ЗАПИСКИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1949 Том XXI

О ЛОБОВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ТЕЛ, ПОГРУЖЕННЫХ В ГАЗОВЫЙ ПОТОК СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТИ

И. Е. Зеленский

(Харьков)

§ 1. Я ставлю следующую задачу: определить силовое воздействие на твёрдое тело со стороны газового потока сверхзвуковой скорости, в который оно погружено. Такая постановка задачи ещё не совсем ясна и требует определённых уточнений.

Поток — трёхмерный. Значения параметров газа на бесконечности перед телом суть: давление — p_0, плотность — ρ_0, температура — T_0, скорость — $\mathbf{v}_0$ и, наконец, энтропия — H_0. Форма тела и его ориентация по отношению к набегающему потоку безразличны. Поток стационарный. Газ идеальный.

Как известно, при этих условиях возникает поверхность сильного разрыва, а может быть, и несколько последовательных поверхностей вдоль по потоку; последнее зависит от формы тела и его ориентации. Я предполагаю сейчас существование лишь одной поверхности сильного разрыва; в дальнейшем это ограничение будет отброшено как несущественное.

Далее известно, что поверхность сильного разрыва будет непосредственно прилегать к передней острой кромке тела, если последняя достаточно остра и будет особой линией для поверхности сильного разрыва. В противном случае поверхность сильного разрыва отступит перед телом вверх по потоку на некоторое расстояние, охватывая тело и будучи округлённой, плавной. Различие этих двух случаев в дальнейшем не играет никакой роли.

Простираясь в бесконечность во все стороны от обтекаемого тела, поверхность сильного разрыва асимптотически приближается к такому положению, что в бесконечно удалённых точках её касательная плоскость образует угол Маха с вектором набегающей скорости.

Известно, кроме того, что поток, начиная с бесконечности, вплоть до самой поверхности сильного разрыва будет невозмущён, и состояние газа во всей этой области будет характеризоваться параметрами давления, плотности и т. д., соответствующими бесконечности.

При переходе через поверхность сильного разрыва параметры газа меняются скачкообразно, разрывно, по-разному в разных её точках, в зависимости от угла наклона поверхности сильного разрыва к набегающему потоку. При этом поток остаётся сверхзвуковым, если этот угол наклона не сильно отличается от угла Маха; в противном случае он становится дозвуковым. Кроме того, поток, за чрезвычайно редкими исключениями специального типа, становится завихренным. Оба последние обстоятельства в дальнейшем не играют роли.

Как следует из второго принципа термодинамики и теоремы Цемплена, абсолютная величина скорости газа после перехода его через поверхность сильного разрыва убывает, а сама скорость поворачивается в плоскости, проходящей через вектор набегающей скорости и нормаль к поверхности сильного разрыва так, что удаляется от последней. Все остальные параметры газа — давление, плотность, температура и энтропия — возрастают. Величина разрыва каждого параметра газа при переходе через поверхность сильного разрыва определяется наклоном последней к набегающему потоку; вследствие этого величины разрывов параметров газа на различных линиях тока будут различны. Поток газа поэтому будет уже неизэнтропичным, и на каждой линии тока энтропия будет иметь различные значения, одинаковые впрочем вдоль каждой из них вследствие предположенной адиабатичности процесса с газом при течении последнего вдоль линий тока. В дальнейшем, ввиду искривлённости линий тока, параметры газа вдоль каждой из них будут как-то меняться, за исключением энтропии, приближаясь по мере удаления за телом к предельным значениям p_0', ρ_0', T_0', $\mathbf{v}_0'$, H_0', соответствующим бесконечно удалённой точке за телом. Они вообще не совпадают со значениями этих же параметров газа, соответствующими бесконечно удалённой точке перед телом. Причина этого — в необратимости процесса, происходящего в момент перехода газа через поверхность сильного разрыва.

§ 2. После этих предварительных соображений, дающих общее описание картины обтекания и уточняющих постановку задачи, я перехожу к некоторым количественным соотношениям, необходимым в дальнейшем.

Прежде всего следует отметить существование так называемых уравнений разрывов Гюгонио, регулирующих вполне определённым образом разрывное изменение параметров газа при переходе последнего через поверхность сильного разрыва. Условимся называть ту сторону поверхности сильного разрыва, которая обращена к набегающему потоку, передней стороной поверхности сильного разрыва; другую же её сторону, обращённую к оттекающему потоку, задней стороной её. Если параметр A терпит разрыв при переходе поверхности сильного разрыва, то условимся помечать значение этого параметра на передней стороне поверхности сильного разрыва просто символом этого параметра A; значение этого параметра в той же точке поверхности сильного разрыва, но на задней стороне её условимся обозначать через A′. Величина разрыва этого параметра в данной точке поверхности сильного разрыва определяется так:

$$[A] = A - A'; \tag{1}$$

здесь [ ] есть символ разрыва.

В этих обозначениях уравнения развывов Гюгонио напишутся так:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1}\cdot\frac{p}{\rho}\right] &= 0, \\ [\rho v_n] &= 0, \\ \rho v_n [v_n] &= -[p], \\ [v_s] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь $k = \dfrac{C_p}{C_v}$ — отношение теплоёмкостей газа, а индексы n и s указывают, что берётся проекция на нормаль и касательную плоскость к поверхности сильного разрыва.

Первое из уравнений (2) выражает, как легко видеть, закон сохранения энергии; второе — закон сохранения материи и, наконец, последние два — закон сохранения импульса. В сущности они и могут быть получены из этих соображений.

Из этих уравнений (2) можно получить путём простой алгебраической операции решения системы уравнений величины разрывов v_n, v_s, p и ρ. В самом деле, необходимо только в первом уравнении заменить v^2 через $v_n^2+v_s^2$ и затем, пользуясь (1), заменить v_n', v_s', p' и ρ' через v_n, v_s, p, ρ и $[v_n], [v_s], [p], [\rho]$. В результате получится система четырёх уравнений с четырьмя неизвестными $[v_n]$, $[v_s]$, $[p]$ и $[\rho]$; величины v_n, v_s, p и ρ или, что то же, v, α, p и ρ, где α — угол между вектором скорости на передней стороне поверхности сильного разрыва и нормалью к последней,— считаются известными. Решая эту систему уравнений, получим такие значения для величин разрывов:

$$\left.\begin{aligned} [v_n] &= -\frac{2(kp-\rho v_n^2)}{(k+1)\rho v_n}, \\ [v_s] &= 0, \\ [p] &= \frac{2(kp-\rho v_n^2)}{k+1}, \\ [\rho] &= \frac{2\rho(kp-\rho v_n^2)}{2kp+(k-1)\rho v_n^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Заметим, что при этом решении отбрасываются нулевые корни, как неимеющие реального механического смысла.

Пользуясь уравнением Клапейрона $p=R\rho T$, где $R=J(C_p-C_v)$ — газовая постоянная, а J — механический эквивалент тепла, и уравнениями (3), можно найти величину разрыва температуры:

$$[T]=\frac{2k(p+\rho v_n^2)(kp-\rho v_n^2)}{JC_p(k+1)^2\rho^2 v_n^2}.$$

Равным образом можно найти и весьма важную в дальнейшем величину разрыва энтропии $[H]$. Для этого заметим, что константа C из уравнения Пуассона $p=C\rho^k$ связана с энтропией H таким простым соотношением:

$$H=JC_v\lg C.$$

Отсюда следует, что

$$[H]=JC_v\lg\frac{C}{C'}=JC_v\lg\frac{p\rho'^k}{\rho^k p'}=JC_v\left(\lg\frac{p}{p'}+k\lg\frac{\rho'}{\rho}\right)=$$

$$=JC_v\left(\lg\frac{p}{p-[p]}+k\lg\frac{\rho-[\rho]}{\rho}\right),$$

если воспользоваться (1). Заменив теперь $[p]$ и $[\rho]$ их значениями из (3), можно после элементарных преобразований и упрощений получить такое выражение для величины разрыва энтропии:

$$[H] = J\,C_v \left\{ \lg \frac{(k+1)p}{2\rho v_n^2 - (k+1)p} - k \lg \frac{2kp + (k-1)\rho v_n^2}{(k+1)\rho v_n^2} \right\}. \quad (4)$$

Однако для дальнейшего значительно более удобна иная форма для [H]; она получается очень просто из (4), если ввести угол α (см. выше), а также число Бэрстоу $B_a = \frac{v}{a}$, где a — скорость звука, определяемая по теореме Лапласа: $a^2 = k\frac{p}{\rho}$. Это вполне понятно, если принять во внимание, что на передней стороне поверхности сильного разрыва значения всех параметров газа постоянны и равны их значениям на бесконечности перед телом $p_0, \rho_0, \mathbf{v}_0, T_0$; вдоль поверхности сильного разрыва меняется лишь α в зависимости от её формы. Вот она:

$$[H] = J\,C_v \left\{ \lg \frac{k+1}{2k\,B_a^2 \cos^2\alpha - (k-1)} + k \lg \frac{(k+1) B_a^2 \cos^2\alpha}{(k-1) B_a^2 \cos^2\alpha + 2} \right\}. \quad (5)$$

Здесь, напоминаю, $B_a = \frac{v_0}{a_0}$ и $a_0 = k\frac{p_0}{\rho_0}$. Этой формулой (5) я и буду пользоваться в дальнейшем.

§ 3. В § 1 я указал на то, что вследствие изменения энтропии параметры газа на бесконечности за телом — $\mathbf{v}_0'$, p_0', ρ_0', T_0' H_0' — не совпадают с таковыми же для бесконечности перед телом — $\mathbf{v}_0$, p_0, ρ_0, T_0, H_0. Обычно считают, что вектор скорости не меняется; тогда, как следствие из интеграла Бернулли, вытекает, что температура будет также одинакова. Это я записываю так:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_0' &= \mathbf{v}_0, \\ T_0' &= T_0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Что же касается давления и плотности, то они никак не могут вернуться к своим старым значениям вследствие неадиабатичности процесса с газом в момент перехода его через поверхность сильного разрыва. Их новые значения очень легко связать со старыми через [H]. В самом деле, уравнение Пуассона может быть представлено в таком виде (см. § 2):

$$p_0 = \rho_0^k e^{\frac{H_0}{JC_v}} \quad \text{и} \quad p_0' = \rho_0'^k e^{\frac{H_0'}{JC_v}}$$

или

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \rho_0^{k-1} e^{\frac{H_0}{JC_v}} \quad \text{и} \quad \frac{p_0'}{\rho_0'} = \rho_0'^{k-1} e^{\frac{H_0'}{JC_v}}$$

или, пользуясь уравнением Клапейрона,

$$RT_0 = \rho_0^{k-1} e^{\frac{H_0}{JC_v}} \quad \text{и} \quad RT_0' = \rho_0'^{k-1} e^{\frac{H_0'}{JC_v}}.$$

Деля эти равенства одно на другое и принимая во внимание (6), после небольшого преобразования получаем:

$$\frac{\rho_0'^{k-1}}{\rho_0^{k-1}} = e^{\frac{H_0}{JC_v} - \frac{H_0'}{JC_v}} = e^{\frac{[H]}{JC_v}}$$

на основании (1); а поэтому

$$\frac{\rho_0'}{\rho_0} = e^{\frac{[H]}{R}}.$$

Но так как из уравнения Клапейрона и (6) следует, что $\frac{p_0'}{p_0} = \frac{\rho_0'}{\rho_0}$, то получаются окончательно следующие формулы, определяющие p_0' и ρ_0':

$$\left.\begin{aligned} p_0' &= p_0 e^{\frac{[H]}{R}}, \\ \rho_0 &= \rho_0 e^{\frac{[H]}{R}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Замечу, что так как $[H] < 0$, то p_0' и ρ_0' меньше, чем p_0 и ρ_0 соответственно.

§ 4. Здесь я изложу вывод основной формулы, предполагая однако сперва для простоты существование лишь одной поверхности сильного разрыва.

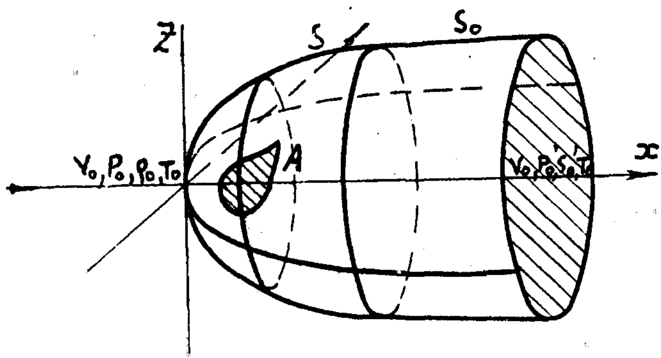

Рис. 1.

Пусть A — обтекаемое тело произвольной формы и ориентации в пространстве (см. рис. 1). Пусть, далее, это тело обтекается газовым потоком сверхзвуковой скорости. $\mathbf{v}_0$, p_0, ρ_0, T_0 суть значения параметров газа на бесконечности перед телом. Они же будут значениями параметров газа и на передней стороне поверхности сильного разрыва, образовавшейся при обтекании тела. Поверхность сильного разрыва мы будем в дальнейшем обозначать через S. Значения параметров газа на бесконечности за телом будут (см. выше § 3) $\mathbf{v}_0$, p_0', ρ_0', T_0. Прямоугольные оси координат я выбираю так, чтобы положительная ось x-ов была направлена параллельно направлению вектора скорости на бесконечности; ось z-ов направлена вертикально вверх и ось y-ов горизонтально назад на чертёж. Положение начала координат безразлично.

Пусть $\mathbf{R}$ — вектор искомого силового воздействия со стороны газа на обтекаемое тело; его компоненты по осям x, y, z суть W, K, L, где W — лобовое сопротивление, K — сносящая сила и L — подъёмная сила. Если $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ суть орты осей координат, то имеет место такое очевидное векторное равенство:

$$\mathbf{R} = W\mathbf{e}_x + K\mathbf{e}_y + L\mathbf{e}_z.$$

Для подсчёта этого вектора **R** я применю теорему импульсов, принимая, однако, при этом во внимание, что она справедлива вообще лишь в том случае, если внутри контрольной поверхности все величины непрерывны. Поэтому я принимаю за контрольную поверхность — поверхность, составленную из задней стороны поверхности сильного разрыва и бесконечно удалённой плоскости S_0, перпендикулярной к оси z-ов.

Если **Q** — вектор потока количества движения сквозь выбранную мной контрольную поверхность, а **P** — вектор потока импульса давлений, то по теореме импульсов следует, что $\mathbf{R}=\mathbf{Q}+\mathbf{P}$. Замечу, что нормаль к контрольной поверхности всюду, как это и следует, берётся внутренняя. Здесь

$$\mathbf{Q}=\iint\limits_{s}\rho v_n \mathbf{v} ds-\iint\limits_{s_0}\rho_0' v_0 dy\,dz\, v_0 \mathbf{e}_x=\iint\limits_{s}\rho v_n \mathbf{v} ds-\mathbf{e}_x v_0^2\iint\limits_{s_0}\rho_0' dy\,dz$$

и

$$\mathbf{P}=\iint\limits_{s} p\,ds\,\mathbf{n}-\iint\limits_{s_0} p_0' dy\,dz\,\mathbf{e}_x=\iint\limits_{s} p\mathbf{n} ds-\mathbf{e}_x\iint\limits_{s_0} p_0' dy\,dz\,.$$

А потому

$$\mathbf{R}=\iint\limits_{s}(\rho v_n \mathbf{v}+p\mathbf{n})\,ds-\mathbf{e}_x\iint\limits_{s_0}(\rho_0' v_0^2+p_0')\,dy\,dz.$$

Пользуясь соотношениями

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_n+\mathbf{v}_s$$

$$p=p_0-[p] \qquad \text{и} \qquad \mathbf{v}_n=\mathbf{v}_{n0}-[\mathbf{v}_n],$$

а также уравнением разрыва $\rho v_n=\rho_0 v_{n0}$ можно преобразовать первый интеграл в формуле для **R** так:

$$\iint\limits_{s}(\rho v_n \mathbf{v}+p\mathbf{n})\,ds=\iint\limits_{s}\{\rho_0 v_{n0}(\mathbf{v}_s+\mathbf{v}_n)+(p_0-[p_0])\mathbf{n}\}\,ds=$$

$$=\iint\limits_{s}\{\rho_0 v_{n0}\mathbf{v}_s+\rho_0 v_{n0}\mathbf{v}_{n0}-\rho v_{n0}[\mathbf{v}_n]+p_0\mathbf{n}-[p]\mathbf{n}\}\,ds=$$

$$=\iint\limits_{s}\{\rho v_{n0}\mathbf{v}_s+\rho_0 v_{n0}\mathbf{v}_{n0}+p_0\mathbf{n}\}\,ds,$$

ибо третий и пятый члены, вследствие третьего уравнения (2), приводятся. Далее, так как $[v_s]=0$ (см. § 2),

то $$\iint\limits_{s}(\rho v_n \mathbf{v}+p\,\mathbf{n})\,ds=\iint\limits_{s}\{\rho_0 v_{n0}\mathbf{v}_{s0}+\rho_0 v_{n0}\mathbf{v}_{n0}+p_0\mathbf{n}\}\,ds.$$

Если обозначить направляющие косинусы внутренней нормали к контрольной поверхности на S через α, β, γ, так что $(\mathbf{n},\ \mathbf{e}_x)=\alpha$, $(\mathbf{n},\ \mathbf{e}_y)=\beta$ и $(\mathbf{n},\ \mathbf{e}_z)=\gamma$, то написав

$$\mathbf{R}=W\mathbf{e}_x+K\mathbf{e}_y+L\mathbf{e}_z=\iint\limits_{s}\{\rho_0 v_{n0}\mathbf{v}_{s0}+\rho_0 v_{n0}\mathbf{v}_{n0}+p_0\mathbf{n}\}\,ds-$$

$$-\mathbf{e}_x\iint\limits_{s_0}(\rho_0' v_0^2+p_0')\,dy\,dz,$$

можно путём скалярного умножения на $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ получить такие три соотношения:

$$W = \iint\limits_{s} \{ \rho_0 v_{n0} (\mathbf{v}_{s_0}, \mathbf{e}_x) + \rho_0 v_{n0} (\mathbf{v}_{n0}, \mathbf{e}_x) + p_0 (\mathbf{n}, \mathbf{e}_x) \} ds -$$

$$- \iint\limits_{s_0} (\rho_0' v_0^2 + p_0') dy\, dz;$$

$$K = \iint\limits_{s} \{ \rho_0 v_{n0} (\mathbf{v}_{s0} \mathbf{e}_y) + \rho_0 v_{n0}, (\mathbf{v}_{n0}, \mathbf{e}_y) + p_0 (\mathbf{n}, \mathbf{e}_y) \} ds;$$

$$L = \iint\limits_{s} \{ \rho_0 v_{n0} (\mathbf{v}_{s0}, \mathbf{e}_z) + \rho_0 v_{n0} (\mathbf{v}_{n0}, \mathbf{e}_z) + p_0 (\mathbf{n}, \mathbf{e}_z) \} ds.$$

Или же, принимая во внимание, что:

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_x, v_{0n} = v_{0\alpha}, \mathbf{v}_{0n} = \mathbf{v}_{0\alpha, n},$$

$$\mathbf{v}_{0s} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0n} = v_0 \mathbf{e}_x - v_{0\alpha} (\alpha \mathbf{e}_x + \beta \mathbf{e}_y + \gamma \mathbf{e}_z) =$$

$$= v_0 (1 - \alpha^2) \mathbf{e}_x - v_0 \alpha\beta \mathbf{e}_y - v_0 \alpha\gamma \mathbf{e}_z,$$

имеем:

$$W = \iint\limits_{s} \{ \rho_0 v_{n0} v_0 (1 - \alpha^2) + \rho_0 v_{n0} v_0 \alpha^2 + p_0 \alpha \} ds - \iint\limits_{s_0} (\rho_0' v_0^2 + p_0') dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{s} \{ \rho_0 v_0^2 \alpha (1 - \alpha^2) + \rho_0 v_0^2 \alpha^3 + p_0 \alpha \} ds - \iint\limits_{s_0} (\rho_0' v_0^2 + p_0') dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{s} (\rho_0 v_0^2 + p_0) \alpha ds - \iint\limits_{s_0} (\rho_0' v_0^2 + p_0') dy\, dz = - \iint\limits_{s} (\rho_0 v_0^2 + p_0) dy\, dz -$$

$$- \iint\limits_{s_0} (\rho_0' v_0^2 + p_0') dy\, dz,$$

$$K = \iint\limits_{s} (- \rho_0 v_0^2 \alpha^2 \beta + \rho_0 v_0^2 \alpha^2 \beta + p_0 \beta) ds = - p_0 \iint\limits_{s} dx\, dz = - p_0 \iint\limits_{s + s_0} dx\, dz,$$

$$L = \iint\limits_{s} (- \rho_0 v_0^2 \alpha^2 \gamma + \rho_0 v_0^2 \alpha^2 \gamma + p_0 \gamma) ds = - p_0 \iint\limits_{s} dx\, dy = - p_0 \iint\limits_{s + s_0} dx\, dy,$$

ибо здесь берётся внутренняя нормаль поверхности сильного разрыва; кроме того $dx = 0$ на поверхности S_0.

Из двух последних формул сразу же вытекает, что

$$\left. \begin{aligned} K &= 0, \\ L &= 0, \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

т. е., что в трёхмерном потоке газа сверхзвуковой скорости при наличии одной только поверхности сильного разрыва сносящая сила K и подъёмная сила L тела, погружённого в этот поток, обращаются в нуль.

Что же касается лобового сопротивления, то выражение для него можно преобразовать так:

$$W = -\iint\limits_{s} (\rho_0 v_0^2 + p_0)\, dy\, dz - \iint\limits_{s_0} (\rho_0 v_0^2 + p_0)(e^{\frac{[H]}{R}} - 1)\, dy\, dz -$$

$$-\iint\limits_{s_0} (\rho_0 v_0^2 + p_0)\, dy\, dz = -\iint\limits_{s+s_0} (\rho_0 v_0^2 + p_0)\, dy\, dz +$$

$$+ (\rho_0 v_0^2 + p_0) \cdot \iint\limits_{s_0} (1 - e^{\frac{[H]}{R}})\, dy\, dz = (\rho_0 v_0^2 + p_0) \iint\limits_{s_0} (1 - e^{\frac{[H]}{R}})\, dy\, dz.$$

Здесь первый интеграл обращается в нуль, как интеграл от постоянной по замкнутой поверхности.

В полученном выражении для W интегрирование распространяется по бесконечно удалённой плоскости S_0. Для его вычисления необходимо знать распределение значений [H] в этой плоскости; последнее требует полного решения газодинамической проблемы обтекания. Для избежания последнего я преобразую этот интеграл в интеграл по поверхности сильного разрыва, где значения [H] зависят только от угла α и таким образом могут считаться известными. Для осуществления этого преобразования я возьму бесконечно тонкую трубку тока поперечного сечения $dy\,dz$ и напишу уравнение неразрывности, пользуясь двумя сечениями её: сечением плоскостью S_0 и поверхностью сильного разрыва. Я имею:

$$\rho_0' v_0 (dy\, dz)_{s_0} = \rho_0 v_{0n}\, ds = \rho_0 v_0 \alpha\, ds = \rho_0 v_0 (dy\, dz)_s.$$

Отсюда следует, если воспользоваться ещё уравнениями (7)

$$(dy\, dz)_{s_0} = e^{-\frac{[H]}{R}} (dy\, dz)_s.$$

Делая замену в полученном интеграле для W, я получаю для лобового сопротивления тела, погружённого в сверхзвуковой поток газа, при наличии одной поверхности сильного разрыва следующее окончательное выражение:

$$W = (\rho_0 v_0^2 + p_0) \iint\limits_{s} (e^{-\frac{[H]}{R}} - 1)\, dy\, dz. \tag{9}$$

Для вычисления с помощью этой формулы величины W необходимо в ней [H] заменить его выражением по формуле (5). Если форма поверхности сильного разрыва S известна, то $\cos^2\alpha$ будет известной функцией y и z, и интеграл может быть вычислен.

§ 5. В начале вывода формул (8) и (9) в § 4 я указывал на то обстоятельство, что теорема импульсов вообще справедлива лишь при отсутствии разрывов внутри контрольной поверхности. Поэтому и контрольная поверхность в изложенном выше выводе была выбрана мною специальным образом. Однако, как это можно показать, существование разрывов, имеющих место на поверхности сильного разрыва внутри контрольной поверхности, несущественно, и теорема импульсов остаётся справедливой, если внутри контрольной поверхности существуют разрывы только что указанного типа.

В самом деле, пусть при решении какой-нибудь задачи контрольная поверхность выбрана так, что часть её представляет собой какую-либо сторону поверхности сильного разрыва, скажем заднюю. Тогда можно показать, что результат приложения теоремы импульсов не изменится, если за контрольную поверхность будет взята какая-либо поверхность, заключающая внутри себя указанную поверхность сильного разрыва. Иллюстрацию этого обстоятельства можно увидеть при выводе формулы (9) в § 4, когда интегрирование по задней стороне поверхности сильного разрыва было заменено интегрированием по её передней стороне, в результате некоторых преобразований.

Доказательство этого положения, которое в дальнейшем для краткости я буду называть теоремой несущественности, весьма просто.

Пусть

$$\iint\limits_{s-}(\rho' v_n' \mathbf{v}' + p'\mathbf{n})\, ds$$

есть та часть общего выражения теоремы импульсов, которая соответствует поверхности сильного разрыва; $\mathbf{n}$ — орт нормали к S, а минус при S и штрихи при буквах указывают на заднюю сторону этой поверхности. Если воспользоваться уравнениями разрывов Гюгонио (2), а также формулой (1) и заметить, что $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_n' + \mathbf{v}_s'$, то интеграл может быть преобразован так:

$$\iint\limits_{s-}\{\rho v_n \mathbf{v}_s - \rho v_n[\mathbf{v}_s] + \rho v_n \mathbf{v}_n - \rho v_n[\mathbf{v}_n] + p\mathbf{n} - [p]\,\mathbf{n}\}\, ds =$$

$$= \iint\limits_{s+}\{\rho v_n(\mathbf{v}_s + \mathbf{v}_n) + p\mathbf{n}\}\, ds,$$

где плюс при S означает переднюю сторону поверхности сильного разрыва; это потому, что все величины, стоящие под интегралом, относятся к передней стороне (все буквы без штрихов); окончательно можно написать так:

$$\iint\limits_{s-}(\rho' v_n' \mathbf{v}' + p\mathbf{n})\, ds = \iint\limits_{s+}(\rho v_n \mathbf{v} + p\mathbf{n})\, ds.$$

Отсюда видно, что интегрирование по одной стороне поверхности сильного разрыва может быть заменено интегрированием по её другой стороне. Это способствует тому, что контрольная поверхность, не включавшая сперва внутри себя поверхности сильного разрыва, может быть заменена без изменения результата иной контрольной поверхностью, уже заключающей внутри себя поверхность сильного разрыва. Этим теорема несущественности доказана.

Совершенно очевидно, что путём повторения эта теорема может быть доказана для произвольного числа поверхности сильного разрыва.

Итак, контрольная поверхность может быть выбрана произвольным образом независимо от того, будет ли она заключать внутри себя поверхности сильного разрыва или нет.

§ 6. Здесь, пользуясь теоремой несущественности, я дам обобщение формул (8) и (9) на случай нескольких поверхностей сильного разрыва, хотя едва ли этот случай представляет практический интерес.

Пусть при обтекании тела A возникает несколько поверхностей сильного разрыва. Рассуждая таким же путём, я возьму за контрольную поверхность при применении теоремы импульсов поверхность, составленную из задней стороны первой поверхности сильного разрыва (счёт поверхности ведётся вдоль по направлению потока) и бесконечно удалённой плоскости, перпендикулярной к оси x-ов; наличие второй, третьей и т. д. поверхностей сильного разрыва внутри выбранной мною контрольной поверхности не играет никакой роли, как это гарантируется теоремой несущественности. Теперь остаётся дословно повторить вывод формул (8) и (9) в § 4 для того, чтобы получить идентичный результат. Здесь опять сносящая сила K и подъёмная сила L получатся равными нулю по той же причине, а для лобового сопротивления W получится следующее выражение, где i есть бегущий номер поверхности сильного разрыва и суммирование распространено на все эти поверхности:

$$W = (\rho_0 v_0^2 + p_0)\iint\limits_{s_1} \left(e^{-\sum\limits_i \frac{[H]}{R}} - 1\right) dy\,dz. \qquad (10)$$

Различие между формулами (9) и (10) проистекает оттого, что p_0' и ρ_0' будут определяться, как это легко сообразить, суммой скачков энтропии на всех последовательных поверхностях сильного разрыва. Каждый $[H]_i$ в формуле (10) для вычисления интеграла должен быть заменён по формуле (4), что требует для принципиальной возможности интегрирования полного решения газодинамической проблемы. Это обстоятельство значительно осложняет задачу и делает формулу (10) мало эффективной. Возможно, что проще было бы интегрировать в формуле (10) не по первой поверхности сильного разрыва S, а по бесконечно удалённой плоскости S_0, переписав формулу (10) в соответственно ином виде:

$$W = (\rho_0 v_0^2 + p_0)\iint\limits_{s_0} \left(1 - e^{\sum\limits_i \frac{[H]}{R}}\right) dy\,dz. \qquad (10\text{ bis})$$

§ 7. Совершенно просто можно получить формулы для подъёмной силы и лобового сопротивления для плоского случая течения газа. Пусть плоскость течения газа есть плоскость xoz. Тогда все величины поголовно, характеризующие состояние газа или его течение, не будут зависеть от y. Если условиться, как это делается обычно, все расчёты вести на толщину газа в направлении оси y-ов, равную принятой единице длины, а также, если заметить, что все поверхности сильного разрыва будут иметь форму цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными оси y-ов, и направляющими, лежащими в плоскости xoz, то, произведя интегрирование по y в формулах (9), (10) и (10 bis) в пределах от 0 до 1, получим формулы для плоского случая течения; совершенно очевидно, что формулы (8) перепишутся без изменения. Вот они:

$$\left.\begin{aligned} &L = 0,\\ &W = (\rho_0 v_0^2 + p_0)\int\limits_s \left(e^{-\frac{[H]}{R}} - 1\right) dz \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

для случая существования одной линии сильного разрыва, S и

$$\left.\begin{aligned} &L = 0,\\ &W = (\rho_0 v_0^2 + p_0)\int\limits_{s_1} \left(e^{-\sum\limits_i \frac{[H]}{R}} - 1\right) dz \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

для случая нескольких линий сильного разрыва. Значения для сносящей силы K нет смысла выписывать, так как в плоском случае течения эта сила вообще не может появиться.

Мне хочется сделать одно замечание в отношении нулевого значения подъёмной силы L. Здесь она равна нулю вследствие того, что поток газа предполагался нециркуляционным. Если отбросить это предположение и сделать самостоятельный вывод, аналогичный выводу в § 4, предположив при этом, что на обтекаемый контур A наложена циркуляция, то для W получается такое же значение (11), а для L значение, аналогичное его значению по классической теореме Жуковского.

§ 8. Из рассмотрения формул (9), (10), (10 bis), (11) и (12) для величины W лобового сопротивления тела, погружённого в сверхзвуковой поток газа, и из вывода этих формул видно, что причина появления отличного от нуля лобового сопротивления лежит в необратимости процесса с газом в момент перехода его через поверхность сильного разрыва и связанным с этим скачкообразным изменением энтропии в сторону её увеличения. Как известно из термодинамики, при необратимом процессе с газом энтропия его возрастает и при этом имеет место диссипация энергии. Сопоставляя этот случай со случаем возникновения лобового сопротивления тела, погружённого в поток вязкой жидкости, легко видеть, что и в этом случае возникновение лобового сопротивления теснейшим образом связано с диссипацией энергии переходом её активной, кинетической формы в пассивную тепловую форму с низкой температурой. Резюмируя, можно сказать, что возникновение лобового сопротивления всегда вызывается существованием некоторого необратимого процесса, связанного с увеличением энтропии и диссипацией. Становясь на такую вполне законную точку зрения, можно и формулу для величины лобового сопротивления написать в иной, значительно более общей форме.

Пусть T представляет собой количество диссипированной энергии на единице площади поверхности сильного разрыва в единицу времени; я предполагаю при этом в связи с приведёнными выше рассуждениями, что диссипация энергии происходит именно на самой поверхности сильного разрыва. Величину T, очевидно, можно назвать плотностью диссипации энергии. Она идентична по своему содержанию известной диссипационной функции Рэлея из теории вязкой жидкости.

Произведение $T\,dt\,ds$, где t — время, а ds — элемент поверхности сильного разрыва, будет представлять собой количество диссипированной энергии на элементе поверхности сильного разрыва за время dt.

Тогда

$$\iint_S T\,dt\,ds\,,$$

где интегрирование распространено по поверхности сильного разрыва, представляет собой полное количество диссипированной энергии за время dt. В согласии с высказанным выше принципом эта величина равна работе против лобового сопротивления за время dt, то есть величина $w\,v_0\,dt$. А поэтому для W получается следующее весьма общее выражение:

$$W = \frac{1}{v_0}\iint_S T\,ds. \tag{13}$$

Из сравнения этой формулы с формулой (9) получается следующее выражение для плотности диссипации энергии:

$$T = (\rho_0 v_0^2 + p_0)\left(e^{-\frac{[H]}{R}} - 1\right) v_{0n}. \tag{14}$$

Такова связь между плотностью диссипации энергии, с одной стороны, и увеличением (разрывным) энтропии текущего газа и его физико-механическими параметрами, с другой стороны.

Возможно, что формула (14) может быть получена из чисто термодинамических соображений в синтезе с механическими; однако именно в этом синтезе заключена главная трудность этого пути решения проблемы лобового сопротивления.