq M_1^n (n!)^\beta, \quad \|a^n\| \leq \frac{M_2^n}{(n!)^\beta}, \quad \|h^n\| \leq \frac{M_3^n}{(n!)^\beta}. \quad (6)$$

Then f is $(a+h)$ -holomorphic,

$$f(z(a+h)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(za) h^n z^n,$$

and $R_{a+h}(f) \geq \frac{1}{2} \tilde{R} \cdot (\sigma \cdot \rho)^{\frac{1}{\beta}}$, where \tilde{R} is the radius of convergence of the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n!)^\beta} z^n$, ρ and σ are the order and the type of the entire function $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \|a^{k-j}\| \cdot \|h^j\| \right) z^k$ respectively.

Proof: Let $\varphi_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \|a^k\| z^k$ and $\varphi_h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \|h^k\| z^k$. It follows from (6) that both φ_a and φ_h are entire functions of a finite order less than $\frac{1}{\beta}$ and normal type (see [13], Chapter I, §2). Therefore $\psi(z) = \varphi_a(z)\varphi_h(z)$ is of finite order less than $\frac{1}{\beta}$ and normal type too ([13], Chapter I, Theorem 12). Hence

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(k!)^\beta \left(\sum_{j=0}^k \|a^{k-j}\| \cdot \|h^j\| \right)} < +\infty, \quad (7)$$

(see [13], Chapter I, §2). As in the proof of Theorem 3.1, we need to check (5) on a neighborhood of zero. Since $C_k^n \leq 2^k$, we deduce from (6) and (7):

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k| \left(\sum_{n=0}^k C_k^n \|a^{k-n}\| \cdot \|h^n\| \right)} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{|c_k| 2^k}{(k!)^\beta} (k!)^\beta \left(\sum_{n=0}^k \|a^{k-n}\| \cdot \|h^n\| \right)} \leq \quad (5)$$

$$\leq 2M_1 \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(k!)^\beta \sum_{n=0}^k C_k^n \|a^{k-n}\| \cdot \|h^n\|} < +\infty.$$

Moreover, the inequality $\frac{1}{R_{a+h}(f)} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k| \left(\sum_{n=0}^k C_k^n \|a^{k-n}\| \cdot \|h^n\| \right)} \leq 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{|c_k|}{(k!)^\beta}} \sqrt[k]{(k!)^\beta \left(\sum_{n=0}^k \|a^{k-n}\| \cdot \|h^n\| \right)}$ shows that $R_{a+h}(f) \geq \frac{1}{2} \tilde{R} \cdot (\sigma \cdot \rho)^{\frac{1}{\beta}}$. The theorem is proved. □

REFERENCES

1. Riesz F., Sz-Nagy B. Lecons D'analyse Fonctionnelle - Akademiai Kiado, Budapest, 1972.
2. Danford N., Schwartz I.T. Linear Operators, Part 1, General Theory, 1958, Interscience Publishers, New York, London.
3. Hille E., Phillips R. S. Functional Analysis and Semi-groups - American Mathematical Society, 1957.
4. Kato T. Perturbation theory for linear operators - Springer-Verlag Berlin, 1966.
5. Dalec'kii Ju., Krein M. Stability of differential equations in Banach space - American Mathematical Society, Providence, R.I. 1974.
6. Grabiner S. The use of formal power series to solve finite convolution integral equations, J. Math. An. and Appl. , no.30 (1970), 415-419.
7. Grabiner S. A formal power series operational calculus for quasinilpotent operators, Duke Math. J., no.38 (1971), 641-658.
8. Grabiner S. A formal power series operational calculus for quasinilpotent operators II, J. Math. An. and Appl., no.43 (1973), 170-192.
9. Kirillov A.A., Gvishiani A.D. Theorems and problems of functional analysis (Russian), Second ed., Nauka, Moskow, 1988.
10. Gefter S., Mokrenyuk V. The power series $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ and holomorphic solutions of some differential equations in a Banach space (Russian), J. Math. Phys., Anal., Geom., no.1 (2005), 53-70.
11. Bourbaki N. Elements de Mathematique, Theories Spectrales - Hermann, 1967.

12. Gefter S., Vershinina A. On analytic solutions of the heat equations with an operator coefficient, *Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI. Investigations on Linear Operators and Function Theory* 355 (2008), part 36, p.139-163.
13. Levin B.Ya. Distribution of zeros of entire functions (Russian) - Gosud. Izdat. Tehn.-Teor. Lit, Moskow, 1956.
14. Rudin W. *Functional Analysis* - McGraw-Hill Book Company, 1973.

On the coincidence of the Limit Point Range and the Sum Range along a filter of filter convergent series

Alexander Leonov

Kharkov National University, Ukraine

We study filters \mathcal{F} for which the equality $LPR = SR_{\mathcal{F}}$ holds. We characterize filters \mathcal{F} for which every \mathcal{F} -convergent series has a null subsequence. This property with the one which we call the unbounded gap property of \mathcal{F} imply that $LPR = SR_{\mathcal{F}}$. The unbounded gap property of \mathcal{F} (existence of $A \in \mathcal{F}$, $A = (a_n)$ such that the sequence of $g_n = a_{n+1} - a_n$ is unbounded) is a necessary condition for this equality. The equality does not hold for any ultrafilter.

2000 Mathematics Subject Classification 40A05, 54A20

1. Introduction

The sum range of a series on real line (the set of sums of all its convergent rearrangements) is described by the famous Riemann's theorem:

Riemann's theorem Let $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ be a conditionally convergent series of real numbers. Then for every $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ there exists a permutation π such that $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} = s$.

There is a number of generalizations of the Riemann's theorem to more general series (vectors, functions, etc. [4]), or more general types of convergence [1], [2], [5]. The authors of [2] considered two generalizations of the usual convergence: the statistical convergence and the convergence along even numbers. They obtained the full description of the sum range along both the statistical convergence filter and the 2n-filter. Surprisingly, the simplicity of a filter does not mean the simplicity of the problem. And the description of the sum range along 2n-filter appeared to be much more complicated than along the statistical convergence filter. Besides the two usual cases of one point or the whole real line, the sum range can be an arithmetic progression $a + \lambda\mathbb{Z}$, $a, \lambda \in \mathbb{R}$ (for the statistical convergence filter) and shifted additive subgroup of the form $a + \{c_1 z_1 + \dots + c_l z_l \mid z_k \in E, c_i \in \mathbb{Z}, \sum_{k=1}^l c_k \text{ is even}\}$, where E is an ε -separated set (for the 2n-filter).

In this paper we continue the study originated in [2], but instead of considering concrete filters we study classes of filters for which the description of the sum range can be given explicitly. We study a class of filters \mathcal{F} with the following property: for every \mathcal{F} -convergent series the sum range along \mathcal{F} of it coincides with its limit point range.

Recall that a filter \mathcal{F} on \mathbb{N} is a non-empty collection of subsets of \mathbb{N} satisfying the following axioms: $\emptyset \notin \mathcal{F}$; if $A, B \in \mathcal{F}$ then $A \cap B \in \mathcal{F}$; and for every $A \in \mathcal{F}$ if $B \supset A$ then $B \in \mathcal{F}$.

A sequence (x_n) , $n \in \mathbb{N}$ in a topological space X is said to be \mathcal{F} -convergent to x if for every neighborhood U of x the set $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ belongs to \mathcal{F} . The filter convergence of series is naturally defined as filter convergence of the sequence of its partial sums, i.e. a series $\sum x_k$ is \mathcal{F} -convergent to s if the sequence $(s_n) = (\sum_{k=1}^n x_k)$ is \mathcal{F} -convergent to s (and we write $s = \mathcal{F}\text{-}\sum_k x_k$ or simply $s = \sum_{\mathcal{F}} x_k$, when there is only one possible summing index).

In particular if one takes as \mathcal{F} the filter of sets with finite complements (the Fréchet filter), then \mathcal{F} -convergence coincides with the ordinary one.

The natural ordering on the set of filters on \mathbb{N} is defined as follows: $\mathcal{F}_1 \succ \mathcal{F}_2$ if $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$. A maximal in the natural ordering filter is called an *ultrafilter*. The Zorn lemma implies that every filter is dominated by an ultrafilter. A filter \mathcal{F} on \mathbb{N} is an ultrafilter if and only if for every $A \subset \mathbb{N}$ either A or $\mathbb{N} \setminus A$ belongs to \mathcal{F} .

A filter \mathcal{F} on \mathbb{N} is said to be *free* if it dominates the Fréchet filter. Below when we say "filter" we mean a free filter on \mathbb{N} . In particular every ordinary convergent sequences and series will be automatically \mathcal{F} -convergent. More about filters, ultrafilters and their applications one can find in every modern General Topology textbook, for example in [6].

Definition 1 A point s belongs to the sum range along \mathcal{F} of the series $\sum x_k$ if there exists a permutation π such that $\sum_{\mathcal{F}} x_{\pi(k)} = s$. The set of all such points is called the sum range along \mathcal{F} of the series $\sum x_k$ and is denoted by $SR_{\mathcal{F}}(\sum x_k)$.

We need also the following definition from [4].

Definition 2 A point s belongs to the limit point range of the series $\sum x_k$ if there exists a permutation π and an increasing sequence of naturals (m_k) such that $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{m_k} x_{\pi(j)} = s$. The set of all such points is called the limit-point range of the series $\sum x_k$ and is denoted by $LPR(\sum x_k)$.

It is easy to see that $LPR(\sum x_k)$ is a closed set and $SR_{\mathcal{F}}(\sum x_k) \subset LPR(\sum x_k)$. In [3] it was proved that $LPR(\sum x_k)$ is a shifted closed additive subgroup of the space in which the series lives. In particular, on the real line $LPR(\sum x_k)$ can be either \mathbb{R} or \emptyset or an arithmetic progression of the form $a + \lambda\mathbb{Z}$. More about series rearrangements whose terms are elements of a Banach space or of other topological linear spaces one can find in [4].

In this paper we consider series whose terms lie in the field of reals. When we write a subset of naturals $A \subset \mathbb{N}$ in the form of sequence (a_n) , we mean that it is increasing.

2. Sufficient and necessary conditions for the equality $LPR = SR_{\mathcal{F}}$

It is the specificity of the usual convergence that every conditionally convergent series after rearrangement converges to every given in advance real number (the sum range is \mathbb{R}).

Proposition 1 *Let \mathcal{F} be a filter on \mathbb{N} . The following conditions are equivalent*

1. *For every sequence (x_k) such that series $\sum x_k$ \mathcal{F} -converges $SR_{\mathcal{F}}(\sum x_k)$ is either \mathbb{R} or one point $x \in \mathbb{R}$.*
2. *For every sequence (x_k) such that series $\sum x_k$ \mathcal{F} -converges it follows that $x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$.*
3. *\mathcal{F} is the Fréchet filter.*

Proof. Implication $(3) \Rightarrow (1)$ is the usual Riemann rearrangement theorem; $(3) \Rightarrow (2)$ is the necessary condition for the usual convergence of series. To show the inverse implications $(1) \Rightarrow (3)$ and $(2) \Rightarrow (3)$ let us suppose the contrary. \mathcal{F} is not the Fréchet filter means that there is some infinite $C \subset \mathbb{N}$ such that $A = \mathbb{N} \setminus C \in \mathcal{F}$. Denote by E the set $A \cap (C + 1)$ and let (x_k) be the following sequence: x_k is 1 for $k \in E$, -1 for $k \in (E - 1)$ and 0 for the rest $k \in \mathbb{N} \setminus (E \cup (E - 1))$. Then $\sum x_k$ \mathcal{F} -converges to 0 but $SR_{\mathcal{F}}(\sum x_k) \subset \mathbb{Z}$ and $x_k \not\rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$. \square

Thus, the sequence convergence to 0 is the characteristic property of the usual convergence of series. Let us describe a class of filters with a weaker property.

Definition 3 *A filter \mathcal{F} is said to have 1-shift property if for every $A \in \mathcal{F}$ there is $s \in A$ such that $s + 1 \in A$.*

Proposition 2 *Let \mathcal{F} be a filter on \mathbb{N} . The following conditions are equivalent*

1. *For every sequence (x_k) such that $\sum x_k$ \mathcal{F} -converges there is a null subsequence (x_{k_n}) .*
2. *\mathcal{F} has 1-shift property.*

Proof. $(2) \Rightarrow (1)$. Let $\sum_{\mathcal{F}} x_k = x$ and suppose that (x_k) has no null subsequence. Then there is $\delta > 0$ and $N \in \mathbb{N}$ such that $|x_k| > \delta$ for $k > N$. For $\varepsilon = \delta/4$ let us find $A = (a_k) \in \mathcal{F}$, with $a_1 > N$, such that $|x - \sum_{n=1}^{a_k} x_n| < \varepsilon$ for every $k \in \mathbb{N}$. Take $s \in A$ such that $s + 1 \in A$ then we come to a contradiction:

$$\varepsilon > |x - \sum_{n=1}^{s+1} x_n| \geq |x_{s+1}| - |x - \sum_{n=1}^s x_n| > \delta - \varepsilon > 2\varepsilon.$$

$(1) \Rightarrow (2)$. Suppose that there is $A = (a_k) \in \mathcal{F}$ such that $s \in A$ implies that $s + 1 \notin A$, that is $a_k + 1 < a_{k+1}$ for all $k \in \mathbb{N}$. Denote $d_k = a_k - a_{k-1}$, where

$a_0 = 0$, and let (x_k) be such sequence: x_n is 1 for $n \in A$, in the case of odd d_k set $x_{a_{k-1}+1} = -1$, in the case of even d_k set $x_{a_{k-1}+1} = -2$, and set $x_n = (-1)^{n-a_{k-1}}$ for $a_{k-1}+1 < n < a_k$. Then $\sum x_k$ \mathcal{F} -converges but (x_k) has no null subsequence. \square

Definition 4 A filter \mathcal{F} is said to have the unbounded gap property if there is $A \in \mathcal{F}$, $A = (a_n)$ such that the sequence of $g_n = a_{n+1} - a_n$ is unbounded.

Theorem 1 Let \mathcal{F} be a filter which has the 1-shift property and the unbounded gap property. Then for every \mathcal{F} -convergent series $\sum x_k$ the equality $SR_{\mathcal{F}}(\sum x_k) = LPR(\sum x_k)$ holds.

Proof. We proceed the same way as it was made in [2, Theorem 2.2.1.] for statistical convergence.

From the existence of a subsequence (x_{k_n}) such that $x_{k_n} \rightarrow 0$ it follows that we can select a subsequence $(x_{k_{n_i}})$ such that $\sum_{i=1}^{\infty} x_{k_{n_i}} < \infty$. Note, that absolutely convergent series does not change its sum (and hence \mathcal{F} -sum) under any permutation σ , so we can write

$$\sum_{\mathcal{F}} x_{\sigma(k)} = \sum_{\mathcal{F}} v_{\sigma(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k,$$

where (v_k) is the sequence (x_k) with 0 substituted for all $x_{k_{n_i}}$ and $z_k = x_k - v_k$. So without loss of generality we may assume that there are infinitely many zeros among the original series terms x_k .

Let y be an arbitrary element of $LPR(\sum x_k)$ with π and (m_k) being the permutation and the sequence corresponding to y from the definition of LPR . To obtain the permutation τ for which $y = \sum_{\mathcal{F}} x_{\tau(k)}$ let us take $A \in \mathcal{F}$, $A = (a_n)$ such that $(g_n) = (a_{n+1} - a_n)$ is unbounded and find a subsequence (g_{n_k}) such that $g_{n_k} \geq m_k - m_{k-1}$ for all $k \in \mathbb{N}$ with m_0 assigned to be 0. We arrange elements of our series in the following way:

$$\begin{aligned} & \overbrace{0 + \dots + 0}^{a_{n_1}} + x_{\pi(1)} + \dots + x_{\pi(m_1)} + \overbrace{0 + \dots + 0}^{a_{n_2} - a_{n_1} - m_1} + \\ & x_{\pi(m_1+1)} + \dots + x_{\pi(m_2)} + \overbrace{0 + \dots + 0}^{a_{n_3} - a_{n_2} - m_2} + x_{\pi(m_2+1)} + \dots + x_{\pi(m_3)} + \dots \end{aligned}$$

For this permutation τ the series $\sum x_{\tau(k)}$ evidently \mathcal{F} -converge to y . \square

Theorem 2 Let \mathcal{F} be a filter which is not Fréchet. The unbounded gap property is a necessary condition in order to fulfill the equality $SR_{\mathcal{F}}(\sum x_k) = LPR(\sum x_k)$ for every \mathcal{F} -convergent series $\sum x_k$.

Proof. Assuming that the unbounded gap property does not hold we construct \mathcal{F} -summable to 0 sequence (x_k) such that $SR_{\mathcal{F}}(\sum x_k) \neq LPR(\sum x_k)$.

The idea of the construction is the following. Let 1 be the desired limiting point which is not the \mathcal{F} -limit. For the series terms, to make $1 \in LPR(\sum x_k)$, we take some integers y_k from which we can make presentations of 1 as a sum of a fixed number of terms. The monotone growth of the number of these terms and the uniqueness of each presentation will result in that $1 \notin SR_{\mathcal{F}}(\sum x_k)$. Adjoining $(-y_k)$ to (y_k) and infinitely many zeros, if needed (to provide \mathcal{F} -convergence to 0), we will get the sequence (x_k) we need.

First, before we chose y_k , let us ascertain that $\sum_{\mathcal{F}} x_k = 0$. Since the filter we consider is not the Fréchet filter, there is $A \in \mathcal{F}$ with infinite complement C . This allows us to rearrange our series grouping y_k and $-y_k$ in pairs. Denote $E = A \cap (C + 1)$, $E = (e_1, e_2, \dots)$ and let $x_{e_k} = y_k$, $x_{e_k-1} = -y_k$ and the rest set zero: $x_k = 0$ for $k \in \mathbb{N} \setminus (E \cup (E - 1))$. We obtain the \mathcal{F} -convergent to 0 series $\sum x_k$.

We take $y_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ such that $(|y_k|)$ is a rapidly increasing sequence. The elements y_k form a tree. Its structure is as follows:

(a) for every $s \in \mathbb{N}$ there is $d(s)$ such that $y_s = \sum_{k=d(s)}^{d(s)+s} y_k$;

(b) $d(1) = 2$, $d(s+1) = d(s) + s + 1$.

(c) $y_1 = 1$;

(d) $y_{d(s)+i} = 2 \sum_{k=1}^{d(s)+i-1} |y_k| + 1$, $0 \leq i < s$; and from (a)

(e) $y_{d(s)+s} = -\sum_{k=d(s)}^{d(s)+s-1} y_k + y_s$.

We use the following terminology: $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ is the decomposition tree of 1, the set $\{y_k\}_{k=d(s)}^{d(s)+s}$ is the decomposition of y_s , first level of the tree is y_1 , n -th level of the tree is the union of decompositions of all the elements of $(n-1)$ -th level. The sum of all elements of every level equals 1 for the decomposition tree of 1 and equals -1 for the decomposition tree of -1 (the set $\{-y_k\}_{k=1}^{\infty}$).

Observe that $1 \in LPR(\sum x_k)$. One can reorder and sum (x_k) for example in the following way: first take 1, then add 0, then add -1 with the decomposition of 1, then add 0, then add decomposition of -1 with the second level of the decomposition tree of 1, etc (if we do not have infinitely many zeros then we just do not add them).

Let us show that any permutation π can not make $\sum_{\mathcal{F}} x_{\pi(k)} = 1$. Supposing the contrary we find $B = (b_i) \in \mathcal{F}$ such that $\sum_{k=1}^{b_1} x_{\pi(k)} = 1$ and $\sum_{k=b_i+1}^{b_{i+1}} x_{\pi(k)} = 0$ for every $i \in \mathbb{N}$. Consider two possible cases.

The first case: there is $N \in \mathbb{N}$ such that with every element $x \in \{x_{\pi(k)}\}_{k=b_i+1}^{b_{i+1}}$ the $-x \in \{x_{\pi(k)}\}_{k=b_i+1}^{b_{i+1}}$ for all $i \geq N$. In this case the set $\{x_{\pi(k)}\}_{k=1}^{b_N}$ has to contain with every y the $-y$ in its turn. And we get $\sum_{\mathcal{F}} x_{\pi(k)} = 0$.

The second case: there are infinitely many $i \in \mathbb{N}$ for which we can find $x \in \{x_{\pi(k)}\}_{k=b_i+1}^{b_{i+1}}$ that $-x \notin \{x_{\pi(k)}\}_{k=b_i+1}^{b_{i+1}}$. Take the modulus largest $x \in \{x_{\pi(k)}\}_{k=b_i+1}^{b_{i+1}}$ that $-x \notin \{x_{\pi(k)}\}_{k=b_i+1}^{b_{i+1}}$. It is either an element of the decomposition tree of 1 or of -1 . Without loss of generality let us reckon that $x = y_p$, i.e. belongs to the decomposition tree of 1. Consider the decomposition $\{y_k\}_{k=d(s)}^{d(s)+s}$ to which y_p belongs. If not all $s+1$ elements of this decomposition is contained in $\{x_{\pi(k)}\}_{k=b_i+1}^{b_{i+1}}$ then $\sum_{k=b_i+1}^{b_{i+1}} x_{\pi(k)} \neq 0$, because y_k are chosen in such a way that any sum $\sum_{k=d(s)}^{d(s)+s} \theta_k y_k$, $\theta_k \in \{0, 1, -1\}$ is either $\pm y_s$ or is modulus-greater than $\sum_{k=1}^{d(s)-1} |y_k|$. It follows that there are infinitely many $i \in \mathbb{N}$ for which exists a decomposition that is contained in $\{x_{\pi(k)}\}_{k=b_i+1}^{b_{i+1}}$. This contradicts our assumption that \mathcal{F} does not have the unbounded gap property. \square

Though we do not know whether the 1-shift property is a necessary condition, it is essential. To see this let us consider an example.

Proposition 3 *If \mathcal{F} contains an arithmetic progression, i.e. an element A of the form $q\mathbb{N} + n$, where $q > 1$ and $0 \leq n < q$, then there is a sequence (x_k) such that series $\sum x_k$ \mathcal{F} -converges and $SR_{\mathcal{F}}(\sum x_k) \neq LPR(\sum x_k)$.*

Proof. Let us take \mathcal{F} -convergent to 0 series of the following sequence

$$(x_k) = \overbrace{0, 0, \dots, 0}^n, \overbrace{1, 1, \dots, 1, -(q-1)}^q, \overbrace{1, 1, \dots, 1, -(q-1)}^q, \dots$$

For every permutation σ such that $\sum x_{\sigma(j)}$ \mathcal{F} -converges we can find $B \in \mathcal{F}$, $B = (b_i) \subset A$ such that $\max_{1 \leq j \leq n} \sigma(j) < b_1$, i.e. all 0-s are already summed. Then every sum $\sum_{j=1}^{b_i} x_{\sigma(j)}$ can be represented as a sum of summands with q non-zero terms in each. Every summand is the sum of m " $-(q-1)$ "-s and $q-m$ "1"-s, $0 \leq m \leq q$ which is $(1-m)q$. Thus we have $SR_{\mathcal{F}}(\sum x_k) = q\mathbb{Z}$ and $1 \notin SR_{\mathcal{F}}(\sum x_k)$ but $1 \in LPR(\sum x_k)$. \square

In particular we have that neither the set of all odd numbers nor the set of all even numbers can belong to a filter with the property $SR_{\mathcal{F}}(\sum x_k) = LPR(\sum x_k)$. Therefore every ultrafilter does not have the studied property.

Acknowledgment. The author would like to express his gratitude to his scientific advisor, V. Kadets, who has posed this problem to him, for fruitful communications, and for his help in preparing this text.

REFERENCES

1. Bagemihl, F. ; Erdős, P. Rearrangements of C_1 -summable series.// Acta Math. 92, - 1954. - P. 35 - 53.

2. Dybskiy Y.; Slutsky K., Riemann Rearrangement Theorem for some types of convergence /arXiv:math.FA/0612840v1 28 Dec 2006
3. Hadwiger, H. Über das Umordnungsproblem im Hilbertschen Raum //Math. Zeitschrift **46** – 1940. – P. 70 – 79.
4. Kadets, M. ; Kadets, V., Series in Banach spaces : conditional and unconditional convergence. Bazel: Birkhauser, – 1997 (Operator theory advances and applications; Vol.94).
5. Lorentz, G. G. ; Zeller, K. Series rearrangements and analytic sets. // Acta Math. **100** – 1958. – P. 149 – 169.
6. Todorcevic S. Topics in topology, Lecture Notes in Mathematics **1652**, Springer Verlag, Berlin, 1997.

Внутренняя геометрия грассманова многообразия псевдоевклидова пространства

М.А. Гургенидзе, П.Г. Стеганцева

Запорожский национальный университет
Украина

Изучается совокупность неизотропных плоскостей псевдоевклидова пространства индекса 1. Введена гладкая структура, определена метрика, найден вид метрики в локальных координатах, получены выражения для символов Кристоффеля первого и второго рода и уравнения геодезических линий.

2000 Mathematics Subject Classification 58A05.

Изучение внутренней геометрии многообразия начинается с введения метрики. В случае погруженного многообразия метрика на нем индуцируется метрикой объемлющего пространства. Внутренняя геометрия грассманова многообразия $G(l, n)$ l -плоскостей в евклидовом n -пространстве хорошо изучена. В работе К.Лейхтвейса [7] найдены все римановы метрики многообразия $G(l, n)$, инвариантные относительно группы движений евклидова n -пространства. В [8] Ю.Вонг определил метрику на $G(l, n)$ как сумму квадратов l стационарных углов между двумя бесконечно близкими l -плоскостями и сформулировал теорему о виде этой метрики в локальных координатах. Там же методами вариационного исчисления получены уравнения геодезических линий многообразия $G(l, n)$ и изучены замкнутые геодезические. Основные результаты исследования стандартных грассмановых многообразий можно найти в обзорной статье А.А.Борисенко, Ю.А.Николаевского [2]. В монографии [1] Ю.А.Аминова исследовано подмногообразие многообразия $G(l, n)$ - грассманов образ поверхности.

Со второй половины XX века растет интерес к дифференциальной геометрии грассмановых многообразий l -плоскостей псевдоевклидова пространства. И.Маазикас в [4] доказал существование инвариантной метрики грассманова многообразия l -плоскостей индекса k в псевдоевклидовом n -пространстве индекса m , показал, что эта метрика превращает грассманово многообразие в пространство Эйнштейна постоянной скалярной кривизны при всех допустимых значениях k и m .

В данной статье изучается грасманово многообразие неизотропных l -плоскостей, погруженное в псевдоевклидово n -пространство индекса 1. Целью статьи является получение явного вида метрики этого многообразия в локальных координатах.

1. Гладкая структура и метрика во множестве плоскостей

Евклидовым n -мерным пространством называется n -мерное аффинное пространство, в котором задана билинейная скалярная функция $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ двух векторных аргументов \bar{x}, \bar{y} , удовлетворяющая условиям симметричности и невырожденности [5].

Функцию $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ называют скалярным произведением векторов \bar{x}, \bar{y} и обозначают (\bar{x}, \bar{y}) . Скалярные произведения (\bar{e}_i, \bar{e}_j) векторов базиса являются компонентами дважды ковариантного тензора g_{ij} , который называется метрическим. Если $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, то векторы называются ортогональными. Скалярный квадрат вектора \bar{x} определяется формулой $\bar{x}^2 = (\bar{x}, \bar{x})$. Евклидовы пространства называются собственно евклидовыми, если в них для любого вектора $\bar{x} \neq \bar{0}$ имеет место неравенство $\bar{x}^2 > 0$, и псевдоевклидовыми, если \bar{x}^2 для $\bar{x} \neq \bar{0}$ может принимать положительные, отрицательные и нулевые значения. В этом случае векторы называются соответственно евклидовыми, псевдоевклидовыми и изотропными. В псевдоевклидовом пространстве при нормировании векторов необходимо использовать формулу $\bar{e} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2}}$ для евклидовых векторов и формулу $\bar{e} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{-\bar{x}^2}}$ - для псевдоевклидовых векторов. После нормировки векторы принято называть единичными и мнимоединичными соответственно.

Ортогональный базис псевдоевклидова пространства, состоящий из единичных и мнимоединичных векторов, по аналогии с евклидовым пространством, называется ортонормированным, а координаты векторов относительно такого базиса - декартовыми.

Пространство с метрическим тензором $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_i^j$, где δ_i^j -символ Кронекера, $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_i = 1, i \neq 1$ называют псевдоевклидовым пространством индекса 1 и обозначают 1R_n . Скалярное произведение векторов \bar{x}, \bar{y} в пространстве 1R_n относительно ортонормированного базиса можно записать в виде $\bar{x} E' \bar{y}$, где $E' = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.

Рассмотрим в ${}^1R_{l+p}$ множество неизотропных (псевдоевклидовых и евклидовых) l -плоскостей, проходящих через начало координат. Будем, по аналогии с евклидовым пространством, называть это множество грасмановым многообразием и обозначать $G(l, l+p)$. В пространстве ${}^1R_{l+p}$ в грасмановом многообразии естественно рассматривать два подмногообразия: псевдоевклидовых l -плоскостей и евклидовых l -плоскостей. Для каждого подмногообразия относительно любого фиксированного базиса получаем $p \times l$ -матрицу локальных координат. Специализируем базис $\{\bar{e}_i, \bar{e}_\alpha\} (i = 1, \dots, l, \alpha = l+1, \dots, l+p)$ как и в работе [2] и обозначим через $Z = \{\xi_i^\mu\} (i = 1, \dots, l, \mu = 1, \dots, p)$ матрицу локальных координат l -плоскости относительно этого базиса. Перейдем к базису $\{\bar{f}_i, \bar{f}_\alpha\}$, связанному с базисом $\{\bar{e}_i, \bar{e}_\alpha\}$ соотношениями $\bar{e}_i E' \bar{f}_j = \bar{e}_j E' \bar{f}_i$

и $\bar{e}_\alpha E' \bar{f}_\beta = \bar{e}_\beta E' \bar{f}_\alpha$ ($j = 1, \dots, l, \beta = l+1, \dots, l+p$). Для подмногообразия псевдоевклидовых плоскостей нами получено условие

$$QE'_l Q^t = (E'_l + Z^t Z)^{-1}, \quad (1)$$

которому удовлетворяет матрица Q перехода от первого базиса ко второму.

Матрицу локальных координат l -плоскости относительно второго базиса будем обозначать $N = \{\eta_j^\nu\}$ ($j = 1, \dots, l, \nu = 1, \dots, p$). Связь между двумя наборами локальных координат задается формулой $N = ZQ$.

Для l -плоскостей подмногообразия евклидовых плоскостей получим также два набора локальных координат, связь между которыми устанавливается с помощью матрицы Q , для которой

$$QQ^t = (E_l + Z^t E'_l Z)^{-1}. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) являются аналогами соответствующей формулы из работы [2].

Метрику в грассмановом многообразии псевдоевклидова пространства ${}^1R_{l+p}$ определим формулой

$$ds^2 = \text{Tr}[(E + ZE'Z^t)^{-1} dZ(E' + Z^t Z)^{-1} dZ^t] \quad (3)$$

для псевдоевклидовых плоскостей и формулой

$$ds^2 = \text{Tr}[(E' + ZZ^t)^{-1} dZ(E + Z^t E' Z)^{-1} dZ^t] \quad (4)$$

для евклидовых плоскостей.

Покажем, что данное определение является естественным, и в этой метрике квадрат расстояния между достаточно близкими плоскостями равен сумме квадратов углов, которые ниже будут названы стационарными. Для этого построим связность грассманова многообразия, согласованную с метрикой (символы Кристоффеля II рода), выведем уравнения геодезических линий и вычислим расстояние между достаточно близкими l -плоскостями грассманова многообразия пространства ${}^1R_{l+p}$.

2. Символы Кристоффеля I и II рода, геодезические линии

2.1 Случай грассманова многообразия евклидова пространства

Исходя из вида метрики грассманова многообразия евклидова пространства R_{l+p} , метрический тензор записывается следующим образом [2]

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = ((E_p + ZZ^t)^{-1})_\mu^\nu ((E_l + Z^t Z)^{-1})_i^j. \quad (5)$$

Для получения дважды контравариантного метрического тензора $g^{(\mu i)(\nu j)}$ запишем разложение компонент метрического тензора $g_{(\mu i)(\nu j)}$ в ряд по переменным ξ_i^μ в окрестности нуля. С точностью до бесконечно малых второго порядка он может быть записан в виде

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = (E_p - ZZ^t)_\mu^\nu (E_l - Z^t Z)_i^j,$$

или в координатах

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = (\delta_\mu^\nu - \xi_s^\mu \xi_s^\nu)(\delta_i^j - \xi_i^\alpha \xi_\alpha^j) = \delta_\mu^\nu \delta_i^j - \delta_\mu^\nu \xi_i^\alpha \xi_\alpha^j - \delta_i^j \xi_s^\mu \xi_s^\nu + O(\xi^4), \quad (6)$$

где α, s - индексы суммирования.

Обозначим $\delta_\mu^\nu \xi_i^\alpha \xi_\alpha^j + \delta_i^j \xi_s^\mu \xi_s^\nu = f$. Компоненты тензора $g^{(\mu i)(\nu j)}$ будем искать в виде $g^{(\mu i)(\nu j)} = \delta_\mu^\nu \delta_i^j + F + O(\xi^4)$ требуя, чтобы $g_{(\mu i)(\alpha k)} g^{(\alpha k)(\nu j)} = \delta_\mu^\nu \delta_i^j$. Тогда легко получить, что $F = -f$. Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$g^{(\mu i)(\nu j)} = \delta_\mu^\nu \delta_i^j + \delta_\mu^\nu \xi_i^\alpha \xi_\alpha^j + \delta_i^j \xi_s^\mu \xi_s^\nu + O(\xi^4). \quad (7)$$

В римановом пространстве символы Кристоффеля I и II рода являются инвариантами внутренней геометрии. Для нахождения символов Кристоффеля I рода в локальных координатах воспользуемся формулой

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j),(\beta l)} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial g_{(\mu i)(\nu j)}}{\partial \xi_l^\beta} + \frac{\partial g_{(\nu j)(\beta l)}}{\partial \xi_i^\mu} + \frac{\partial g_{(\beta l)(\mu i)}}{\partial \xi_j^\nu} \right). \quad (8)$$

После дифференцирования, замены индексов и приведения подобных слагаемых получим

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j),(\beta l)} = -\delta_\nu^\beta \delta_i^l \xi_j^\mu - \delta_\mu^\beta \delta_j^l \xi_i^\nu.$$

Для нахождения символов Кристоффеля II рода будем использовать разложение метрического тензора в ряд по степеням ξ_i^μ в окрестности нуля с точностью до бесконечно малых четвертого порядка. Тогда в соответствии с формулой

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j)}^{(\rho k)} = \Gamma_{(\mu i)(\nu j),(\beta l)} g^{(\beta l)(\rho k)}$$

получим

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j)}^{(\rho k)} = -2\delta_\mu^\rho \delta_i^k \xi_j^\gamma (\delta_\gamma^\mu - \xi_s^\mu \xi_s^\gamma) + O(\xi^4).$$

Геодезической линией в римановом пространстве называется кривая этого пространства, касательный вектор которой переносится вдоль нее параллельно. Следовательно, уравнения геодезических линий можно получить из уравнений параллельного переноса в виде

$$\ddot{\xi}_k^\rho + \Gamma_{(\mu i)(\nu j)}^{(\rho k)} \dot{\xi}_i^\mu \dot{\xi}_j^\nu = 0. \quad (9)$$

Подставляя в это уравнение выражение для символов Кристоффеля II рода, запишем уравнения геодезических в локальных координатах $Z = \{\xi_i^\mu\}$

$$\ddot{Z} - 2\dot{Z}Z^t(E + ZZ^t)^{-1}\dot{Z} = 0.$$

2.2 Случай грассманова многообразия псевдоевклидова пространства

Для получения символов Кристоффеля и уравнения геодезических линий для грассманова многообразия псевдоевклидова пространства поступим таким же образом.

Из формулы (3) метрический тензор подмногообразия псевдоевклидовых плоскостей грассманова многообразия пространства ${}^1R_{l+p}$ можно записать в виде

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = ((E + ZE'Z^t)^{-1})_\mu^\nu ((E' + Z^tZ)^{-1})_i^j.$$

Обращение матрицы $(E + ZE'Z^t)$ дает $E - ZE'Z^t + O(Z^4)$. Для второй матрицы можно записать $(E' + Z^tZ)^{-1} = (E'(E + E'Z^tZ))^{-1} = E' - E'Z^tZE' + O(Z^4)$. В локальных координатах, с точностью до бесконечно малых третьего порядка, получим

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = \delta_\mu^\nu \varepsilon_i \delta_i^j - \delta_\mu^\nu \varepsilon_i \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha \varepsilon_j - \varepsilon_i \delta_i^j \xi_s^\mu \varepsilon_s \xi_s^\nu + O(\xi^4).$$

Аналогично, для подмногообразия евклидовых плоскостей этого пространства

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = ((E' + ZZ^t)^{-1})_\mu^\nu ((E + Z^tE'Z)^{-1})_i^j,$$

или, в координатном виде

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = \delta_\mu^\nu \varepsilon_\mu \delta_i^j - \delta_\mu^\nu \varepsilon_\mu \xi_i^\alpha \varepsilon_i \xi_j^\alpha - \delta_i^j \varepsilon_\mu \xi_s^\mu \varepsilon_s \xi_s^\nu + O(\xi^4).$$

Для нахождения символов Кристоффеля I рода воспользуемся формулой (8). В результате получим, что для псевдоевклидовых плоскостей

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j),(\beta l)} = -\varepsilon_l \varepsilon_j \delta_i^l \delta_\nu^\beta \xi_j^\mu - \varepsilon_l \varepsilon_i \delta_j^l \delta_\mu^\beta \xi_i^\nu + O(\xi^3),$$

а для евклидовых плоскостей

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j),(\beta l)} = -\varepsilon_\beta \varepsilon_\mu \delta_i^l \delta_\nu^\beta \xi_j^\mu - \varepsilon_\beta \varepsilon_\nu \delta_j^l \delta_\mu^\beta \xi_i^\nu + O(\xi^3).$$

Для нахождения символов Кристоффеля II рода будем использовать разложение метрического тензора в ряд по степеням ξ_i^μ в окрестности нуля с точностью до бесконечно малых четвертого порядка. Символы Кристоффеля II рода для помногообразий псевдоевклидовых и евклидовых плоскостей имеют, соответственно, вид

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j)}^{(\rho k)} = -2\varepsilon_j \delta_\nu^\rho \delta_i^k \xi_j^\gamma (\delta_\gamma^\mu - \varepsilon_l \xi_s^\mu \varepsilon_s \xi_s^\gamma)$$

и

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j)}^{(\rho k)} = -2\delta_\nu^\rho \delta_i^k \xi_j^\gamma (\varepsilon_\mu \delta_\gamma^\mu - \varepsilon_\mu \varepsilon_\gamma \xi_s^\mu \xi_s^\gamma).$$

Уравнения (9) геодезических семейств псевдоевклидовых плоскостей в локальных координатах $Z = \{\xi_j^\mu\}$ будут иметь вид

$$\ddot{Z} - 2\dot{Z}E'Z^t(E + ZE'Z^t)^{-1}\dot{Z} = 0, \quad (10)$$

а для геодезических семейств евклидовых плоскостей эти уравнения запишутся в виде

$$\ddot{Z} - 2\dot{Z}Z^t(E' + ZZ^t)^{-1}\dot{Z} = 0. \quad (11)$$

Для построения примера геодезических семейств в грассмановом многообразии псевдоевклидова пространства введем понятие стационарных углов пары l -плоскостей.

3. Стационарные углы пары l -плоскостей и l -геликоиды псевдоевклидова пространства

В евклидовом пространстве взаимное расположение пары l -плоскостей π и τ однозначно задается набором углов $\varphi_i, i = 1, \dots, l$ со значениями из $[0, \pi/2]$. Эти углы определяются как стационарные значения углов между произвольными векторами $\bar{a} \in \pi$ и $\bar{b} \in \tau$ [8].

Мы не можем оставить без изменения это определение в случае пространства ${}^1R_{l+p}$, поскольку в этом пространстве векторы неравноправны и значения углов между ними не всегда можно сравнить между собой.

Пусть π и τ - две l -плоскости грассманова многообразия пространства ${}^1R_{l+p}$. Рассмотрим двумерную плоскость, проходящую через начало координат и перпендикулярную каждой из плоскостей π и τ . Угол между прямыми пересечения этой двумерной плоскости с плоскостями π и τ будем называть стационарным углом плоскостей π и τ , а саму двумерную плоскость - угловой 2-плоскостью.

Покажем, что всегда существует l угловых 2-плоскостей, часть из которых могут вырождаться в 1-плоскости, а также, что любые две угловые 2-плоскости вполне ортогональны.

Будем пользоваться понятием матричной координаты l -плоскости. Так называют $(l+p) \times l$ -матрицу, столбцами которой являются координаты направляющих векторов этой плоскости [6]. Удобно записывать ее в виде строки направляющих векторов l -плоскости.

Пусть $A = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_l)$ и $B = (\bar{b}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_l)$ - матричные координаты плоскостей π и τ соответственно. Произвольная двумерная плоскость, пересекающая данные, имеет матричную координату $C = (\bar{c}_1 \bar{c}_2)$, где $\bar{c}_1 = A\Lambda$, $\bar{c}_2 = BM$, $\Lambda^t = (\lambda_1 \dots \lambda_l)$, $M^t = (\mu_1 \dots \mu_l)$. Будем искать ту двумерную плоскость, которая перпендикулярна каждой из плоскостей π и τ . В такой плоскости существуют векторы $\bar{d}_1 = \alpha_1 \bar{c}_1 + \alpha_2 \bar{c}_2$, $\bar{d}_2 = \beta_1 \bar{c}_1 + \beta_2 \bar{c}_2$ такие, что

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 E' \bar{a}_i &= 0, \\ \bar{d}_2 E' \bar{b}_i &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$i = 1, \dots, l$.

Систему (12) можно записать в матричном виде

$$(\alpha_1 A\Lambda + \alpha_2 BM)^t A = 0,$$

$$(\beta_1 A\Lambda + \beta_2 BM)^t B = 0,$$

или,

$$\alpha_1 (A^t A)\Lambda + \alpha_2 (B^t A)M = 0,$$

$$\beta_1 (A^t B)\Lambda + \beta_2 (B^t B)M = 0$$

и рассматривать как систему уравнений относительно Λ и M . Нас интересуют ненулевые решения этой системы, поэтому

$$\begin{vmatrix} \alpha_1(A^t A) & \alpha_2(B^t A) \\ \beta_1(A^t B) & \beta_2(B^t B) \end{vmatrix} = 0.$$

Мы можем упростить последнее уравнение, если выберем в данных плоскостях π и τ ортонормированные базисы. Тогда $(A^t A) = E'$, $(B^t B) = E'$ в случае подмногообразия псевдоевклидовых плоскостей, и $(A^t A) = E$, $(B^t B) = E$ в случае подмногообразия евклидовых плоскостей. В первом случае получим

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 E' & \alpha_2(B^t A) \\ \beta_1(A^t B) & \beta_2 E' \end{vmatrix} = 0.$$

Используя [3, с.59], можем привести это уравнение к виду

$$\left| E'(A^t B)E'(B^t A) - \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1} E \right| = 0.$$

Величины $\frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1}$ есть собственные значения матрицы $E'(A^t B)E'(B^t A)$. Так как эта матрица совпадает с матрицей из работы [6] Б.А. Розенфельда, то последнее уравнение имеет ровно l действительных корней, по каждому из которых можно определить векторы \bar{d}_1 и \bar{d}_2 , причем разным собственным значениям соответствуют вполне ортогональные угловые 2-плоскости. Угол между векторами \bar{d}_1 и \bar{d}_2 равен стационарному углу данных l -плоскостей.

Пусть l -плоскости π и τ пространства ${}^1R_{l+p}$ не имеют общих направлений. Это возможно только если $l \leq p$. Так как угловые 2-плоскости вполне ортогональны, то при $l = p$ одна из угловых 2-плоскостей обязательно будет псевдоевклидовой, остальные $l - 1$ угловых 2-плоскостей - евклидовы. В ортонормированных базисах $\{\bar{a}_i\}$ в плоскости π и $\{\bar{b}_i\}$, $i = 1, \dots, l$ в плоскости τ стационарные углы этих l -плоскостей определяются из равенств

$$\bar{a}_1 E' \bar{b}_1 = ch \varphi_1, \bar{a}_i E' \bar{b}_i = \cos \varphi_i, i = 2, \dots, l. \quad (13)$$

Если же $l < p$, то либо имеет место описанный выше случай, либо все угловые 2-плоскости евклидовы и тогда для стационарных углов получим

$$\bar{a}_i E' \bar{b}_i = \cos \varphi_i, i = 1, \dots, l. \quad (14)$$

Пусть теперь направляющие подпространства l -плоскостей π и τ имеют k общих направлений.

Если эти плоскости псевдоевклидовы и среди их общих векторов нет псевдоевклидова вектора, то k стационарных углов равны 0, а остальные $l - k$ находятся из равенств (13), в которых $i = 2, \dots, l - k$. Если же псевдоевклидов вектор l -плоскостей π и τ находится среди k общих векторов их направляющих подпространств, то все $l - k$ ненулевые стационарные углы реализуются в евклидовых 2-плоскостях и поэтому находятся из равенств (14), в которых $i = 1, \dots, l - k$.

Если же плоскости π и τ евклидовы и имеют k общих направлений (они могут быть только евклидовыми), то при $l \leq p$ среди стационарных углов k углов равны нулю, а для остальных $l - k$ углов возможны два случая: либо одна из угловых 2-плоскостей является псевдоевклидовой, а остальные евклидовы, либо все угловые 2-плоскости евклидовы. Если же $l > p$, то $l - k$ ненулевых стационарных углов находятся из формул (13), в которых $i = 2, \dots, l - k$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство l -плоскостей грассманова многообразия псевдоевклидова пространства ${}^1R_{l+p}$, обладающее таким свойством: стационарные углы между произвольной l -плоскостью семейства и фиксированной l -плоскостью пропорциональны. Такие семейства называются l -геликоидами [6].

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что l -геликоиды в многообразии $G(l, l + p)$ являются геодезическими линиями. Для этого выберем ортонормированный базис аналогично описанию в работе [1, с.300]. Пусть r ($r \leq l$) стационарных углов не равны нулю. В каждой из r угловых 2-плоскостей выберем вектор, лежащий в фиксированной плоскости семейства, и ортогональный ему вектор. Так как угловые 2-плоскости вполне ортогональны, то получим набор из $2r$ попарно ортогональных векторов. Дополним, в случае необходимости, этот набор до ортогонального базиса всего пространства и нормируем векторы этого базиса. Тогда направляющие векторы произвольной плоскости семейства псевдоевклидовых плоскостей имеют вид

$$\bar{x}_1 = \operatorname{ch}(\varphi_1 t) \bar{e}_1 + \operatorname{sh}(\varphi_1 t) \bar{e}_{1+l},$$

$$\bar{x}_\alpha = \cos(\varphi_\alpha t) \bar{e}_\alpha + \sin(\varphi_\alpha t) \bar{e}_{\alpha+l}, \alpha = 2, \dots, r,$$

$$\bar{x}_\mu = \bar{e}_\mu, \mu = r + 1, \dots, l, t \in [0, 1].$$

В выбранном базисе матричная координата произвольной плоскости семейства имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\varphi_1 t) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_2 t) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \cos(\varphi_r t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \operatorname{sh}(\varphi_1 t) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sin(\varphi_2 t) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sin(\varphi_r t) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

а матрица локальных координат

$$Z = \begin{pmatrix} th(\varphi_1 t) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & tg(\varphi_2 t) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & tg(\varphi_r t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Нетрудно убедиться в том, что Z удовлетворяет уравнению (10), то есть l -геликоид является геодезической линией. Для l -геликоида евклидовых плоскостей базис выберем так, что направляющие векторы произвольной l -плоскости будут иметь вид

$$\bar{x}_1 = ch(\varphi_1 t)\bar{e}_{1+l} + sh(\varphi_1 t)\bar{e}_1,$$

$$\bar{x}_\alpha = \cos(\varphi_\alpha t)\bar{e}_{\alpha+l} + \sin(\varphi_\alpha t)\bar{e}_\alpha, \alpha = 2, \dots, r.$$

$$\bar{x}_\mu = \bar{e}_\mu, \mu = r+1, \dots, l, t \in [0, 1].$$

Матрица локальных координат такой плоскости будет удовлетворять уравнению (11).

4. Расстояние между l -плоскостями.

Покажем, что при использовании формулы (3) квадрат расстояния между l -плоскостями равен сумме квадратов стационарных углов данных плоскостей. Рассмотрим две достаточно близкие псевдоевклидовы l -плоскости. Пусть стационарные углы между ними равны φ_i . Рассмотрим l -геликоид, содержащий две данные l -плоскости. Как показано выше, матрица локальных координат произвольной плоскости l -геликоида может быть приведена к виду (16). Вычисляя расстояние между этими плоскостями по формуле (3), получим

$$ds^2 = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_l^2)dt^2 \quad (17)$$

или

$$s = \int_0^1 \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_l^2} dt = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_l^2}.$$

Таким образом, мы как и в случае грассманова многообразия евклидова пространства имеем метрику, связанную со стационарными углами.

Для вычисления расстояния между достаточно близкими евклидовыми l -плоскостями воспользуемся формулой (4), которая после интегрирования также приводится к виду (17).

Внешний вид формулы (17) такой же как и в случае евклидова пространства, но их содержания различны. Одна из угловых 2-плоскостей может быть псевдоевклидовой, а значит один из стационарных углов может оказаться мнимым.

Полученные в статье факты внутренней геометрии грассманова многообразия псевдоевклидова пространства можно в дальнейшем использовать для изучения грассманова образа поверхности в этом пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий. – К.: Наукова думка, 2002. – 467с.
2. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // УМН - 1991. - Т.46. Вып.2(278). - С.41-80
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц - М.: Наука, 1967. - 575с.
4. Маазикас И. К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства // Уч. записки Тартуск. ун-та - 1974. - 342. - С.76-82
5. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. - М.: Наука, 1967. - 664с.
6. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. - М.: Наука, 1969. - 547с.
7. Leichtweiss K. Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten // Math. Zeit. - 1961. - №4, - S.334-366.
8. Wong Y. C. Differential geometry of Grassman manifolds // Proc. Math. Acad. Sci. USA. - 1967. - P.589-594

Метод граничных интегральных уравнений в пространственных динамических задачах механики разрушения материалов с межслоевыми трещинами

В. А. Меньшиков

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины
Киев, Украина

Получена система граничных интегральных уравнений для материалов с трещинами на поверхности раздела сред при динамическом нагружении. В случае плоской поверхности раздела и гармонического нагружения представлены соотношения для сингулярных ядер интегральных уравнений. На основе метода граничных элементов рассчитаны параметры механики разрушения для биматериалов с круговыми трещинами в плоскости раздела при нагружении волнами растяжения-сжатия и сдвига.

2000 *Mathematics Subject Classification* 74R10, 74M99, 45E99.

1. Введение. Метод граничных интегральных уравнений в статических задачах механики твердого тела, по-видимому, был впервые использован в работах Rizzo и Cruse [1, 2]. Дальнейшее развитие он получил в работах А.Н. Гузя и его учеников [3, 4] применительно к динамическим задачам механики разрушения для однородных тел. Настоящая статья посвящена вопросам использования метода граничных интегральных уравнений при решении задач механики разрушения составных упругих сред с трещинами в границах их раздела при динамическом нагружении.

2. Постановка задачи. Под разрушением тела понимают исчерпание им несущей способности, которое происходит из-за нескольких факторов, в частности, вследствие накопления повреждений и неконтролируемого роста трещин. Согласно общифункциональному методу механики разрушения [5] локальное разрушение определяется критериями вида

$$f(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0,$$

где f – некая функция, определяемая экспериментально, K_i – коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) нормального отрыва, поперечного и продольного сдвига (первой, второй и третьей моды соответственно).

Для коэффициентов интенсивности напряжений первой, второй и третьей моды при динамическом нагружении общеизвестны выражения

$$K_i = \max_t \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{ij}(r, t), \quad t \in T = [0, \infty), \quad (1)$$

где $\sigma_{ij}(r, t)$ – компоненты напряжения на поверхности сцепления сред у фронта трещины; r – расстояние от фронта трещины до точки, где найдено напряжение; t – время.

Соотношения (1) могут быть использованы для трещин в композитах на границе раздела сред при условии, что r находится вблизи фронта в области корректности решения, которая определяется следующим условием из [5]

$$1 \gg \frac{r}{R} \gg e^{-\frac{1}{\beta}}. \quad (2)$$

Здесь R – характерный размер трещины, β – биупругая постоянная материалов

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\gamma^{(1)}}{\mu^{(2)} + \mu^{(1)}\gamma^{(2)}}, \quad \gamma^{(m)} = \frac{\lambda^{(m)} + 3\mu^{(m)}}{\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}}, \quad m = 1, 2.$$

Рассмотрим бесконечное упругое тело в трехмерном пространстве, которое состоит из двух однородных изотропных тел, занимающих подобласти-полупространства $\Omega^{(m)}$ с разными физико-механическими характеристиками $\lambda^{(m)}, \mu^{(m)}, \rho^{(m)}$ ($m = 1, 2$). $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$ – регулярные границы подобластей, характеризующиеся внешними нормальными $\mathbf{n}_{\Gamma^{(1)}}$ и $\mathbf{n}_{\Gamma^{(2)}}$. Положим, что $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$ состоят из бесконечных участков $\Gamma^{*(1)}$ и $\Gamma^{*(2)}$, образующих общий участок границы $\Gamma^* = \Gamma^{*(1)} \cap \Gamma^{*(2)}$, а также конечных участков $\Gamma^{p(1)}$ и $\Gamma^{p(2)}$, объединение которых $\Gamma^p = \Gamma^{p(1)} \cup \Gamma^{p(2)}$ представляет собой трещину. Фронт трещины неподвижен и является замкнутой гладкой кривой на Γ^* .

Пусть составное тело с трещиной на границе раздела сред подвержено динамическому нагружению.

Напряженно-деформированное состояние каждого из тел описывается уравнениями линейной динамической теории упругости в перемещениях в отсутствие объемных сил

$$(\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t) + \mu^{(m)} \Delta \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \rho^{(m)} \partial_t^2 \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega^{(m)}, \quad t \in T,$$

На общем участке границы зададим условия плотного контакта

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{p}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*, \quad t \in T,$$

на поверхностях трещины – усилия

$$\mathbf{p}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{p(1)}, \quad t \in T,$$

$$\mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{(2)}, \quad t \in T,$$

а на бесконечности — условия, которые обеспечивают конечность энергии упругого тела, занимающего неограниченную область.

Начальные условия зададим в виде

$$\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, 0) = \text{grad} \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(m)}.$$

Решение уравнений (3) с вышеприведенными краевыми условиями позволят получить параметры напряженно-деформированного состояния во всей области $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$. Однако это является сложным, дорогостоящим и излишним делом, ибо для вычисления параметров механики разрушения (1) необходимо найти компоненты напряжений лишь на сцепленных поверхностях вблизи фронта трещины. Поэтому перейдем от задачи в трехмерной области к задаче на ее границе.

3. Граничные интегральные уравнения. В каждой из подобластей $\Omega^{(m)}$ перемещения представим через граничные перемещения и поверхностные силы в виде соотношений Соммильяны, ибо в этом случае не возникает вопрос обоснования формулы представления решения [6]

$$u_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) = \int_T \int_{\Gamma^{(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau,$$

$$\mathbf{y} \in \Omega^{(m)}, \quad t \in T, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

аналогичные соотношения имеют место для компонент вектора нагрузки

$$p_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) = \int_T \int_{\Gamma^{(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau,$$

$$\mathbf{y} \in \Omega^{(m)}, \quad t \in T, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5)$$

здесь \mathbf{x} — точка наблюдения, \mathbf{y} — точка нагружения; $U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$, $W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$, $K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$, $F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$ — фундаментальные решения динамической теории упругости.

Учитывая, что $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ — регулярные поверхности и полагая, что существует достаточная гладкость распределений плотностей граничных перемещений и поверхностных сил, в соотношениях (4) и (5) устремим точку пространства \mathbf{y} на $\Gamma^{(m)}$, получим уравнения на границе

$$\frac{1}{2} u_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) = \int_T \int_{\Gamma^{(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau,$$

$$\frac{1}{2} p_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) = \int_T \int_{\Gamma^{(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau,$$

(6)

здесь $\mathbf{y} \in \Gamma^{(m)}$.

В эти равенства входят известные величины, которыми являются поверхностные силы на участках границ $\Gamma^{p(m)}$ и неизвестные: перемещения на участках $\Gamma^{p(m)}$, а также поверхностные силы и перемещения на участках $\Gamma^{*(m)}$. Для нахождения указанных неизвестных построим систему граничных интегральных уравнений на основе (6).

Граничные интегральные уравнения на поверхностях областей $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) &= \int_T \int_{\Gamma^{p(m)}} g_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x} d\tau + \\ &+ \int_T \int_{\Gamma^{*(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x} d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^{p(m)}, \\ \frac{1}{2}p_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) &= \int_T \int_{\Gamma^{p(m)}} g_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x} d\tau + \\ &+ \int_T \int_{\Gamma^{*(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x} d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^{*(m)}, \\ \frac{1}{2}u_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) &= \int_T \int_{\Gamma^{p(m)}} g_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x} d\tau + \\ &+ \int_T \int_{\Gamma^{*(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x} d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^{*(m)}. \end{aligned}$$

Произведем замену переменных в этих уравнениях, используя условия плотного контакта:

$$u_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) = u_i^*(\mathbf{x}, t), \quad p_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) = -p_i^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{*(1)},$$

$$u_i^{(2)}(\mathbf{x}, t) = u_i^*(\mathbf{x}, t), \quad p_i^{(2)}(\mathbf{x}, t) = p_i^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{*(2)}.$$

В области плотного контакта перейдем к интегрированию по поверхности Γ^* такой, что $\mathbf{n}_{\Gamma^*} = \mathbf{n}_{\Gamma^{*(2)}} = -\mathbf{n}_{\Gamma^{*(1)}}$. Тогда после преобразований, описанных в работе [7] получим систему граничных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g_j^{(1)}(\mathbf{y}, t) &= \int_T \int_{\Gamma^{p(1)}} g_i^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x} d\tau = \\ &= - \int_T \int_{\Gamma^{p(1)}} u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x} d\tau - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_T \int_{\Gamma^*} p_i^*(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^*(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^{p(1)}, \\
& \frac{1}{2} g_j^{(2)}(\mathbf{y}, t) - \int_T \int_{\Gamma^{p(2)}} g_i^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau = \\
& = - \int_T \int_{\Gamma^{p(2)}} u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau + \\
& + \int_T \int_{\Gamma^*} p_i^*(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^*(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^{p(2)}, \\
& \int_T \int_{\Gamma^{p(1)}} g_i^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau - \int_T \int_{\Gamma^{p(2)}} g_i^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau = \\
& = \int_T \int_{\Gamma^{p(1)}} u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau - \int_T \int_{\Gamma^{p(2)}} u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau + \\
& + \int_T \int_{\Gamma^*} p_i^*(\mathbf{x}, \tau) \left(K_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right) d\mathbf{x} d\tau - \\
& - \int_T \int_{\Gamma^*} u_i^*(\mathbf{x}, \tau) \left(F_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + F_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right) d\mathbf{x} d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^*, \\
& \int_T \int_{\Gamma^{p(1)}} g_i^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau - \int_T \int_{\Gamma^{p(2)}} g_i^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau = \\
& = \int_T \int_{\Gamma^{p(1)}} u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau - \int_T \int_{\Gamma^{p(2)}} u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) W_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau + \\
& + \int_T \int_{\Gamma^*} p_i^*(\mathbf{x}, \tau) \left(U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right) d\mathbf{x} d\tau - \\
& - \int_T \int_{\Gamma^*} u_i^*(\mathbf{x}, \tau) \left(W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + W_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right) d\mathbf{x} d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^*. \quad (7)
\end{aligned}$$

Из решения этих граничных уравнений находятся неизвестные: $u_i^{(1)}(\mathbf{x}, t)$, $u_i^{(2)}(\mathbf{x}, t)$ — перемещения берегов трещины, $u_i^*(\mathbf{x}, t)$, $p_i^*(\mathbf{x}, t)$ — перемещения и усилия, возникающие на поверхности сцепления разнородных сред.

4. Ядра интегральных уравнений. Аналитического решения системы граничных интегральных уравнений (7) на сегодняшний день не существует.

Но и численное ее решение сопряжено с трудностями из-за больших потребностей ресурсов компьютера. Поэтому, не снижая значимости задачи, введем ограничения на тип поверхности раздела сред и на вид динамического нагружения.

Пусть поверхность раздела сред представляет собой плоскость. Декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ расположим так, чтобы оси Ox_1 и Ox_2 находились в плоскости раздела полупространств.

Положим, что нагрузка, действующая на составное тело с трещиной, является гармонической с круговой частотой $\omega = 2\pi/T$.

Тогда физические параметры задачи представимы в виде:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{\mathbf{p}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\},$$

где $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – комплексные амплитуды.

В этом случае ядра из (7) примут вид: $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$, $W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$, $K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$, $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$; здесь и далее верхние индексы опущены. Получим выражения для указанных ядер.

Известно, что фундаментальное перемещение теории упругости в случае гармонического нагружения может быть представлено в виде [3]

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\psi\delta_{ij} - \chi \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right),$$

где

$$\psi = \frac{\exp(-l_2)}{r} \left(\frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_2} + 1 \right) - \frac{\exp(-l_1)}{r} \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_1} \right),$$

$$\chi = \frac{\exp(-l_2)}{r} \left(\frac{3}{l_2^2} + \frac{3}{l_2} + 1 \right) - \frac{\exp(-l_1)}{r} \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(\frac{3}{l_1^2} + \frac{3}{l_1} + 1 \right),$$

в свою очередь $l_1 = i\omega r/c_1$, $l_2 = i\omega r/c_2$, c_1 и c_2 – скорости продольных и поперечных волн, r – расстояние между точками \mathbf{x} и \mathbf{y} .

Ядра $W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$, $K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$, $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ определяются следующими соотношениями:

$$W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) = \lambda n_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} U_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) +$$

$$+ \mu n_k(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial}{\partial x_k} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + \frac{\partial}{\partial x_i} U_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right],$$

$$K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) = \lambda n_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} U_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) +$$

$$+ \mu n_k(\mathbf{y}) \left[\frac{\partial}{\partial y_k} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + \frac{\partial}{\partial y_i} U_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right],$$

$$F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) = \lambda n_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} W_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) +$$

$$+ \mu n_k(\mathbf{y}) \left[\frac{\partial}{\partial y_k} W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + \frac{\partial}{\partial y_i} W_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right],$$

где $n_i(\mathbf{x})$, $n_i(\mathbf{y})$ – проекции вектора нормали.

Используя представления функций ψ , χ и их производных рядами Тейлора по степеням l_1 , l_2 [8] получаем выражения для ядер системы интегральных уравнений:

$$U_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{1}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)r} \left[(\lambda + 3\mu) + \frac{(\lambda + \mu)(y_i - x_i)^2}{r^2} \right] + \\ + \frac{1}{4\pi\mu r} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)} \left[l_1^n \frac{c_2^2}{c_1^2} + l_2^n(n+1) + \frac{(n-1)(y_i - x_i)^2}{r^2} \left(l_1^n \frac{c_2^2}{c_1^2} - l_2^n \right) \right],$$

$$U_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = U_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{(\lambda + \mu)(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)r^3} + \\ + \frac{(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}{4\pi\mu r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{n!(n+2)} \left(l_1^n \frac{c_2^2}{c_1^2} - l_2^n \right),$$

$$U_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{(\lambda + 3\mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)r} + \frac{1}{4\pi\mu r} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)} \left[l_1^n \frac{c_2^2}{c_1^2} + l_2^n(n+1) \right],$$

$$U_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = U_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = U_{31}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = U_{32}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = 0,$$

$$W_{i3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{\mu(y_i - x_i)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r^3} - \frac{(y_i - x_i)}{4\pi r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{n!(n+2)} \left(l_1^n \frac{2c_2^2}{c_1^2} + l_2^n n \right),$$

$$W_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = -\frac{\mu(y_j - x_j)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r^3} - \frac{(y_j - x_j)}{4\pi\mu r^3} \times \\ \times \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{n!(n+2)} \left[l_1^n(\lambda n + 2\lambda + 2\mu) \frac{c_2^2}{c_1^2} - l_2^n 2\mu \right],$$

$$W_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = W_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = W_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = W_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = W_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = 0,$$

$$K_{i3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = -\frac{\mu(y_i - x_i)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r^3} + \frac{(y_i - x_i)}{4\pi r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{n!(n+2)} \left(l_1^n \frac{2c_2^2}{c_1^2} + l_2^n n \right),$$

$$K_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{\mu(y_j - x_j)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r^3} + \frac{(y_j - x_j)}{4\pi\mu r^3} \times$$

$$\times \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{n!(n+2)} \left[l_1^n(\lambda n + 2\lambda + 2\mu) \frac{c_2^2}{c_1^2} - l_2^n 2\mu \right],$$

$$K_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = K_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = K_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = K_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = K_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = 0,$$

$$F_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{\mu^2}{2\pi(\lambda + 2\mu)r^3} + \frac{3\lambda\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{(y_i - x_i)^2}{r^5} -$$

$$- \frac{\mu}{2\pi r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{n!(n+2)} \left(l_1^n \frac{2c_2^2}{c_1^2} + l_2^n n \right) -$$

$$- \frac{\mu}{4\pi} \frac{(y_i - x_i)^2}{r^5} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)(n-3)}{n!(n+2)} \left[l_1^n \frac{4c_2^2}{c_1^2} + l_2^n(n-2) \right],$$

$$F_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = F_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{3\lambda\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}{r^5} -$$

$$- \frac{\mu}{4\pi} \frac{(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}{r^5} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)(n-3)}{n!(n+2)} \left[l_1^n \frac{4c_2^2}{c_1^2} + l_2^n(n-2) \right],$$

$$F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2\pi(\lambda + 2\mu)r^3} -$$

$$- \frac{1}{4\pi\mu r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{n!(n+2)} \left\{ l_1^n [\lambda(\lambda n + 4\mu)(n+2) + 12\mu^2] \frac{c_2^2}{c_1^2} + l_2^n 4\mu^2(n-1) \right\},$$

$$F_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = F_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = F_{31}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = F_{32}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = 0.$$

Анализ полученных соотношений указывает на присутствие в них особенностей корневого типа: r^{-3} , r^{-2} , r^{-1} . Вследствие чего в системе (7) будут интегралы, которые необходимо понимать в смысле конечной части по Адамару [3, 9]. Подход и соотношения для вычисления таких интегралов представлены в [10].

5. Метод граничных элементов. Принимая во внимание, что действующая на составное тело нагрузка является гармонической, физические параметры задачи, то есть усилия $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ и перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ в системе граничных уравнений заменим их комплексными амплитудами $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, имея в виду что

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}_{Re}(\mathbf{x}) \cos(\omega t) + \mathbf{p}_{Im}(\mathbf{x}) \sin(\omega t),$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{Re}(\mathbf{x}) \cos(\omega t) + \mathbf{u}_{Im}(\mathbf{x}) \sin(\omega t). \quad (8)$$

Выделив в уравнениях (7) действительные и мнимые части, получим систему интегральных уравнений относительно составляющих комплексных амплитуд перемещений и усилий при косинусах и синусах в разложениях (8).

Численное решение преобразованной таким образом системы уравнений (7) будем искать на основе прямого метода граничных элементов. Для этого аппроксимируем поверхности трещины и поверхность сцепления плоскими многоугольниками – граничными элементами:

$$\Gamma^1 = \bigcup_{l=1}^{N^{\Gamma^1}} \Gamma_l, \quad \Gamma^2 = \bigcup_{l=1}^{N^{\Gamma^2}} \Gamma_l, \quad \Gamma^* = \bigcup_{l=1}^{N^{\Gamma^*}} \Gamma_l, \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

где N^{Γ^1} , N^{Γ^2} , N^{Γ^*} – количество граничных элементов на противоположных поверхностях трещины и на поверхности сцепления, соответственно.

Воспользуемся методом коллокаций с постоянной аппроксимацией параметров задачи на каждом граничном элементе. Тогда преобразованную систему уравнений (7) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{Z},$$

здесь \mathbf{B} – вектор заданных нагрузок, \mathbf{Z} – вектор неизвестных действительных и мнимых составляющих комплексных амплитуд перемещений и усилий.

Матрицу \mathbf{A} запишем в блочном виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

в свою очередь

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\Gamma^1}^1 & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_{\Gamma^2}^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{\Gamma^*}^1 & -\mathbf{K}_{\Gamma^*}^1 \\ \mathbf{F}_{\Gamma^*}^2 & \mathbf{K}_{\Gamma^*}^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{\Gamma^1}^1 & \mathbf{F}_{\Gamma^2}^2 \\ \mathbf{W}_{\Gamma^1}^1 & -\mathbf{W}_{\Gamma^2}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\Gamma^*}^{12} & \mathbf{K}_{\Gamma^*}^{12} \\ -\mathbf{W}_{\Gamma^*}^{12} & -\mathbf{U}_{\Gamma^*}^{12} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Элементы матриц (10) представим следующим образом

$$\mathbf{F}_{\Gamma^1}^1 = \begin{bmatrix} -F_{11\text{Re},\Gamma^1}^{11} & F_{11\text{Im},\Gamma^1}^{11} & -F_{21\text{Re},\Gamma^1}^{11} & F_{21\text{Im},\Gamma^1}^{11} & 0 & 0 \\ -F_{11\text{Im},\Gamma^1}^{11} & -F_{11\text{Re},\Gamma^1}^{11} & -F_{21\text{Im},\Gamma^1}^{11} & -F_{21\text{Re},\Gamma^1}^{11} & 0 & 0 \\ -F_{12\text{Re},\Gamma^1}^{11} & F_{12\text{Im},\Gamma^1}^{11} & -F_{22\text{Re},\Gamma^1}^{11} & F_{22\text{Im},\Gamma^1}^{11} & 0 & 0 \\ -F_{12\text{Im},\Gamma^1}^{11} & -F_{12\text{Re},\Gamma^1}^{11} & -F_{22\text{Im},\Gamma^1}^{11} & -F_{22\text{Re},\Gamma^1}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -F_{33\text{Re},\Gamma^1}^{11} & F_{33\text{Im},\Gamma^1}^{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -F_{33\text{Im},\Gamma^1}^{11} & -F_{33\text{Re},\Gamma^1}^{11} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

выражения для $\mathbf{F}_{\Gamma^2}^2$, $\mathbf{F}_{\Gamma^*}^1$, $\mathbf{F}_{\Gamma^*}^2$, $\mathbf{F}_{\Gamma^*}^{12}$, $\mathbf{U}_{\Gamma^*}^{12}$ имеют аналогичную структуру и получаются заменой в (11) индексов и ядер;

$$\mathbf{W}_{\Gamma^1}^1 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & W_{31}^1_{\text{Re},\Gamma^1} & -W_{31}^1_{\text{Im},\Gamma^1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{31}^1_{\text{Im},\Gamma^1} & W_{31}^1_{\text{Re},\Gamma^1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{32}^1_{\text{Re},\Gamma^1} & -W_{32}^1_{\text{Im},\Gamma^1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{32}^1_{\text{Im},\Gamma^1} & W_{32}^1_{\text{Re},\Gamma^1} \\ W_{13}^1_{\text{Re},\Gamma^1} & -W_{13}^1_{\text{Im},\Gamma^1} & W_{23}^1_{\text{Re},\Gamma^1} & -W_{23}^1_{\text{Im},\Gamma^1} & 0 & 0 \\ W_{13}^1_{\text{Im},\Gamma^1} & W_{13}^1_{\text{Re},\Gamma^1} & W_{23}^1_{\text{Im},\Gamma^1} & W_{23}^1_{\text{Re},\Gamma^1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

выражения для $W_{\Gamma^2}^2$, $K_{\Gamma^*}^1$, $K_{\Gamma^*}^2$, $W_{\Gamma^*}^{12}$, $K_{\Gamma^*}^{12}$ имеют ту же структуру, что и (12), они получаются соответствующими заменами.

Анализ вида матрицы (9) с учетом (10) – (12) показывает, что она не содержит нулевых членов на главной диагонали, и, следовательно, система линейных алгебраических уравнений может быть решена прямым или итерационным методами.

6. Примеры расчетов. Расчетные исследования коэффициентов интенсивности напряжений выполнены для круговой трещины с радиусом $R = 1$ в плоскости соединения следующих пар материалов: сталь-алюминий и бор-эпоксидная смола. Нагрузка, действующая на составное тело, подчинялась законам гармонических волн растяжения-сжатия и сдвига, которые распространялись перпендикулярно к плоскости сцепления сред. Интенсивность нагрузки менялась за счет увеличения (уменьшения) круговой частоты так, что приведенное волновое число $k_2 R = \omega/c_2 R$ изменялось в интервале $[0, 3]$ (здесь c_2 – скорость поперечных волн в алюминии).

Верхняя и нижняя поверхности берегов трещины, поверхность сцепления материалов аппроксимированы плоскими граничными элементами, которые сгущались при приближении к фронту трещины. Размер элементов в направлении радиуса окружности, примыкающих непосредственно к фронту трещины с двух сторон, составлял $r/R = 0,002$. В пределах граничного элемента параметры задачи полагались неизменными.

Выбранные пары материалов характерны тем, что их биупругие постоянные ($\beta = 0,0305$ для пары сталь-алюминий, $\beta = 0,0682$ для пары бор-эпоксидная смола) находятся в интервале от 0,03 до 0,07, что вместе с $r/R = 0,002$ обеспечивает условие корректности решения (2).

Характеристики используемых в расчетах материалов были следующими: алюминий – $E = 70,3$ ГПа, $\nu = 0,347$, $\rho = 2700$ кг/м³; бор – $E = 385$ ГПа, $\nu = 0,21$, $\rho = 2600$ кг/м³; сталь – $E = 207$ ГПа, $\nu = 0,288$, $\rho = 7860$ кг/м³; эпоксидная смола – $E = 4,6$ ГПа, $\nu = 0,36$, $\rho = 1380$ кг/м³.

В результате решения задачи для каждой пары материалов при изменении частоты нагружения в заданном интервале найдены параметры напряженно-деформированного состояния на берегах трещины и на сцепленных поверхностях материалов. Используя найденные компоненты усилий вблизи фронта круговой трещины в биматериалах при изменяющейся частоте нагружения, вычислены по соотношениям (1) величины коэффициентов интенсивности напряжений.

На рис. 1, 2 представлены распределения относительных коэффициентов интенсивности напряжений $\tilde{K}_I = K_I/K_I^{stat}$ и $\tilde{K}_{II} = K_{II}/K_{II}^{stat}$ в зависимости от параметра k_2R для пар: сталь-алюминий, бор-эпоксидная смола при воздействии волны растяжения-сжатия.

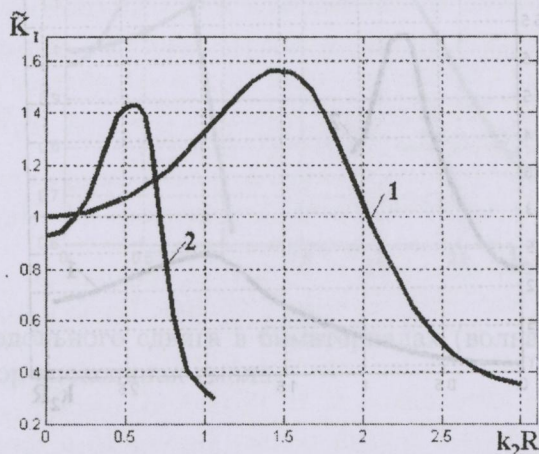


Рис. 1: КИН нормального отрыва в биматериалах (волна растяжения-сжатия): 1 – сталь-алюминий, 2 – бор-эпоксидная смола

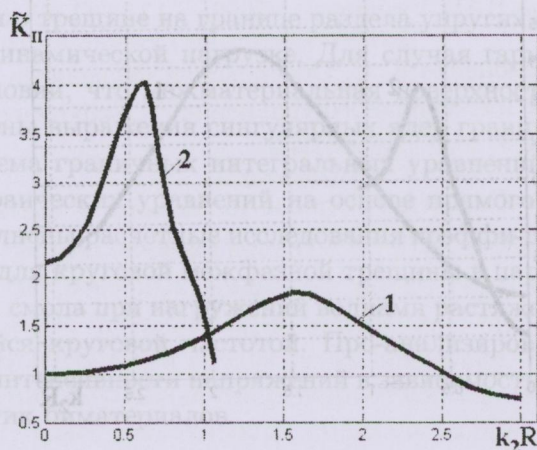


Рис. 2: КИН поперечного сдвига в биматериалах (волна растяжения-сжатия): 1 – сталь-алюминий, 2 – бор-эпоксидная смола

Здесь K_I^{stat} , K_{II}^{stat} – КИН первой и второй моды при статическом нагружении растяжением для пары сталь-алюминий.

На рис. 3 – 5 приведены распределения относительных коэффициентов интенсивности напряжений $\tilde{K}_I = K_I/K_I^{stat}$, $\tilde{K}_{II} = K_{II}/K_{II}^{stat}$ и $\tilde{K}_{III} = K_{III}/K_{III}^{stat}$ в зависимости от параметра k_2R для пар: сталь-алюминий, бор-

эпоксидная смола при действии волны сдвига. K_I^{stat} , K_{II}^{stat} , K_{III}^{stat} – КИН первой, второй и третьей моды при статическом нагружении сдвигом для пары сталь-алюминий.

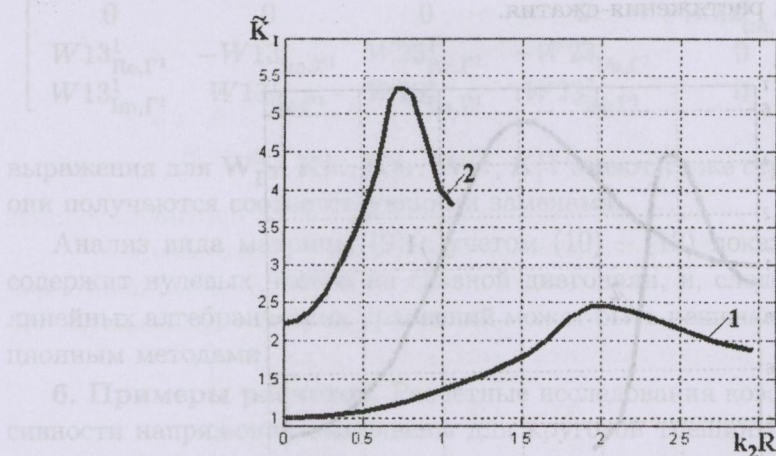


Рис. 3: КИН нормального отрыва в биматериалах (волна сдвига): 1 – сталь-алюминий, 2 – бор-эпоксидная смола

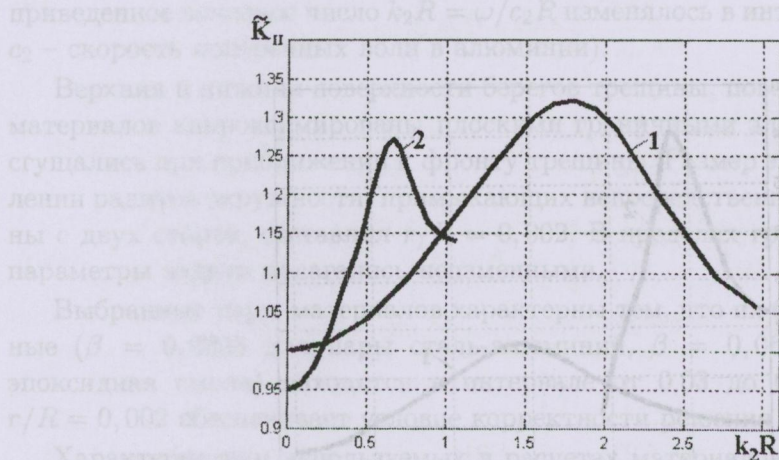


Рис. 4: КИН поперечного сдвига в биматериалах (волна сдвига): 1 – сталь-алюминий, 2 – бор-эпоксидная смола

Из представленных результатов расчетов видно, что положение точек максимумов в распределениях относительных коэффициентов интенсивности напряжений существенно зависят от механических характеристик сред, составляющих биматериал, и при большем параметре β (кривые 2 на рисунках) точки максимумов смещаются в сторону меньших частот нагружения. Динамическое нагружение в случае действия волны растяжения-сжатия в

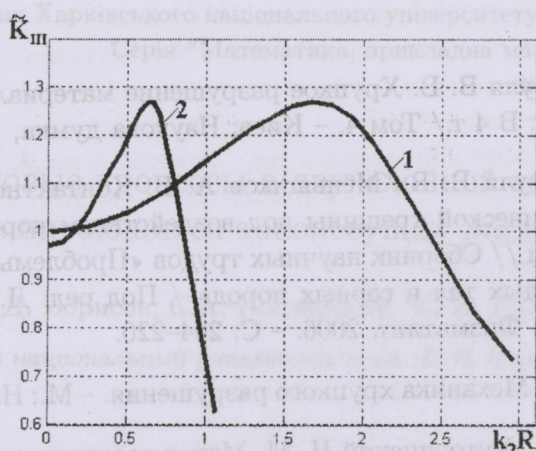


Рис. 5: КИН продольного сдвига в биматериалах (волна сдвига): 1 – сталь-алюминий, 2 – бор-эпоксидная смола

большей степени сказывается на величине КИН второй моды. Кроме того, влияние динамического нагружения на КИН второй моды растет с увеличением параметра β (рис. 1, 2). При действии волны сдвига, отмеченные тенденции присущи КИН первой моды (рис 3–5).

7. Заключение. Итак, получена система граничных интегральных уравнений для задачи о трещине на границе раздела упругих сред в композитном материале при динамической нагрузке. Для случая гармонического нагружения и при условии, что межматериальная поверхность является плоскостью, представлены выражения сингулярных ядер граничных интегральных уравнений. Система граничных интегральных уравнений сведена к системе линейных алгебраических уравнений на основе прямого метода граничных элементов. Выполнены расчетные исследования коэффициентов интенсивности напряжений для круговой межфазной трещины в парах сталь-алюминий и бор-эпоксидная смола при нагружении волнами растяжения-сжатия и сдвига с изменяющейся круговой частотой. Проанализированы распределения коэффициентов интенсивности напряжений в зависимости от частоты нагрузки и характеристик биматериалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rizzo F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics // Quart. Appl. Math. – 1967. – 25, – P. 83–95
2. Cruse T. A. Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis // Computers and Structures. – 1973. – 3, – P. 509–

- 527.
3. Гузь А. Н., Зозуля В. В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках: В 4 т./ Том 4. – Киев: Наукова думка, 1993. – 236 с.
 4. Гузь А. Н., Зозуля В. В., Меньшиков А. В. Контактное взаимодействие берегов эллиптической трещины под воздействием нормальной гармонической нагрузки // Сборник научных трудов «Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород» / Под ред. Д.Д. Ивлева и Н.Ф. Морозова. – М.: Физматлит, 2006. – С. 204–220.
 5. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
 6. Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Казань: Из-во Казан. универ., 1986. – 296 с.
 7. Меньшиков В. А., Меньшиков А. В. Гранично-контактные интегральные уравнения динамической задачи теории упругости о трещине на поверхности раздела полупространств // Доклады НАН Украины. – 2006. – 6. – С. 51–56.
 8. Меньшиков В. А. Сингулярные ядра интегральных уравнений в задаче о трещине на границе раздела полупространств при гармоническом нагружении // Доклады НАН Украины. – 2006. – 11. – С. 58–62.
 9. Гандель Ю. В., Кононенко А. С. Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2006. – 42(9) . – С. 1256–1262.
 10. Меньшиков В. А. Гиперсингулярные интегралы в трехмерных задачах для тел с трещинами // Доклады НАН Украины. – 1995. – 8. – С. 61–64.

Рис. 4: КИН в случае сдвига в биматериалах (волна сдвига): 1 – сталь, алюминий, 2 – эпоксидная смола

Из представленных результатов видно, что положение точек максимума в интегральном уравнении (1) зависит от параметров задачи. В частности, для биматериала (1) при больших параметрах β (кривая 2 на рисунке) точки максимума смещаются вправо. В то же время для биматериала (2) при больших параметрах β (кривая 1 на рисунке) точки максимума смещаются влево. Это объясняется тем, что в биматериалах (1) и (2) при больших параметрах β (кривая 2 на рисунке) точки максимума смещаются вправо, а в биматериалах (2) при больших параметрах β (кривая 1 на рисунке) точки максимума смещаются влево.