ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

О КОНГРУЭНЦИЯХ W

Я. П. Бланк

Харьков

Дарбу [1] принадлежит следующая теорема:
если в каждой точке поверхности переноса построить соприкасающиеся плоскости к кривым переноса, то прямые пересечения этих плоскостей образуют конгруэнцию W. При этом асимптотическим линиям обеих полостей фокальной поверхности конгруэнции соответствуют на поверхности переноса кривые переноса, а сама поверхность переноса служит средней поверхностью конгруэнции.

Бианки [2] называет этот частный тип конгруэнций W, к которым приводит теорема Дарбу, конгруэнцией Дарбу.

Бервальд [3] доказал, что каждая полость фокальной поверхности конгруэнции Дарбу представляет собою аффинно-минимальную поверхность и обратно, каждая аффинно-минимальная поверхность служит фокальной полостью конгруэнции Дарбу.

Цель настоящей заметки — обобщить вышеуказанное построение, приводящее к конгруэнциям Дарбу, для любых конгруэнций W.

1. Назовем линейчатую поверхность, образованную лучами конгруэнции W, касающимися каждой полости фокальной поверхности конгруэнции по асимптотической линии, асимптотической линейчатой.

Теорема 1. Конгруэнция W определяет однопараметрическое семейство поверхностей S_c, на которых асимптотические линейчатые вырезают сети кривых, обладающих свойством, что в каждой точке поверхности S_c соприкасающиеся плоскости к обеим кривым сети пересекаются по лучу этой конгруэнции.

Поверхности S_c определяются уравнениями

$$X = \bar{x} + cx,$$

где x, $\bar{x}$ — фокусы луча конгруэнции W, а c — параметр семейства.

Доказательство. Пусть x (u, v) — поверхность, отнесенная к асимптотическим линиям. Зададим на поверхности $x(u, v)$ однопараметрическое семейство кривых, определяемых дифференциальным уравнением

$$\frac{du}{A(u, v)} = \frac{dv}{B(u, v)}.$$

Касательные к кривым этого семейства образуют конгруэнцию прямых, для которой $x(u, v)$ — одна полость фокальной поверхности. Чтобы эта конгруэнция была конгруэнцией W, необходимо и достаточно, как показал Фубини [4], выполнения условий

$$A_v = -B\gamma, \quad B_u = -A\beta, \tag{1}$$

где β, γ — коэффициенты кубичной формы поверхности $x(u, v)$[1].

Любая точка X на луче конгруэнции определяется уравнением

$$X = \rho x + 2(Ax_u + Bx_v). \tag{2}$$

Покажем, что можно выбрать функцию $\rho(u, v)$ в формулах (2) так, чтобы на поверхностях $X(u, v)$ соприкасающиеся плоскости к координатным линиям пересекались по лучу конгруэнции.

Для этого достаточно потребовать, чтобы имели место уравнения

$$\begin{gathered}(x,\ X,\ X_u,\ X_{uu}) = 0,\\ (x,\ X,\ X_v,\ X_{vv}) = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Но из (2) и из деривационных формул

$$\begin{gathered}x_{uu} = \Theta_u x_u + \beta x_v + px.\\ x_{vv} = \gamma x_u + \Theta_v x_v + qx,\end{gathered} \tag{4}$$

следует

$$\begin{aligned}X_u &= a_1 x + a_2 x_u + 2Bx_{uv},\\ X_v &= b_1 x + b_2 x_v + 2Ax_{uv},\\ X_{uu} &= c_1 x + c_2 x_u + c_3 x_v + c_4 x_{uv},\\ X_{vv} &= \partial_1 x + \partial_2 x_u + \partial_3 x_v + \partial_4 x_{uv},\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}&a_1 = \rho_u + 2Ap, \qquad b_1 = \rho_v + 2Bq,\\ &a_2 = \rho + 2A_u + 2A\Theta_u, \quad b_2 = \rho + 2B_u + 2B\Theta_v,\\ &c_2 = a_1 + \frac{\partial a_2}{\partial u} + a_2\Theta_u + 2B(\Theta_{uv} + \beta\gamma),\\ &\partial_2 = b_1 + \frac{\partial b_2}{\partial v} + b_2\Theta_v + 2A(\Theta_{uv} + \beta\gamma),\\ &c_3 = a_2\beta + 2B(\beta_v + \beta\Theta_v + p),\\ &\partial_3 = b_2\gamma + 2A(\gamma_u + \gamma\Theta_u + q),\\ &c_4 = 2B_u + 2B\Theta_u, \qquad \partial_4 = 2A_v + 2A\Theta_v.\end{aligned} \tag{6}$$

Внеся в уравнения (3) значения X, X_u, X_v, X_{uu}, X_{vv} из уравнений (2), (5) и заметив, что $(x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uv}) \neq 0$, найдем, что

$$\begin{gathered}c_4 a_2 + 2(Ac_3 - Bc_2) = 0,\\ \partial_4 b_2 - 2(A\partial_3 - B\partial_2) = 0.\end{gathered}$$

Эти уравнения в силу (6) и (1) принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}\rho_u = -(A_u + A\Theta_u + B_v + B\Theta_v)_u,\\ \rho_v = -(A_u + A\Theta_u + B_v + B\Theta_v)_v.\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\rho = \mu + c, \tag{7}$$

где

$$\mu = -(A_u + A\Theta_u + B_v + B\Theta_v), \tag{8}$$

а c — произвольная постоянная.

---

[1] Функции A, B определены с точностью до общего множителя. Необходимость условия (1) следует понимать в том смысле, что оно имеет место при соответствующем выборе этого множителя.

Но

$$\bar{x} = \mu x + 2(Ax_u + Bx_v) \tag{9}$$

определяет вторую полость фокальной поверхности конгруэнции W.

Следовательно, искомые поверхности определяются уравнением

$$X = \bar{x} + cx.$$

Обратно, все поверхности S_c этого семейства пересекаются асимптотическими линейчатыми конгруэнции по сетям, обладающим требуемым свойством.

2. *Теорема 2.* Если средняя поверхность конгруэнции W пересекается асимптотическими линейчатыми поверхностями конгруэнции по кривым, соприкасающиеся плоскости которых проходят через лучи конгруэнции, то конгруэнция W представляет собою конгруэнцию Дарбу.

Доказательство. Перейдем к неоднородным координатам, положив четвертую координату фокуса x равной единице, при этом по (9) четвертая координата фокуса $\bar{x}$ оказывается равной μ и в векторной записи уравнение семейства S_c принимает вид

$$R = \frac{\mu \bar{r} + cr}{\mu + c}. \tag{11}$$

Чтобы средняя поверхность конгруэнции принадлежала этому семейству, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\mu = c. \tag{12}$$

Но (4)

$$\mu_{uv} + \mu(\Theta_{uv} + \beta\gamma) = 0,$$

следовательно,

$$\Theta_{uv} + \beta\gamma = 0. \tag{13}$$

Условие (13) выражает равенство нулю аффинной средней кривизны поверхности x, следовательно, фокальные поверхности конгруэнции — аффинноминимальные поверхности.

Так как

$$R = \frac{\bar{r} + r}{2},$$

а по (9)

$$\bar{r} = r + \frac{2}{c}(Ar_u + Br_v),$$

то

$$R = r + \frac{1}{c}(Ar_u + Br_v).$$

Воспользовавшись уравнениями (1), (3), (8), (12) и (13), убеждаемся, что

$$R_{uv} = 0,$$

следовательно,

$$R = U(u) + V(v),$$

— средняя поверхность конгруэнции представляет собою поверхность переноса, а конгруэнция W становится конгруэнцией Дарбу.

3. Пусть ξ, $\bar{\xi}$ — фокальные плоскости конгруэнции W, причем координаты нормированы так, что $(\xi, \bar{\xi}) = (x, \bar{x})$.
Проведем через каждый луч конгруэнции плоскость

$$\Xi = \xi + c\bar{\xi},$$

где c — произвольная постоянная.

Плоскости Ξ огибают однопараметрическое семейство поверхностей Σ_c.

Асимптотическим линиям фокальной поверхности конгруэнции соответствуют на Σ_c сети кривых обладающих следующим свойством.

В каждой точке поверхности Σ_c вершины конусов, описанных около поверхности вдоль обеих кривых сети, лежат на луче конгруэнции.

Это предложение двойственно теореме 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Darboux. Theorie des Surfaces, 3, 372.
2. L. Bianchi. Lezioni di Geometria diff., v. 2, p. 2, 1923, 65.
3. L. Berwald. Math. Zeitschr., 8 (1920), 63—78.
4. Fubini-Cech. Lezioni di Geometria proiettivadifferenziale, I, 250—256.