Записки научно-исследовательского института математики и механики ХГУ и Харьковского математического общества 1950

В. А. МАРЧЕНКО (*Харьков*)

МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ ОБОБЩЁННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

§ 1. Введение

Основная проблема теории почти периодических (п. п.) функций, поставленная и решённая Г. Бором[1], состоит в нахождении структурных свойств функций действительного переменного $f(x)$, которые могут быть сколь угодно точно и равномерно на всей действительной оси аппроксимированы обобщёнными тригонометрическими полиномами $S(x)$ вида

$$S(x)=\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x}, \quad -\infty < x < \infty$$

(здесь a_n — произвольные комплексные, а λ_n — произвольные действительные числа). Тригонометрические полиномы такого вида в дальнейшем мы будем называть просто **полиномами**.

Если функция $f(x)$, чисто периодическая, то решение этой проблемы немедленно вытекает из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной периодической функции тригонометрическими полиномами. Для доказательства теоремы Вейерштрасса может быть использован аппарат рядов Фурье периодических функций, который даёт, кроме того, различные регулярные процессы для построения аппроксимирующих полиномов.

Г. Бор[1] построил для введённых им п. п. функций аппарат обобщённых рядов Фурье и с его помощью решил поставленную проблему, доказав основную теорему об аппроксимации п. п. функций тригонометрическими полиномами.

Впоследствии Бохнер (см.[1], стр. 100—104) нашёл метод суммирования рядов Фурье п. п. функций, аналогичный методу Фейера в теории обычных рядов Фурье.

Таким образом в этой теории аналогом равномерно непрерывной периодической функции, её ряда Фурье, метода Фейера для суммирования этого ряда являются, соответственно, п. п. функция, её обобщенный ряд Фурье и метод суммирования этого ряда, предложенный Бохнером.

Дальнейшее развитие теории п. п. функций, связанное с именами В. Степанова, Вейля и Безиковича[2], основано на замене равномерной сходимости сходимостью в некоторой другой метрике.

Так возникли различные обобщения п. п. функций и их рядов Фурье, причём метод Бохнера и здесь оказался пригодным для суммирования в данной метрике этих рядов.

Пользуясь обобщением понятия среднего значения, предложенным Б. М. Левитаном[3], можно любой функции, для которой

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|\,dx<\infty,$$

сопоставить обобщённый ряд Фурье. Левитан показал далее, что эти ряды Фурье можно суммировать методом Вейля для класса функций (которые Левитан назвал N-п. п. функциями), более широкого, чем класс п. п. функций Г. Бора, причём суммы в этом случае будут сходиться к представляемой функции равномерно в каждом конечном интервале.

В теории обычных рядов Фурье значительное место занимают локальные теоремы о сходимости и суммируемости их в данной точке, которые зависят от поведения представляемой функции в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Целью настоящей работы является аналогичное исследование суммируемости обобщённых рядов Фурье в данной точке.

Естественно, что для решения этого вопроса оказалось целесообразным ввести с помощью некоторой системы окрестностей топологию на действительной оси, понятие точек непрерывности, непрерывной и равномерно непрерывной функции в этой топологии, наконец, обобщение точек Лебега. Топология вводится таким образом, что класс равномерно непрерывных функций в этой топологии совпадает с классом п. п. функций Г. Бора, а класс непрерывных функций — с классом N-п. п. функций Левитана.

Известно, что функции этих классов однозначно определяются своими рядами Фурье. В настоящей работе будет доказано, что в общем случае ряд Фурье однозначно определяет функцию во всех обобщённых точках Лебега, в частности, во всех точках непрерывности.

Более того, если функция ограничена, то её ряд Фурье можно суммировать методом Фейера-Бохнера во всех её точках непрерывности. Отсюда следует, что методом Фейера-Бохнера можно, в частности, суммировать ряд Фурье ограниченной N-п. п. функции равномерно в каждом конечном интервале к значению самой функции.

Если же функция не ограничена, то её ряд Фурье удаётся просуммировать к значению функции в точках непрерывности методом, аналогичным методу Валле-Пуссена в теории обычных рядов Фурье.

Эти теоремы о суммируемости составляют основной результат предлагаемой работы.

§ 2. Система окрестностей

В этом разделе мы введём на оси действительных чисел топологию с помощью системы окрестностей так, чтобы действительная ось обратилась в непрерывную группу, которую мы обозначим через Ω, обладающую тем свойством, что равномерно непрерывными функциями на Ω являются п. п. функции Г. Бора, и только они одни.

Обозначим множество решений неравенства $|\lambda x| < \delta \pmod{2\pi}$ через $E(\delta \mid \lambda)$. Оно состоит из чисел x, удовлетворяющих при некоторых целых k неравенству $2\pi k - \delta < \lambda x < 2\pi k + \delta$. Пересечение $E(\delta \mid \lambda_1) \bigcap E(\delta \mid \lambda_2) \bigcap \ldots \bigcap E(\delta \mid \lambda_n)$ обозначим через $E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Тогда $E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ состоит из чисел x, которые удовлетворяют системе неравенств $|\lambda_i x| < \delta \pmod{2\pi}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пусть Σ — совокупность всевозможных множеств $E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Покажем, что Σ удовлетворяет всем условиям, необходимым и достаточным для того, чтобы Σ можно было принять за полную систему окрестностей нуля аддитивной группы действительных чисел.

а) Пусть $x \neq 0$ — произвольное действительное число; тогда $x \,\bar{\in}\, E\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{\pi}{x}\right)$, так как если бы $x \in E\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{\pi}{x}\right)$, то $\left| x \frac{\pi}{x} \right| < \frac{1}{2} \pmod{2\pi}$, т. е. $\pi < \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, что неверно. Отсюда следует, что элемент, общий всем множествам из Σ, есть только нуль.

б) $E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \bigcap E(\delta' \mid \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n'}) \supset E(\delta_1 \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n'})$, где $\delta_1 = \min(\delta, \delta')$, т. е. пересечение двух множеств из Σ содержит третье множество из Σ.

в) Если A и B — два множества чисел, то под их арифметической суммой (разностью) понимают множество $C = A + B$ $(D = A - B)$ действительных чисел γ, представимых в виде $\gamma = \alpha + \beta$ $(\gamma = \alpha - \beta)$, где $\alpha \in A$ и $\beta \in B$.

Пусть $x \in E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ и $y \in E(\delta' \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$; тогда существуют такие целые числа k_i и k'_i, что $2\pi k_i - \delta < x\lambda_i < 2\pi k_i + \delta$; $2\pi k'_i - \delta < y\lambda_i < 2\pi k'_i + \delta$. Отсюда следует, что

$$2\pi(k_i \pm k'_i) - (\delta + \delta') < (x \pm y)\lambda_i < 2\pi(k_i \pm k'_i) + (\delta + \delta'),$$

т. е.

$$E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \pm E(\delta' \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \subset E(\delta + \delta' \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

г) Если $x \in E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, то $\lambda_i x = 2\pi k_i + \theta_i$, где $\max|\theta_i| = \theta < \delta$. Значит, $x \in E(\theta' \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, если $\theta' > \theta$.

Но тогда, если $\varepsilon < \delta - \theta'$, получим

$$E(\varepsilon \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \pm x \subset E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Как известно[4], этих условий достаточно для того, чтобы Σ можно было принять за систему окрестностей нуля.

Полученную с помощью системы Σ топологическую группу обозначим через Ω.

Действительное число τ называется **ε-сдвигом функции** $f(x)$, если имеет место неравенство

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon.$$

Множество всех ε-сдвигов функции $f(x)$ обозначается через $E(\varepsilon, f)$. Из этого определения получаются следующие свойства множеств $E(\varepsilon, f)$:

1) $E(\varepsilon, f) \subset E(\varepsilon', f)$, если $\varepsilon < \varepsilon'$;
2) если $\tau \in E(\varepsilon, f)$, то $-\tau \in E(\varepsilon, f)$ — симметрия множества $E(\varepsilon, f)$;
3) $E(\varepsilon, f) \pm E(\varepsilon', f) \subset E(\varepsilon + \varepsilon', f)$.

Множество ε-сдвигов некоторого полинома $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x}$ при любом $\varepsilon > 0$ обязательно содержит некоторую окрестность из системы Σ. Действительно, если $\tau \in E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$, то $\lambda_n \tau$ можно представить в виде $\lambda_n \tau = 2\pi k_n + \theta_n$, где k_n — целые числа, а $|\theta_n| < \delta$. Далее, имеем

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |S(x + \tau) - S(x)| \leqslant \sup_{-\infty < x < \infty} \sum_{n=1}^{N} |a_n| \cdot |e^{i\lambda_n(x+\tau)} - e^{i\lambda_n x}| = \sum_{n=1}^{N} |a_n| \cdot |e^{i\lambda_n \tau} - 1|.$$

Обозначая $|e^{i\delta} - 1|$ через δ_1, получим

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |S(x + \tau) - S(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |a_n| \cdot |e^{i\theta_n} - 1| \leqslant \delta_1 \sum_{n=1}^{N} |a_n|.$$

Так как $\delta_1 \to 0$ вместе с δ, то отсюда следует, что при достаточно малом δ

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |S(x+\tau) - S(x)| < \varepsilon,$$

т. е.

$$E(\varepsilon, S) \supset E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N).$$

Допустим, что для функции $f(x)$ можно построить такой полином $S(x)$, что

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - S(x)| \leqslant \eta.$$

Тогда, если $\tau \in E(\varepsilon, S)$, то

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x+\tau) - f(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{-\infty<x<\infty} \{|f(x+\tau) - S(x+\tau)| + |f(x) - S(x)| + |S(x+\tau) - S(x)|\} < 2\eta + \varepsilon,$$

т. е. $E(2\eta + \varepsilon, f) \supset E(\varepsilon, S)$, и, так как множество ε-сдвигов полинома $S(x)$ при любом $\varepsilon > 0$ содержит некоторую окрестность из системы Σ, отсюда следует

Лемма 1. *Если для функции $f(x)$ найдётся такой полином $S(x)$, что*

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - S(x)| \leqslant \eta,$$

то при любом $\varepsilon > 0$ множество $E(2\eta + \varepsilon, f)$ содержит некоторую окрестность из системы Σ.

Используя метод Н. Н. Боголюбова [5] доказательства основной теоремы п. п. функций, мы сейчас покажем, как можно систему Σ заменить другой, эквивалентной ей системой окрестностей, которую можно просто охарактеризовать внутренними свойствами.

Относительно плотным множеством интервалов называется такое множество действительных чисел E, для которого можно указать такие числа l и δ, что любой интервал вещественной оси длины большей, чем l, обязательно содержит интервал длины не меньшей, чем δ, целиком содержащийся в множестве E.

Пусть E — некоторое относительно плотное множество интервалов — кроме того, симметрично, т. е. вместе с τ в множество E входит также $-\tau$.

Обозначим арифметическую сумму $E + E$ через $2E$; вообще пусть $E + E + \ldots + E = nE$, если арифметическое сложение произведено n раз.

В силу симметрии множества E, $2E$ содержит интервал $(-\delta, \delta)$. При дальнейших операциях сложения каждый интервал $(\alpha, \beta) \subset kE$ растянется в интервал $(\alpha - \delta, \beta + \delta)$. Поэтому, если $n > \frac{l}{\delta}$, то nE заполнит всю ось.

Исходя из множества E, построим $\varphi(x)$ следующим образом: $\varphi(x) = 1$, если $x \in E$, и $\varphi(x) = k$, если $x \bar{\in} (k-1)E$, но $x \in kE$. Покажем, что $E(1 + \varepsilon, \varphi) \supset E$.

Действительно, пусть $\tau \in E$ и x — произвольное число. Пусть $\varphi(x) = k$. Это значит, что $x \bar{\in} (k-1)E$; $x \in kE$. Значит, $x + \tau \in (k+1)E$. Если бы $x + \tau \in (k-2)E$, то, так как $-\tau \in E$, отсюда следовало бы, что $x \in (k-1)E$, что неверно. Значит, $\varphi(x+\tau)$ может принимать одно из трёх возможных значений: $k-1$, k, $k+1$. Во всех трёх случаях $|\varphi(x+\tau) - \varphi(x)| \leqslant 1$; так как x произвольно, то отсюда заключаем, что

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |\varphi(x+\tau) - \varphi(x)| \leqslant 1, \text{ т. е. } \tau \in E(1+\varepsilon, \varphi).$$

Итак, для функции $\varphi(x)$ существует относительно плотное множество интервалов E такое, что если $\tau \in E$, то

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |\varphi(x+\tau)-\varphi(x)| < 1.$$

Методом Н. Н. Боголюбова[5] можно показать, что *для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такой полином* $S(x)$, *что*

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |\varphi(x)-S(x)| < 2+\varepsilon.$$

Доказательство мы приводим в приложении.

Согласно лемме 1, отсюда следует, что $E(4+\varepsilon, \varphi)$ содержит некоторую окрестность из Σ. Далее, если $\tau \bar{\in} 6E$, то $|\varphi(\tau)-\varphi(0)| \geqslant 5$, так как тогда $\varphi(\tau) \geqslant 7$, $\varphi(0) \leqslant 2$ по построению. Значит, $6E \supset E(4+\varepsilon, \varphi)$, а так как $E(4+\varepsilon, \varphi)$ в свою очередь содержит некоторую окрестность из $\sum$, то и $6E$ тоже содержит её. Этот результат сформулируем в следующем виде:

Лемма 2. *Если E — симметрическое относительно плотное множество интервалов, то $6E$ обязательно содержит некоторую окрестность из Σ.*

Замечание. Небольшими уточнениями можно множитель 6 заменить на 4. Чисто арифметическое доказательство этого факта содержится в работе Н. Н. Боголюбова[6].

Пусть Σ^* — совокупность всевозможных множеств U, каждое из которых содержит некоторое симметрическое относительно плотное множество интервалов E_U и вместе с ним содержит также и $6E_U$.

Множество $E(\delta|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ содержит $E\left(\frac{\delta}{6}\middle|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$, и согласно свойству в), $E(\delta|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \supset 6E\left(\frac{\delta}{6}\middle|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$. Согласно определению

$$E\left(\frac{\delta}{6}\middle|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) = E\left(\frac{\delta}{6}\middle|\lambda_1\right) \cap E\left(\frac{\delta}{6}\middle|\lambda_2\right) \cap \ldots \cap E\left(\frac{\delta}{6}\middle|\lambda_n\right).$$

Так как $E\left(\frac{\delta}{6}\middle|\lambda_j\right)$ есть множество ε-сдвигов функции $e^{i\lambda_j x}$, где $\varepsilon = |e^{i\frac{\delta}{6}} - 1|$, то по теореме Г. Бора (см.[1], стр. 46) о пересечении множеств ε-смещений п. п. функций отсюда следует, что $E\left(\frac{\delta}{6}\middle|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$ есть относительно плотное множество интервалов. Далее, каждое из множеств $E\left(\frac{\delta}{6}\middle|\lambda_j\right)$ — симметрическое. Значит, $E\left(\frac{\delta}{6}\middle|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$ — тоже симметрическое множество. Окончательно получаем, что каждое множество $E(\delta|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ из системы Σ входит также и в Σ^*, так как оно содержит симметрическое относительно плотное множество интервалов $E\left(\frac{\delta}{6}\middle|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$, а вместе с ним и

$$6E\left(\frac{\delta}{6}\middle|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right).$$

С другой стороны, из леммы 2 следует, что любое множество $U \in \Sigma^*$ содержит некоторое множество из Σ, так как по определению $U \supset 6E_U$. Но тем самым доказана эквивалентность систем Σ и Σ^*. Отсюда получается

Теорема 1. *За систему окрестностей нуля группы Ω можно принять вместо Σ систему Σ^*, эквивалентную ей.*

Пусть $f(x)$ — равномерно непрерывная функция на Ω. Это значит, что для данного $\varepsilon > 0$ найдётся окрестность $U_\varepsilon \in \Sigma^*$, такая, что

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon,$$

если $\tau \in U_\varepsilon$. Иными словами, из равномерной непрерывности $f(x)$ следует, что $E(\varepsilon, f) \supset U_\varepsilon$. Но, согласно определению системы Σ^*, U_ε содержит относительно плотное множество интервалов E_{U_ε}, откуда следует, что $E(\varepsilon, f)$ тоже содержит относительно плотное множество интервалов, т. е. $f(x)$ — п. п. функция Г. Бора. Обратно, если $f(x)$ — п. п. функция Г. Бора, то $E\left(\frac{\varepsilon}{6}, f\right)$ содержит относительно плотное множество интервалов и, согласно свойствам 1), 2), 3) ε-сдвигов, $E(\varepsilon, f) \in \sum^*$ и при $\tau \in E(\varepsilon, f)$

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon,$$

т. е. $f(x)$ — равномерно непрерывная на Ω функция.

Согласно определению Б. М. Левитана (см.[3], стр. 4) непрерывная функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси, называется N-п. п. **функцией**, если выполнены следующие два условия:

1) каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $N > 0$, можно указать относительно плотное множество $E(\varepsilon, f, N)$ действительных чисел τ, таких, что

$$|f(x \pm \tau) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |x| < N;$$

2) $$E(\varepsilon, f, N) + E(\varepsilon', f, N) \subset E(\delta, f, N),$$

причём $\delta = \delta(\varepsilon, \varepsilon')$ стремится к нулю вместе с ε и ε'.

Из этих условий выводится (см.[3], стр. 4), что $E(\varepsilon, f, N)$ есть симметрическое относительно плотное множество интервалов. Из условия 2) следует, что каково бы ни было $\eta > 0$, можно указать такое $\varepsilon(\eta)$, что $\delta(\varepsilon, \varepsilon) < \eta$, если $\varepsilon < \varepsilon(\eta)$. Далее, по $\varepsilon(\eta)$ найдётся $\varepsilon_1(\eta)$ такое, что $\delta(\varepsilon, \varepsilon) < \varepsilon(\eta)$, если $\varepsilon < \varepsilon_1(\eta)$; наконец, по $\varepsilon_1(\eta)$ найдётся $\varepsilon_2(\eta)$ такое, что $\delta(\varepsilon, \varepsilon) < \varepsilon_1(\eta)$, если $\varepsilon < \varepsilon_2(\eta)$. Из условия 1) следует, что $E(\varepsilon_2(\eta), f, N)$ — симметрическое относительно плотное множество интервалов. Согласно условию 2) и выбору $\varepsilon_2(\eta)$ имеем

$$2E(\varepsilon_2(\eta), f, N) \subset E(\varepsilon_1(\eta), f, N).$$

Аналогично

$$2E(\varepsilon_1(\eta), f, N) \subset E(\varepsilon(\eta), f, N),$$

а так как

$$4E(\varepsilon_2(\eta), f, N) \subset 2E(\varepsilon_1(\eta), f, N),$$

то

$$4E(\varepsilon_2(\eta), f, N) \subset E(\varepsilon(\eta), f, N),$$

и, наконец,

$$8E(\varepsilon_2(\eta), f, N) \subset 2E(\varepsilon(\eta), f, N) \subset E(\eta, f, N).$$

Итак, $E(\eta, f, N)$ содержит симметрическое относительно плотное множество интервалов $E(\varepsilon_2(\eta), f, N)$ и вместе с ним содержит также $8E(\varepsilon_2(\eta), f, N)$. Значит, $E(\eta, f, N)$ при любом $\eta > 0$ содержится в Σ^*. Отсюда заключаем, что для данных $\eta > 0$ и $N > 0$ всегда можно найти такое множество $E(\eta, f, N) \in \sum^*$, что если $\tau \in E(\eta, f, N)$ и $|x| < N$, то

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \eta,$$

т. е. $f(x)$ равномерно непрерывна на каждом интервале $(-N, N)$ в топологии группы Ω. Значит, любая N-п. п. функция равномерно непрерывна в каждом конечном интервале относительно топологии группы Ω.

Пусть теперь $f(x)$ — непрерывная в каждой точке относительно топологии Ω функция. Так как каждое множество из Σ содержит некоторый интервал $(-\delta, \delta)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна в каждом конечном интервале $(-N, N)$ в обычном смысле слова.

Отсюда обычным путём можно доказать, что $f(x)$ равномерно непрерывна в каждом интервале $(-N, N)$ также и относительно топологии группы Ω. Далее, рассуждения, вполне аналогичные приведённым выше для п. п. функций Г. Бора, показывают, что для функции $f(x)$ выполнены оба условия 1) и 2), т. е. $f(x)$ есть N-п. п. функция.

Таким образом (в топологии группы Ω) класс равномерно непрерывных функций совпадает с классом п. п. функций Г. Бора, а класс непрерывных функций — с классом N-п. п. функций Б. М. Левитана.

В заключение отметим некоторые свойства системы окрестностей Σ.

1. $E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = E(\delta \mid \lambda_1) \cap E(\delta, \lambda_2) \cap \ldots \cap E(\delta \mid \lambda_n)$.

2. $E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \supset E\left(\frac{\delta}{m} \middle| \frac{\lambda_1}{m}, \frac{\lambda_2}{m}, \ldots, \frac{\lambda_n}{m}\right)$.

3. $E(\delta \mid \lambda) \supset E\left(\frac{\delta}{m} \middle| \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right)$, если $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m$.

4. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ есть базис (не обязательно линейно независимый) чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Тогда для данного $\delta > 0$ найдутся такие числа $\delta' > 0$ и n, что

$$E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \supset E\left(\delta' \middle| \frac{\mu_1}{n}, \frac{\mu_2}{n}, \ldots, \frac{\mu_k}{n}\right).$$

5. Если $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ — некоторое множество линейно независимых чисел, то каковы бы ни были $\delta > 0$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, можно найти такие $\delta' > 0$ и n, что

$$E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \supset E\left(\delta' \middle| \frac{\beta_1}{n}, \frac{\beta_2}{n}, \ldots, \frac{\beta_k}{n}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l\right),$$

причём $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ таковы, что не существует зависимости вида

$$r_1\mu_1 + r_2\mu_2 + \ldots + r_l\mu_l = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_k\beta_k, \tag{*}$$

где r_i и a_i — рациональные дроби и не все r_i равны нулю.

Первые три свойства непосредственно проверяются для неравенств, определяющих окрестности.

Докажем свойство 4. В этом случае λ_i можно записать в виде $\lambda_i = r_1^i\mu_1 + \ldots + r_k^i\mu_k$, и обозначая через a^i общее наименьшее кратное числителей дробей r_j^i, а через a — общее наименьшее кратное чисел a^i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, получим $\frac{\lambda_i}{a} = \frac{\mu_1}{b_1^i} + \ldots + \frac{\mu_k}{b_k^i}$ и согласно свойству 3

$$E\left(\frac{\delta}{a} \middle| \frac{\lambda_i}{a}\right) \supset E\left(\delta'' \middle| \frac{\mu_1}{b_1^i}, \ldots, \frac{\mu_k}{b_k^i}\right).$$

Если n есть общее наименьшее кратное чисел

$$b_j^i \; (i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, k),$$

то

$$E\left(\delta'' \middle| \frac{\mu_j}{b_j^i}\right) \supset E\left(\delta_{ij} \middle| \frac{\mu_j}{n}\right)$$

согласно свойству 2.

Наконец, обозначая через $\delta' = \min\limits_{i,j} (\delta_{ij})$, получим

$$E\left(\delta'' \left| \frac{\mu_i}{b_j^i}\right.\right) \supset E\left(\delta' \left| \frac{\mu_j}{n}\right.\right).$$

Значит,

$$E\left(\frac{\delta}{a} \left| \frac{\lambda_i}{a}\right.\right) \supset E\left(\delta' \left| \frac{\mu_1}{n}, \ldots, \frac{\mu_k}{n}\right.\right),$$

т. е.

$$E\left(\frac{\delta}{a} \left| \frac{\lambda_1}{a}, \frac{\lambda_2}{a}, \ldots, \frac{\lambda_m}{a}\right.\right) \supset E\left(\delta' \left| \frac{\mu_1}{n}, \ldots, \frac{\mu_k}{n}\right.\right),$$

откуда окончательно

$$E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \supset E\left(\delta' \left| \frac{\mu_1}{n}, \ldots, \frac{\mu_k}{n}\right.\right).$$

Остаётся доказать свойство 5. Если уже для $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ не существует соотношения вида (*), то свойство 5 уже имеет место. Если же такое соотношение есть, например:

$$r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \ldots + r_m\lambda_m = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_q\beta_q,$$

и, скажем, $r_1 \neq 0$, то, очевидно, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m, \beta_1, \ldots, \beta_q$—базис для $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, откуда по свойству 4 заключаем, что

$$E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \supset E\left(\delta' \left| \frac{\lambda_2}{n'}, \frac{\lambda_3}{n'}, \ldots, \frac{\lambda_m}{n'}, \frac{\beta_1}{n'}, \ldots, \frac{\beta_q}{n'}\right.\right).$$

Применяя подобное рассуждение к окрестности $E\left(\delta' \left| \frac{\lambda_2}{n'}, \ldots, \frac{\lambda_m}{n'}\right.\right)$, получим

$$E\left(\delta' \left| \frac{\lambda_2}{n'}, \ldots, \frac{\lambda_m}{n'}\right.\right) \supset E\left(\delta'' \left| \frac{\lambda_3}{n''}, \ldots, \frac{\lambda_m}{n''}, \frac{\beta_1}{n''}, \ldots, \frac{\beta_{q'}}{n''}\right.\right)$$

и т. д.

Таким путём мы либо освободимся от всех $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, либо получим включение

$$E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \supset E\left(\delta_0 \left| \frac{\beta_1}{n_0}, \frac{\beta_2}{n_0}, \ldots, \frac{\beta_{q_0}}{n_0}, \frac{\lambda_{j_1}}{n_0}, \ldots, \frac{\lambda_{j_k}}{n_0}\right.\right),$$

причём соотношение вида (*) для λ_{j_i} уже быть не может, так как тогда мы могли бы освободиться ещё от одного λ_j. Обозначая $\frac{\lambda_{j_i}}{n_0}$ через μ_i, получим требуемое включение

$$E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \supset E\left(\delta_0 \left| \frac{\beta_1}{n_0}, \ldots, \frac{\beta_{q_0}}{n_0}, \mu_1, \ldots, \mu_k\right.\right).$$

§ 3. Среднее значение функции

С. Банахом[7] было показано, что любому ограниченному множеству точек прямой можно приписать меру, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $m(0, 1) = 1$, 2) $m(\mathfrak{A} + x) = m(\mathfrak{A})$, 3) $m(\mathscr{E}_1 \dot{+} \mathscr{E}_2) = m(\mathscr{E}_1) + m(\mathscr{E}_2)$ *) $(\mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2 = 0)$.

*) Знак $\dot{+}$ ($\dot{-}$) мы сохраняем для обозначения теоретико-множественной суммы (разности).

В частности, меру можно ввести так, чтобы для измеримых по Лебегу множеств она совпадала с мерой Лебега. Исходя из этого, построим для любых (и неограниченных) множеств точек вещественной оси Ω плотность (её будем обозначать через $|\mathscr{E}|$), удовлетворяющую условиям

1) $|\Omega|=1$, 2) $|\mathscr{E}\dotplus x|=|\mathscr{E}|$, 3) $|\mathscr{E}_1\dotplus\mathscr{E}_2|=|\mathscr{E}_1|+|\mathscr{E}_2|$ $(\mathscr{E}_1\cap\mathscr{E}_2=0)$.

Пусть $\mathscr{E}$—произвольное множество. Строим для него функцию

$$\varphi_{\mathscr{E}}(T)=\frac{m\,[\mathscr{E}\cap(-T,T)]}{2T}.$$

Так как $0\leqslant\varphi_{\mathscr{E}}(T)\leqslant 1$, то для функций $\varphi_{\mathscr{E}}(T)$ можно ввести предел Банаха $\operatorname*{Lim}_{T\to\infty}\varphi_{\mathscr{E}}(T)$, который и принимается в качестве плотности $|\mathscr{E}|$ множества $\mathscr{E}$. В силу свойств предела Банаха для $|\mathscr{E}|$, очевидно, выполнены условия 1) и 3).

Проверим справедливость условия 2):

$$\varphi_{\mathscr{E}+x}(T)=\frac{m\,[(\mathscr{E}+x)\cap(-T,\,T)]}{2T}=\frac{m\,[\mathscr{E}\cap(-T-x,\,T-x)]}{2T},$$

т. е.

$$\varphi_{\mathscr{E}+x}(T)=\varphi_{\mathscr{E}}(T)+\frac{m\,[\mathscr{E}\cap(-T-x,\,-T)]}{2T}-\frac{m\,[\mathscr{E}\cap(T-x,\,T)]}{2T}.$$

Сумма абсолютных величин последних слагаемых не превосходит $\frac{2|x|}{2T}$, откуда вытекает, что $\operatorname*{Lim}_{T\to\infty}\varphi_{\mathscr{E}+x}(T)=\operatorname*{Lim}_{T\to\infty}\varphi_{\mathscr{E}}(T)$, т. е.

$$|\mathscr{E}\dotplus x|=|\mathscr{E}|.$$

Таким образом построена конечно-аддитивная плотность, инвариантная относительно сдвига. При этом, как легко видеть, плотность любой окрестности больше нуля.

Пусть $f(x)$—действительная, ограниченная функция, заданная на множестве $\mathscr{E}$, и $(A,\,B)$—интервал её изменения

$$A\leqslant f(x)<B.$$

Разложив $(A,\,B)$ точками l_i на части

$$A=l_0<l_1<l_2<\ldots<l_{n-1}<l_n=B,$$

составим суммы

$$S=\sum_{i=1}^{n}l_i\,|\mathscr{E}_i|\ \text{ и }\ s=\sum_{i=1}^{n}l_{i-1}\,|\mathscr{E}_i|.$$

Здесь $\mathscr{E}_i$ обозначает множество точек из $\mathscr{E}$, для которых выполнено неравенство

$$l_{i-1}\leqslant f(x)<l_i.$$

В точности следуя Лебегу, можно показать, что S и s стремятся к общему пределу, когда

$$\max\{(l_i-l_{i-1})\},\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

стремится к нулю. Этот предел назовём **средним функции** $f(x)$, взятым по множеству $\mathscr{E}$, и будем его обозначать через $\underset{\mathscr{E}}{M}\,\{f(t)\}$.

Обычным путём распространим определение среднего на неограниченные функции, положив

$$\underset{\mathscr{E}}{M}\{f(t)\}=\lim_{n\to\infty}\underset{\mathscr{E}}{M}\{f_n(t)\}^{*})$$

для неотрицательной функции $f(x)$, если последний предел существует.

Для знакопеременной функции $f(x)$ среднее определяется так:

$$\underset{\mathscr{E}}{M}\{f(t)\}=\underset{\mathscr{E}}{M}\left\{\frac{|f(t)|+f(t)}{2}\right\}-\underset{\mathscr{E}}{M}\left\{\frac{|f(t)|-f(t)}{2}\right\},$$

если оба средних в правой части существуют.

Наконец, для комплексной функции $f(x)=u(x)+iv(x)$ положим

$$\underset{\mathscr{E}}{M}\{f(t)\}=\underset{\mathscr{E}}{M}\{u(t)\}+i\underset{\mathscr{E}}{M}\{v(t)\}.$$

Нижеприведённые свойства среднего доказываются совершенно так же, как аналогичные свойства интеграла.

1. $\underset{\mathscr{E}}{M}\{f(a+t)\}=\underset{\mathscr{E}-a}{M}\{f(t)\}$.

2. $|\underset{\mathscr{E}}{M}\{f(t)\}|\leqslant\underset{\mathscr{E}}{M}\{|f(t)|\}$.

3. $\underset{\mathscr{E}}{M}\{f(t)\}=\sum\limits_{1}^{n}\underset{\mathscr{E}_i}{M}\{f(t)\}$, если $\mathscr{E}=\sum\limits_{1}^{n}\mathscr{E}_i$ и $\mathscr{E}_i\cap\mathscr{E}_j=0$.

4. $\underset{\mathscr{E}}{M}\{\varphi(t)\}=\sum\limits_{1}^{n}\underset{\mathscr{E}}{M}\{f_i(t)\}$, если $\varphi(t)=\sum\limits_{1}^{n}f_i(t)$.

5. $\underset{\mathscr{E}}{M}\{f(t)\}=\mu\,|\mathscr{E}|$ (где $m\leqslant\mu\leqslant M$), если $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

6. Если $f(t)$ имеет по $\mathscr{E}$ среднее, то по данному $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что $\underset{\mathscr{E}'}{M}\{|f(t)|\}<\varepsilon$, если $\mathscr{E}'\subset\mathscr{E}$ и $|\mathscr{E}'|<\delta$.

7. Среднее, очевидно, не является абсолютно аддитивным, но если

$$\mathscr{E}=\sum_{i=1}^{\infty}\mathscr{E}_i,\quad \mathscr{E}_i\cap\mathscr{E}_j=0\quad\text{и}\left|\sum_{n}^{\infty}\mathscr{E}_i\right|\to 0\quad\text{при } n\to\infty,$$

то

$$\underset{\mathscr{E}}{M}\{f(t)\}=\sum_{i=1}^{\infty}\underset{\mathscr{E}_i}{M}\{f(t)\}.$$

8. Пусть $f(t)$—измеримая на любом множестве $\mathscr{E}\cap(-T,T)$ ($\mathscr{E}\cap(-T,T)$ тоже при любом T измеримо в смысле Лебега) и ограниченная на $\mathscr{E}$ функция; $\varphi(x)$—характеристическая функция множества $\mathscr{E}$, тогда

$$\underset{\mathscr{E}}{M}\{f(t)\}=\operatorname*{Lim}_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Действительно,

$$\underset{\mathscr{E}}{M}\{f(t)\}=\underset{\mathscr{E}}{M}\{f(t)\,\varphi(t)\}.$$

---

*) Здесь и везде в дальнейшем через $f_n(x)$ мы обозначаем функцию, равную $f(x)$, если $|f(x)|\leqslant n$, и равную $n\frac{f(x)}{|f(x)|}$, если $|f(x)|>n$.

Разобьём интервал (A, B) изменения функции $f(x)$ на части так, чтобы

$$\max\{(l_i - l_{i-1})\} < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда $|S - s| < \varepsilon$, и если обозначить через S_T и s_T суммы Лебега для $\int\limits_{-T}^{T} f(t)\,\varphi(t)\,dt$, соответствующие тому же разбиению (A, B), то $\left|\int\limits_{-T}^{T} f(t)\,\varphi(t)\,dt - S_T\right| < \varepsilon \cdot 2T$ или

$$\left|\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(t)\,\varphi(t)\,dt - \frac{S_T}{2T}\right| < \varepsilon.$$

Так как $S = \operatorname{Lim}\limits_{T\to\infty} \frac{S_T}{2T}$, то

$$\left|\operatorname{Lim}_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(t)\,\varphi(t)\,dt - S\right| < \varepsilon$$

и

$$\left|\operatorname{Lim}_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(t)\,\varphi(t)\,dt - \underset{\mathscr{E}}{M}\{f(t)\}\right| < 2\varepsilon,$$

откуда ввиду произвольности ε следует

$$\operatorname{Lim}_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(t)\,\varphi(t)\,dt = \underset{\mathscr{E}}{M}\{f(t)\}.$$

Если $f(x)$ удовлетворяет вышеприведённым условиям, но не обязательно ограничена, то имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\operatorname{Lim}_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f_n(t)\,\varphi(t)\,dt\right\} = \underset{\mathscr{E}}{M}\{f(t)\}.$$

9. Пусть дано семейство вложенных множеств $\{\mathscr{E}(\delta)\}$, $\mathscr{E}(\delta') \subset \mathscr{E}(\delta)$, если $\delta' < \delta$, причём $|\mathscr{E}(\delta)|$ непрерывно убывает и стремится к нулю вместе с δ. Пусть, далее, $f(x)$ неотрицательна, а $g(x)$ тоже неотрицательна и такая, что

$$\inf_{x\in\mathscr{E}(\delta)} g(x) \geqslant \sup_{x\overline{\in}\mathscr{E}(\delta)} g(x) \text{ при любом } \delta < \delta_0.$$

Тогда, если ввести обозначение

$$\mu = \sup_{0<\delta<\delta_0} \frac{1}{|\mathscr{E}(\delta)|} \underset{\mathscr{E}(\delta)}{M}\{f(t)\},$$

то имеет место неравенство

$$\underset{\mathscr{E}(\delta_0)}{M}\{f(t)\,g(t)\} \leqslant 4\mu \underset{\mathscr{E}(\delta_0)}{M}\{g(t)\}.$$

Выберем из $\{\mathscr{E}(\delta)\}$, $\delta < \delta_0$, последовательность $\mathscr{E}(\delta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, так, чтобы $|\mathscr{E}(\delta_i)| = 2|\mathscr{E}(\delta_{i+1})|$, что всегда возможно, так как плотность по условию непрерывна относительно δ.

Имеем

$$\mathscr{E}(\delta_0) = \{\mathscr{E}(\delta_0) \dot{-} \mathscr{E}(\delta_1)\} \dot{+} \{\mathscr{E}(\delta_1) \dot{-} \mathscr{E}(\delta_2)\} \dot{+} \ldots \dot{+} \{\mathscr{E}(\delta_i) \dot{-} \mathscr{E}(\delta_{i+1})\} \dot{+} \ldots$$

Так как $|\mathscr{E}(\delta_{i+1})|=\frac{|\mathscr{E}(\delta_0)|}{2^{i+1}}\to 0$, когда $i\to\infty$, то по свойству 7 имеем

$$\underset{\mathscr{E}(\delta_0)}{M}\{f(t)\,g(t)\}=\sum_{i=1}^{\infty}\underset{\mathscr{E}(\delta_{i-1})\dot{-}\mathscr{E}(\delta_i)}{M}\{f(t)\,g(t)\}.$$

Пусть $l_i=\sup\limits_{t\in\mathscr{E}(\delta_i)\dot{-}\mathscr{E}(\delta_{i+1})} g(t)$, тогда

$$\underset{\mathscr{E}(\delta_0)}{M}\{f(t)\,g(t)\}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}l_i\underset{\mathscr{E}(\delta_{i-1})\dot{-}\mathscr{E}(\delta_i)}{M}\{f(t)\}.$$

По свойству функции $g(t)$,

$$l_i\leqslant\inf_{t\in\mathscr{E}(\delta_{i+1})\dot{-}(\mathscr{E}\delta_{i+2})} g(t),$$

и из определения для μ получим

$$\underset{\mathscr{E}(\delta_{i-1})\dot{-}\mathscr{E}(\delta_i)}{M}\{f(t)\}\leqslant\underset{\mathscr{E}(\delta_{i-1})}{M}\{f(t)\}\leqslant\mu\,|\mathscr{E}(\delta_{i-1})|,$$

т. е.

$$\underset{\mathscr{E}(\delta_0)}{M}\{f(t)\,g(t)\}\leqslant\mu\sum_{i=1}^{\infty}l_{i-1}\,|\mathscr{E}(\delta_{i-1})|.$$

Но так как

$$|\mathscr{E}(\delta_{i-1})|=4\,|\mathscr{E}(\delta_i)-\mathscr{E}(\delta_{i+1})|,$$

то

$$\underset{\mathscr{E}(\delta_0)}{M}\{f(t)\,g(t)\}\leqslant 4\mu\sum_{i=1}^{\infty}l_{i-1}\,|\mathscr{E}(\delta_i)-\mathscr{E}(\delta_{i+1})|\leqslant 4\mu\underset{\mathscr{E}(\delta_0)}{M}\{g(t)\}.$$

§ 4. Ряд Фурье

Везде в дальнейшем под $f(x)$ мы будем понимать комплексно-значную функцию, имеющую среднее по всей оси. Для таких функций можно ввести понятие коэффициентов Фурье:

$$a(\lambda)=\underset{\Omega}{M}\{f(t)\,e^{-i\lambda t}\},$$

так как среднее в правой части, очевидно, тоже существует.

Т е о р е м а 2. *Множество показателей Фурье, для которых* $a(\lambda)\neq 0$, *не более чем счётно.*

Для ограниченных функций эта теорема является следствием неравенства Бесселя

$$\underset{\Omega}{M}\{|f(x)|^2\}\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}|a(\lambda_i)|^2,$$

которое получается обычным путём.

Далее, если теорема верна для $u(x)$ и $v(x)$, то она верна и для $u(x)\pm v(x)$ и для $u(x)\pm iv(x)$.

Значит, достаточно доказать теорему для неотрицательной функции $f(x)$.

Из определения среднего следует, что по данному $\varepsilon>0$ можно найти такое n, что

$$\underset{\Omega}{M}\{f(t)-f_n(t)\}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как

$$\underset{\Omega}{M}\{f(t)\,e^{-i\lambda t}\}=\underset{\Omega}{M}\{f_n(t)\,e^{-i\lambda t}\}+\underset{\Omega}{M}\{[f(t)-f_n(t)]\,e^{-i\lambda t}\},$$

то, пользуясь свойством 2 (§ 2), имеем

$$|a(\lambda)|\leqslant\left|\underset{\Omega}{M}\{f_n(t)\,e^{-i\lambda t}\}\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция $f_n(x)$ ограничена, и, значит, существует только конечное число показателей λ, для которых

$$\left|\underset{\Omega}{M}\{f_n(t)\,e^{-i\lambda t}\}\right|>\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, только для конечного числа показателей $|a(\lambda)|>\varepsilon$, и теорема доказана.

Доказанная теорема даёт возможность каждой имеющей среднее по всей оси функции $f(x)$ сопоставить ряд Фурье:

$$f(x)\sim a(0)+a(\lambda_1)\,e^{i\lambda_1 x}+\ldots+a(\lambda_n)\,e^{i\lambda_n x}+\ldots$$

Остановимся теперь на рассмотрении одного, важного для дальнейшего, тригонометрического полинома

$$\sigma_n(x)=\frac{\cos\lambda_1 x+\cos\lambda_2 x+\ldots+\cos\lambda_n x}{n}.$$

1. Если

$$x\in E(\delta\,|\,\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n),$$

то

$$\sigma_n(x)>\cos\delta.$$

Действительно, в этом случае

$$|\lambda_i x|<\delta\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Отсюда следует, что

$$\cos\lambda_i x>\cos\delta\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

т. е.

$$\sigma_n(x)>\cos\delta.$$

2. Если

$$x\,\overline{\in}\,E(\delta\,|\,\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n),$$

то

$$|\sigma_n(x)|<1-\frac{1-|\cos\delta|}{n}.$$

Действительно, в этом случае хотя бы для одного λ_i справедливо неравенство

$$\cos\lambda_i x<|\cos\delta|.$$

Отсюда следует

$$|\sigma_n(x)|<\frac{n-1+|\cos\delta|}{n}=1-\frac{1-|\cos\delta|}{n}.$$

3. Рассмотрим теперь полином $\sigma_n(x)+\alpha$.

Пусть

$$\alpha=\frac{1-|\cos\delta|}{2n},$$

тогда
$$|\sigma_n(x)+\alpha|<1-\frac{1-|\cos\delta|}{n}+\alpha=1-\alpha<1-\frac{\alpha}{2},$$
если
$$x\,\overline{\in}\,E(\delta\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n).$$

Выберем теперь δ' так, чтобы $\cos\delta'>1-\frac{\alpha}{2}$, тогда
$$\sigma_n(x)+\alpha>\cos\delta'+\alpha>1+\frac{\alpha}{2},$$
если
$$x\in E(\delta'\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n).$$

Окончательно: по данному $\delta>0$ можно найти такие $\alpha>0$ и $\delta'>0$, что
$$|\sigma_n(x)+\alpha|<1-\frac{\alpha}{2},\quad \text{если } x\,\overline{\in}\,E(\delta\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n),$$
$$\sigma_n(x)+\alpha>1+\frac{\alpha}{2},\quad \text{если } x\in E(\delta'\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n).$$

Лемма 3. *Пусть коэффициенты Фурье функции $f(x)$, принадлежащие целочисленному модулю, порождённому базисом $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, равны нулю, а в точке x_0 выполнено неравенство*
$$|f(x_0)-f(x_0+t)|\leqslant a,$$
если
$$t\in E(\delta\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n).$$
Тогда
$$|f(x_0)|\leqslant 2a.$$

Очевидно, достаточно доказать неравевство $|f(x_0)|\leqslant a$ для действительных функций, удовлетворяющих условиям леммы, причём всегда можно положить $x_0=0$, не умаляя общности.

По δ выберем α и δ' так, чтобы
$$|\sigma_n(x)+\alpha|<1-\frac{\alpha}{2},\quad \text{если } x\,\overline{\in}\,E(\delta\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n),$$
$$\sigma_n(x)+\alpha>1+\frac{\alpha}{2},\quad \text{если } x\in E(\delta'\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n),$$
где
$$\sigma_n(x)=\frac{\cos\lambda_1x+\cos\lambda_2x+\ldots+\cos\lambda_nx}{n}.$$

Из условия леммы следует
$$\underset{\Omega}{M}\{f(t)[\sigma_n(x)+\alpha]^{2m}\}=0 \tag{*}$$
при любом m.

Если бы
$$f(0)=b>a,$$
то
$$f(t)>b-a=c$$
для $t\in E(\delta\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$.

Но тогда, так как $E(\delta'\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\subset E(\delta\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$,
$$\underset{\Omega}{M}\{f(t)[\sigma_n(t)+\alpha]^{2m}\}>$$
$$>c\underset{E(\delta'\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)}{M}\{[\sigma_n(t)+\alpha]^{2m}\}+\underset{\Omega-E(\delta'\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)}{M}\{f(t)[\sigma_n(t)+\alpha]^{2m}\},$$

т. е.

$$\underset{\Omega}{M}\{f(t)[\sigma_n(t)+\alpha]^{2m}\} > c\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{2m}|E(\delta'|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)| - \underset{\Omega}{M}\{|f(t)|\},$$

и $\underset{\Omega}{M}\{f(t)[\sigma_n(t)+\alpha]^{2m}\}$ стремится к бесконечности вместе с m, что противоречит (*).

Аналогично доказывается противоречивость неравенства $f(0) = b < -a$, откуда следует, что $|f(0)| \leqslant a$.

Непосредственным следствием этой леммы является следующая теорема единственности.

Т е о р е м а 3. *Если все коэффициенты Фурье функции $f(x)$ равны нулю, то в любой точке непрерывности $f(x) = 0$.*

Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ — линейно независимый базис показателей Фурье функции $f(x)$. Обозначим целочисленный модуль с базисом $\frac{\beta_1}{1}; \frac{\beta_1}{2}, \frac{\beta_2}{2}; \frac{\beta_1}{3}, \frac{\beta_2}{3}, \frac{\beta_3}{3}; \ldots; \frac{\beta_1}{k}, \frac{\beta_2}{k}, \ldots, \frac{\beta_k}{k}$ через L_k, а часть ряда Фурье функции $f(x)$ с показателями из L_k через S_k.

Т е о р е м а 4. *Если S_k при любом k есть ряд Фурье п. п. функции Г. Бора $f_k(x)$, то в любой точке непрерывности функции $f(x)$*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

Действительно, пусть x_0 — точка непрерывности. Тогда найдётся такая окрестность, что если $t \in E(\delta|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, то

$$|f(x_0) - f(x_0+t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Но по свойству 5 (§ 2) имеем:

$$E(\delta|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \supset E\left(\delta' \,\middle|\, \frac{\beta_1}{m_0}, \ldots, \frac{\beta_{m_0}}{m_0}, \mu_1, \ldots, \mu_l\right).$$

Так как $f_m(x)$ — п. п. функция Г. Бора, то существует окрестность

$$E(\delta|\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_j'), \quad \lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_j' \in L_m,$$

такая, что если $t \in E(\delta|\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_j')$, то

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f_m(x) - f_m(x+t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Обозначая $\min(\delta, \delta')$ через δ'', имеем, если

$$t \in E\left(\delta'' \,\middle|\, \frac{\beta_1}{m_0}, \ldots, \frac{\beta_{m_0}}{m_0}, \lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_j', \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l\right),$$

то

$$|f(x_0) - f(x_0+t)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ и } |f_m(x) - f_m(x+t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда следует

$$|\{f(x_0) - f_m(x_0)\} - \{f(x_0+t) - f_m(x_0+t)\}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Однако, так как часть ряда Фурье функции $f(x)$ с показателями из целочисленного модуля с базисом

$$\frac{\beta_1}{m_0}, \frac{\beta_2}{m_0}, \ldots, \frac{\beta_{m_0}}{m_0}, \lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_j', \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$$

содержится в S_m, если $m > m_0$, то по лемме 3

$$|f(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon,$$

если $m > m_0$.

Следствие. Допустим, что S_m при любом m имеет конечное число $\nu(m)$ членов и

$$\max(\nu(m+1) - \nu(m)) = M < \infty \quad (m = 1, 2, \ldots, k, \ldots).$$

Тогда члены ряда Фурье функции $f(x)$ можно расположить так, что ряд будет сходиться к $f(x)$ в любой точке непрерывности функции $f(x)$.

Действительно, упорядочим ряд Фурье следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a(\lambda_i) e^{i\lambda_i x} = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots$$

Рассмотрим частную сумму $\sum_{j=1}^{n} a(\lambda_j) e^{i\lambda_j x}$. Пусть m_n таково, что $\nu(m_n) < n < \nu(m_n + 1)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} a(\lambda_j) e^{i\lambda_j x} = S_{m_n} + R_{m_n}^{(n)},$$

где $R_{m_n}^{(n)}$ имеет не более M членов. По теореме 4, $\lim_{n\to\infty} S_{m_n} = f(x)$ в любой точке непрерывности. По теореме 2 для данного $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что при $n \geqslant N$ $|a(\lambda_n)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Значит, $|R_{m_n}^{(n)}| < \varepsilon$, если только $m \geqslant N$, т. е. $\lim_{n\to\infty} R_{m_n}^{(n)} = 0$.

Окончательно имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a(\lambda_j) e^{i\lambda_j x} = \lim_{n\to\infty} S_{m_n} + R_{m_n}^{(n)} = f(x)$$

в любой точке непрерывности функции $f(x)$, что и требовалось доказать.

В частности, ряд Фурье с линейно независимыми показателями, записанный в любом порядке, сходится в точках непрерывности функции $f(x)$.

§ 5. Суммирование рядов Фурье ограниченных функций

Рассмотрим составные ядра Фейера-Бохнера (см. [1], стр. 100—104)

$$K_{n_1 \ldots n_m}^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}(t) = K_{n_1}(\lambda_1 t) \ldots K_{n_m}(\lambda_m t),$$

где

$$K_n(\lambda t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{n\lambda t}{2}}{\sin \frac{\lambda t}{2}} \right)^2,$$

а $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — линейно независимые действительные числа.

Известно, что такие ядра нормированы, т. е.

$$\underset{\mathfrak{g}}{M} \{K_{n_1 \ldots n_m}^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}(t)\} = 1.$$

Обозначим через $\sigma^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}_{n_1 \ldots n_m}(x)$ полином Фейера-Бохнера:

$$s^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_m}(x) = \underset{\Omega}{M}\{f(x+t)\, K^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_m}(t)\}.$$

Лемма 4. *Пусть $f(x)$ ограничена и $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|f(x)| = C$. Тогда имеет место неравенство*

$$|f(x) - \sigma^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_m}(x)| < \varepsilon(x) + \frac{4C}{1-|\cos\delta|}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{n_i},$$

где $\varepsilon(x) = \sup\limits_{t}|f(x) - f(x+t)|$ *при* $t \in E(\delta\,|\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$.

Так как ядро нормировано, то, пользуясь свойством 2 (§ 3), получим

$$|f(x) - \sigma^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_m}(x)| \leqslant \underset{\Omega}{M}\{|f(x) - f(x+t)|\, K^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_m}(t)\}.$$

Далее,

$$\underset{E(\delta|\lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{M}\{|f(x) - f(x+t)|\, K^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_m}(t)\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(x) \underset{E(\delta|\lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{M}\{K^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_m}(t)\} \leqslant \varepsilon(x)$$

и

$$\underset{\Omega \dot{-} E(\delta|\lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{M}\{|f(x) - f(x+t)|\, K^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_m}(t)\} \leqslant 2C \underset{\Omega \dot{-} E(\delta|\lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{M}\{K^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_m}(t)\}.$$

Соединяя эти неравенства, получим

$$|f(x) - \sigma^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_m}(x)| \leqslant \varepsilon(x) + 2C \underset{\Omega \dot{-} E(\delta|\lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{M}\{K^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_m}(t)\}.$$

Преобразуем теперь ядро, умножив и разделив его на

$$p(t) = \sin^2\frac{\lambda_1 t}{1} + \sin^2\frac{\lambda_2 t}{2} + \cdots + \sin^2\frac{\lambda_m t}{2}.$$

Имеем

$$K^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_m}(t) = \frac{1}{p(t)}\left(\sin^2\frac{\lambda_1(t)}{2} + \cdots + \sin^2\frac{\lambda_m(t)}{2}\right) K^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_m}(t) =$$

$$= \frac{1}{p(t)}\sum_{i=1}^{m} K^{\lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}\lambda_{i+1} \ldots \lambda_m}_{n_1 \ldots n_{i-1}n_{i+1} \ldots n_m}(t)\, \frac{\sin^2\dfrac{n_i\lambda_i t}{2}}{n_i}.$$

Но

$$2p(t) = \sum_{i=1}^{m}(1 - \cos\lambda_i t) = m\,[1 - \sigma_m(t)],$$

где

$$\sigma_m(t) = \frac{\cos\lambda_1 t + \cos\lambda_2 t + \cdots + \cos\lambda_m t}{m}.$$

Согласно свойству 2 (§ 4) при $t \in (\Omega \dot{-} E(\delta\,|\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m))$ имеем

$$|\sigma_m(t)| \leqslant 1 - \frac{1 - |\cos\delta|}{m}.$$

Значит,

$$p(t) > \frac{m}{2}\left(1 - 1 + \frac{1 - |\cos\delta|}{m}\right) = \frac{1 - |\cos\delta|}{2}.$$

Таким образом получаем следующую оценку при

$$t \in (\Omega \dot{-} E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)):$$

$$K_{n_1 \ldots n_m}^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}(t) < \frac{2}{1 - |\cos\delta|} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i} K_{n_1 \ldots n_{i-1} n_{i+1} \ldots n_m}^{\lambda_1 \ldots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \ldots \lambda_m}(t) \sin^2 \frac{n_i \lambda_i t}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\underset{\Omega \dot{-} E(\delta \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{M} \{K_{n_1 \ldots n_m}^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}(t)\} < \frac{2}{1 - |\cos\delta|} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i} \underset{\Omega}{M} \{K_{n_1 \ldots n_{i-1} n_{i+1} \ldots n_m}^{\lambda_1 \ldots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \ldots \lambda_m}(t)\} =$$

$$= \frac{2}{1 - |\cos\delta|} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i}$$

и окончательно

$$|f(x) - \sigma_{n_1 \ldots n_m}^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}(x)| < \varepsilon(x) + \frac{4C}{1 - |\cos\delta|} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i}.$$

Пользуясь этой леммой, нетрудно распространить метод суммирования Бохнера на ряды Фурье любых ограниченных функций.

Обозначим через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ линейно независимый базис показателей Фурье функции $f(x)$. Пусть q — любое натуральное число. Обозначим $q!$ через Q и $(q!\,q)^2$ через P.

Построим ядро Фейера-Бохнера:

$$K^{(q)}(t) = K_{P,\ P, \ldots,\ P}^{\frac{\beta_1}{Q},\ \frac{\beta_2}{Q}, \ldots,\ \frac{\beta_q}{Q}}(t).$$

Соответствующий этому ядру полином обозначим через $\sigma^{(q)}(x)$.

Теорема 5. *Процесс Бохнера суммирования ряда Фурье ограниченной функции сходится к значению функции в любой точке непрерывности, т. е. если x — точка непрерывности функции $f(x)$, то*

$$\lim_{q \to \infty} \sigma^{(q)}(x) = f(x).$$

Пусть x_0 — точка непрерывности. Тогда по данному $\varepsilon > 0$ найдётся окрестность такая, что

$$|f(x_0) - f(x_0 + t)| < \varepsilon, \text{ если } t \in E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Согласно свойству 5 (§ 2) имеем

$$E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \supset E\left(\delta' \,\middle|\, \frac{\beta_1}{n}, \frac{\beta_2}{n}, \ldots, \frac{\beta_k}{n}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l\right).$$

Значит, при достаточно больших q будем иметь

$$E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \supset E\left(\frac{\delta'}{q!} \,\middle|\, \frac{\beta_1}{q!}, \frac{\beta_2}{q!}, \ldots, \frac{\beta_q}{q!}, \frac{\mu_1}{q!}, \ldots, \frac{\mu_l}{q!}\right).$$

Обозначим через $K_1^{(q)}(t)$ ядро вида

$$K_1^{(q)}(t) = K^{(q)}(t)\, K_{P, \ldots,\ P}^{\frac{\mu_1}{q!}, \ldots,\ \frac{\mu_l}{q!}}(t).$$

Согласно лемме 4 имеем для достаточно больших q

$$|f(x_0) - \sigma_1^{(q)}(x_0)| < \varepsilon + \frac{4C}{1 - \cos\frac{\delta'}{q!}} \cdot \frac{q+l}{P} = \varepsilon + \frac{4C}{2\sin^2\frac{\delta'}{2q!}} \cdot \frac{q+l}{(q!\,q)^2},$$

где $\sigma_1^{(q)}(x)$ — полином, соответствующий ядру $K_1^{(q)}(t)$.

Но так как не может быть соотношения вида

$$r_1\mu_1 + r_2\mu_2 + \cdots + r_l\mu_l = q_1\beta_1 + q_2\beta_2 + \cdots + q_l\beta_l,$$

если не все r_i равны нулю, то $\sigma_1^{(q)}(x) = \sigma^{(q)}(x)$. Значит,

$$|f(x_0) - \sigma^{(q)}(x_0)| < \varepsilon + \frac{4C}{2\left(q!\sin\frac{\delta'}{2q!}\right)^2}\,\frac{q+l}{q^2}$$

и

$$\overline{\lim_{q\to\infty}}\,|f(x_0) - \sigma^{(q)}(x_0)| < \varepsilon,$$

откуда ввиду произвольности ε следует теорема.

Следствие 1. Если $f(x)$ — ограниченная N-п. п. функция Левитана, то полиномы Фейера-Бохнера всюду сходятся к $f(x)$, причём равномерно в каждом конечном интервале.

Следствие 2. Если $f(x)$—ограниченная функция и её показатели Фурье линейно независимы или её коэффициенты Фурье положительны, то с помощью полиномов Фейера-Бохнера можно обычным путём доказать (см.[2], стр. 51—52), что ряд, составленный из абсолютных величин коэффициентов Фурье, сходится, откуда вследствие теоремы единственности следует равномерная сходимость ряда Фурье к $f(x)$ на множестве точек непрерывности $f(x)$.

Наконец, отметим, что все результаты настоящего параграфа переносятся на метод суммирования Пуассона, если вместо составных ядер Фейера-Бохнера рассматривать составные ядра Пуассона

$$P_{r_1\ldots r_m}^{\lambda_1\ldots\lambda_m}(t) = P_{r_1}(\lambda_1 t)\ldots P_{r_m}(\lambda_m t),$$

где

$$P_r(\lambda t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\lambda t + r^2}.$$

§ 6. Суммирование рядов Фурье неограниченных функций

Известное в теории рядов Фурье периодических функций ядро Валле-Пуссена $V_\lambda^{(n)}(t)$ определяется равенством

$$V_\lambda^{(n)}(t) = \frac{[n!]^2}{(2n)!}\left(e^{i\frac{\lambda t}{2}} + e^{-i\frac{\lambda t}{2}}\right)^{2n}.$$

Воспользовавшись формулой бинома Ньютона, получим

$$V_\lambda^{(n)}(t) = \frac{[n!]^2}{(2n)!}\sum_{\nu_1+\nu_2=2n}\frac{(2n)!}{\nu_1!\,\nu_2!}\,e^{i\frac{\lambda}{2}(\nu_1-\nu_2)t}.$$

Отсюда видно, что свободный член полинома, стоящего справа, равен единице. Определим составное ядро Валле-Пуссена следующим равенством:

$$V_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m}^{(n)}(t) = V_{\lambda_1}^{(n)}(t)\,V_{\lambda_2}^{(n)}(t)\ldots V_{\lambda_m}^{(n)}(t),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — линейно независимые действительные числа. Отвечающий ему полином обозначим через $v_{\lambda_1\ldots\lambda_m}^{(n)}(x)$:

$$v_{\lambda_1\ldots\lambda_m}^{(n)}(x) = \underset{t}{M}\,\{f(x+t)\,V_{\lambda_1\ldots\lambda_m}^{(n)}(t)\}.$$

Из линейной независимости показателей $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ следует, что свободный член этого ядра равен произведению свободных членов простых ядер $V_\lambda^{(n)}(t)$, т. е. равен единице. Среднее значение полинома равно его свободному члену, значит, ядро $V_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}^{(n)}(t)$ нормировано:

$$\underset{\Omega}{M}\{V_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}^{(n)}(t)\} = 1.$$

Кроме того, оно, очевидно, положительно:

$$V_\lambda^{(n)}(t) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\left(e^{i\frac{\lambda t}{2}} + e^{-i\frac{\lambda t}{2}}\right)^{2n} = \frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{(2n)!}\left(\cos\frac{\lambda t}{2}\right)^{2n} \geqslant 0.$$

Пусть $t \bar{\in} E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ и $\delta < \frac{\pi}{2}$. Оценим величину $V_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}^{(n)}(t)$. Имеем

$$V_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}^{(n)}(t) = \left[\frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{(2n)!}\right]^m \left(\cos\frac{\lambda_1 t}{2}\cos\frac{\lambda_2 t}{2} \ldots \cos\frac{\lambda_m t}{2}\right)^{2n}$$

Согласно формуле Стирлинга имеем

$$\ln(2n)! > \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(2n + \frac{1}{2}\right)\ln 2n - 2n;$$

$$\ln(n!)^2 < 2\left[\frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{12}\right].$$

Отсюда получим

$$\ln\frac{(n!)^2}{(2n)!} < \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln n - \left(2n + \frac{1}{2}\right)\ln 2 + \frac{1}{6},$$

т. е.

$$\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^m < n^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{-2mn} \cdot 2^{-\frac{m}{2}}(2\pi)^{\frac{m}{2}} e^{\frac{m}{6}} < n^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{-2mn}\,(\pi e^{\frac{1}{3}})^{\frac{m}{2}}. \qquad (*)$$

Далее, так как $t \bar{\in} E(\delta / \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ и $\delta < \frac{\pi}{2}$, то хотя бы при одном i $\lambda_i t = 2\pi k_i + \theta_i$, где $\pi > |\theta_i| > \delta$, а k_i — целое число, т. е.

$$\frac{\lambda_i t}{2} = \pi k_i + \frac{\theta_i}{2}; \quad \frac{\pi}{2} > \left|\frac{\theta_i}{2}\right| > \frac{\delta}{2},$$

а так как $\left|\cos\left(\pi k_i + \frac{\theta_i}{2}\right)\right| = \left|\cos\frac{\theta_i}{2}\right|$, то

$$\left|\cos\frac{\lambda_i t}{2}\right| < \cos\frac{\delta}{2} \text{ при } t \bar{\in} E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),$$

т. е.

$$\left|\cos\frac{\lambda_i t}{2}\right|^{2n} < \left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2n}. \qquad (**)$$

Из неравенств (*) и (**) вытекает,

$$V_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}^{(n)}(t) \leqslant (5n)^{\frac{m}{2}}\, 2^{-2mn} \cdot 2^{2mn}\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2n} = (5n)^{\frac{m}{2}}\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2n},$$

если $t \bar{\in} E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$.

Имеем далее

$$\cos\frac{\delta}{2} < 1 - \frac{\delta^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{\delta^4}{4! \cdot 2^4} = 1 - \frac{\delta^2}{8}\left(1 - \frac{\delta^2}{4! \cdot 2}\right) < 1 - \frac{\delta^2}{12} \text{ при } \delta < \frac{\pi}{2}.$$

Используя это неравенство, получим

$$V^{(n)}_{\lambda_1\ldots\lambda_m}(t) < (5n)^{\frac{m}{2}}\left(1-\frac{\delta^2}{12}\right)^{2n}.$$

Но так как

$$\ln\left(1-\frac{\delta^2}{12}\right) < -\frac{\delta^2}{12}+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{12}\right)^2 = -\frac{\delta^2}{12}\left(1-\frac{\delta^2}{24}\right) < -\frac{\delta^2}{20},$$

то окончательно получим при $t\overline{\in}E(\delta\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$ и $\delta<\frac{\pi}{2}$

$$V^{(n)}_{\lambda_1\ldots\lambda_m}(t) < e^{\frac{m}{2}\ln 5n-2n\frac{\delta^2}{20}} = e^{-n\left(\frac{\delta^2}{10}-\frac{m\ln 5n}{2n}\right)}. \tag{A}$$

Пусть $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n,\ldots$ — линейно независимый базис показателей Фурье функции $f(x)$. Пусть далее $q! = Q$ и $(q!)^2q^3 = P$. Обозначим через $V^{(q)}(t)$ ядро:

$$V^{(q)}(t) = V^{(P)}_{\frac{\beta_1}{Q},\,\frac{\beta_2}{Q},\ldots,\,\frac{\beta_q}{Q}}(t),$$

а отвечающий ему полином обозначим через $v^{(q)}(x)$.

Теорема 6. *Процесс суммирования ряда Фурье методом Валле-Пуссена сходится к значению функции $f(x)$ во всех точках непрерывности, т. е. если x — точка непрерывности $f(x)$, то*

$$\lim_{q\to\infty} v^{(q)}(x) = f(x).$$

Если x_0 — точка непрерывности функции $f(x)$, то по данному $\varepsilon>0$ найдётся такая окрестность $E(\delta\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$, что

$$|f(x_0)-f(x_0+t)|<\varepsilon,$$

если $t\in E(\delta\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$. Из свойства 5 (§ 2) следует, что найдутся такие $\delta'>0$ и k, что

$$E(\delta\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)\supset E\left(\delta'\,\middle|\,\frac{\beta_1}{k},\ \frac{\beta_2}{k},\ldots,\frac{\beta_n}{k}\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_l\right).$$

Отсюда следует, что при достаточно больших q

$$E(\delta\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)\supset E\left(\frac{\delta'}{q!}\,\middle|\,\frac{\beta_1}{q!},\frac{\beta_2}{q!},\ldots,\frac{\beta_q}{q!},\frac{\mu_1}{q!},\frac{\mu_2}{q!},\ldots,\frac{\mu_l}{q!}\right).$$

Введём вспомогательное ядро $V_1^{(q)}(t)$:

$$V_1^{(q)}(t) = V^{(q)}(t)\,V^{(P)}_{\frac{\mu_1}{Q},\ldots,\frac{\mu_l}{Q}}(t).$$

Так как $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n,\ldots,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_l$ линейно независимы, то коэффициент Фурье функции $f(x)$, отвечающий показательно:

$$\lambda = r_1\beta_1+\ldots+r_k\beta_k+r'_1\mu_1+\ldots+r'_l\mu_l,$$

равен нулю, если только не все r'_i равны нулю.

Отсюда следует, что

$$v^{(q)}(x) = \underset{\Omega}{M}\{f(x+t)\,V^{(q)}(t)\} = \underset{\Omega}{M}\{f(x+t)\,V_1^{(q)}(t)\}.$$

Так как ядро $V_1^{(q)}(t)$ нормировано и положительно, то имеет место неравенство

$$|f(x)-v^{(q)}(x)| \leqslant \underset{\Omega}{M}\{|f(x+t)-f(x)|\,V_1^{(q)}(t)\}.$$

Но при

$$t \in E\left(\frac{\delta'}{q!}\,\middle|\,\frac{\beta_1}{q!}, \frac{\beta_2}{q!}, \ldots, \frac{\beta_q}{q!}, \frac{\mu_1}{q!}, \frac{\mu_2}{q!}, \ldots, \frac{\mu_l}{q!}\right) \quad |f(x_0) - f(x_0+t)| < \varepsilon.$$

А так как ядро нормировано, то среднее, взятое по этому множеству, не превзойдёт ε. Если же $t \overline{\in} E\left(\frac{\delta'}{q!}\,\middle|\,\frac{\beta_1}{q!}, \frac{\beta_2}{q!}, \ldots, \frac{\beta_q}{q!}, \frac{\mu_1}{q!}, \frac{\mu_2}{q!}, \ldots, \frac{\mu_l}{q!}\right)$, то согласно (A) имеем

$$V_1^{(q)}(t) < e^{-P\left[\left(\frac{\delta'}{Q}\right)^2 \frac{1}{10} - \frac{(q+l)\ln 5P}{2P}\right]} = \eta(q).$$

Значит, среднее, взятое по множеству

$$\Omega \dot{-} E\left(\frac{\delta'}{q!}\,\middle|\,\frac{\beta_1}{q!}, \frac{\beta_2}{q!}, \ldots, \frac{\beta_q}{q!}, \frac{\mu_1}{q!}, \frac{\mu_2}{q!}, \ldots, \frac{\mu_l}{q!}\right),$$

не больше, чем

$$\eta(q) \underset{\Omega}{M}\{|f(x_0) - f(x_0+t)|\} \leqslant \eta(q)\{|f(x_0)| + M\},$$

где $M = \underset{\Omega}{M}\{|f(t)|\}$. Таким образом имеем

$$|f(x_0) - v^{(q)}(x_0)| < \varepsilon + \eta(q)\{|f(x_0)| + M\}.$$

Далее имеем

$$\eta(q) = e^{-(q!)^2 q^3 \left\{\frac{1}{10}\left(\frac{\delta'}{q!}\right)^2 - \frac{(q+l)[\ln 5 + \ln (q!)^2 + \ln q^3]}{2(q!)^2 q^3}\right\}},$$

т. е.

$$\eta(q) < e^{-q^3\left\{\frac{(\delta')^2}{10} - \frac{(q+l)[2+2\ln q! + 3\ln q]}{q^3}\right\}}.$$

Согласно формуле Стирлинга

$$\ln q! < \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(q + \frac{1}{2}\right)\ln q,$$

откуда следует, что второе слагаемое, стоящее в скобках, стремится к нулю, т. е. при достаточно больших q будет выполнено неравенство

$$\eta(q) < e^{-q^3\frac{(\delta')^2}{20}},$$

т. е. $\eta(q) \to 0$ при $q \to \infty$.

Таким образом

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} |f(x_0) - v^{(q)}(x_0)| \leq \varepsilon,$$

откуда ввиду произвольности ε следует теорема.

§ 7. Теорема единственности

В § 4 было доказано, что функция $f(x)$ однозначно определяется своим рядом Фурье во всех точках непрерывности. В этом параграфе мы введём понятие обобщённых точек Лебега и покажем, что (подобно тому как в случае чисто периодических функций) ряд Фурье можно некоторым способом суммировать к значению функции $f(x)$ во всех точках Лебега.

Назовём семейство множеств $\{E(\alpha)\}$, зависящих от параметра α, $0 < \alpha < \infty$, E-системой, если для него выполнены следующие условия:

1) при любом α $E(\alpha)$ есть симметрическое множество, содержащее некоторое относительно плотное множество интервалов, и $E(\alpha) \supset E(\alpha')$, если $\alpha > \alpha'$;

2) $E(\alpha) + E(\beta) \subset E(\alpha + \lambda(\beta))$, причём $\lambda(\beta) \to 0$ если $\beta \to 0$;

3) $|E(\alpha)|$ есть непрерывная функция от α и стремится к нулю вместе с α.

В § 2 было доказано, что $E(\delta|\lambda)$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Непосредственным подсчётом убеждаемся, что $|E(\delta|\lambda)| = \frac{\delta}{\pi}$. Значит, $\{E(\alpha|\lambda)\}$, удовлетворяя всем условиям 1), 2), 3), образует E-систему.

Мы сейчас покажем, что если $\{E_1(\alpha)\}$ и $\{E_2(\alpha)\}$ образуют E-системы, то и $\{E_3(\alpha)\}$, где $E_3(\alpha) = E_1(\alpha) \cap E_2(\alpha)$, тоже образует E-систему, откуда следует, что $\{E(\alpha|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)\}$ тоже образует E-систему.

Симметрия $E_3(\alpha)$ и включения $E_3(\alpha) \supset E_3(\alpha')$, если $\alpha > \alpha'$, следуют из соответствующих свойств систем $\{E_1(\alpha)\}$ и $\{E_2(\alpha)\}$.

Заметим теперь, что любое множество из некоторой E-системы входит в Σ^*. Действительно, из свойства 2) следует, что по данному $\alpha > 0$ всегда можно найти такое $\beta > 0$, что $\beta + 5\lambda(\beta) < \alpha$. Но $E(\beta) + E(\beta) \subset E(\beta + \lambda(\beta))$, далее, $3E(\beta) \subset E(\beta + 2\lambda(\beta))$ и вообще $nE(\beta) \subset E(\beta + \overline{n-1}\,\lambda(\beta))$. Таким образом

$$6E(\beta) \subset E(\beta + 5\lambda(\beta)) \subset E(\alpha).$$

Согласно условию 1) $E(\beta)$ содержит некоторое симметрическое относительно плотное множество интервалов, а так как ещё

$$E(\beta) \subset E(\alpha) \quad \text{и} \quad 6E(\beta) \subset E(\alpha), \quad \text{то} \quad E(\alpha) \in \Sigma^*.$$

Так как пересечение двух окрестностей из Σ^* содержит относительно плотное множество интервалов, то $E_3(\alpha) = E_2(\alpha) \cap E_1(\alpha)$ при любом $\alpha > 0$ должно содержать относительно плотное множество интервалов. Итак, условие 1) выполнено для $E_3(\alpha)$.

Условие 2) следует из того, что оно выполнено для

$$\{E_1(\alpha)\} \quad \text{и} \quad \{E_2(\alpha)\}.$$

Остаётся проверить условие 3). Имеем

$$E_3(\alpha+\delta) \dot{-} E_3(\alpha) = E_1(\alpha+\delta) \cap E_2(\alpha+\delta) \dot{-} E_1(\alpha) \cap E_2(\alpha) =$$
$$= \{E_1(\alpha+\delta) \dot{-} E_1(\alpha)\} \cap E_2(\alpha+\delta) \dot{+} \{E_2(\alpha+\delta) \dot{-} E_2(\alpha)\} \cap E_1(\alpha),$$
$$|E_3(\alpha+\delta) \dot{-} E_3(\alpha)| \leqslant |E_1(\alpha+\delta) \dot{-} E_1(\alpha)| + |E_2(\alpha+\delta) \dot{-} E_2(\alpha)|.$$

Так как

$$E_3(\alpha+\delta) \supset E_3(\alpha),$$

то имеем

$$0 \leqslant |E_3(\alpha+\delta)| - |E_3(\alpha)| \leqslant |E_1(\alpha+\delta)| - |E_1(\alpha)| + |E_2(\alpha+\delta)| - |E_2(\alpha)|.$$

Но слагаемые в правой части стремятся к нулю вместе с δ. Значит, $|E_3(\alpha+\delta)| - |E_3(\alpha)|$ стремится к нулю вместе с δ, и $|E_3(\alpha)|$ — непрерывная функция относительно α.

Пусть $\{E(\alpha)\}$ — некоторая E-система. Назовём величину

$$L(x, f, E) = \overline{\lim_{\alpha \to 0}} \frac{1}{|E(\alpha)|} \underset{E(\alpha)}{M} \{|f(x) - f(x+t)|\}$$

коэффициентом Лебега функции $f(x)$ в точке x относительно системы $\{E(\alpha)\}$. **Абсолютным коэффициентом Лебега**

функции $f(x)$ в точке x назовём величину

$$L(x, f) = \inf L(x, f, E),$$

где infimum берётся по всевозможным E-системам.

Наконец, **обобщённой точкой Лебега** функции $f(x)$ будем считать любую точку, в которой абсолютный коэффициент Лебега функции $f(x)$ равен нулю.

Если x_0 — точка непрерывности, то она тем более является точкой Лебега. Действительно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такую окрестность $E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, что

$$|f(x_0) - f(x_0 + t)| < \varepsilon,$$

если $t \in E(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. Отсюда следует, что коэффициент Лебега функции $f(x)$ в этой точке относительно системы $\{E(\alpha \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)\}$ не превосходит ε, так как

$$\overline{\lim_{\alpha \to 0}} \frac{1}{|E(\alpha \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)|} \underset{E(\alpha \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)}{M} \{|f(x_0) - f(x_0 + t)|\} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\alpha \to 0}} \frac{\varepsilon \mid E(\alpha \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \mid}{|E(\alpha \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)|} = \varepsilon,$$

а абсолютный коэффициент Лебега ввиду произвольности ε равен нулю.

Пусть $\{E(\alpha)\}$ — некоторая E-система. Ближайшая наша задача — построить семейство п. п. функций Г. Бора $H_n(t)$, обладающих следующими свойствами:

$$1)\ H_n(t) \geqslant 0;\ 2)\ \underset{\Omega}{M}\{H_n(t)\} = 1;\ 3)\ \lim_{n \to \infty} \sup_{t \bar{\in} E(\alpha)} H_n(t) = 0;$$

$$4)\ \inf_{t \in E(\alpha)} H_n(t) \geqslant \sup_{t \bar{\in} E(\alpha)} H_n(t).$$

Обозначим через $\tau(x)$ функцию, определённую следующим образом: $\tau(x) = \bar{\alpha}$, где $\bar{\alpha}$ есть нижняя граница множества тех α, для которых выполнено включение $x \in E(\alpha)$.

Покажем, что $\tau(x)$ есть п. п. функция Г. Бора. Действительно, пусть $\tau(x) = \beta$. Это значит, что $x \in E(\alpha)$ при $\alpha > \beta$ и $x \bar{\in} E(\alpha)$ при $\alpha < \beta$. Если $t \in E(\gamma)$, то согласно свойству 2) имеем $x + t \in E(\beta + \lambda(\gamma))$, т. е.

$$\tau(x + t) \leqslant \beta + \lambda(\gamma) = \tau(x) + \lambda(\gamma). \tag{*}$$

Но $x + t \bar{\in} E(\beta - 2\lambda(\gamma))$, так как в противном случае, в силу симметрии множества $E(\gamma)$, $-t \in E(\gamma)$ и, по свойству 2),

$$x = (x + t) - t \in E(\beta - 2\lambda(\gamma) + \lambda(\gamma)) = E(\beta - \lambda(\gamma)),$$

что невозможно. Значит, имеем

$$\tau(x + t) > \beta - 2\lambda(\gamma) = \tau(x) - 2\lambda(\gamma). \tag{**}$$

Сравнивая неравенства (*) и (**), получим

$$-2\lambda(\gamma) < \tau(x + t) - \tau(x) < \lambda(\gamma),$$

или

$$|\tau(x + t) - \tau(x)| < 2\lambda(\gamma).$$

Так как $\lambda(\gamma) \to 0$, то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдётся такое γ_0, что при $\gamma < \gamma_0$, $\lambda(\gamma) < \frac{\varepsilon}{2}$, т. е. $|\tau(x + t) - \tau(x)| < \varepsilon$, если $t \in E(\gamma_0)$.

Но $E(\gamma_0)$ содержит относительно плотное множество интервалов, и, значит, $\tau(x)$ — действительно п. п. функция Г. Бора.

Положим

$$P_n(t) = \frac{n}{1+[n\tau(t)]^2}.$$

Так как $\tau(t)$ — п. п. функция Г. Бора, то $P_n(t)$ — тоже п. п. функция Г. Бора. Кроме того, она удовлетворяет условиям 1), 3), 4). Проверим, например, условие 4): если $t \bar{\in} E(\alpha)$, то $\tau(t) \geqslant \alpha$. Значит, $P_n(t) \leqslant \frac{n}{1+n^2\alpha^2}$. Если же $t \in E(\alpha)$, то $\tau(t) \leqslant \alpha$. Значит, $P_n(t) \geqslant \frac{n}{1+n^2\alpha^2}$, и условие 4) выполнено. Заметим, что на множестве $E\left(\frac{1}{n}\right)$ функция $P_n(t) > \frac{n}{2}$. Значит $\left(\text{так как } \left|E\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \delta > 0\right)$, можно найти такое m_n, что

$$\underset{\Omega}{M}\{[P_n(t)]^{m_n}\} > 1.$$

Положим

$$H_n(t) = \frac{[P_n(t)]^{m_n}}{\underset{\Omega}{M}\{[P_n(t)]^{m_n}\}},$$

тогда семейство $\{H_n(t)\}$ удовлетворяет всем условиям 1), 2), 3), 4).

Лемма 5. *Если $f(x)$ — функция, имеющая по всей оси среднее, $\{H_n(t)\}$ построено для E-системы $\{E(\alpha)\}$, то имеет место неравенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|f(x) - \underset{\Omega}{M}\{f(x+t)H_n(t)\}| \leqslant 4L(x, f, E).$$

Действительно, так как $H_n(t)$ нормированы, то

$$f(x) - \underset{\Omega}{M}\{f(x+t)H_n(t)\} = \underset{\Omega}{M}\{(f(x) - f(x+t))H_n(t)\}.$$

Далее, по определению коэффициента Лебега, можно по данному $\varepsilon > 0$ найти такое $\alpha_0 > 0$, что

$$\sup_{\alpha\leqslant\alpha_0}\frac{1}{|E(\alpha)|}\underset{E(\alpha)}{M}\{|f(x) - f(x+t)|\} < L(x, f, E) + \frac{\varepsilon}{8}.$$

Пусть $\underset{\Omega}{M}\{|f(x)|\} = M$. Согласно свойству 3), можно найти такое n_0, то для всех $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\bar{\in}E(\alpha_0)} H_n(t) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Так как

$$|f(x) - \underset{\Omega}{M}\{f(x+t)H_n(t)\}| \leqslant$$
$$\leqslant \underset{E(\alpha_0)}{M}\{|f(x) - f(x+t)|H_n(t)\} + \underset{\Omega \dot{-} E(\alpha_0)}{M}\{|f(x) - f(x+t)|H_n(t)\},$$

то для $n \geqslant n_0$ имеем

$$|f(x) - \underset{\Omega}{M}\{f(x+t)H_n(t)\}| <$$
$$< \underset{E(\alpha_0)}{M}\{|f(x) - f(x+t)|H_n(t)\} + \frac{M}{4M}\varepsilon + \frac{|f(x)|}{4M}\varepsilon.$$

Первое слагаемое правой части этого неравенства мы можем оценить с помощью неравенства 9 (§ 3), так как для $\{H_n(t)\}$ выполнено условие 4). Таким образом имеем

$$|f(x)-\underset{\Omega}{M}\{f(x+t)H_n(t)\}|<4L(x,f,E)+\varepsilon+\frac{|f(x)|\,\varepsilon}{4M},$$

если $n>n_0$. Отсюда получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f(x)-\underset{\Omega}{M}\{f(x+t)H_n(t)\}|<4L(x,f,E)+\varepsilon\left(1+\frac{|f(x)|}{4M}\right).$$

Ввиду произвольности ε из последнего неравенства следует

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f(x)-\underset{\Omega}{M}\{f(x+t)H_n(t)\}|\leqslant 4L(x,f,E).$$

Теорема 7. *Пусть $f(x)$ имеет среднее по всей оси. Тогда по данному $\varepsilon>0$ найдётся такой тригонометрический полином $P(x)$, что в данной точке x_0 выполнено неравенство*

$$|f(x_0)-P(x_0)|<4L(x_0,f)+\varepsilon.$$

При этом показатели полинома $P(x)$ суть показатели Фурье функции $f(x)$, а коэффициенты $P(x)$ получаются умножением коэффициентов Фурье функции $f(x)$ на некоторые числа.

По определению абсолютного коэффициента Лебега для данного $\varepsilon>0$ можно указать такую E-систему $\{E(\alpha)\}$, что

$$L(x_0,f,E)<L(x_0,f)+\frac{\varepsilon}{8}.$$

Согласно лемме 5 найдётся такое n_0, что при $n>n_0$ выполнено неравенство

$$|f(x_0)-\underset{\Omega}{M}\{f(x_0+t)H_n(t)\}|<4L(x_0,f,E)+\frac{\varepsilon}{2}<4L(x_0,f)+\varepsilon.$$

Так как $H_n(t)$ — п. п. функция Г. Бора, то существует такой полином $Q(t)$, что

$$\sup_{-\infty<t<\infty}|H_n(t)-Q(t)|<\frac{\varepsilon}{4M},$$

где $M=\underset{\Omega}{M}\{|f(t)|\}$. Но тогда

$$|f(x_0)-\underset{\Omega}{M}\{f(x_0+t)Q(t)\}|<4L(x_0,f)+2\varepsilon.$$

Далее, в силу свойства 1 (§ 3), имеем

$$\underset{\Omega}{M}\{f(x+t)Q(t)\}=\underset{\Omega}{M}\{f(t)Q(t-x)\}=P(x),$$

где $P(x)$ — полином, удовлетворяющий условиям теоремы.

Отсюда следует

Теорема 8. *Ряд Фурье однозначно определяет функцию $f(x)$ во всех обобщённых точках Лебега.*

Приложение

Здесь мы докажем упомянутую в § 2 теорему:

Если $f(x)$ — ограниченная на всей действительной оси и измеримая в каждом конечном интервале функция, такая что $E(a,f)$ содержит относительно плотное множество интервалов E, то по данному $\varepsilon>0$

можно найти такой полином $S(x)$, *что*

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - S(x)| < 2a + \varepsilon.$$

Доказательство этой теоремы в основном совпадает с доказательством основной теоремы теории п. п. функций, предложенным Н. Н. Боголюбовым [5].

Согласно определению относительно плотного множества интервалов существуют такие числа $l > 0$ и $\delta > 0$, что каждый интервал $(kl, \overline{k+1}\,l)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, содержит интервал $\Delta_k = \left(\alpha_k - \frac{\delta}{2}, \alpha_k + \frac{\delta}{2}\right)$, целиком содержащийся в E.

Построим функцию $K(x)$ так: $K(x) = \frac{l}{\delta}$, если $x \in \Delta_k$, и $K(x) = 0$, если x не лежит ни в одном из интервалов Δ_k.

Имеем

$$\frac{1}{2kl} \int_{-kl}^{kl} K(x)\,dx = \frac{l}{2kl\delta} \sum_{j=-k}^{k} \int_{\Delta_j} dx = \frac{2kl\delta}{2kl\delta} = 1. \tag{1}$$

Рассмотрим функцию $f_k(x)$:

$$f_k(x) = \frac{1}{(2kl)^2} \int_{-kl}^{kl} \int_{-kl}^{kl} f(x + t_1 + t_2)\, K(t_1)\, K(t_2)\, dt_1\, dt_2. \tag{2}$$

Согласно (1) имеем

$$|f(x) - f_k(x)| = \left| \frac{1}{(2kl)^2} \int_{-kl}^{kl} \int_{-kl}^{kl} [f(x) - f(x + t_1 + t_2)]\, K(t_1)\, K(t_2)\, dt_1\, dt_2 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2kl)^2} \int_{-kl}^{kl} \int_{-kl}^{kl} |f(x) - f(x + t_1 + t_2)|\, K(t_1)\, K(t_2)\, dt_1\, dt_2.$$

Далее, если t_1 и t_2 лежат в системе интервалов $\{\Delta_k\}$, то они оба принадлежат E, а значит, и $E(a, f)$. Но тогда по свойству ε-сдвигов $t_1 + t_2 \in E(2a, f)$ и $|f(x) - f(x + t_1 + t_2)| < 2a$. Если же хотя бы одно из чисел t_1, t_2 лежит вне системы интервалов $\{\Delta_k\}$, то подынтегральное выражение равно нулю. Таким образом для всех x имеем

$$|f(x) - f_k(x)| \leqslant \frac{2a}{(2kl)^2} \sum_{i=-k}^{k} \sum_{j=-k}^{k} \int_{\Delta_i} \int_{\Delta_j} K(t_1)\, K(t_2)\, dt_1\, dt_2 = 2a. \tag{3}$$

Разложим функцию $f(x)$ в интервале $(-3kl, 3kl)$ в ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(k)} e^{i\nu_n^{(k)} x},$$

где $\nu_n^{(k)} = \frac{2\pi n}{6kl} = \frac{\pi n}{3kl}$. Для функции $f_k(x)$ при $|x| < kl$ будем тогда иметь

$$f_k(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(k)} \left[\frac{1}{2kl} \int_{-kl}^{kl} K(t)\, e^{i\nu_n^{(k)} t}\, dt \right]^2 e^{i\nu_n^{(k)} x}, \tag{4}$$

так как после умножения ряда Фурье на функцию $K(t)$, интегрируемую с квадратом, и почленного интегрирования мы получим уже абсолютно сходящийся ряд.

Введём обозначение: $a(\nu_n^{(k)})=\frac{1}{2kl}\int\limits_{-kl}^{kl}K(t)\,e^{i\nu_n^{(k)}t}\,dt$. Имеем

$$a(\nu_n^{(k)})=\frac{l}{2kl\delta}\sum_{j=-k}^{k}\int\limits_{\Delta_j}e^{i\nu_n^{(k)}t}\,dt=\frac{\sum\limits_{j=-k}^{k}\left[e^{i\nu_n^{(k)}\left(a_j+\frac{\delta}{2}\right)}-e^{i\nu_n^{(k)}\left(a_j-\frac{\delta}{2}\right)}\right]}{2k\delta i\nu_n^{(k)}}$$

и переходя к абсолютным значениям, получим неравенство

$$|a(\nu_n^{(k)})|\leqslant\frac{\sum\limits_{j=-k}^{k}\left|\sin\nu_n^{(k)}\cdot\frac{\delta}{2}\right|}{k\delta\left|\nu_n^{(k)}\right|}\leqslant\frac{2k}{k\delta\left|\nu_n^{(k)}\right|}=\frac{2}{\delta\left|\nu_n^{(k)}\right|}. \tag{5}$$

Рассмотрим часть ряда (4), распространённую на те n, для которых $|\nu_n^{(k)}|\geqslant\lambda$.

Согласно (5) получим

$$\left|\sum_{|\nu_n^{(k)}|\geqslant\lambda}^{(n)}A_n^{(k)}\,a^2(\nu_n^{(k)})\,e^{i\nu_n^{(k)}x}\right|\leqslant\frac{2}{\delta\lambda}\sum_{|\nu_n^{(k)}|\geqslant\lambda}^{(n)}|A_n^{(k)}|\cdot|a(\nu_n^{(k)})|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\delta\lambda}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}|A_n^{(k)}|^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a(\nu_n^{(k)})|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Воспользовавшись неравенством Бесселя для периодических функций, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|A_n^{(k)}|^2\leqslant\frac{1}{6kl}\int\limits_{-3kl}^{3kl}|f(x)|^2\,dx\leqslant M^2, \tag{7}$$

где

$$M=\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)|.$$

Имеем, далее

$$a(\nu_n^{(k)})=3\,\frac{1}{6kl}\int\limits_{-3kl}^{3kl}K'(t)\,e^{i\nu_n^{(k)}t}\,dt,$$

где $K'(t)=K(t)$, если $|t|<kl$, и $K'(t)=0$, если $kl\leqslant|t|\leqslant 3kl$. Используя снова неравенство Бесселя, получим

$$\frac{1}{9}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a(\nu_n^{(k)})|^2\leqslant\frac{1}{6kl}\int\limits_{-3kl}^{3kl}[K'(t)]^2\,dt=\frac{l^2}{6kl\delta^2}\sum_{j=-k}^{k}\int\limits_{\Delta_j}dt=\frac{2k\delta l^2}{6kl\delta^2}=\frac{l}{3\delta}.$$

Таким образом

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a(\nu_n^{(k)})|^2\leqslant\frac{3l}{\delta}. \tag{8}$$

Учитывая неравенства (6), (7), (8), мы получим

$$\left|\sum_{|\nu_n^{(k)}|\geqslant\lambda}^{(n)}A_n^{(k)}\,a^2(\nu_n^{(k)})\,e^{i\nu_n^{(k)}x}\right|\leqslant\frac{2M\sqrt{3l}}{\delta\lambda\sqrt{\delta}}.$$

Зафиксируем теперь λ так, чтобы $\frac{2M\sqrt{3l}}{\lambda\delta^{3/2}} < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда из равенств (4) и последнего получим

$$\left| f_k(x) - \sum_{|\nu_n^{(k)}|<\lambda} {}^{(n)} A_n^{(k)} a^2(\nu_n^{(k)}) e^{i\nu_n^{(k)}x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } |x| < kl. \tag{9}$$

Рассмотрим числа $A_n^{(k)}$, $\nu_n^{(k)}$, соответствующие тем значениям n, для которых $|\nu_n^{(k)}| < \lambda$, и перенумеруем их так, чтобы расположить их в порядке убывания модуля $|A_n^{(k)}|$. Получим последовательности: $U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \ldots, U_{n(k)}^{(k)}$; $\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}, \ldots, \mu_{n(k)}^{(k)}$, причём

$$|U_i^{(k)}| \geqslant |U_{i+1}^{(k)}|.$$

Тогда согласно (9) имеем

$$\left| f_k(x) - \sum_{q=1}^{n(k)} U_q^{(k)} a^2(\mu_q^{(k)}) e^{i\mu_q^{(k)}x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } |x| < kl, \tag{10}$$

причём

$$\sum_{q=1}^{n(k)} |U_q^{(k)}|^2 \leqslant M^2.$$

Так как $|U_q^{(k)}|$ убывает вместе с q, то отсюда следует $|U_r^{(k)}| \leqslant \frac{M}{\sqrt{r}}$.

Далее имеем

$$\left| \sum_{q=r}^{n(k)} U_q^{(k)} a^2(\mu_q^{(k)}) e^{i\mu_q^{(k)}x} \right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{r}} \sum_{q=r}^{n(k)} |a(\mu_q^{(k)})|^2 \leqslant \frac{M}{\sqrt{r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a(\nu_n^{(k)})|^2$$

и, учтя неравенство (8),

$$\left| \sum_{q=r}^{n(k)} U_q^{(k)} a^2(\mu_q^{(k)}) e^{i\mu_q^{(k)}x} \right| \leqslant \frac{M \cdot 3l}{\sqrt{r} \cdot \delta}. \tag{11}$$

Зафиксируем теперь r так, чтобы $\frac{3Ml}{\sqrt{r}\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда согласно неравенствам (10) и (11) получим

$$\left| f_k(x) - \sum_{q=1}^{r} U_q^{(k)} a^2(\mu_q^{(k)}) e^{i\mu_q^{(k)}x} \right| < \varepsilon, \text{ если } |x| < kl.$$

Введя обозначение $U_q^{(k)} a^2(\mu_q^{(k)}) = B_q^{(k)}$ и использовав неравенство (3), из последнего неравенства получим

$$\left| f(x) - \sum_{q=1}^{r} B_q^{(k)} e^{i\mu_q^{(k)}x} \right| < 2a + \varepsilon, \text{ если } |x| < kl. \tag{12}$$

Так как $B_q^{(k)}$ равностепенно ограничены относительно k и q, а $|\mu_q^{(k)}| < \lambda$, то существует такая последовательность $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$, что $B_q^{(k_i)} \to B_q$; $\mu_q^{(k_i)} \to \mu_q$ $(q = 1, 2, \ldots, r)$, если $k_i \to \infty$. Переходя по последовательности $\{k_i\}$ к пределу в неравенстве (12), получим

$$\left| f(x) - \sum_{q=1}^{r} B_q e^{i\mu_q x} \right| < 2a + \varepsilon, \quad -\infty < x < \infty,$$

и теорема доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бор, Почти периодические функции, ГТТИ, 1934.
2. A. S. Besicovitch, Almost periodic functions, гл. II, стр. 77.
3. Б. М. Левитан, Новое обобщение почти периодических функций H. Bohr'a, «Записки Харьковского научно-исслед. института математики и механики», 1938, серия 4, том XV, вып. 2.
4. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, ОНТИ, 1938, стр. 67—68.
5. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Новые методы нелинейной механики, ГТТИ, 1934, стр. 62—67.
6. Н. Н. Боголюбов, Деякі арифметичні властивості майже-періодів, «Записки кафедри математичної фізики», АН УРСР, 1939, стр. 185—193.
7. S. Banach, Théorie des opérations lincaires, Warszawa, 1932.