

Ж-55485

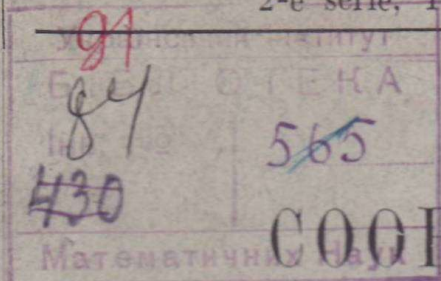
К-583 *кадета прикладной математики*

*№2*

Communications de la Société mathématique de Kharkow.

2-e série, Tome IV, №№ 1 et 2.

*№245.*



СООБЩЕНИЯ

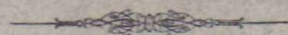
ХАРЬКОВСКАГО

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ IV.

№№ 1 и 2; *3, 4, 5, 6*



ХАРЬКОВЪ.

Типографія и Литографія Зильберберга, Рыбная—№ 25-й.

1893.

*1893-95*

*92*

*67*

Communications de la Société mathématique de Kharkow.  
2-e série, Tome IV.

СООБЩЕНІЯ  
ХАРЬКОВСКАГО

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.



ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ IV.

(Съ портретомъ П. Л. Чебышева).

ХАРЬКОВЪ.

Типографія Зильберберга, Рыбная ул., № 25.

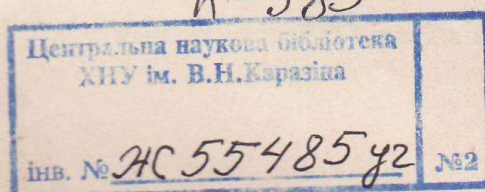
1895.

28584-55-22

6576

На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать  
разрѣшается.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *К. Андреевъ.*



# СОДЕРЖАНІЕ

## IV-го тома.

	Стр.
Составъ Харьковскаго Математическаго Общества къ 1-му Января 1895 г. . . . .	I—II
О числѣ классовъ положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя; <i>В. А. Маркова</i> . .	1—59
Сравненіе способа проф. Н. В. Бугаева съ другими приемами разысканія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій; <i>В. Г. Имшенецкаго</i> . . . . .	60—80
Новый случай интегрируемости дифференціальныхъ уравненій движенія твердаго тѣла въ жидкости; <i>А. М. Ляпунова</i> .	81—85
Исчисленіе положенія; <i>А. И. Богуславскаго</i> . . . . .	86—122
Объ одномъ свойствѣ дифференціальныхъ уравненій задачи о движеніи тяжелаго твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку; <i>А. М. Ляпунова</i> . . . . .	123—140
О высшихъ предѣлахъ корней алгебраическихъ уравненій; <i>П. Н. Рахманова</i> . . . . .	141—145
Извлеченіе изъ письма академика <i>А. А. Маркова</i> къ проф. К. А. Андрееву . . . . .	146—149
Комментарій къ статьѣ академика В. Г. Имшенецкаго о разысканіи раціональныхъ рѣшеній нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій; <i>К. А. Андреева</i> . . . . .	150—160
Дополненіе къ сочиненію „О движеніи твердаго тѣла въ жидкости“; <i>В. А. Стеклова</i> . . . . .	161—164
Къ теоріи осмотическаго давленія; <i>А. П. Грузинцева</i> . .	165—174
По поводу комментарія профессора К. А. Андреева; <i>А. А. Маркова</i> . . . . .	175—176
О разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя; <i>К. А. Андреева</i> . . . . .	177—205
Нѣкоторые результаты наблюденій, произведенныхъ на астрономической обсерваторіи Харьковскаго университета съ маятниками Реберъ-Пашвица; <i>Г. В. Левицкаго</i> . . . . .	206—208

	Стр.
Гипотетическая среда Больцмана и теорія Герца; <i>А. П. Грузинцева</i> . . . . .	209—224
Нахождение алгебраических рациональных рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ алгебраическими рациональными коэффициентами; <i>П. А. Некрасова</i> . . . . .	225—252
Объ автоморфной функціи аналогичной экспонентной; <i>В. П. Алексѣвскаго</i> . . . . .	253—262
Пафнотій Львовичъ Чебышевъ, очеркъ <i>А. М. Ляпунова</i> (съ портретомъ П. Л. Чебышева) . . . . .	263—273
Списокъ сочиненій акад. П. Л. Чебышева . . . . .	274—280
Извлеченіе изъ протоколовъ засѣданій . . . . .	281—291
Приложеніе къ протоколу засѣданія Харьк. Матем. Общ. 10-го Мая 1893 г. . . . .	292—297
Приложеніе къ протоколу засѣданія Харьк. Матем. Общ. 19-го Сентября 1893 г. . . . .	298

# Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му Января 1895 года.

## А. Распорядительный Комитетъ.

1. Предсѣдатель, К. А. Андреевъ.
2. Товарищи предсѣдателя: А. М. Ляпуновъ и В. Л. Кирпичевъ.
3. Секретарь, В. А. Стекловъ.

## В. Почетные члены.

1. Бредихинъ Оеодоръ Александровичъ, академикъ.
2. Бугаевъ Николай Васильевичъ, проф. Моск. унив.

## С. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьк. Технол. Инст.
3. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. унив.
4. Бейеръ Евгеній Ильичъ, почетн. членъ Харьк. унив.
5. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. препод. Староб. гимн.
6. Виноградовъ Иванъ Алексѣевичъ, директ. Харьк. Коммерч. учил.
7. Влезковъ Сергѣй Оеодоровичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
8. Головинъ Харлампій Сергѣевичъ, директоръ С.П.Б. Техн. Инстит.
9. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, проф. Харьк. Техн. Инстит.
10. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумск. Реальн. учил.
11. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
12. Деларю Даніилъ Михайловичъ, бывш. проф. Харьк. унив.
13. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, сверхшт. астрон. Харьк. астр. общ.
14. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
15. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, директ. Харьк. Техн. Инст.
16. Киселевъ Андрей Петровичъ, препод. Воронежск. кадетск. корп.
17. Ключниковъ Александръ Андреевичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
18. Кнаббе Владиміръ Сергѣевичъ, проф. Харьк. Технол. Инст.
19. Ковальскій Матвѣй Оеодоровичъ, проф. Харьк. унив.

20. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. препод. Харьк. прогимн.
21. Котляровъ Михаилъ Григорьевичъ, инспект. народн. уч. Курск. губ.
22. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
23. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Юрьевск. унив.
24. Линицкій Иванъ Дмитріевичъ, препод. инстит. благ. дѣв. въ Харьк.
25. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, проф. Харьк. унив.
26. Маевскій Андрей Васильевичъ, препод. 3-й Харьк. гимн.
27. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, бывш. преп. Харьк. реал. уч.
28. Морозовъ Юрій Ивановичъ, проф. Харьк. унив.
29. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
30. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Новорос. унив.
31. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
32. Предтеченскій Алексѣй Ивановичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
33. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, препод. Харьк. реальн. уч.
34. Раевскій Сергѣй Александровичъ, инспекторъ Харьк. учебн. окр.
35. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
36. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, препод. Урюпинск. реальн. учил.
37. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, препод. Изюмск. реальн. учил.
38. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, стипенд. Харьк. унив.
39. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, препод. 2-й Харьк. гимн.
40. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
41. Струве Людвигъ Оттоновичъ, проф. Харьк. унив.
42. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьк. унив.
43. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лаборантъ Харьк. унив.
44. Флоровъ Петръ Степановичъ, препод. Харьк. реальн. учил.
45. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
46. Шимковъ Андрей Петровичъ, проф. Харьк. унив.
47. Шиховъ Василій Васильевичъ, директоръ Харьк. реальн. учил.
48. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, препод. 2-й Харьк. гимн.
49. Чернай Николай Александровичъ, препод. Харьк. Техн. Инст.

#### D. Члены-корреспонденты.

1. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. С.П.Б. унив.
2. Богуславскій Анатолій Ивановичъ, приватъ-доцентъ Моск. унив.
3. Ермаковъ Василій Петровичъ, проф. унив. Св. Владим.
4. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Моск. унив.
5. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. С.П.Б. унив.
6. Марковъ Андрей Андреевичъ, проф. С.П.Б. унив., академикъ.
7. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. С.П.Б. унив.
8. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. С.П.Б. унив.
9. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, проф. Варш. унив.
10. Тороповъ Константинъ Александровичъ, препод. Пермск. гимн.

# О числѣ классовъ положительныхъ трой- ничныхъ квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя.

В. А. Маркова.

§ 1. Въ 41 томѣ журнала Крелля Эйзенштейнъ далъ безъ доказы-  
тельства формулы для счета числа классовъ положительныхъ тройничныхъ  
квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя съ цѣлыми коэффициентами  
въ тѣхъ случаяхъ, когда опредѣлитель не имѣетъ квадратныхъ дѣли-  
телей кромѣ 1.

Въ настоящей статьѣ я дамъ доказательства этихъ формулъ.

Всѣ формы, о которыхъ будемъ говорить, будемъ предполагать квад-  
ратичными и положительными, а коэффициенты ихъ числами цѣлыми.

Бинарную форму

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

будемъ обозначать для краткости чрезъ

$$(a, b, c).$$

Условимся еще обозначать число цѣлыхъ и положительныхъ рѣше-  
ній уравненія

$$xz - y^2 = d, \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ  $d$  нѣкоторое данное число, такихъ, что

$$z > x > y, \dots \dots \dots (2)$$

$y$  и по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ  $x$  и  $z$  нечетное, чрезъ

$$f(d),$$

а число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній уравненія (1), для которыхъ кромѣ условий (2) имѣютъ мѣсто еще слѣдующія

$$f'_1 \equiv a'_1, f''_1 \equiv a''_1 \dots (\text{mod. } 2), f'_2 \equiv a'_2, f''_2 \equiv a''_2 \dots (\text{mod. } 4), \\ \varphi'_1 > 0, \varphi''_1 > 0 \dots \varphi'_2 \geq 0, \varphi''_2 \geq 0 \dots \varphi'_3 < 0, \varphi''_3 < 0 \dots \varphi'_4 \leq 0, \varphi''_4 \leq 0, \dots, \\ \text{гдѣ}$$

$$a'_1, a''_1, \dots a'_2, a''_2, \dots$$

данныя цѣлыя числа, а

$$f'_1, f''_1, \dots, f'_2, f''_2, \dots, \varphi'_1, \varphi''_1, \dots, \varphi'_2, \varphi''_2, \dots, \varphi'_3, \varphi''_3, \dots, \varphi'_4, \varphi''_4 \dots$$

данныя линейныя функціи отъ  $x, y$  и  $z$  съ цѣлыми коэффициентами, чрезъ

$$f[d, f'_1 \equiv a'_1, \dots, (\text{mod. } 2), f'_2 \equiv a'_2, \dots, (\text{mod. } 4), \varphi'_1 > 0, \dots, \varphi'_2 \geq 0, \dots, \\ \varphi'_3 < 0, \dots, \varphi'_4 \leq 0, \dots]$$

Число чисто-коренныхъ (*proprie primitivae*) классовъ бинарныхъ формъ определителя —  $d$  будемъ обозначать чрезъ

$$h^{(1)}(d),$$

число нечисто-коренныхъ классовъ чрезъ

$$h^{(2)}(d),$$

число чисто-коренныхъ классовъ бинарныхъ формъ определителя —  $d$ , эквивалентныхъ формамъ, у которыхъ коэффициентъ при  $xу$  равенъ нулю, чрезъ

$$\omega^{(1)}(d),$$

а число нечисто-коренныхъ классовъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условиямъ, чрезъ

$$\omega^{(2)}(d).$$

Если  $d$  не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей и кромѣ того

$$d \equiv 1 (\text{mod. } 4)$$

то, какъ извѣстно, всѣ бинарныя формы определителя —  $d$  будутъ чисто-коренныя и раздѣлятся на два такихъ разряда, содержащихъ по одному и тому же числу классовъ

$$\frac{h^{(1)}(d)}{2},$$

что всѣ нечетныя числа, которыя могутъ быть представлены формами перваго разряда, при дѣленіи на 4 даютъ въ остатокъ 1, а всѣ нечетныя

числа, которыя могутъ быть представлены формами второго разряда, при дѣленіи на 4 даютъ въ остаткѣ 3.

Число классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя —  $d$ , принадлежащихъ къ первому разряду и эквивалентныхъ формамъ, въ которыхъ коэффициентъ при  $xy$  равенъ нулю, будемъ обозначать чрезъ

$$\omega_1(d),$$

а число классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя —  $d$ , принадлежащихъ ко второму разряду и удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$\omega_2(d).$$

Замѣтимъ еще, что двѣ формы нечисто (improprie) эквивалентныя всегда принадлежатъ къ одному и тому же разряду и что число

$$a + c - 2b$$

представляется бинарною формою  $(a, b, c)$  при

$$x = 1, \quad y = -1.$$

§ 2. Лемма 1. Каково бы ни было нечетное и положительное число  $d$ , не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1, имѣетъ мѣсто равенство

$$f(d) = h^{(1)}(d) - \omega^{(1)}(d);$$

если же

$$d \equiv 1 \pmod{4},$$

то кромѣ того

$$f[d, x + z - 2y \equiv 1 \pmod{4}] = \frac{h^{(1)}(d)}{2} - \omega_1(d),$$

$$f[d, x + z - 2y \equiv 3 \pmod{4}] = \frac{h^{(1)}(d)}{2} - \omega_2(d).$$

Доказательство. Какъ извѣстно, каждая бинарная форма опредѣлителя —  $d$  эквивалентна нѣкоторой приведенной формѣ  $(a, b, c)$  Гаусса или Лагранжа, т. е. такой, для которой

$$c \geq a \geq 2b.$$

Двѣ же различныя приведенныя формы  $(a, b, c)$  и  $(a', b', c')$  эквивалентны только тогда, когда или

$$a = c = a' = c', \quad b' = -b,$$

или

$$a = a', \quad b = -b', \quad c = c', \quad a = |2b|^{(1)}.$$

<sup>1)</sup> Чрезъ  $|A|$  мы обозначаемъ абсолютную величину числа  $A$ .

Исключимъ изъ числа приведенныхъ формъ определителя —  $d$  нечисто-коренныя (такъ какъ определитель —  $d$  не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1, то всѣ формы определителя —  $d$  коренныя) и тѣ изъ чисто-коренныхъ, для которыхъ или

$$b = 0,$$

или

$$a = c, \quad b < 0,$$

или

$$a = -2b.$$

Тогда между оставшимися приведенными формами определителя —  $d$  будетъ заключаться по одной и только одной формѣ изъ каждаго чисто-коренного класса бинарныхъ формъ определителя —  $d$ , не содержащаго формы, въ которой коэффициентъ при  $xy$  равенъ нулю.

Всѣ эти формы разобьемъ на четыре слѣдующія группы:

- 1)  $b$  нечетное и положительное,
- 2)  $b$  нечетное и отрицательное,
- 3)  $b$  четное и положительное,
- 4)  $b$  четное и отрицательное.

Такъ какъ не чисто-коренныя формы исключены, то въ формахъ первыхъ двухъ группъ одно и только одно изъ чиселъ  $a$  и  $c$  четное, а въ формахъ двухъ послѣднихъ группъ оба числа  $a$  и  $c$  нечетныя.

Если

$$d \equiv 1 \pmod{4},$$

то число формъ первой группы, принадлежащихъ къ первому изъ упомянутыхъ въ § 1 разрядовъ, очевидно, равно

$$f[d, x + z - 2y \equiv 1 \pmod{4}, x - 2y \geq 0],$$

а число формъ первой группы, принадлежащихъ ко второму разряду, равно

$$f[d, x + z - 2y \equiv 3 \pmod{4}, x - 2y \geq 0].$$

Число же всѣхъ формъ первой группы, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod{4},$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

равно

$$f(d, x - 2y \geq 0).$$

Каждая форма  $(a, b, c)$  второй группы, для которой  $a$  число четное, посредством подстановки

$$x = \xi + \eta,$$

$$y = \eta$$

переходить въ бинарную форму  $(a', b', c')$  такую, что

$$c' = a + c + 2b > a' = a > b' = a + b, \quad c' > 2b' > a',$$

$a'$  четное,  $b'$  и  $c'$  нечетныя,

и обратно, каждая бинарная форма  $(a', b', c')$  такая, что

$$c' > a' > b', \quad c' > 2b' > a',$$

$a'$  четное,  $b'$  и  $c'$  нечетныя,

посредствомъ подстановки

$$x = \xi - \eta,$$

$$y = \eta$$

переходить въ форму второй группы, для которой  $a$  число четное.

Поэтому при

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

число формъ второй группы, принадлежащихъ къ первому разряду, для которыхъ  $a$  число четное, равно

$$f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, x + z - 2y \equiv 1 \pmod{4}, z - 2y > 0, x - 2y < 0],$$

число формъ второй группы, принадлежащихъ ко второму разряду, для которыхъ  $a$  число четное, равно

$$f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, x + z - 2y \equiv 3 \pmod{4}, z - 2y > 0, x - 2y < 0].$$

Число же всѣхъ формъ второй группы, для которыхъ  $a$  число четное, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod{4},$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

равно

$$f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, z - 2y > 0, x - 2y < 0].$$

Каждая форма второй группы, для которой  $a$  число нечетное и, следовательно,  $c$  число четное, посредством нечистой (improper) подстановки

$$\begin{aligned}x &= \eta, \\y &= \xi + \eta\end{aligned}$$

переходить въ бинарную форму  $(a', b', c')$  такую, что

$$\begin{aligned}c' &= a + c + 2b > a' = c > b' = c + b, & 2b' > c', \\a' &\text{ четное, } & b' \text{ и } c' \text{ нечетныя,}\end{aligned}$$

и обратно каждая бинарная форма  $(a', b', c')$  такая, что

$$\begin{aligned}c' &> a' > b', & 2b' > c', \\a' &\text{ четное, } & b' \text{ и } c' \text{ нечетныя,}\end{aligned}$$

посредствомъ нечистой подстановки

$$\begin{aligned}x &= -\xi + \eta, \\y &= \xi\end{aligned}$$

переходить въ форму второй группы, для которой  $a$  число нечетное.

Поэтому при

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

число формъ второй группы, принадлежащихъ къ первому разряду, для которыхъ  $a$  число нечетное, равно

$$f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, x + z - 2y \equiv 1 \pmod{4}, z - 2y < 0],$$

а число формъ второй группы, принадлежащихъ ко второму разряду, для которыхъ  $a$  число нечетное, равно

$$f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, x + z - 2y \equiv 3 \pmod{4}, z - 2y < 0].$$

Число же всѣхъ формъ второй группы, для которыхъ  $a$  число нечетное, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod{4},$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

равно

$$f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, z - 2y < 0].$$

Каждая форма  $(a, b, c)$  третьей группы посредством подстановки

$$\begin{aligned}x &= -\eta, \\y &= \xi + \eta\end{aligned}$$

переходить в бинарную форму  $(a', b', c')$  такую, что

$$\begin{aligned}c' &= a + c - 2b > a' = c > b' = c - b, & 2b' \geq c', \\a' \text{ и } b' &\text{ нечетныя,} & c' \text{ четное,}\end{aligned}$$

и обратно, каждая бинарная форма  $(a', b', c')$  такая, что

$$\begin{aligned}c' &> a' > b', & 2b' \geq c', \\a' \text{ и } b' &\text{ нечетныя,} & c' \text{ четное,}\end{aligned}$$

посредством подстановки

$$\begin{aligned}x &= \xi + \eta, \\y &= -\xi\end{aligned}$$

переходить в форму третьей группы.

Поэтому при

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

число форм третьей группы, принадлежащих к первому разряду, равно

$$f[d, x \equiv 1 \pmod{2}, x + z - 2y \equiv 1 \pmod{4}, z - 2y \leq 0],$$

а число форм третьей группы, принадлежащих ко второму разряду, равно

$$f[d, x \equiv 1 \pmod{2}, x + z - 2y \equiv 3 \pmod{4}, z - 2y \leq 0].$$

Число же всех форм третьей группы, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod{4},$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

равно

$$f[d, x \equiv 1 \pmod{2}, z - 2y \leq 0].$$

Каждая форма четвертой группы посредством подстановки

$$\begin{aligned}x &= \xi + \eta, \\y &= \eta\end{aligned}$$

переходить въ бинарную форму  $(a', b', c')$  такую, что

$$c' = a + c + 2b > a' = a > b' = a + b, \quad a' < 2b' < c',$$

$$a' \text{ и } b' \text{ нечетныя,} \quad c' \text{ четное,}$$

и обратно, каждая бинарная форма  $(a', b', c')$  такая, что

$$c' > a' > b', \quad a' < 2b' < c',$$

$$a' \text{ и } b' \text{ нечетныя,} \quad c' \text{ четное,}$$

посредствомъ подстановки

$$x = \xi - \eta,$$

$$y = \eta$$

переходить въ форму четвертой группы.

Поэтому при

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

число формъ четвертой группы, принадлежащихъ къ первому разряду, равно

$$f[d, x \equiv 1 \pmod{2}, x + z - 2y \equiv 1 \pmod{4}, z - 2y > 0, x - 2y < 0],$$

а число формъ четвертой группы, принадлежащихъ ко второму разряду, равно

$$f[d, x \equiv 1 \pmod{2}, x + z - 2y \equiv 3 \pmod{4}, z - 2y > 0, x - 2y < 0].$$

Число же всѣхъ формъ четвертой группы, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod{4},$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

равно

$$f[d, x \equiv 1 \pmod{2}, z - 2y > 0, x - 2y < 0].$$

Принимая во вниманіе все изложенное, заключаемъ, что при

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

число

$$\frac{h^{(1)}(d)}{2} - \omega_1(d),$$

равное числу формъ всѣхъ четырехъ группъ, принадлежащихъ къ первому разряду, равно

$$\begin{aligned}
 & f[d, x+z-2y \equiv 1 \pmod{4}, x-2y \geq 0] + \\
 & + f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, x+z-2y \equiv 1 \pmod{4}, z-2y > 0, x-2y < 0] + \\
 & + f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, x+z-2y \equiv 1 \pmod{4}, z-2y < 0] + \\
 & + f[d, x \equiv 1 \pmod{2}, x+z-2y \equiv 1 \pmod{4}, z-2y \leq 0] + \\
 & + f[d, x \equiv 1 \pmod{2}, x+z-2y \equiv 1 \pmod{4}, z-2y > 0, x-2y < 0] = \\
 & = f[d, x+z-2y \equiv 1 \pmod{4}],
 \end{aligned}$$

а число

$$\frac{h^{(1)}(d)}{2} - \omega_2(d),$$

равное числу формъ всѣхъ четырехъ группъ, принадлежащихъ ко второму разряду, равно

$$\begin{aligned}
 & f[d, x+z-2y \equiv 3 \pmod{4}, x-2y \geq 0] + \\
 & + f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, x+z-2y \equiv 3 \pmod{4}, z-2y > 0, x-2y < 0] + \\
 & + f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, x+z-2y \equiv 3 \pmod{4}, z-2y < 0] + \\
 & + f[d, x \equiv 1 \pmod{2}, x+z-2y \equiv 3 \pmod{4}, z-2y \leq 0] + \\
 & + f[d, x \equiv 1 \pmod{2}, x+z-2y \equiv 3 \pmod{4}, z-2y > 0, x-2y < 0] = \\
 & = f[d, x+z-2y \equiv 3 \pmod{4}].
 \end{aligned}$$

Число же

$$h^{(1)}(d) - \omega^{(1)}(d),$$

равное числу всѣхъ формъ всѣхъ четырехъ группъ, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod{4},$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

равно

$$\begin{aligned}
 & f[d, x-2y \geq 0] + f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, z-2y > 0, x-2y < 0] + \\
 & + f[d, x \equiv 0 \pmod{2}, z-2y < 0] + \\
 & + f[d, x \equiv 1 \pmod{2}, z-2y \leq 0] + \\
 & + f[d, x \equiv 1 \pmod{2}, z-2y > 0, x-2y < 0] = f(d).
 \end{aligned}$$

§ 3. Лемма 2. Каково бы ни было цѣлое и положительное число  $d$ , не являющееся квадратнымъ дѣлителемъ кромѣ 1 и удовлетворяющее сравненію

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$f[d, x + z - 2y \equiv 1 \pmod{4}] = f[d, x + z - 2y \equiv 3 \pmod{4}] = \\ = \frac{h^{(1)}(d) - \omega^{(1)}(d)}{2}.$$

Доказательство. Прежде всего замѣтимъ, что если рѣшеніе

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

уравненія (1) въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ таково, что  $\eta$  и одно изъ чиселъ  $\xi$  и  $\zeta$  нечетныя, то одно изъ чиселъ  $\xi$  и  $\zeta$  дѣлится на 4.

Дѣйствительно, изъ равенства

$$\xi\zeta - \eta^2 = d$$

и сравненій

$$-\eta^2 \equiv 3, \quad d \equiv 3 \pmod{4}$$

вытекаетъ сравненіе

$$\xi\zeta \equiv 0 \pmod{4},$$

которое и показываетъ, что одно изъ чиселъ  $\xi$  и  $\zeta$  дѣлится на 4.

Каждому рѣшенію

$$x = \xi_1, \quad y = \eta_1, \quad z = \zeta_1 \dots \dots \dots (3)$$

уравненія (1) въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ такому, что

$$\zeta_1 > \xi_1 > \eta_1,$$

$$\xi_1 \text{ и } \eta_1 \text{ нечетныя, } \zeta_1 \text{ четное,}$$

соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$\left. \begin{aligned} x = \xi'_1 &= \text{меньшему изъ чиселъ } \zeta_1 \text{ и } \xi_1 + \zeta_1 - 2\eta_1, \\ y = \eta'_1 &= \zeta_1 - \eta_1, \\ z = \zeta'_1 &= \text{большему изъ чиселъ } \zeta_1 \text{ и } \xi_1 + \zeta_1 - 2\eta_1 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

такое, что

$$\zeta'_1 > \xi'_1 > \eta'_1,$$

$$\eta'_1 \text{ и одно изъ чиселъ } \xi'_1 \text{ и } \zeta'_1 \text{ нечетныя,}$$

$$\xi'_1 + \zeta'_1 - 2\eta'_1 = \xi_1 \equiv \xi_1 + \zeta_1 - 2\eta_1 + 2 \pmod{4},$$

а каждому рѣшенію

$$x = \xi_2, \quad y = \eta_2, \quad z = \zeta_2 \dots \dots \dots (5)$$

уравненія (1) въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ такому, что

$$\zeta_2 > \xi_2 > \eta_2,$$

$\xi_2$  четное,  $\eta_2$  и  $\zeta_2$  нечетныя,

соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi'_2 = \text{меньшему изъ чиселъ } \xi_2 \text{ и } \xi_2 + \zeta_2 - 2\eta_2, \\ x &= \eta'_2 = \xi_2 - \eta_2, \\ z &= \zeta'_2 = \text{большому изъ чиселъ } \xi_2 \text{ и } \xi_2 + \zeta_2 - 2\eta_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

такое, что

$$\zeta'_2 > \xi'_2 > \eta'_2,$$

$\eta'_2$  и одно изъ чиселъ  $\xi'_2$  и  $\zeta'_2$  нечетныя,

$$\xi'_2 + \zeta'_2 - 2\eta'_2 = \zeta_2 \equiv \xi_2 + \zeta_2 - 2\eta_2 + 2 \pmod{4}.$$

Притомъ рѣшенія (6), получаемыя по указанному сейчасъ способу изъ рѣшеній (5), отличны отъ рѣшеній (4), получаемыхъ по указанному выше способу изъ рѣшеній (3).

Дѣйствительно, изъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 + \zeta_2 - 2\eta_2 &= \xi_1 + \zeta_1 - 2\eta_1, \\ \xi_2 - \eta_2 &= \xi_1 - \eta_1, \\ \xi_2 &= \xi_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

вытекаютъ, какъ слѣдствія, равенства

$$\xi_2 = \xi_1, \quad \eta_2 = \eta_1, \quad \zeta_2 = \xi_1,$$

которыя невозможны, такъ какъ

$$\xi_1 > \xi_1, \quad \zeta_2 > \xi_2,$$

а потому и равенства (7) невозможны. Равенства же

$$\xi_2 = \xi_1 + \zeta_1 - 2\eta_1,$$

$$\xi_2 - \eta_2 = \xi_1 - \eta_1,$$

$$\xi_2 + \zeta_2 - 2\eta_2 = \xi_1$$

невозможны потому, что  $\xi_2$  число четное, а  $\xi_1 + \zeta_1 - 2\eta_1$  число нечетное.

Также очевидно, что рѣшенія (4), получаемыя изъ различныхъ рѣшеній (3), различны между собою, а рѣшенія (6), получаемыя изъ различныхъ (5), различны между собою.

Принимая во вниманіе все сказанное, заключаемъ, что

$$\begin{aligned} f[d, x + z - 2y \equiv 1 \pmod{4}] &= f[d, x + z - 2y \equiv 3 \pmod{4}] = \\ &= \frac{h^{(1)}(d) - \omega^{(1)}(d)}{2}. \end{aligned}$$

§ 4. Лемма 3. Пусть  $P$  нечетное число, большее 1 и не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1.

Обозначимъ число разложеній  $P$  на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

такихъ, что

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod{4},$$

черезъ

$$\Phi(P),$$

число остальныхъ разложеній  $P$  на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

черезъ

$$\Psi(P),$$

а число всѣхъ разложеній  $P$  на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

черезъ

$$\psi(P).$$

Пусть, далѣе,  $d$  будетъ дѣлитель числа  $P$ , удовлетворяющій сравненію

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

и отличный отъ 1; мы положимъ

$$\Omega_1(d) = \omega_1(d), \quad \Omega_2(d) = \omega_2(d),$$

если

$$P \equiv 1 \pmod{4},$$

и

$$\Omega_1(d) = \omega_2(d), \quad \Omega_2(d) = \omega_1(d),$$

если

$$P \equiv 3 \pmod{4}.$$

Пусть, наконецъ, въ суммѣ

$$\sum \omega^{(1)}(d)$$

суммирование распространяется на все дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1, въ суммѣ

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2}$$

суммирование распространяется на все дѣлители  $d$  числа  $P$ , удовлетворяющіе сравненію

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

а въ суммахъ

$$\sum_1 \Omega_1(d) \quad \text{и} \quad \sum_1 \Omega_2(d)$$

суммирование распространяется на все дѣлители  $d$  числа  $P$ , удовлетворяющіе сравненію

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

и отличные отъ 1.

Въ такомъ случаѣ

$$\sum \omega^{(1)}(d) = 3\psi(P) + 1,$$

и кромѣ того

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_1(d) = 3\Phi(P) + \Psi(P) + 1,$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_2(d) = 2\Psi(P),$$

если

$$P \equiv 1 \pmod{4};$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_1(d) = 3\Phi(P) + \Psi(P) + \frac{1}{2},$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_2(d) = 2\Psi(P) + \frac{1}{2},$$

если

$$P \equiv 3 \pmod{4}.$$

Доказательство. Сумма

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2}$$

равна половинѣ числа приведенныхъ формъ Гаусса, опредѣлители —  $d$  которыхъ, взятые съ обратными знаками, дѣлятъ  $P$  и удовлетворяютъ сравненію

$$d \equiv 3 \pmod{4},$$

и въ которыхъ коэффициентъ при  $xy$  равенъ нулю.

Совокупность этихъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(X).$$

Сумма

$$\sum_1 \Omega_1(d)$$

равна числу приведенныхъ формъ Гаусса, опредѣлители —  $d$  которыхъ дѣлятъ  $P$ , удовлетворяютъ сравненію

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

и отличны отъ 1, въ которыхъ коэффициентъ при  $xy$  равенъ нулю и которые принадлежатъ къ первому или второму изъ упомянутыхъ въ § 1 разрядовъ, смотря по тому, будетъ-ли

$$P \equiv 1 \pmod{4}$$

или

$$P \equiv 3 \pmod{4}.$$

Совокупность всѣхъ этихъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(Y).$$

Сумма

$$\sum_1 \Omega_2(d)$$

равна числу приведенныхъ формъ Гаусса, опредѣлители —  $d$  которыхъ дѣлятъ  $P$ , удовлетворяютъ сравненію

$$d \equiv 1 \pmod{4}$$

и отличны отъ 1, въ которыхъ коэффициентъ при  $xy$  равенъ нулю и которые принадлежатъ ко второму или первому разряду, смотря по тому, будетъ-ли

$$P \equiv 1 \pmod{4}$$

или

$$P \equiv 3 \pmod{4}.$$

Совокупность всѣхъ этихъ послѣднихъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(Z).$$

Наконецъ сумма

$$\sum \omega^{(1)}(d)$$

равна числу формъ, заключающихся во всѣхъ трехъ совокупностяхъ  $(X)$ ,  $(Y)$  и  $(Z)$ .

Каждому разложенію  $P$  на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три формы  $(a, 0, c)$  изъ совокупностей  $(X)$ ,  $(Y)$  и  $(Z)$ :

$$1) a = d_1, \quad c = d_2, \text{ опредѣлителя } - d_1 d_2,$$

$$2) a = d_2, \quad c = d_3, \text{ опредѣлителя } - d_2 d_3,$$

$$3) a = d_1, \quad c = d_3, \text{ опредѣлителя } - d_3 d_1.$$

Всѣ эти формы принадлежатъ къ совокупности  $(Y)$ , если

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod{4}.$$

Во всѣхъ же остальныхъ случаяхъ двѣ формы принадлежатъ къ совокупности  $(X)$  и одна къ совокупности  $(Z)$ .

Разложенію

$$P = 1.1.P$$

соотвѣтствуетъ одна форма  $(a, 0, c)$  изъ совокупностей  $(X)$ ,  $(Y)$  и  $(Z)$ ,

$$a = 1, \quad c = P, \text{ опредѣлителя } - P,$$

которая принадлежитъ къ совокупности  $(X)$  или  $(Y)$ , смотря по тому, будетъ-ли

$$P \equiv 3 \pmod{4}$$

или

$$P \equiv 1 \pmod{4}.$$

Кромѣ получающихся по указаннымъ сейчасъ способамъ изъ различныхъ разложеній  $P$  на три множителя формъ, принадлежащихъ къ совокупностямъ  $(X)$ ,  $(Y)$  и  $(Z)$ , другихъ нѣтъ.

Поэтому при

$$P \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \mathcal{Q}_1(d) = 3\Phi(P) + \Psi(P) + 1,$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \mathcal{Q}_2(d) = 2\Psi(P),$$

при

$$P \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_1(d) = 3\Phi(P) + \Psi(P) + \frac{1}{2},$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_2(d) = 2\Psi(P) + \frac{1}{2},$$

и наконецъ, какъ при

$$P \equiv 1 \pmod{4},$$

такъ и при

$$P \equiv 3 \pmod{4},$$

$$\sum \omega^{(1)}(d) = 3\psi(P) + 1.$$

§ 5. **Лемма 4.** *Каково бы ни было четное и положительное число  $d$ , не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1, имѣетъ мѣсто равенство*

$$f(d) = \frac{h^{(1)}(d) - \omega^{(1)}(d)}{2}.$$

*Доказательство.* Такъ какъ  $d$  число четное и не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей, то всѣ формы опредѣлителя  $-d$  чисто-коренныя.

Такъ какъ, далѣе, уравненія

$$x^2 - y^2 = d,$$

$$y(2z - y) = d$$

не имѣютъ рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ, то между формами  $(a, b, c)$  опредѣлителя  $-d$  нѣтъ ни такихъ, для которыхъ

$$a = c,$$

ни такихъ, для которыхъ

$$a = |2b|,$$

и, слѣдовательно, между приведенными формами Гаусса опредѣлителя  $-d$  нѣтъ эквивалентныхъ между собою.

Разобьемъ всѣ приведенныя формы Гаусса опредѣлителя  $-d$ , для которыхъ коэффициентъ при  $xy$  не равенъ нулю, на 6 группъ:

- 1)  $b$  нечетное и положительное,  $a$  и  $c$  нечетныя,
- 2)  $b$  нечетное и отрицательное,  $a$  и  $c$  нечетныя,
- 3)  $b$  четное и положительное,  $a$  четное,  $c$  нечетное,
- 4)  $b$  четное и отрицательное,  $a$  четное,  $c$  нечетное,
- 5)  $b$  четное и положительное,  $a$  нечетное,  $c$  четное,
- 6)  $b$  четное и отрицательное,  $a$  нечетное,  $c$  четное.

Очевидно, что число формъ второй группы равно числу формъ первой группы, число формъ четвертой группы равно числу формъ третьей группы, а число формъ шестой группы равно числу формъ пятой группы.

Число формъ первой группы очевидно равно

$$f(d, x - 2y > 0) = f(d, x - 2y \geq 0).$$

Каждая форма  $(a, b, c)$  третьей группы посредствомъ подстановки

$$x = -\eta,$$

$$y = \xi + \eta,$$

переходить въ бинарную форму  $(a', b', c')$  такую, что

$$c' = a + c - 2b > a' = c > b' = c - b, \quad 2b' > c',$$

$a', b'$  и  $c'$  нечетныя,

и обратно, каждая бинарная форма  $(a', b', c')$  такая, что

$$c' > a' > b', \quad 2b' > c',$$

$a', b'$  и  $c'$  нечетныя,

переходить посредствомъ подстановки

$$x = \xi + \eta,$$

$$y = -\xi,$$

въ форму третьей группы.

Поэтому число формъ третьей группы равно

$$f(d, z - 2y < 0) = f(d, z - 2y \leq 0).$$

Каждая форма  $(a, b, c)$  шестой группы посредствомъ подстановки

$$x = \xi + \eta,$$

$$y = \eta,$$

переходить въ бинарную форму  $(a', b', c')$  такую, что

$$c' = a + c + 2b > a' = a > b' = a + b, \quad c' > 2b' > a',$$

$a', b'$  и  $c'$  нечетныя,

и обратно, каждая бинарная форма  $(a', b', c')$  такая, что

$$c' > a' > b', \quad c' > 2b' > a',$$

$a', b'$  и  $c'$  нечетныя,

ЖС 5548542

посредствомъ подстановки

$$x = \xi - \eta,$$

$$y = \eta,$$

переходить въ форму шестой группы.

Поэтому число формъ шестой группы равно

$$f(d, z - 2y > 0, x - 2y < 0).$$

Число же

$$\frac{h^{(1)}(d) - \omega^{(1)}(d)}{2},$$

равное половинѣ числа всѣхъ шести группъ, равно

$$f(d, x - 2y \geq 0) + f(d, z - 2y \leq 0) + f(d, z - 2y > 0, x - 2y < 0) = f(d).$$

§ 6. Лемма 5. Каково бы ни было нечетное и положительное число  $P > 1$ ,

$$\sum \omega^{(1)}(2d) = 2 \sum \omega^{(1)}(d) = 2 [\zeta \psi(P) + 1],$$

причемъ суммирование распространяется на все дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

Доказательство. Сумма

$$\sum \omega^{(1)}(2d)$$

равна числу приведенныхъ бинарныхъ формъ Гаусса, определители которыхъ четные, дѣлятся  $2P$  и отличны отъ 2, и въ которыхъ коэффициентъ при  $xy$  равенъ нулю.

Совокупность всѣхъ такихъ формъ обозначимъ чрезъ (A).

Сумма

$$\sum \omega^{(1)}(d)$$

равна числу приведенныхъ бинарныхъ формъ Гаусса, определители которыхъ дѣлятся  $P$  и отличны отъ 1, и въ которыхъ коэффициентъ при  $xy$  равенъ нулю.

Совокупность всѣхъ такихъ формъ обозначимъ чрезъ (B).

Каждой формѣ

$$ax^2 + cy^2$$

изъ совокупности (B) соответствуютъ двѣ формы:

$$ax^2 + 2cy^2,$$

$$a'x^2 + c'y^2,$$

гдѣ

$a'$  равно меньшему изъ чиселъ  $2a$  и  $c$ ,

$c'$  равно большему изъ чиселъ  $2a$  и  $c$ ,

изъ совокупности  $(A)$ .

Кромѣ получаемыхъ по указанному сейчасъ способу изъ формъ совокупности  $(B)$  въ совокупности  $(A)$  другихъ нѣтъ.

Поэтому

$$\sum \omega^{(1)}(2d) = 2 \sum \omega^{(1)}(d) = 2 [3\psi(P) + 1].$$

§ 7. Будемъ называть, слѣдую Зеллингу, тройничную форму

$$g(y-z)^2 + h(z-x)^2 + k(x-y)^2 + lx^2 + my^2 + nz^2$$

приведенною, если между числами

$$\left. \begin{matrix} g, h, k, \\ l, m, n \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

нѣтъ отрицательныхъ \*).

Всѣ приведенныя формы даннаго опредѣлителя

$$D = gl(h+k+m+n) + hm(k+g+n+l) + kn(g+h+l+m) + \\ + g(hn+km) + l(hk+mn),$$

который мы предположимъ  $> 1$ , разобьемъ на пять группъ перваго порядка:

- 1) ни одно изъ чиселъ таблицы (8) не равно нулю;
- 2) одно и только одно изъ этихъ чиселъ равно нулю;
- 3) два числа, стоящія въ одномъ столбцѣ таблицы (8), равны нулю, всѣ прочія числа этой таблицы отличны отъ нуля;
- 4) два числа таблицы (8), не стоящія въ одномъ столбцѣ, равны нулю, всѣ прочія числа этой таблицы отличны отъ нуля;
- 5) три числа таблицы (8) равны нулю.

Приведенныя формы второй группы перваго порядка разобьемъ на шесть группъ втораго порядка:

- 1)  $g=0$ , 2)  $h=0$ , 3)  $k=0$ , 4)  $l=0$ , 5)  $m=0$ , 6)  $n=0$ .

\*) Въ этомъ параграфѣ и слѣдующихъ мы предполагаемъ, что читатель знакомъ съ первой частью мемуара Зеллинга: „Des formes quadratiques binaires et ternaires“ (Journ. de Liouville, 1877), или съ тремя первыми главами сочиненія Борисова: „О приведеніи положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ по способу Зеллинга“.

Приведенные формы третьей группы первого порядка разобьем на три группы второго порядка:

$$1) g=l=0, \quad 2) h=m=0, \quad 3) k=n=0.$$

Приведенные формы четвертой группы первого порядка разобьем на двенадцать групп второго порядка:

$$\begin{aligned} 1) g=h=0, \quad 5) h=k=0, \quad 8) k=l=0, \quad 10) l=m=0, \quad 12) m=n=0. \\ 2) g=k=0, \quad 6) h=l=0, \quad 9) k=m=0, \quad 11) l=n=0, \\ 3) g=m=0, \quad 7) h=n=0, \\ 4) g=n=0, \end{aligned}$$

Приведенные формы пятой группы первого порядка разобьем на шестнадцать групп второго порядка:

$$\begin{aligned} 1) g=h=k=0, \quad 9) h=k=m=0, \quad 14) k=l=m=0, \\ 2) g=h=l=0, \quad 10) h=k=n=0, \quad 15) k=l=n=0, \\ 3) g=h=m=0, \quad 11) h=l=m=0, \quad 16) k=m=n=0. \\ 4) g=k=l=0, \quad 12) h=l=n=0, \\ 5) g=k=n=0, \quad 13) h=m=n=0, \\ 6) g=l=m=0, \\ 7) g=l=n=0, \\ 8) g=m=n=0, \end{aligned}$$

(Случаи

$$1) g=h=n=0, \quad 2) g=k=m=0, \quad 3) h=k=l=0, \quad 4) l=m=n=0$$

невозможны).

Обозначим число чисто-коренных классов тройничных форм определителя  $D$  чрез

$$H^{(1)}(D),$$

а число нечисто-коренных классов чрез

$$H^{(2)}(D),$$

число чисто-коренных классов тройничных форм определителя  $D$ , эквивалентных приведенным формам  $i$ -ой группы первого порядка и таких, что число  $\mu$  подстановок, посредством которых форма переходит сама в себя, равно  $\alpha$ , чрез

$$H_i^{(1)}(D, \alpha),$$

число нечисто-коренных классовъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$H_i^{(2)}(D, \alpha),$$

число различныхъ чисто-коренныхъ приведенныхъ формъ, принадлежащихъ къ  $i$ -ой группѣ 1-го порядка, для которыхъ  $\mu = \alpha$ , чрезъ

$$F_i^{(1)}(D, \alpha),$$

число различныхъ нечисто-коренныхъ формъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$F_i^{(2)}(D, \alpha),$$

наконецъ число чисто-коренныхъ приведенныхъ формъ, принадлежащихъ къ  $i$ -ой группѣ перваго порядка и  $j$ -ой группѣ втораго порядка, для которыхъ  $\mu = \alpha$ , чрезъ

$$F_{i,j}^{(1)}(D, \alpha),$$

а число нечисто-коренныхъ формъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$F_{i,j}^{(2)}(D, \alpha).$$

Мы будемъ имѣть, каковы бы ни были возможныя значенія  $i$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $j$  и  $\mu$ ,

$$F_{i,p}^{(j)}(D, \mu) = F_{i,q}^{(j)}(D, \mu)$$

и

$$\left. \begin{aligned} H_1^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_1^{(j)}(D, \mu)}{24} \\ H_2^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_2^{(j)}(D, \mu)}{2 \cdot 24} = \frac{\mu 6 F_{2,1}^{(j)}(D, \mu)}{2 \cdot 24} = \frac{\mu F_{2,1}^{(j)}(D, \mu)}{8}, \\ H_3^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_3^{(j)}(D, \mu)}{3 \cdot 24} = \frac{\mu 3 F_{3,1}^{(j)}(D, \mu)}{3 \cdot 24} = \frac{\mu F_{3,1}^{(j)}(D, \mu)}{24}, \\ H_4^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_4^{(j)}(D, \mu)}{6 \cdot 24} = \frac{\mu 12 F_{4,1}^{(j)}(D, \mu)}{6 \cdot 24} = \frac{\mu F_{4,1}^{(j)}(D, \mu)}{12}, \\ H_5^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_5^{(j)}(D, \mu)}{16 \cdot 24} = \frac{\mu 16 F_{5,1}^{(j)}(D, \mu)}{16 \cdot 24} = \frac{\mu F_{5,1}^{(j)}(D, \mu)}{24}. \end{aligned} \right\} \cdot (9)$$

Поэтому для нашей цѣли достаточно разобрать слѣдующіе типы введенныхъ формъ:

- ни одно изъ чиселъ  $g, h, k, l, m, n$  не равно нулю . . (1),  
 $g = 0, h, k, l, m, n$  отличны отъ нуля . . . . . (2,1),  
 $g = l = 0, h, k, m, n$  отличны отъ нуля . . . . . (3,1),  
 $g = h = 0, k, l, m, n$  отличны отъ нуля . . . . . (4,1),  
 $g = h = k = 0, l, m, n$  отличны отъ нуля . . . . . (5,1).

Мы ограничимся во всемъ дальнѣйшемъ разборомъ двухъ слѣдующихъ случаевъ:

$$D = P, \quad D = 2P,$$

гдѣ чрезъ  $P$  обозначено нѣкоторое нечетное число, не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1. Въ этихъ случаяхъ всѣ тройничныя формы опредѣлителя  $D$  коренныя.

Прежде всего докажемъ, что для формъ типовъ (1) и (2,1)

$$\mu = 1 \text{ или } 2,$$

для формъ типа (3,1)

$$\mu = 1, 2 \text{ или } 6,$$

для формъ типа (4,1)

$$\mu = 2, 4 \text{ или } 12,$$

и для формъ типа (5,1)

$$\mu = 4 \text{ или } 8.$$

Дѣйствительно, каковъ бы ни былъ опредѣлитель  $D$ , для формъ типа (1)

$$\mu > 2$$

только въ слѣдующихъ случаяхъ

$$1) \ g = h = l = m; \quad 2) \ h = k = m = n; \quad 3) \ k = g = n = l;$$

$$4) \ g = l, \ h = m, \ k = n;$$

$$5) \ g = h = k, \ l = m = n; \quad 6) \ g = h = n, \ l = m = k;$$

$$7) \ h = k = l, \ m = n = g; \quad 8) \ k = g = m, \ n = l = h.$$

Но при

$$g = h = l = m = n$$

имѣемъ

$$D = 2\rho^2(2\rho + k + n) + 4\rho kn + 2\rho^2(k + n) = 4\rho(\rho + k)(\rho + n) \equiv 0 \pmod{4};$$

а потому первый изъ указанныхъ сейчасъ случаевъ невозможенъ.

Точно также невозможны случаи второй и третій.

Случай четвертый невозможенъ, такъ какъ при

$$g = l = \rho, \quad h = m = \sigma, \quad k = n = \tau$$

имѣемъ

$$\begin{aligned} D &= 2\rho^2(\sigma + \tau) + 2\sigma^2(\tau + \rho) + 2\tau^2(\rho + \sigma) + 4\rho\sigma\tau = \\ &= 2(\rho + \sigma)(\sigma + \tau)(\tau + \rho) \equiv 0 \pmod{4}. \end{aligned}$$

При

$$g = h = k = \rho, \quad l = m = n = \sigma$$

опредѣлитель

$$D = 6\rho\sigma(\rho + \sigma) + 2\rho^2\sigma + \sigma(\rho^2 + \sigma^2) = \sigma(3\rho + \sigma)^2$$

дѣлится на квадратъ  $\sqrt[3]{D}$ , а потому случай пятый невозможенъ.

Также невозможны и остальные три случая.

Итакъ, для формъ типа (1)

$$\mu = 1 \text{ или } 2.$$

Каковъ бы ни былъ опредѣлитель  $D$ , для формъ типа (2,1)

$$\mu > 2$$

только при

$$n = h, \quad k = m.$$

Но при

$$n = h = \rho, \quad k = m = \sigma$$

имѣемъ

$$D = 2\rho\sigma(\rho + \sigma + l) + 2\rho\sigma l = 2\rho\sigma(\rho + \sigma + 2l) \equiv 0 \pmod{4},$$

а потому при нашемъ предположеніи для формъ типа (2,1)

$$\mu = 1 \text{ или } 2.$$

Каковъ бы ни былъ опредѣлитель  $D$ , для формъ типа (3,1)  $\mu$  можетъ имѣть только слѣдующія значенія:

$$1, 2, 4, 6 \text{ и } 24,$$

причемъ

$$\mu = 4 \text{ или } 24$$

только въ слѣдующихъ случаяхъ:

$$1) h = k, m = n, \quad 2) h = m, k = n, \quad 3) h = n, k = m.$$

Но при

$$g = l = 0, \quad h = k = \varrho, \quad m = n = \sigma$$

имѣемъ

$$D = \varrho\sigma(\varrho + \sigma) + \varrho\sigma(\varrho + \sigma) = 2\varrho\sigma(\varrho + \sigma) \equiv 0 \pmod{4},$$

а потому первый изъ указанныхъ сейчасъ случаевъ невозможенъ.

Также невозможны и остальные случаи.

Итакъ, для формы типа (3,1)

$$\mu = 1, 2 \text{ или } 6.$$

Каковъ бы ни былъ опредѣлитель  $D$ , для формъ типа (4,1)  $\mu$  можетъ имѣть только слѣдующія значенія:

$$2, 4 \text{ и } 12.$$

Каковъ бы ни былъ опредѣлитель  $D$ , для формъ типа (5,1)  $\mu$  можетъ имѣть только слѣдующія значенія:

$$4, 8 \text{ и } 24,$$

причемъ значеніе

$$\mu = 24$$

получается только при

$$l = m = n.$$

Но при

$$l = m = n = \varrho$$

имѣемъ

$$D = \varrho^3,$$

а потому для формы типа (5,1)

$$\mu = 4 \text{ или } 8.$$

Принимая во внимание сейчасъ доказанное, изъ формулъ (9) выводимъ

$$\left. \begin{aligned} H^{(j)}(D, 2) &= \frac{F_1^{(j)}(D, 2)}{12} + \frac{F_{2,1}^{(j)}(D, 2)}{4} + \frac{F_{3,1}^{(j)}(D, 2)}{12} + \frac{F_{4,1}^{(j)}(D, 2)}{6}, \\ H^{(j)}(D, 4) &= \frac{F_{4,1}^{(j)}(D, 4)}{3} + \frac{F_{5,1}^{(j)}(D, 4)}{6}, \\ H^{(j)}(D, 6) &= \frac{F_{3,1}^{(j)}(D, 6)}{4}, \\ H^{(j)}(D, 8) &= \frac{F_{5,1}^{(j)}(D, 8)}{3}, \\ H^{(j)}(D, 12) &= F_{4,1}^{(j)}(D, 12). \end{aligned} \right\} (10)$$

§ 8. Обратимся къ подробному разбору формъ типа (5,1). Всѣ формы этого типа, очевидно, чисто-коренныя и слѣдовательно

$$\begin{aligned} F_{5,1}^{(2)}(D, 4) &= F_{5,1}^{(2)}(D, 8) = 0, \\ H^{(2)}(D, 8) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для формъ разсматриваемаго типа

$$D = mn.$$

Значеніе  $\mu = 8$  соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (5,1), для которыхъ два изъ чиселъ

$$l, m \text{ и } n$$

равны между собою, а это имѣетъ мѣсто только въ трехъ слѣдующихъ случаяхъ:

$$1) l=D, m=n=1, \quad 2) l=1, m=D, n=1, \quad 3) l=m=1, n=D,$$

такъ какъ  $D$  не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1.

Слѣдовательно

$$\begin{aligned} F_{5,1}^{(1)}(D, 8) &= 3, \\ H^{(1)}(D, 8) &= 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Для всѣхъ остальныхъ формъ типа (5,1)

$$\mu = 4.$$

Каждому разложению  $D$  на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < D$$

соотвѣтствуютъ шесть формъ типа (5,1), для которыхъ

$$\mu = 4,$$

а именно:

$$1) \ l = d_1, \ m = d_2, \ n = d_3,$$

$$2) \ l = d_1, \ m = d_3, \ n = d_2,$$

$$3) \ l = d_2, \ m = d_1, \ n = d_3,$$

$$4) \ l = d_2, \ m = d_3, \ n = d_1,$$

$$5) \ l = d_3, \ m = d_1, \ n = d_2,$$

$$6) \ l = d_3, \ m = d_2, \ n = d_1,$$

и кромѣ получающихся по указанному сейчасъ способу изъ всевозможныхъ разложений  $D$  на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < D$$

формъ типа (4,1), для которыхъ

$$\mu = 4,$$

другихъ нѣтъ.

Поэтому

$$F_{5,1}^{(1)}(D, 4) = 6\psi(D),$$

гдѣ

$$\psi(D)$$

означаетъ, какъ и въ § 4 число разложений  $D$  на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3.$$

§ 9. Разсмотримъ формы типа (4,1).

Для формъ этого типа

$$D = n(lm + mk + kl).$$

Значеніе  $\mu = 12$  соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ, для которыхъ

$$k = l = m.$$

Это имѣетъ мѣсто только тогда, когда

$$D \equiv 0 \pmod{3}, \\ k = l = m = 1, \quad n = \frac{D}{3},$$

т. е. только для формы

$$(x - y)^2 + x^2 + y^2 + \frac{D}{3}z^2 = 2x^2 + 2y^2 + \frac{D}{3}z^2 - 2xy,$$

чисто-коренной при

$$D = P$$

и нечисто-коренной при

$$D = 2P.$$

Итакъ, при

$$D = P$$

имѣемъ

$$\left. \begin{aligned} H^{(1)}(D, 12) = F_{4,1}^{(1)}(D, 12) &= \alpha, \\ H^{(2)}(D, 12) = F_{4,1}^{(2)}(D, 12) &= 0, \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (13)$$

гдѣ

$$\alpha = 1 \quad \text{при} \quad P \equiv 0 \pmod{3},$$

$$\alpha = 0 \quad \text{при} \quad P \not\equiv 0 \pmod{3},$$

а при

$$D = 2P$$

имѣемъ

$$\left. \begin{aligned} H^{(1)}(D, 12) = F_{4,1}^{(1)}(D, 12) &= 0, \\ H^{(2)}(D, 12) = F_{4,1}^{(2)}(D, 12) &= \beta, \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (14)$$

гдѣ

$$\beta = 1 \quad \text{при} \quad P \equiv 0 \pmod{3},$$

$$\beta = 0 \quad \text{при} \quad P \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Значеніе  $\mu = 4$  соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (4,1), которыя принадлежатъ къ одному изъ трехъ слѣдующихъ частныхъ типовъ:

$$l = m \quad \text{не} = k, \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4,1,1)$$

$$m = k \quad \text{не} = l, \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4,1,2)$$

$$k = l \quad \text{не} = m. \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4,1,3)$$

Каждый изъ типовъ (4,1,1), (4,1,2) и (4,1,3) содержитъ, очевидно, какъ одно и то же число чисто-коренныхъ формъ, такъ и одно и то же число нечисто-коренныхъ формъ.

При

$$l = m = \varrho$$

имѣемъ

$$D = n\varrho(\varrho + 2k).$$

Разсмотримъ сначала случай

$$D = P.$$

Въ этомъ случаѣ существуютъ только чисто-коренныя формы.

Если

$$P \equiv 0 \pmod{3},$$

то каждому разложенію  $P$  на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три формы типа (4,1,1):

$$1) \quad n = d_1, \quad \varrho = l = m = d_2, \quad k = \frac{d_3 - d_2}{2},$$

$$2) \quad n = d_2, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_3 - d_1}{2},$$

$$3) \quad n = d_3, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_2 - d_1}{2}.$$

Разложенію же

$$P = 1.1.P$$

соотвѣтствуетъ одна форма типа (4,1,1):

$$n = 1, \quad \varrho = l = m = 1, \quad k = \frac{P-1}{2}.$$

Поэтому при

$$D = P \equiv 0 \pmod{3}$$

число формъ типа (4,1,1) равно

$$3\psi(P) + 1,$$

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 4) = 9\psi(P) + 3,$$

$$H^{(1)}(D, 4) = \frac{F_{4,1}^{(1)}(D, 4)}{3} + \frac{F_{5,1}^{(1)}(D, 4)}{6} = 4\psi(P) + 1.$$

Если

$$D = P \equiv 0 \pmod{3},$$

то каждому разложению  $P$  на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P,$$

за исключением разложения

$$P = 1 \cdot 3 \cdot \frac{P}{3},$$

соответствуют три формы типа (4,1,1):

$$1) \ n = d_1, \quad \varrho = l = m = d_2, \quad k = \frac{d_3 - d_2}{2},$$

$$2) \ n = d_2, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_3 - d_1}{2},$$

$$3) \ n = d_3, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_2 - d_1}{2},$$

разложению

$$P = 1 \cdot 3 \cdot \frac{P}{3} \text{ при } P > 3$$

соответствуют две формы типа (4,1,1)

$$1) \ n = 1, \quad \varrho = l = m = 3, \quad k = \frac{\frac{P}{3} - 3}{2},$$

$$2) \ n = 3, \quad \varrho = l = m = 1, \quad k = \frac{\frac{P}{3} - 1}{2},$$

разложению же

$$P = 1 \cdot 1 \cdot P$$

при  $P > 3$  соответствует одна форма типа (4,1,1):

$$n = 1, \quad \varrho = l = m = 1, \quad k = \frac{P - 1}{2},$$

а при  $P = 3$  ни одной.

Поэтому при

$$D = P \equiv 0 \pmod{3}$$

число форм типа (4,1,1) равно

$$3\psi(P),$$

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 4) = 9\psi(P),$$

$$H^{(1)}(D, 4) = \frac{F_{4,1}^{(1)}(D, 4)}{3} + \frac{F_{5,1}^{(1)}(D, 4)}{6} = 4\psi(P).$$

Всѣ эти разсужденія показываютъ, что при

$$D = P$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$H^{(1)}(D, 4) = 4\psi(P) + 1 - \alpha. \dots (15)$$

Разсмотримъ теперь случай

$$D = 2P.$$

Въ этомъ случаѣ существуютъ какъ чисто-коренныя, такъ и нечисто-коренныя формы.

Изъ равенства

$$D = 2P = n\rho(\rho + 2k)$$

слѣдуетъ, что для формъ типа (4,1,1) число  $n$  должно быть четнымъ, а число  $\rho = l = m$  нечетнымъ.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго форма

$$k(x - y)^2 + \rho x^2 + \rho y^2 + nz^2$$

типа (4,1,1) чисто-коренная или нечисто-коренная, смотря по тому, четное или нечетное число  $k$ .

Если

$$P \equiv 0 \pmod{3},$$

то каждому разложенію  $P$  на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три формы типа (4,1,1):

$$1) \ n = 2d_1, \ \rho = l = m = d_2, \ k = \frac{d_3 - d_2}{2},$$

$$2) \ n = 2d_2, \ \rho = l = m = d_1, \ k = \frac{d_3 - d_1}{2},$$

$$3) \ n = 2d_3, \ \rho = l = m = d_1, \ k = \frac{d_2 - d_1}{2},$$

всѣ чисто-коренныя, если сравненія

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod{4}$$

имѣютъ мѣсто; въ противномъ же случаѣ только одна изъ указанныхъ сейчасъ формъ чисто-коренная.

Разложению

$$P = 1.1.P$$

соответствует одна форма типа (4,1,1):

$$n = 2, \quad q = l = m = 1, \quad k = \frac{P-1}{2},$$

чисто-коренная при

$$P \equiv 1 \pmod{4}$$

и нечисто-коренная при

$$P \equiv 3 \pmod{4}.$$

Поэтому при

$$D = 2P_{\text{не}} \equiv 0 \pmod{3}$$

число чисто-коренных форм типа (4,1,1) равно

$$3\Phi(P) + \Psi(P) + \gamma,$$

где

$$\gamma = 1 \text{ при } P \equiv 1 \pmod{4},$$

$$\gamma = 0 \text{ при } P \equiv 3 \pmod{4},$$

а число нечисто-коренных форм типа (4,1,1) равно

$$2\Psi(P) + 1 - \gamma.$$

Следовательно, при

$$D = 2P_{\text{не}} \equiv 0 \pmod{3}$$

имеем

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 4) = 9\Phi(P) + 3\Psi(P) + 3\gamma,$$

$$H^{(1)}(D, 4) = \frac{F_{4,1}^{(1)}(D, 4)}{3} + \frac{F_{5,1}^{(1)}(D, 4)}{6} = 3\Phi(P) + \Psi(P) + \psi(2P) + \gamma,$$

$$F_{4,1}^{(2)}(D, 4) = 6\Psi(P) + 3(1 - \gamma),$$

$$H^{(2)}(D, 4) = \frac{F_{4,1}^{(2)}(D, 4)}{3} = 2\Psi(P) + 1 - \gamma.$$

Пусть теперь

$$D = 2P \equiv 0 \pmod{3}.$$

Въ такомъ случаѣ каждому разложенію  $P$  на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P,$$

за исключеніемъ разложенія

$$1 \cdot 3 \cdot \frac{P}{3},$$

соотвѣтствуютъ три формы типа  $(4,1,1)$ :

$$1) \ n = 2d_1, \quad q = l = m = d_2, \quad k = \frac{d_3 - d_2}{2},$$

$$2) \ n = 2d_2, \quad q = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_3 - d_1}{2},$$

$$3) \ n = 2d_3, \quad q = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_2 - d_1}{2},$$

всѣ чисто-коренныя, если сравненія

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod{4}$$

имѣютъ мѣсто; въ противномъ же случаѣ только одна изъ указанныхъ сейчасъ формъ чисто-коренная.

Разложенію

$$P = 1 \cdot 3 \cdot \frac{P}{3} \text{ при } P > 3$$

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа  $(4,1,1)$ :

$$1) \ n = 2, \quad q = l = m = 3, \quad k = \frac{\frac{P}{3} - 3}{2},$$

$$2) \ n = 6, \quad q = l = m = 1, \quad k = \frac{\frac{P}{3} - 1}{2},$$

изъ которыхъ одна чисто-коренная, другая нечисто-коренная.

Наконецъ разложенію

$$P = 1 \cdot 1 \cdot P$$

при  $P > 3$  соотвѣтствуетъ одна форма типа  $(4,1,1)$ :

$$n = 2, \quad q = l = m = 1, \quad k = \frac{P-1}{2},$$

чисто-коренная при

$$P \equiv 1 \pmod{4}$$

и нечисто-коренная при

$$P \equiv 3 \pmod{4}$$

а при

$$P = 3$$

ни одной.

Поэтому при

$$D = 2P \equiv 0 \pmod{3}$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (4,1,1) равно

$$3\Phi(P) + \Psi(P) + \gamma,$$

а число нечисто-коренныхъ формъ типа (4,1,1) равно

$$2\Psi(P) + (1 - \gamma) - 1$$

и, слѣдовательно,

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 4) = 9\Phi(P) + 3\Psi(P) + 3\gamma,$$

$$H^{(1)}(D, 4) = \frac{F_{4,1}^{(1)}(D, 4)}{3} + \frac{F_{5,1}^{(1)}(D, 4)}{6} = 3\Phi(P) + \Psi(P) + \psi(2P) + \gamma,$$

$$F_{4,1}^{(2)}(D, 4) = 6\Psi(P) + 3(1 - \gamma) - 1,$$

$$H^{(2)}(D, 4) = 2\Psi(P) + (1 - \gamma) - 1.$$

Всѣ разсужденія, относящіяся къ случаю

$$D = 2P,$$

показываютъ, что въ этомъ случаѣ

$$\left. \begin{aligned} H^{(1)}(D, 4) &= 3\Phi(P) + \Psi(P) + \psi(2P) + \gamma, \\ H^{(2)}(D, 4) &= 2\Psi(P) + (1 - \gamma) - \beta. \end{aligned} \right\} \dots \dots (16)$$

§ 10. Обратимся къ опредѣленію чиселъ

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2) \text{ и } F_{4,1}^{(2)}(D, 2).$$

Изъ равенства

$$D = n(lm + mk + kl)$$

видно, что для любой формы типа (4,1) число

$$lm + mk + kl$$

должно быть дѣлителемъ  $D$ .

Формы типа (4,1) для которых  $\mu = 2$  и число

$$lm + mk + kl$$

равно дѣлителю  $d$  определителя  $D$ , будемъ называть принадлежащими къ дѣлителю  $d$  определителя  $D$ .

Число чисто-коренныхъ формъ типа (4,1), принадлежащихъ къ дѣлителю  $d$  определителя  $D$ , обозначимъ чрезъ

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2, d)$$

а число нечисто-коренныхъ формъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$F_{4,1}^{(2)}(D, 2, d).$$

Очевидно, что

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2, 1) = F_{4,1}^{(2)}(D, 2, 1) = 0,$$

а при  $D$  четномъ кромѣ того

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2, 2) = F_{4,1}^{(2)}(D, 2, 2) = 0.$$

Разсмотримъ сначала случай

$$D = P.$$

Въ этомъ случаѣ

$$F_{4,1}^{(2)}(D, 2) = 0.$$

Число

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2, d)$$

очевидно равно числу бинарныхъ формъ

$$k(x - y)^2 + lx^2 + my^2$$

опредѣлителя —  $d$ , приведенныхъ по Зеллингу, въ которыхъ всѣ три коэффициента  $k$ ,  $l$ ,  $m$  отличны отъ нуля и различны между собою.

Слѣдовательно,

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2, d) = 3(h^{(1)}[d] + h^{(2)}(d) - \Omega(d)),$$

гдѣ

$$\Omega(d)$$

обозначаетъ число классовъ бинарныхъ формъ определителя —  $d$ , для которыхъ въ соответственной приведенной формѣ Зеллинга или одинъ изъ коэффициентовъ равенъ нулю, или по крайней мѣрѣ два изъ нихъ равны между собою, и

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2) = \sum F_{4,1}^{(1)}(D, 2, d) = 3 \{ \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d) \} - 3 \sum \Omega(d),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

Сумма

$$\sum \Omega(d)$$

равна числу классовъ бинарныхъ формъ, опредѣлители которыхъ, взятые съ обратнымъ знакомъ, дѣлятъ  $P$  и отличны отъ 1, и для которыхъ въ соотвѣтственной приведенной формѣ Зеллинга или одинъ коэффициентъ равенъ нулю, или по крайней мѣрѣ два коэффициента равны между собою.

Совокупность всѣхъ такихъ бинарныхъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(T).$$

Каждому разложенію  $P$  на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три класса бинарныхъ формъ изъ совокупности  $(T)$ , эквивалентныхъ одной изъ трехъ слѣдующихъ приведенныхъ формъ Зеллинга:

$$1) d_1 x^2 + d_2 y^2,$$

$$2) d_2 x^2 + d_3 y^2,$$

$$3) d_3 x^2 + d_1 y^2,$$

въ которыхъ одинъ изъ коэффициентовъ равенъ нулю, и три класса бинарныхъ формъ изъ совокупности  $(T)$ , эквивалентныхъ одной изъ трехъ слѣдующихъ приведенныхъ формъ Зеллинга:

$$1) d_2 x^2 + d_2 y^2 + \frac{d_3 - d_2}{2} (x - y)^2,$$

$$2) d_1 x^2 + d_1 y^2 + \frac{d_3 - d_1}{2} (x - y)^2,$$

$$3) d_1 x^2 + d_1 y^2 + \frac{d_2 - d_1}{2} (x - y)^2,$$

въ которыхъ по крайней мѣрѣ два коэффициента равны между собою.

Разложенію же

$$P = 1.1.P$$

соотвѣтствуетъ одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности  $(T)$ , эквивалентныхъ приведенной формѣ Зеллинга

$$x^2 + Py^2,$$

въ которой одинъ изъ коэффициентовъ равенъ нулю, и одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности  $(T)$ , эквивалентныхъ приведенной формѣ Зеллинга

$$x^2 + y^2 + \frac{P-1}{2}(x-y)^2,$$

въ которой по крайней мѣрѣ два коэффициента равны между собою.

Поэтому при

$$D = P$$

имѣемъ

$$\sum \Omega(d) = 6\psi(P) + 2,$$

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2) = 3 \{ \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d) \} - 18\psi(P) - 6. \quad (17)$$

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Для того чтобы форма

$$k(x-y)^2 + lx^2 + my^2 + nz^2$$

типа (4,1) была нечисто-коренною, необходимо и достаточно, чтобы  $n$  было четное и чтобы бинарная форма

$$k(x-y)^2 + lx^2 + my^2$$

опредѣлителя

$$-\frac{2P}{n},$$

приведенная по Зеллингу, была нечисто-коренною.

(Первое изъ этихъ условій, очевидно, вытекаетъ изъ второго какъ слѣдствіе).

Принимая во вниманіе сейчасъ сказанное и пользуясь соображеніями, аналогичными тѣмъ, которыми мы пользовались для случая

$$D = P,$$

легко найдемъ, что

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2, d) = 3 \{ h^{(1)}(d) - \Omega^{(1)}(d) \},$$

$$F_{4,1}^{(2)}(D, 2, d) = 3 \{ h^{(2)}(d) - \Omega^{(2)}(d) \},$$

гдѣ

$$\Omega^{(1)}(d) \text{ и } \Omega^{(2)}(d)$$

обозначаютъ соответственно числа чисто-коренныхъ и нечисто-коренныхъ классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя —  $d$ , для которыхъ въ соответственной приведенной формѣ Зеллинга или одинъ изъ коэффициентовъ равенъ нулю, или по крайней мѣрѣ два коэффициента равны между собою; и

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2) = 3 \{ \sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) \} - 3 \{ \sum \Omega^{(1)}(2d) + \sum \Omega^{(1)}(d) \},$$

$$F_{4,1}^{(2)}(D, 2) = 3 \sum h^{(2)}(d) - 3 \sum \Omega^{(2)}(d),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$  отличные отъ 1.

Сумма

$$\sum \Omega^{(1)}(2d)$$

равна числу классовъ бинарныхъ формъ, опредѣлители которыхъ четные, дѣлятъ  $D$  и отличны отъ 2, и для которыхъ въ соответствующей приведенной формѣ Зеллинга одинъ изъ коэффициентовъ равенъ нулю, такъ какъ для четныхъ, но не дѣлящихся на 4, опредѣлителей не существуетъ приведенныхъ бинарныхъ формъ Зеллинга, въ которыхъ два или всѣ три коэффициента равны между собою.

Совокупность всѣхъ такихъ бинарныхъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(S).$$

Суммы

$$\sum \Omega^{(1)}(d) \text{ и } \sum \Omega^{(2)}(d)$$

равны соответственно числамъ чисто-коренныхъ и нечисто-коренныхъ классовъ бинарныхъ формъ, опредѣлители которыхъ дѣлятъ  $P$  и отличны отъ 1, и для которыхъ въ соответствующей приведенной формѣ Зеллинга или одинъ коэффициентъ равенъ нулю, или по крайней мѣрѣ два коэффициента равны между собою.

Совокупность всѣхъ такихъ бинарныхъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(R).$$

Каждому разложенію  $D = 2P$  на три множителя

$$d_1 \equiv 0 \pmod{2}, d_2 \text{ и } d_3,$$

изъ которыхъ каждый отличенъ отъ  $P$  и  $2P$ , соответствуютъ два класса бинарныхъ формъ изъ совокупности  $(S)$ , эквивалентныхъ одной изъ формъ:

$$1) d_1 x^2 + d_2 y^2,$$

$$2) d_1 x^2 + d_3 y^2.$$

Разложенію

$$D = 2.1.P$$

соотвѣтствуетъ одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности  $(S)$ , эквивалентныхъ формъ

$$2x^2 + Py^2.$$

Наконецъ разложенію

$$D = 1.1.2P$$

соотвѣтствуетъ также одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности  $(S)$ , эквивалентныхъ формъ

$$x^2 + 2Py^2.$$

Поэтому

$$\sum \Omega^{(1)}(2d) = 2\psi(2P).$$

Каждому разложенію числа  $P$  на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три класса бинарныхъ формъ изъ совокупности  $(R)$ , эквивалентныхъ одной изъ формъ:

$$1) d_1x^2 + d_2y^2,$$

$$2) d_2x^2 + d_3y^2,$$

$$3) d_3x^2 + d_1y^2,$$

приведенныхъ по Зеллингу, въ которыхъ одинъ изъ коэффициентовъ равенъ нулю и которыя всѣ чисто-коренныя, и три класса бинарныхъ формъ изъ совокупности  $(R)$ , эквивалентныхъ одной изъ формъ:

$$\left. \begin{aligned} 1) d_2x^2 + d_2y^2 + \frac{d_3 - d_2}{2}(x - y)^2, \\ 2) d_1x^2 + d_1y^2 + \frac{d_3 - d_1}{2}(x - y)^2, \\ 3) d_1x^2 + d_1y^2 + \frac{d_2 - d_1}{2}(x - y)^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

приведенныхъ по Зеллингу, въ которыхъ по крайней мѣрѣ два коэффициента равны между собою.

Всѣ формы (18) чисто-коренныя, если сравненія

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod{4}$$

имѣютъ мѣсто, въ противномъ же случаѣ только одна изъ нихъ чисто-коренная.

Разложенію

$$P = 1.1.P$$

соотвѣтствуетъ одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности  $(R)$ , эквивалентныхъ чисто-коренной формѣ

$$x^2 + Py^2,$$

приведенной по Зеллингу, въ которой одинъ изъ коэффициентовъ равенъ нулю, и одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности  $(R)$ , эквивалентныхъ формѣ

$$x^2 + y^2 + \frac{P-1}{2}(x-y)^2,$$

приведенной по Зеллингу, въ которой по крайней мѣрѣ два коэффициента равны между собою и которая чисто-коренная при

$$P \equiv 1 \pmod{4}$$

и нечисто-коренная при

$$P \equiv 3 \pmod{4}.$$

Поэтому

$$\sum \Omega^{(1)}(d) = 6\Phi(P) + 4\Psi(P) + 1 + \gamma,$$

$$\sum \Omega^{(2)}(d) = 2\Psi(P) + 1 - \gamma,$$

и слѣдовательно при

$$D = 2P$$

имѣемъ

$$\begin{aligned} F_{4,1}^{(1)}(D, 2) &= 3 \{ \sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) \} - 6\psi(2P) - 18\Phi(P) - 12\Psi(P) - 3 - 3\gamma = \\ &= 3 \{ \sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) \} - 9\psi(2P) - 9\Phi(P) - 3\Psi(P) - 3\beta, \quad (19) \end{aligned}$$

такъ какъ

$$\psi(2P) = 3\psi(P) + 1 = 3\Phi(P) + 3\Psi(P) + 1,$$

$$F_{4,1}^{(2)}(D, 2) = 3 \sum h^{(2)}(d) - 6\Psi(P) - 3(1 - \gamma). \quad (20)$$

§ 11. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію формъ типа (3,1).  
Для формъ этого типа

$$D = hm(k + n) + kn(h + m). \dots \dots \dots (21)$$

Значеніе  $\mu = 6$  соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (3,1),  
для которыхъ три изъ коэффициентовъ

$$h, k, m \text{ и } n$$

равны между собою, а это возможно только при

$$D \equiv 1 \pmod{3}$$

и только для четырехъ слѣдующихъ формъ типа (3,1):

$$1) h = k = m = 1, \quad n = \frac{D-1}{3},$$

$$2) k = m = n = 1, \quad h = \frac{D-1}{3},$$

$$3) m = n = h = 1, \quad k = \frac{D-1}{3},$$

$$4) n = h = k = 1, \quad m = \frac{D-1}{3}.$$

Всѣ эти формы чисто-коренныя при

$$D = P$$

и нечисто-коренныя при

$$D = 2P.$$

Итакъ, при

$$D = P$$

имѣемъ

$$F_{3,1}^{(1)}(D, 6) = 4\delta,$$

$$H^{(1)}(D, 6) = \frac{F_{3,1}^{(1)}(D, 6)}{4} = \delta, \quad \dots \dots \dots (22)$$

гдѣ

$$\delta = 0, \quad \text{при } P \not\equiv 1 \pmod{3},$$

$$\delta = 1, \quad \text{при } P \equiv 1 \pmod{3},$$

а при

$$D = 2P$$

имѣемъ

$$\left. \begin{aligned} H^{(1)}(D, 6) &= \frac{F_{3,1}^{(1)}(D, 6)}{4} = 0, \\ F_{3,1}^{(2)}(D, 6) &= 4\varepsilon, \\ H^{(2)}(D, 6) &= \varepsilon, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

гдѣ

$$\varepsilon = 0, \text{ при } P \not\equiv 2 \pmod{3},$$

$$\varepsilon = 1, \text{ при } P \equiv 2 \pmod{3}.$$

Значеніе  $\mu = 2$  соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (3,1), въ которыхъ два и только два изъ коэффициентовъ

$$h, k, m \text{ и } n$$

равны между собою.

Всѣ такія формы мы разобьемъ на шесть слѣдующихъ частныхъ типовъ:

$$h = k \text{ и не } = \text{ ни } m, \text{ ни } n \dots \dots \dots (3,1,1)$$

$$h = m \text{ и не } = \text{ ни } k, \text{ ни } n \dots \dots \dots (3,1,2)$$

$$h = n \text{ и не } = \text{ ни } k, \text{ ни } m \dots \dots \dots (3,1,3)$$

$$k = m \text{ и не } = \text{ ни } h, \text{ ни } n \dots \dots \dots (3,1,4)$$

$$k = n \text{ и не } = \text{ ни } h, \text{ ни } m \dots \dots \dots (3,1,5)$$

$$m = n \text{ и не } = \text{ ни } h, \text{ ни } k \dots \dots \dots (3,1,6)$$

Каждый изъ типовъ (3,1,1), (3,1,2), (3,1,3), (3,1,4), (3,1,5) и (3,1,6) содержитъ по одному и тому же числу формъ, такъ какъ вторая часть равенства (21) симметрична относительно  $h, k, m$  и  $n$ .

При

$$h = k = \varrho$$

имѣемъ

$$D = \varrho m(\varrho + n) + \varrho n(\varrho + m) \dots \dots \dots (24)$$

Разсмотримъ сначала случай

$$D = P.$$

Изъ равенства (24) получаемъ такое

$$2P = \varrho(2\varrho m + 2\varrho n + 4mn) = \varrho\{(2\varrho + m + n)(m + n) - (m - n)^2\},$$

изъ котораго слѣдуетъ, что числа  $m + n$  и  $m - n$  нечетныя.

Если

$$P_{\text{не}} \equiv 1 \pmod{3},$$

то каждому рѣшенію

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta$$

какого-либо уравненія

$$xz - y^2 = 2d_s$$

изъ уравненій

$$xz - y^2 = 2d_1, \quad xz - y^2 = 2d_2, \dots, \quad xz - y^2 = 2d_t,$$

гдѣ

$$d_1, \quad d_2, \dots, \quad d_t$$

всѣ дѣлители  $P$ , отличные отъ 1, въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, такому что

$$\zeta > \xi > \eta, \quad \zeta - \xi = \frac{2P}{d_s},$$

$\eta$  нечетное,

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа (3,1,1):

$$1) \quad \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad n = \frac{\xi - \eta}{2},$$

$$2) \quad \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad n = \frac{\xi + \eta}{2},$$

и другихъ формъ типа (3,1,1) кромѣ получаемыхъ по указанному сейчасъ способу нѣтъ.

Поэтому при

$$D = P_{\text{не}} \equiv 1 \pmod{3}$$

число формъ типа (3,1,1) равно

$$2 \sum f\left(2d, \quad z - x = \frac{2P}{d}\right),$$

$$F_{3,1}^{(1)}(D, 2) = 12 \sum f\left(2d, \quad z - x = \frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

Если же

$$D = P \equiv 1 \pmod{3},$$

то каждому рѣшенію

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta$$

какого-либо уравненія

$$xz - y^2 = 2d_s$$

изъ уравненій

$$xz - y^2 = 2d_1, \quad xz - y^2 = 2d_2, \dots, \quad xz - y^2 = 2d_t,$$

гдѣ

$$d_1, \quad d_2, \dots, \quad d_t$$

всѣ дѣлители  $P$ , отличные отъ 1, въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, такому что

$$\zeta > \xi > \eta, \quad \zeta - \xi = \frac{2P}{d_s},$$

$\eta$  нечетное,

за исключеніемъ рѣшенія

$$x = \frac{P+2}{3}, \quad y = \frac{P-4}{3}, \quad z = \frac{P+8}{3}$$

уравненія

$$xz - y^2 = 2P,$$

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа (3,1,1):

$$1) \quad \rho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad n = \frac{\xi - \eta}{2},$$

$$2) \quad \rho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad n = \frac{\xi + \eta}{2},$$

и другихъ формъ типа (3,1,1) кромѣ получаемыхъ по указанному сейчасъ способу нѣтъ.

Поэтому при

$$D = P \equiv 1 \pmod{3}$$

число формъ типа (3,1,1) равно

$$2\left\{\sum f\left(2d, z - x = \frac{2P}{d}\right) - 1\right\},$$

$$F_{3,1}^{(1)}(D, 2) = 12\left\{\sum f\left(2d, z - x = \frac{2P}{d}\right) - 1\right\},$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ .

Всѣ разсужденія, относящіяся къ случаю

$$D = P,$$

показываютъ, что въ этомъ случаѣ

$$F_{3,1}^{(1)}(D, 2) = 12\left\{\sum f\left(2d, z - x = \frac{2P}{d}\right) - 1\right\} \dots \dots (25)$$

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Изъ равенства (24) выводимъ такое

$$4P = \varrho\{(2\varrho + m + n)(m + n) - (m - n)^2\}, \dots \dots (26)$$

изъ котораго слѣдуетъ, что  $\varrho$  число нечетное, а  $m + n$  и  $m - n$  числа четныя, и слѣдовательно

$$\frac{m+n}{2} \quad \text{и} \quad \frac{m-n}{2}$$

числа цѣлыя.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго заключаемъ, что для того чтобы форма

$$\varrho(z - x)^2 + \varrho(x - y)^2 + my^2 + nz^2$$

типа (3,1,1) была нечисто-коренною, необходимо и достаточно, чтобы  $m$  и  $n$  были числа нечетныя.

Изъ равенства (26) слѣдуетъ, что

$$P = \varrho\left\{\left(\varrho + \frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m+n}{2}\right) - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2\right\},$$

откуда видно, что

$$\frac{m-n}{2}$$

число нечетное.

Если

$$P \equiv 2 \pmod{3},$$

то каждому рѣшенію

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta$$

какого-либо уравненія

$$xz - y^2 = d_s$$

изъ уравненій

$$xz - y^2 = d_1, \quad xz - y^2 = d_2, \dots, \quad xz - y^2 = d_t,$$

гдѣ

$$d_1, \quad d_2, \dots, \quad d_t$$

всѣ дѣлители  $P$ , отличные отъ 1, въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, такому что

$$\zeta > \xi > \eta, \quad \zeta - \xi = \frac{P}{d_s}$$

$\eta$  и одно изъ чиселъ  $\xi$  и  $\zeta$  нечетныя,

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа (3,1,1):

$$1) \quad \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \xi + \eta, \quad n = \xi - \eta,$$

$$2) \quad \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \xi - \eta, \quad n = \xi + \eta,$$

чисто-коренныя, если

$$\xi + \zeta \pm 2\eta = \frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2} + \varrho - 2\frac{m-n}{2} = 2n + \varrho \equiv \frac{P}{d_s} = \varrho \pmod{4},$$

и нечисто-коренныя, если

$$\xi + \zeta \pm 2\eta = 2n + \varrho \equiv \frac{P}{d_s} + 2 \pmod{4},$$

и другихъ формъ типа (3,1,1) кромѣ получаемыхъ по сейчасъ указанному способу нѣтъ.

Поэтому при

$$D = 2Pn \equiv 1 \pmod{3}$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (3,1,1) равно

$$2 \sum f\left(d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, z - x = \frac{P}{d}\right),$$

$$F_{3,1}^{(1)}(D, 2) = 12 \sum f\left(d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, z - x = \frac{P}{d}\right),$$

число нечисто-коренныхъ формъ типа (3,1,1) равно

$$2 \sum f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, z-x = \frac{P}{d}\right),$$

а

$$F_{3,1}^{(2)}(D, 2) = 12 \sum f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, z-x = \frac{P}{d}\right),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

Если же

$$P \equiv 2 \pmod{4},$$

то каждому рѣшенію

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta$$

какого-либо уравненія

$$xz - y^2 = d_s$$

изъ уравненій

$$xz - y^2 = d_1, \quad xz - y^2 = d_2, \dots, \quad xz - y^2 = d_t,$$

гдѣ

$$d_1, \quad d_2, \dots, \quad d_t$$

всѣ дѣлители  $P$ , отличные отъ 1, въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, такому что

$$\zeta > \xi > \eta, \quad \zeta - \xi = \frac{P}{d_s},$$

$\eta$  и одно изъ чиселъ  $\xi$  и  $\zeta$  нечетныя,

за исключеніемъ рѣшенія

$$x = \xi = \frac{P+1}{3}, \quad y = \eta = \frac{P-2}{3}, \quad z = \zeta = \frac{P+4}{3}$$

уравненія

$$xz - y^2 = P,$$

для котораго

$$\xi + \zeta - 2\eta = \frac{P+1}{3} + \frac{P+4}{3} - 2 \frac{P-2}{3} = 3 \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4},$$

соотвѣтствуютъ двѣ формы:

$$1) \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \xi + \eta, \quad n = \xi - \eta,$$

$$2) \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \xi - \eta, \quad n = \xi + \eta,$$

чисто-коренные, если

$$\xi + \zeta - 2\eta \equiv \frac{P}{d_s} \pmod{4}$$

и нечисто-коренные, если

$$\xi + \zeta - 2\eta \equiv \frac{P}{d_s} + 2 \pmod{4}.$$

Поэтому при

$$D = 2P \equiv 1 \pmod{3}$$

число чисто-коренных форм типа (3,1,1) равно

$$2 \sum f\left(d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, z - x = \frac{P}{d}\right),$$

$$F_{3,1}^{(1)}(D, 2) = 12 \sum f\left(d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, z - x = \frac{P}{d}\right),$$

число нечисто-коренных форм типа (3,1,1) равно

$$2 \left\{ \sum f\left(d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, z - x = \frac{P}{d}\right) - 1 \right\},$$

а

$$F_{3,1}^{(2)}(D, 2) = 12 \left\{ \sum f\left(d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, z - x = \frac{P}{d}\right) - 1 \right\},$$

причем суммирование распространяется на все делители  $d$  числа  $P$ , отличные от 1.

Все рассуждения, относящиеся к случаю

$$D = 2P$$

показывают, что в этом случае

$$F_{3,1}^{(1)}(D, 2) = 12 \sum f\left(d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, z - x = \frac{P}{d}\right), \quad (27)$$

$$F_{3,1}^{(2)}(D, 2) = 12 \left\{ \sum f\left(d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, z - x = \frac{P}{d}\right) - \varepsilon \right\}. \quad (28)$$

§ 12. Разсмотримъ теперь формы типа (2,1).

Значеніе  $\mu = 2$  соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ этого типа, которыя принадлежатъ къ одному изъ четырехъ слѣдующихъ типовъ

$$h = k, \quad m = n, \quad \dots \dots \dots (2,1,1)$$

$$h = m, \quad k = n, \quad \dots \dots \dots (2,1,2)$$

$$h = n, \quad \dots \dots \dots (2,1,3)$$

$$k = m, \quad \dots \dots \dots (2,1,4)$$

При

$$g = 0, \quad h = k = \rho, \quad m = n = \sigma$$

имѣемъ

$$2D = 4\rho\sigma(\rho + \sigma + l) + 2l(\rho^2 + \sigma^2) = (\rho + \sigma)\{(2\rho + l)(2\sigma + l) - l^2\}. \quad (29)$$

Изъ равенства (29) слѣдуетъ, что при

$$D = P$$

число  $l$  нечетное.

Принявъ это во вниманіе, посредствомъ разсужденій совершенно аналогичныхъ тѣмъ, которыми мы пользовались для формъ типа (3,1), легко найдемъ, что при

$$D = P$$

число формъ типа (2,1,1) равно

$$2 \sum f\left(2d, \quad x + z - 2y = \frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Изъ равенства (29) слѣдуетъ, что  $\rho + \sigma$  число нечетное, а  $l$  число четное, не дѣлящееся на 4, и слѣдовательно  $\frac{l}{2}$  число цѣлое нечетное.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго всѣ формы

$$\rho(z - x)^2 + \rho(x - y)^2 + lx^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$$

типа (2,1,1) чисто-коренныя.

Изъ равенства (29) получаемъ

$$P = (\varrho + \sigma) \left\{ \left( \varrho + \frac{l}{2} \right) \left( \sigma + \frac{l}{2} \right) - \left( \frac{l}{2} \right)^2 \right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = 2P$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (2,1,1) равно

$$2 \sum f \left( d, x + z - 2y = \frac{P}{d} \right),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

При

$$h = m = \varrho, \quad k = n = \sigma$$

имѣемъ

$$2D = 2\varrho^2(2\sigma + l) + 2\sigma^2(2\varrho + l) + 4l\varrho\sigma = (\varrho + \sigma)\{(2\varrho + l)(2\sigma + l) - l^2\}. \quad (30)$$

Изъ равенства (30) видно, что при

$$D = P$$

$l$  число нечетное.

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = P$$

число формъ типа (2,1,2) равно

$$2 \sum f \left( 2d, x + z - 2y = \frac{2P}{d} \right),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Изъ равенства (30) видно, что  $\varrho + \sigma$  число нечетное, а  $l$  число четное, не дѣлящееся на 4, и слѣдовательно  $\frac{l}{2}$  число цѣлое нечетное.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго всѣ формы

$$\varrho(z - x)^2 + \sigma(x - y)^2 + lx^2 + \varrho y^2 + \sigma z^2$$

чисто коренныя.

Изъ равенства (30) вытекаетъ такое

$$P = (\varrho + \sigma) \left\{ \left( \varrho + \frac{l}{2} \right) \left( \sigma + \frac{l}{2} \right) - \left( \frac{l}{2} \right)^2 \right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что число чисто-коренныхъ формъ типа (2,1,2) равно

$$2 \sum f \left( d_1 x + z - 2y = \frac{P}{d} \right),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

При

$$h = n = \varrho$$

имѣемъ

$$2D = \varrho \{ (2\varrho + 4l + k + m)(k + m) - (k - m)^2 \}. \quad \dots (31)$$

Изъ равенства (31) видно, что при

$$D = P$$

$k - m$  число нечетное.

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = P$$

число формъ типа (2,1,3), равное числу формъ типа (2,1,4), равно

$$2 \sum f \left( 2d, z - x > \frac{2P}{d} \right),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

Далѣе изъ равенства (31) слѣдуетъ, что при

$$D = 2P$$

$\varrho$  число нечетное, а  $k - m$  и  $k + m$  числа четныя, и слѣдовательно  $\frac{k+m}{2}$  и  $\frac{k-m}{2}$  числа цѣлыя.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго, для того чтобы форма

$$\varrho(z - x)^2 + k(x - y)^2 + lx^2 + my^2 + \varrho z^2$$

была нечисто-коренною, необходимо и достаточно, чтобы число  $k + l$  было нечетное.

Равенство (31) при

$$D = 2P$$

приводится къ такому

$$P = q \left\{ \left( q + 2l + \frac{k+m}{2} \right) \left( \frac{k+m}{2} \right) - \left( \frac{k-m}{2} \right)^2 \right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = 2P$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (2,1,3), равное числу чисто-коренныхъ формъ типа (2,1,4), равно

$$2 \sum f \left( d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, z - x > \frac{P}{d} \right),$$

а число нечисто-коренныхъ формъ типа (2,1,3), равное числу нечисто-коренныхъ формъ типа (2,1,4), равно

$$2 \sum f \left( d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, z - x > \frac{P}{d} \right),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

Всѣ разсужденія настоящаго параграфа показываютъ, что при

$$D = P$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$F_{2,1}^{(1)}(D, 2) = 4 \sum f \left( 2d, x + z - 2y \equiv \frac{2P}{d} \right) + 4 \sum f \left( 2d, z - x > \frac{2P}{d} \right), \quad (32)$$

а при

$$D = 2P$$

имѣютъ мѣсто равенства

$$\left. \begin{aligned} F_{2,1}^{(1)}(D, 2) &= 4 \sum f \left( d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} \right) + \\ &+ 4 \sum f \left( d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, z - x > \frac{P}{d} \right), \\ F_{2,1}^{(2)}(D, 2) &= 4 \sum f \left( d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} + 2, z - x > \frac{P}{d} \right), \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1, такъ какъ на основаніи § 7 ни одна тройничная форма не можетъ принадлежать заразъ къ двумъ различнымъ изъ типовъ (2,1,1), (2,1,2), (2,1,3) и (2,1,4).

§ 13. Обратимся наконецъ къ формамъ типа (1).

Значеніе  $\mu = 2$  соответствуетъ только такимъ формамъ типа (1), которыя принадлежатъ къ одному изъ девяти слѣдующихъ частныхъ типовъ:

$$g = l, \quad h = m, \dots \dots \dots (1,1)$$

$$h = m, \quad k = n, \dots \dots \dots (1,2)$$

$$k = n, \quad g = l, \dots \dots \dots (1,3)$$

$$g = h, \quad l = m, \dots \dots \dots (1,4)$$

$$h = k, \quad m = n, \dots \dots \dots (1,5)$$

$$k = g, \quad n = l, \dots \dots \dots (1,6)$$

$$g = m, \quad h = l, \dots \dots \dots (1,7)$$

$$h = n, \quad k = m, \dots \dots \dots (1,8)$$

$$k = l, \quad g = n, \dots \dots \dots (1,9)$$

При

$$g = l = \varrho, \quad h = m = \sigma$$

имѣемъ

$$\begin{aligned} 2D &= 2\varrho^2(2\sigma + k + n) + 2\sigma^2(2\varrho + k + n) + 4kn(\varrho + \sigma) + 4\varrho\sigma(k + n) = \\ &= (\varrho + \sigma)\{4\varrho\sigma + 2(k + n)(\varrho + \sigma) + 4kn\} = \\ &= (\varrho + \sigma)\{(2\varrho + k + n)(2\sigma + k + n) - (k - n)^2\}. \dots (34) \end{aligned}$$

Изъ равенства (34) слѣдуетъ, что при

$$D = P$$

числа  $\varrho + \sigma$ ,  $k + n$  и  $k - n$  нечетныя.

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = P$$

число формъ типа (1,1) или, что тоже, число формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,1), (1,2) и (1,3) равно

$$4 \sum f\left(2d, x + z - 2y > \frac{2P}{d}, z - x < \frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Изъ равенства (34) слѣдуетъ, что  $\rho + \sigma$  число нечетное, а  $k + n$  и  $k - n$  числа четныя, и что кромѣ того  $k - n$  не дѣлится на 4; слѣдовательно число  $\frac{k - n}{2}$  и одно изъ чиселъ  $\rho + \frac{k + n}{2}$  и  $\sigma + \frac{k + n}{2}$  нечетныя.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго, для того чтобы форма

$$\rho(y - z)^2 + \sigma(z - x)^2 + k(x - y)^2 + \rho x^2 + \sigma y^2 + n z^2$$

была нечисто-коренною необходимо и достаточно, чтобы числа  $k$  и  $n$  были нечетныя.

Изъ равенства (34) вытекаетъ такое

$$P = (\rho + \sigma) \left\{ \left( \frac{k + n}{2} + \rho \right) \left( \frac{k + n}{2} + \sigma \right) - \left( \frac{k - n}{2} \right)^2 \right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = 2P$$

число чисто-коренныхъ формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,1), (1,2) и (1,3) равно

$$4 \sum f \left( d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, x + z - 2y > \frac{P}{d}, z - x < \frac{P}{d} \right),$$

а число нечисто-коренныхъ формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,1), (1,2) и (1,3) равно

$$4 \sum f \left( d, x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, x + z - 2y > \frac{P}{d}, z - x < \frac{P}{d} \right),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

При

$$g = h = \rho, \quad l = m = \sigma$$

имѣемъ

$$\begin{aligned} 2D &= 4\rho\sigma\{\rho + \sigma + k + n\} + 4kn(\rho + \sigma) + 2\rho(\rho n + k\sigma) + 2\sigma(\rho k + n\sigma) = \\ &= (\rho + \sigma + 2k)(2n\rho + 2n\sigma + 4\rho\sigma) = (\rho + \sigma + 2k)\{(2\rho + n)(2\sigma + n) - n^2\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Изъ равенства (35) слѣдуетъ, что при

$$D = P$$

числа  $\rho + \sigma + 2k$  и  $n$  нечетныя.

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = P$$

число формъ типа (1,4) или, что тоже, число формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8) и (1,9) равно

$$2 \sum f\left(2d, x+z-2y < \frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Изъ равенства (35) слѣдуетъ, что  $\rho + \sigma$  число нечетное, а  $n$  число четное, не дѣлящееся на 4, и слѣдовательно  $\frac{n}{2}$  и одно изъ чиселъ  $\rho + \frac{n}{2}$  и  $\sigma + \frac{n}{2}$  нечетныя.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго, для того чтобы форма

$$\rho(y-z)^2 + \rho(z-x)^2 + k(x-y)^2 + \sigma x^2 + \sigma y^2 + nz^2$$

типа (1,4) была нечисто-коренною, необходимо и достаточно, чтобы число  $k$  было нечетное.

Изъ равенства (35) вытекаетъ такое

$$P = (\rho + \sigma + 2k) \left\{ \left( \rho + \frac{n}{2} \right) \left( \sigma + \frac{n}{2} \right) - \left( \frac{n}{2} \right)^2 \right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = 2P$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (1,4) или, что тоже, число чисто-коренныхъ формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,4), (1,5), (1,6), (1,7) (1,8) и (1,9) равно

$$2 \sum f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, x+z-2y < \frac{P}{d}\right),$$

а число нечисто-коренныхъ формъ въ каждомъ изъ этихъ типовъ равно

$$2 \sum f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, x+z-2y < \frac{P}{d}\right),$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1.

Всѣ разсужденія настоящаго параграфа показываютъ, что при

$$D = P$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$F_1^{(1)}(D, 2) = 12 \sum f\left(2d, x+z-2y > \frac{2P}{d}, z-x < \frac{2P}{d}\right) + \\ + 12 \sum f\left(2d, x+z-2y < \frac{2P}{d}\right), \dots \dots \dots (36)$$

а при

$$D = 2P$$

имѣютъ мѣсто равенства

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(1)}(D, 2) &= 12 \sum f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, x+z-2y > \frac{P}{d}, z-x < \frac{P}{d}\right) \\ &+ 12 \sum f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, x+z-2y < \frac{P}{d}\right), \\ F_1^{(2)}(D, 2) &= 12 \sum f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, x+z-2y > \frac{P}{d}, z-x < \frac{P}{d}\right) \\ &+ 12 \sum f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, x+z-2y < \frac{P}{d}\right), \end{aligned} \right\} (37)$$

причемъ суммирование распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1, такъ какъ на основаніи § 7 ни одна тройничная форма не можетъ принадлежать къ двумъ разнымъ изъ типовъ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8) и (1,9).

§ 14. Изъ формулъ (25), (27), (28), (32), (33), (36) и (37), на основаніи леммъ 1-ой, 2-ой, 3-й и 4-й, слѣдуетъ, что при

$$D = P$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$\begin{aligned} &\frac{F_1^{(1)}(D, 2)}{12} + \frac{F_{2,1}^{(1)}(D, 2)}{4} + \frac{F_{3,1}^{(1)}(D, 2)}{12} = \\ &= \sum \left\{ f\left(2d, x+z-2y > \frac{2P}{d}, z-x < \frac{2P}{d}\right) + \right. \\ &+ f\left(2d, x+z-2y < \frac{2P}{d}\right) + f\left(2d, x+z-2y = \frac{2P}{d}\right) \\ &+ f\left(2d, z-x > \frac{2P}{d}\right) + f\left(2d, z-x = \frac{2P}{d}\right) \left. \right\} - \delta = \\ &= \sum f(2d) - \delta = \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(2d) - \frac{1}{2} \sum \omega^{(1)}(2d) - \delta = \\ &= \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(2d) - 3\psi(P) - 1 - \delta \dots \dots \dots (38) \end{aligned}$$

а при

$$D = 2P$$

имѣютъ мѣсто равенства

$$\begin{aligned} & \frac{F_1^{(1)}(D, 2)}{12} + \frac{F_{2,1}^{(1)}(D, 2)}{4} + \frac{F_{3,1}^{(1)}(D, 2)}{12} = \\ & = \sum \left\{ f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, x+z-2y > \frac{P}{d}, z-x < \frac{P}{d}\right) \right. \\ & \quad + f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, x+z-2y < \frac{P}{d}\right) + \\ & \quad + f\left(d, x+z-2y = \frac{P}{d}\right) + f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, z-x > \frac{P}{d}\right) \\ & \quad \left. + f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}, z-x = \frac{P}{d}\right) \right\} = \\ & = \sum f\left[d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} \pmod{4}\right] = \\ & = \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) - \sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} - \sum_1 \Omega_1(d) = \\ & = \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) - 3\Phi(P) - \Psi(P) - \frac{1+\gamma}{2} \dots \dots \dots (39) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{F_1^{(2)}(D, 2)}{12} + \frac{F_{2,1}^{(2)}(D, 2)}{4} + \frac{F_{3,1}^{(2)}(D, 2)}{12} = \\ & = \sum \left\{ f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, x+z-2y > \frac{P}{d}, z-x < \frac{P}{d}\right) \right. \\ & \quad + f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, x+z-2y < \frac{P}{d}\right) + \\ & \quad + f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, z-x > \frac{P}{d}\right) + \\ & \quad \left. + f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}, z-x = \frac{P}{d}\right) - \varepsilon = \right. \\ & = \sum f\left[d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod{4}\right] - \varepsilon = \\ & = \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) - \sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} - \sum_1 \Omega_2(d) - \varepsilon = \\ & = \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) - 2\Psi(P) - \frac{1-\gamma}{2} - \varepsilon, \dots \dots \dots (40) \end{aligned}$$

причемъ суммирование, указываемое знакомъ  $\sum$ , вездѣ распространяется на всѣ дѣлители  $d$  числа  $P$ , отличные отъ 1, а суммы  $\sum_1 \Omega_1(d)$ ,  $\sum_1 \Omega_2(d)$  и  $\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2}$  имѣютъ то же значеніе, что и въ § 4.

§ 15. Положимъ

$$M^{(j)}(D) = \sum \frac{H^{(j)}(D, \mu)}{\mu},$$

причемъ суммирование распространяется на все возможные значения  $\mu$ .

Мы будемъ имѣть

$$H^{(j)}(D) = M^{(j)}(D) + \sum \frac{(\mu - 1) H^{(j)}(D, \mu)}{\mu} \dots \dots \dots (41)$$

Числа

$$M^{(1)}(D) \text{ и } M^{(2)}(D)$$

Эйзенштейнъ называетъ соответственно измѣреніями чисто и нечисто-коренныхъ классовъ опредѣлителя  $D$ .

Пусть

$$D = P$$

изъ формулы (41) и формулъ (10), (12), (13), (15), (17), (22) и (38) выводимъ

$$\begin{aligned} H^{(1)}(P) &= \left\{ M^{(1)}(P) + \frac{1}{24} \right\} + \sum \frac{(\mu - 1) H^{(1)}(P, \mu)}{\mu} - \frac{1}{24} = \\ &+ \left\{ M^{(1)}(P) + \frac{1}{24} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(2d) - 3\psi(P) - 1 - \delta \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) + \frac{1}{2} \sum h^{(2)}(d) - 3\psi(P) - 1 \right\} + \\ &+ \frac{3}{4} \left\{ 4\psi(P) + 1 - \alpha \right\} + \frac{5}{6} \delta + \frac{7}{8} + \frac{11\alpha}{12} - \frac{1}{24} = \\ &= \left\{ M^{(1)}(P) + \frac{1}{24} \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d) \right\} - \\ &- \frac{1}{4} + \frac{7}{8} - \frac{1}{24} + \frac{\delta}{3} + \frac{\alpha}{6} = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d) \right\} + \left\{ M^{(1)}(P) + \frac{1}{24} \right\} + \\ &+ \frac{7 + 4\delta + 2\alpha}{12} = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d) \right\} + \left\{ M^{(1)}(P) + \frac{1}{24} \right\} + \frac{\lambda}{12}, \quad (42) \end{aligned}$$

гдѣ

$$\lambda = 9 \quad \text{при } P \equiv 0 \pmod{3},$$

$$\lambda = 11 \quad \text{при } P \equiv 1 \pmod{3},$$

$$\lambda = 7 \quad \text{при } P \equiv 2 \pmod{3}.$$

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Изъ формулы (41) на основаніи формулъ (10), (11), (14), (16), (19), (20), (23), (39) и (40) выводимъ

$$\begin{aligned} H^{(1)}(2P) &= M^{(1)}(2P) + \sum \frac{(\mu-1) H^{(1)}(2P, \mu)}{\mu} = \\ &= M^{(1)}(2P) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) - 3\Phi(P) - \Psi(P) - \frac{1+\gamma}{2} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(2d) + \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) - \frac{3}{2} \psi(2P) - \frac{3}{2} \Phi(P) - \frac{1}{2} \Psi(P) - \frac{1}{2} \gamma \right\} + \\ &+ \frac{3}{4} \left\{ 3\Phi(P) + \Psi(P) + \psi(2P) + \gamma \right\} + \frac{7}{8} = \\ &= \frac{1}{4} \sum h^{(1)}(2d) + \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) + M^{(1)}(2P) + \frac{5+2\gamma}{8} = \\ &= \frac{1}{4} \sum h^{(1)}(2d) + \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) + M^{(1)}(2P) + \frac{v}{8}, \quad \dots (43) \end{aligned}$$

гдѣ

$$v = 7 \text{ при } P \equiv 1 \pmod{4},$$

$$v = 5 \text{ при } P \equiv 3 \pmod{4},$$

и

$$\begin{aligned} H^{(2)}(2P) &= M^{(2)}(2P) + \frac{1}{24} + \sum \frac{(\mu-1) H^{(2)}(2P, \mu)}{\mu} - \frac{1}{24} = \\ &= \left\{ M^{(2)}(2P) + \frac{1}{24} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) - 2\Psi(P) - \frac{1-\gamma}{2} - \varepsilon \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \sum h^{(2)}(d) - \Psi(P) - \frac{1-\gamma}{2} \right\} + \frac{3}{4} \left\{ 2\Psi(P) + 1 - \gamma - \beta \right\} + \\ &+ \frac{5}{6} \varepsilon + \frac{11}{12} \beta - \frac{1}{24} = \frac{1}{4} \left\{ \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d) \right\} + \left\{ M^{(2)}(2P) + \frac{1}{24} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{4} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\beta}{6} - \frac{1}{24} = \frac{1}{4} \left\{ \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d) \right\} + \\ &+ \left\{ M^{(2)}(2P) + \frac{1}{24} \right\} + \frac{5-6\gamma+8\varepsilon+4\beta}{24} = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sum h^{(2)}(d) + \sum h^{(1)}(d) \right\} + \left\{ M^{(2)}(2P) + \frac{1}{24} \right\} + \frac{\varrho}{24}, \quad \dots (44) \end{aligned}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} \varrho &= 1 \text{ при } P \equiv 1 \pmod{12}, \\ \varrho &= 9 \text{ при } P \equiv 3 \pmod{12}, \\ \varrho &= 7 \text{ при } P \equiv 5 \pmod{12}, \\ \varrho &= 5 \text{ при } P \equiv 7 \pmod{12}, \\ \varrho &= 3 \text{ при } P \equiv 9 \pmod{12}, \\ \varrho &= 13 \text{ при } P \equiv 11 \pmod{12}. \end{aligned}$$

Въ 35 томѣ журнала Крелля Эйзенштейнъ далъ безъ доказательства слѣдующія формулы:

$$\left. \begin{aligned} M^{(1)}(P) &= \frac{2P-1}{24}, \\ M^{(1)}(2P) &= \frac{P}{8}, \\ M^{(2)}(2P) &= \frac{P-1}{24}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

Эти формулы легко вывести изъ болѣе общихъ, данныхъ Смитомъ въ 157 томѣ Philosophical Transactions.

Подставляя въ формулы (42), (43) и (44) вмѣсто

$$M^{(1)}(P), \quad M^{(1)}(2P) \text{ и } M^{(2)}(2P)$$

ихъ значенія, даваемые формулами (45), мы получимъ формулы

$$H^{(1)}(P) = \frac{1}{4} \left\{ \sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d) \right\} + \frac{P+\lambda}{12},$$

$$H^{(1)}(2P) = \frac{1}{4} \sum h^{(1)}(2d) + \frac{1}{2} \sum h^{(1)}(d) + \frac{P+\gamma}{8},$$

$$H^{(2)}(2P) = \frac{1}{4} \left\{ \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d) \right\} + \frac{P+\varrho}{24},$$

для счета числа классовъ положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя въ тѣхъ случаяхъ, когда опредѣлитель не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1, въ томъ видѣ, какъ онѣ даны Эйзенштейномъ.