

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени В. Н. КАРАЗИНА

Серия «Проблемы теоретической  
и математической физики»

## **ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**Научные труды**

**Выпуск 1**

*Под редакцией профессора В. М. Куклина*

Харьков – 2014

УДК 53.01

ББК 22.3

П-78

**Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»**  
**под общей редакцией академика А. Г. Загороднего, академика Н. Ф. Шульги**  
Выпуск 1 под редакцией проф. В. М. Куклина

**Рецензенты:**

почетный директор ИРЭ НАН Украины, академик НАН Украины,  
доктор физ.-мат. наук, профессор **Яковенко В. М.**;  
директор ФТИНТ НАН Украины, академик НАН Украины, доктор  
физ.-мат. наук, профессор **Гнатченко С. Л.**

*Утверждено к печати решением Ученого совета  
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина  
(протокол № 10 от 3.11.2014 г.)*

**Проблемы** теоретической физики. Научные труды / В. А. Буц,  
П-78 А. Г. Загородний, В. Е. Захаров, В. И. Карась, В. М. Куклин, А. В. Тур,  
С. П. Фомин, Н. Ф. Шульга, В. В. Яновский ; ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ  
имени В. Н. Каразина, 2014. – Вып. 1. – 532 с. (Сер. «Проблемы теоретической и  
математической физики» ; под общ. ред. А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги).

ISBN 978-966-285-144-1

Рассмотрены процессы излучения потоков заряженных частиц и осцилляторов. Представлены механизмы повышения частоты и степени когерентности излучения. Описаны механизмы прямого преобразования энергии частиц среды в электрическую энергию. Исследуются явления переноса, обусловленные вихревыми структурами в двумерной гидродинамике, плазме и квантовых жидкостях, особенности тормозного излучения релятивистских электронов в случае, когда существенное влияние на процесс оказывает многократное рассеяние.

Для ученых в области естествознания, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов физических факультетов.

**УДК 53.01**

**ББК 22.3**

ISBN 978-966-285-144-1

© Национальная академия наук Украины, 2014  
© Харьковский национальный университет имени  
В. Н. Каразина, 2014  
© Буц В. А., Загородний А. Г., Захаров В. Е.,  
Карась В. И., Куклин В. М., Тур А. В.,  
Фомин С. П., Шульга Н. Ф.,  
Яновский В. В., 2014  
© Дончик И. Н., макет обложки, 2014

# О Г Л А В Л Е Н И Е

---

От редакторов научных трудов .....	9
От авторов выпуска .....	11

## **ЧАСТЬ I. ОСОБЕННОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ** .....

13
----

А. Г. Загородний, В. М. Куклин .....	13
--------------------------------------	----

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	14
-----------------------	----

<b>РАЗДЕЛ 1. Излучение в инвертированных средах</b> .....	18
---	----

1.1. Двухуровневая система .....	18
----------------------------------	----

1.2. Сверхизлучение .....	21
---------------------------	----

1.3. Новый порог индуцированного излучения .....	22
--	----

1.4. Генерация когерентных импульсов .....	26
--	----

1.5. Роль нелокальности взаимодействия .....	30
--	----

1.6. Режим постоянной накачки .....	31
-------------------------------------	----

1.7. Спонтанные и индуцированные эффекты в процессах излучения и поглощения .....	32
--	----

1.8. Излучение и поглощение высокоэнергетичных квантов осцилляторами, захваченными в потенциальные ямы .....	33
---	----

1.9. Учет процессов релаксации НЧ возбуждений в сплошных средах .....	37
--	----

<b>РАЗДЕЛ 2. Излучение и поглощение при развитии пучковой неустойчивости в плазме</b> .....	40
---	----

2.1. Спонтанное излучение частиц электронного пучка в плазме .....	40
--	----

2.2. Случайное или регулярное спонтанное излучение? .....	42
---	----

2.3. Учет индуцированных процессов .....	43
--	----

2.4. Затухание Ландау .....	46
-----------------------------	----

2.5. Рост флуктуаций при приближении к порогу неустойчивости ...	46
--	----

2.6. Уровень шума .....	47
-------------------------	----

2.7. Развитие неустойчивости .....	48
------------------------------------	----

2.8. Обратное воздействие излучения на пучок. Влияние спонтанных процессов на развитие пучковой неустойчивости .....	48
---	----

2.9. Особенности динамики развитой кинетической неустойчивости в одномодовом режиме .....	50
--	----

2.10. Модулированные пучки .....	51
2.11. Реактивная гидродинамическая неустойчивость в одномодовом режиме.....	52
2.12. Диссипативная гидродинамическая неустойчивость.....	53
2.13. Многомодовые режимы гидродинамических пучковых неустойчивостей .....	54
2.14. Режимы сверхизлучения сгустков заряженных частиц.....	55
2.15. О применимости описания.....	61
2.16. О динамике протяженных сгустков-пучков заряженных частиц.....	64
<b>РАЗДЕЛ 3. Описание многоволновых взаимодействий .....</b>	<b>65</b>
3.1. О характере возбуждения длинноволнового излучения пакетами ВЧ волн.....	65
3.2. Об интерпретации спонтанного излучения токами .....	66
3.3. Спонтанные и индуцированные эффекты в рамках трехволнового взаимодействия .....	67
3.4. Об описании процессов самовоздействия.....	72
3.5. Процессы в турбулентной среде .....	74
<b>Заключение .....</b>	<b>74</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>77</b>
 <b>ЧАСТЬ II. МЕХАНИЗМЫ ПОВЫШЕНИЯ ЧАСТОТЫ И СТЕПЕНИ КОГЕРЕНТНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ .....</b>	 <b>82</b>
В. А. Буц.....	82
<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>83</b>
<b>ГЛАВА I. Механизмы возбуждения коротковолнового излучения .....</b>	<b>87</b>
<b>РАЗДЕЛ 1. Возбуждение высоких номеров гармоник нерелятивистскими осцилляторами .....</b>	<b>87</b>
1.1. Умножение частоты при отражении излучения от движущихся границ .....	90
1.2. Качественная теория излучения высоких номеров гармоник нерелятивистскими осцилляторами .....	92
1.3. Строгая теория излучения осциллятора при наличии слабой периодической неоднородности диэлектрической проницаемости .....	95
1.4. Квантовая теория излучения нерелятивистских осцилляторов в периодических потенциалах .....	102
1.5. Излучение потока осцилляторов.....	114
1.6. Экспериментальные исследования возбуждения высоких номеров гармоник нерелятивистскими осцилляторами.....	122
1.7. Выводы.....	124
<b>РАЗДЕЛ 2. Преобразование энергии низкочастотных колебаний в энергию высокочастотных с помощью использования эффектов вторичных резонансов .....</b>	<b>128</b>
2.1. Постановка задачи и общие уравнения .....	129
2.2. Динамика систем без вырождения .....	130

2.3. Динамика систем с вырождением .....	131
2.4. Связанные линейные осцилляторы .....	132
2.5. Системы с бесконечным числом степеней свободы .....	135
2.6. Параметрическое усиление рентгеновского излучения в кристаллах .....	139
2.7. Распространение волн в гиротропных средах .....	141
2.8. Необходимость наличия невязимности в коэффициентах связи .....	145
2.9. Низкочастотные нормальные частоты ансамбля связанных линейных осцилляторов .....	149
2.10. Преобразование энергии НЧ шумовых колебаний в энергию ВЧ-колебаний .....	152
2.11. Выводы .....	165
<b>РАЗДЕЛ 3. Создание ансамбля долгоживущих высоковозбужденных квантовых и классических систем на основе использования квантового эффекта Зенона и эффекта квантовой юлы .....</b>	<b>166</b>
3.1. Квантовый эффект Зенона .....	169
3.2. Эффект квантовой юлы .....	171
3.3. Подавление синхротронного излучения .....	175
3.4. Подавление пучковых неустойчивостей .....	179
3.5. Подавление распадных и взрывных неустойчивостей .....	183
3.6. Экспериментальные исследования эффекта квантовой юлы ...	190
3.7. Механизм юлы в классической механике .....	196
3.8. Выводы .....	197
<b>ГЛАВА II. Преобразование потоков некогерентного излучения в потоки излучения с высокой степенью когерентности и с высокой плотностью энергии .....</b>	<b>198</b>
<b>РАЗДЕЛ 4. Преобразование потоков излучения при рассеянии на периодически-неоднородных средах .....</b>	<b>199</b>
4.1. Постановка задачи. Основные уравнения .....	200
4.2. Рассеивание волн на периодически- неоднородном полупространстве .....	205
4.3. Рост уровня когерентности при рассеянии волн на периодически-неоднородной среде .....	207
4.4. Рост степени когерентности рентгеновского излучения при распространении в идеальных кристаллах. Обобщение формулы Ван-Циттерта-Цернике .....	209
4.5. Многоволновая дифракция .....	213
4.6. Выводы .....	215
<b>РАЗДЕЛ 5. Плохая обусловленность второго начала термодинамики .....</b>	<b>217</b>
5.1. Второе начало термодинамики .....	219
5.2. «Плохая обусловленность» второго начала .....	224
5.3. «Липкость» стохастических слоев и особенности динамики частиц .....	227

5.4. Пример плохой обусловленности второго начала. Динамика трехволнового взаимодействия .....	233
5.5. Выводы.....	237
<b>Заключение</b> .....	239
<b>Список литературы</b> .....	244

### ЧАСТЬ III. НЕРАВНОВЕСНЫЕ КОЛМОГОРОВСКОГО ТИПА

#### РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ.....248

В. Е. Захаров, В. И. Карась .....	248
-----------------------------------	-----

#### **ВВЕДЕНИЕ**.....249

#### **РАЗДЕЛ 1. Теоретические исследования стационарных неравновесных функций распределения частиц**

<b>с потоком по спектру</b> .....	253
1.1. Точные решения для интеграла столкновений Ландау .....	255
1.2. Точные решения для интеграла столкновений Больцмана.....	256
1.3. Условия формирования стационарных неравновесных функций распределения частиц в конечных энергетических интервалах .....	259

#### **РАЗДЕЛ 2. Теоретические исследования нестационарных неравновесных функций распределения частиц**

<b>с потоком по спектру</b> .....	266
2.1. Численное моделирование формирования функций распределения для уравнений типа Ландау–Фоккера–Планка.....	266
2.1.1. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений типа Ландау –Фоккера–Планка.....	267
2.1.2. Релаксация функции распределения, сравнение результатов численного моделирования с аналитическими выражениями для уравнения Ландау–Фоккера–Планка .....	278
2.2. Численное моделирование формирования неравновесных функций распределения частиц для стационарных согласованных источников и стоков .....	287
2.3. Численное моделирование формирования неравновесных функций распределения частиц для нестационарных несогласованных источников и стоков .....	299
2.4. Механизм формирования электронной функции распределения при взаимодействии потоков электромагнитного излучения и быстрых заряженных частиц с твердотельной плазмой.....	303

#### **РАЗДЕЛ 3. Экспериментальные исследования**

<b>неравновесных функций распределения частиц</b> .....	306
3.1. Экспериментальные исследования неравновесных функций распределения электронов эмиссии, индуцируемой лазерным излучением.....	307
3.2. Экспериментальные исследования неравновесных функций распределения электронов эмиссии, индуцируемой потоками быстрых ионов .....	308

3.2.1. Исследования кинетической электронной эмиссии из металлов .....	312
3.2.2. Исследования кинетической электронной эмиссии из полупроводников .....	317
3.3. Сравнение экспериментальных данных с результатами численного моделирования формирования неравновесных функций распределения частиц.....	323
<b>РАЗДЕЛ 4. Прямое преобразование кинетической энергии частиц в электрическую энергию на основе неравновесных распределений частиц.....</b>	<b>328</b>
4.1. Непосредственное преобразование ядерной энергии в электрическую .....	328
4.2. Вторично-эмиссионный радиоизотопный источник тока .....	332
<b>РАЗДЕЛ 5. Кинетика электрон-фононной системы кристалла, находящегося в сильном электрическом поле .....</b>	<b>337</b>
5.1. Кинетическое описание эффекта электропластической деформации .....	338
5.2. Математическая модель .....	339
5.3. Результаты численного моделирования и их обсуждение.....	344
<b>Заключение .....</b>	<b>351</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>352</b>
 <b>ЧАСТЬ IV. ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ В ДВУМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ.....</b>	 <b>357</b>
А. В. Тур, В. В. Яновский .....	357
<b>РАЗДЕЛ 1. Модели плоских вихревых движений (вместо введения) ..</b>	<b>359</b>
<b>РАЗДЕЛ 2. Теория движения точечных сингулярностей в двумерной идеальной гидродинамике .....</b>	<b>364</b>
2.1. Уравнения движения 2D сингулярностей .....	364
2.2. Свойства системы взаимодействующих вихрей .....	369
<b>РАЗДЕЛ 3. Движение точечных вихрей .....</b>	<b>373</b>
3.1. О точной интегрируемости системы двух и трех вихрей.....	373
3.2. О возможных режимах движения вихрей.....	374
<b>РАЗДЕЛ 4 . Эволюция точечного обычного вихря и точечного дипольного вихря.....</b>	<b>377</b>
4.1. Уравнения движения взаимодействующих точечного вихря и точечного дипольного вихря.....	377
4.2. Режимы взаимодействия .....	382
<b>РАЗДЕЛ 5. Движение дипольного точечного вихря в областях с границами.....</b>	<b>390</b>
5.1. Функция тока точечного дипольного вихря у плоской границы и в углу.....	391
5.2. Уравнение движения у плоской границы.....	394
5.3. Уравнение движения в прямоугольном углу .....	399

<b>РАЗДЕЛ 6. Нетривиальные вихревые конфигурации</b>	401
6.1. Интегрирование стационарных уравнений Эйлера	402
6.2. Точные стационарные решения	405
<b>РАЗДЕЛ 7. Стационарные вихревые конфигурации со сложными особыми точками</b>	412
7.1. Обобщение анзаца стационарности	413
7.2. Стационарные решения со сложными особыми точками	417
7.3. Сложные особые точки	425
<b>РАЗДЕЛ 8. Спиральные квазидвумерные крупномасштабные вихри</b>	430
8.1. Крупномасштабная неустойчивость, приводящая к генерации спиральных вихревых структур	431
8.2. Уравнения нелинейной теории генерации крупномасштабных вихревых структур	433
8.3. Линейная теория генерации крупномасштабных вихревых структур	444
8.4. Нелинейные спиральные вихревые структуры	445
<b>РАЗДЕЛ 9. Точечные вихри в двухжидкостной гидродинамике плазмы</b>	448
9.1. Уравнения для функции тока точечных вихрей	449
9.2. Электронный и ионный вихри	458
9.3. Уравнения движения точечных плазменных вихрей	460
<b>Заключение</b>	468
<b>Список литературы</b>	471
 <b>ЧАСТЬ V. ВЛИЯНИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ НА ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ</b>	474
Н. Ф. Шульга, С. П. Фомин	474
<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	475
<b>РАЗДЕЛ 1. Длина когерентности процесса излучения</b>	478
1.1. Возможность интерференционного эффекта при больших энергиях	478
1.2. Учет экранировки потенциала атома	479
1.3. Введение длины когерентности Тер-Микаеляном	481
1.4. Интерпретация Ландау и Померанчука	484
<b>РАЗДЕЛ 2. Эффект Ландау-Померанчука-Мигдала</b>	487
<b>РАЗДЕЛ 3. Излучение в тонком слое вещества</b>	491
<b>РАЗДЕЛ 4. Экспериментальные исследования ЛПМ эффекта</b>	497
<b>Заключение</b>	503
<b>Список литературы</b>	505

## О Т Р Е Д А К Т О Р О В С Б О Р Н И К А

---

Предлагаемая читателю серия сборников научных трудов «Проблемы теоретической и математической физики» предполагает освещение результатов, полученных в последние годы в различных областях теоретической физики с участием украинских физиков.

В формирование физических школ Украины и соседних государств внес свой существенный вклад созданный 210 лет тому назад по указу императора Александра I один из старейших классических университетов Восточной Европы – Императорский Харьковский университет, ныне Харьковский национальный университет, носящий имя его основателя В. Н. Каразина.

В Украине существует ряд физических школ, которые получили всемирную известность. Особое место среди них занимают научные школы в области теоретической физики, основателями которых являются Лев Давыдович Ландау и Николай Николаевич Боголюбов. Заложенные в этих школах направления исследований, методы работы и традиции были впоследствии подхвачены их учениками А. И. Ахиезером, И. М. Лифшицем и многими учениками их учеников, которые продолжают получать результаты мирового уровня.

В настоящее время наблюдается практически экспоненциальный рост количества научной информации. Уследить за всеми работами, за всеми направлениями исследований, становится трудным даже в узкой области исследований. Поэтому обзорные работы представляют особую ценность и особый интерес, так как в них собраны достаточно в краткой форме, в то же время с достаточной полнотой наиболее важные результаты, полученные в той проблеме, которой посвящен обзор. Обзорные материалы позволяют достаточно быстро и эффективно ознакомиться с состоянием научных исследований в данном направлении, познакомиться с основными достижениями и методами исследований, с перспективами использования полученных результатов. Это способствует более быстрому развитию научных исследований, более глубокому пониманию процессов, которые изучаются, и к эффективному использованию

полученных научных результатов. И в дальнейшем к созданию новых технологий. В свою очередь, новые технологии позволяют более глубоко проникнуть в процессы, которые протекают в окружающем нас мире. Тем самым организуется положительная обратная связь, а обзоры способствуют более короткому пути и более эффективной работе этой обратной связи.

В первый выпуск научных трудов включен ряд обзоров результатов научных исследований, полученных в последние годы в области теоретической физики в направлениях, которые на протяжении многих лет интенсивно развиваются в Украине и получили всемирную известность.

Сборник начинается с обзора А. Г. Загороднего и В. М. Куклина, посвященного особенностям спонтанного и индуцированного излучения в неравновесных средах. Детально рассматриваются два источника спонтанного излучения: частицы и волны. Обсуждаются процессы формирования импульсов когерентного излучения, особенности излучения ступков заряженных частиц, а также осцилляторов, захваченных в потенциальные ямы. В обзоре, автор которого В. А. Буц, рассмотрены механизмы повышения частоты и степени когерентности излучения. Описаны механизмы преобразования энергии низкочастотного излучения в энергию высокочастотного излучения, механизмы, которые позволяют преобразовать энергию некогерентного излучения в излучение с высокой степенью когерентности. Представляет особый интерес предложенный В. Е. Захаровым и В. И. Карасем обзор результатов исследований неравновесных распределений частиц в средах с источником и стоком энергии, включенный в этот выпуск научных трудов. Обсуждаются способы преобразования энергии электрон-фононной системы во внешних полях. Рассмотрены прямое преобразование энергии частиц среды в электрическую энергию и процессы эмиссии радиоизотопных источников тока. Обзор, авторы которого А. В. Тур и В. В. Яновский, содержит результаты исследований известных и вновь обнаруженных вихревых структур в двумерной гидродинамике и квантовых жидкостях. Обсуждаются взаимодействия между вихрями как одной, так и различных топологий. Исследованы процессы переноса, индуцированные конечным числом вихрей. В обзорной работе Н. Ф. Шульги и С. П. Фомина представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований тормозного излучения релятивистских электронов в аморфной мишени в случае, когда длина когерентности излучения значительно превышает длину свободного пробега частицы в веществе и многократное рассеяние оказывает существенное влияние на процесс тормозного излучения. Проведено сравнение результатов теоретических расчетов с данными недавних экспериментов, выполненных в СЛАК и ЦЕРН.

**Академик НАН Украины  
Академик НАН Украины**

**А. Г. Загородний  
Н. Ф. Шульга**

# О Т А В Т О Р О В В Ы П У С К А

---

Настоящее издание научных трудов открывает серию выпусков, в которых обсуждаются фундаментальные и прикладные аспекты различных физических явлений наблюдаемых в природе, и составляющих основу ряда развитых и развивающихся технологий. Качественные изменения технологий, несмотря на появление новых материалов, и более совершенного инструментария, часто тормозятся из-за невозможности применения прежних подходов, из-за трудностей реализации известных производственных схем при вынужденных изменениях временного и пространственного масштаба деталей конструкции приборов и устройств, частотных диапазонов и т. п. Нужны новые решения, свободные от обусловленных самой природой ограничений, с которыми все чаще сталкиваются инженеры и технологи. Наблюдаемые и сопровождаемые нас природные явления и процессы также вынуждают нас выяснять их механизмы и прогнозировать их появление и их последствия. Потому так важно искать ответы на поставленные природой и людьми вопросы, формировать новые подходы и решения, что невозможно без тщательного изучения фундаментальных свойств физических явлений. Но предназначение науки не только пояснять, уточнять и описывать известные и прогнозируемые процессы, но также искать еще незнакомые людям и не осознанные цивилизацией эффекты и явления, расширяя круг понятий и представлений, которыми оперирует человечество. А затем, после основательных размышлений, экспериментальных исследований, к которым присоединятся инженеры и технологи, создавать новые возможности для технологического развития общества.

Трудности ознакомления научной общественности с громадными объемами результатов исследований обусловлены обилием и разнообразием тем отдельных публикаций и докладов. Связаны с необходимостью вникать в предысторию представленных исследований, осложняются малознакомыми процедурами воспроизводства и проверки представленных результатов, что порождает как сомнения, так и неуверенность. К сожалению, темп научных исследований ускоряется, количество участников обсуждения растет, что приводит к сужению тематики, известной лаконичности и плохому согласованию отдельных исследований даже в границах одной области интересов. Однако освоение текущих теоретических исследований затруднено чрезвычайным многообразием задач, обилием параметров и иной раз

сложностью описания, которое при этом страдает лаконичностью, безусловно требуемой издателями научных журналов. Потому для освоения развитых, а также созданных новых теорий и описаний необходимы обзорные работы, синтезирующие массив базовых публикаций, что позволяет избежать обременительного поиска предыстории по ссылкам многочисленных статей и трудностей восстановления по скупым упоминаниям полного описания обсуждаемой проблемы.

Каждая зарекомендовавшая себя теория, несмотря на известную ограниченность в ее применении, обладает необходимой строгостью, объединяет в своем описании иной раз весьма разнородные процессы и объекты, дает инструментарий исследователям и интерпретаторам. Вообще говоря, аналитические исследования и очищенные от побочных, второстепенных деталей математические модели процессов, позволяют уловить основные механизмы явлений, которые часто оказываются завуалированными и не очевидными в экспериментах, включая и прямое численное моделирование. Теория выделяет главные параметры, которые являются определяющими в описании явлений, выявляет характерные размеры и времена, позволяет оценить спектральные и интегральные характеристики процессов. Все это дает возможность очертить области для выбора интервалов рабочих точек приборов и устройств, избежать трудного и малопродуктивного поиска в многомерном пространстве параметров нужных режимов работы производственных систем. Теоретическое описание с единых позиций процессов одной или подобной природы позволяет уловить основные их закономерности, развить физическую интуицию, полезную не только физикам-теоретикам и экспериментаторам, но и технологам. Потому, несмотря на развитие экспериментальной базы современных технологических комплексов, многие экспериментаторы и технологии вовсе не напрасно внимательно присматриваются к результатам теоретических исследований не только в собственной, но и в смежных областях их интересов.

Заботой научного руководства исследовательских центров и академий в связи с этими тенденциями развития науки является активизация усилий по увеличению количества крупных научных разработок, синтезирующих результаты многочисленных публикаций и обсуждений в представительных аудиториях. Разработок, которые, кроме всего прочего, содержат новые идеи и предлагают научной общественности пути будущих направлений развития науки и технологий.

В данной книге авторы постарались облегчить труд читателя, предложив в достаточно приемлемой форме материалы собственных исследований и результаты исследований своих коллег. Выбор материала научных трудов определялся существующим на данный момент наличием развитых актуальных теоретических разработок, содержащих как новые, так и малоизученные прежде механизмы физических явлений, а также дальнейшие обобщения известных представлений. Структура публикуемого материала научных трудов в виде нескольких разделов-обзоров позволила расширить тематику, привлечь широкий круг специалистов из разных областей физики, не снижая требовательности к необходимой строгости описания и обеспечивая основательный уровень проработки проблем по существу.

**Авторы**

## ЧАСТЫ

---

# ОСОБЕННОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

**А. Г. Загородний,**

*Институт теоретической физики имени Н. Н. Боголюбова,  
ул. Метрологическая, 14-б; г. Киев, 03680, Украина*

**В. М. Куклин,**

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4; г. Харьков, 61022, Украина*

**О**бсуждается связь между процессами спонтанного, и также индуцированного излучения и суперлюминисценции (сверхизлучения), имеющими, тем не менее, разную природу. Детально рассматриваются источники спонтанного и индуцированного излучения на примерах инверсных систем, пучков заряженных частиц (пучково-плазменное взаимодействие) и волн (трехволновые взаимодействия ионно-звуковых возмущений). На примере двухуровневой квантовой системы рассматриваются условия сверхизлучения, обнаружен порог появления импульсов индуцированного когерентного излучения при превышении начальной инверсией заселенностей величины, равной корню квадратному из полного числа состояний. Появление этого порога обусловлено конкуренцией спонтанных и индуцированных процессов. Рассмотрены спонтанные и индуцированные эффекты в процессах рассеяния. В частности обсуждается квантовомеханическая модель излучения осциллятора, захваченного во внешнюю потенциальную яму и показано, что наибольшая интенсивность линий поглощения и излучения наблюдается на его собственной частоте. Рассмотрено спонтанное и индуцированное излучение электронов пучка в плазме. Обсуждается роль спонтанного шума в формировании поля излучения при развитии и срыве кинетической пучковой неустойчивости. Показано,

*что сверхизлучение и самомодуляция движущихся электронных пучков могут быть интерпретированы как результат диссипативной пучковой неустойчивости. Именно эта неустойчивость обеспечивает синхронизацию излучателей-электронов пучка. Рассмотрено возбуждение колебаний токами. Показано, что колебания, которые генерируются токами на комбинационных частотах, демонстрируют характеристики как спонтанного, так и индуцированного излучения. Сформулированная связь между нелинейными слагаемыми, описывающими процессы спонтанной генерации поля и индуцированных эффектов, позволяет корректно, избегая погрешностей, получать системы уравнений, описывающих нелинейный процесс взаимодействия волн.*

## ВВЕДЕНИЕ

Процессы излучения и поглощения энергии поля частицами вещества определяют множество важных физических явлений и активно исследуются в самых разных областях естествознания. В самом общем случае излучение частиц может носить как спонтанный, не зависящий от внешнего воздействия, так и вынужденный, навязанный интенсивным внешним полем характер. В неравновесных системах и средах все эти явления приобретают коллективные свойства.

Связь вынужденного или индуцированного излучения с подобными спонтанными процессами была открыта и описана в работе А. Эйнштейна [1] и экспериментально подтверждена Р. Ладенбургом (см. ссылки в обзорной работе [2]). Интересно, что явления индуцированного (вынужденного) излучения и поглощения, понятия о которых и методы их описания были достаточно ясно сформулированы А. Эйнштейном, каким-то удивительным образом долгое время не привлекали особого внимания физиков. Причинами этого называли переключение интереса экспериментаторов к проблемам атомной спектроскопии, недостаточными уровнями технически достигаемой инверсии населенностей, подавлением усиления индуцированного излучения побочными явлениями [3]. Хотя все это не способно пояснить, почему же первый лазер заработал почти через четыре десятилетия. Конечно, для развития квантовой механики было несомненно стимулирующим (на что обратил внимание М. Борн [4]) использованное А. Эйнштейном равенство вероятностей индуцированного излучения и поглощения. Однако других продолжений современники А. Эйнштейна в этой теории не увидели. Лишь значительно позднее для развития целого ряда самосогласованных теорий электроники, физики плазмы и нелинейной физики оказались востребованы представления А. Эйнштейна об индуцированных процессах излучения и поглощения.

Природу формирования поля спонтанного излучения можно пояснить на простом примере резонатора. Поле локализовано в резонаторе, если резонатор закрыт. Если резонатор открыть, то возможны два варианта. В первом случае поле данной частоты не способно распространяться в окружающем пространстве. Тогда поле будет локализовано в резонаторе и нельзя говорить об излучении, ибо нет потока энергии поля в дальней зоне. Во втором случае поле данной частоты может самостоятельно распространяться в окружающем пространстве, то есть является волновым решением уравнений, описывающих данную среду, или, другими словами, собственной волной этой среды, которая распространяется в отсутствии диссипативных процессов чрезвычайно далеко. Тогда поле резонатора частично трансформируется на его границах в излучение непрерывного спектра или в иное излучение и можно будет определить наличие потока волновой энергии в дальней зоне. Понятно, что энергия поля непосредственно в резонаторе будет уменьшаться.

Частица также имеет собственное поле, причем все окружающее пространство является своеобразным резонатором для этого поля. Если это поле или его часть не способны распространяться независимо от частицы, сопутствуют частице, то излучения нет. Работа поля над частицей в этом случае будет равна нулю. Если же при движениях частицы поступательном (например, со скоростью большей скорости собственных волн среды [5–7]) или осцилляторном (диполь), рассмотреть поле частицы, то в нем при некоторых условиях будет часть, которая окажется способной распространяться в среде самостоятельно (как было отмечено В. Л. Гинзбургом, «встречаются вполне интересные задачи, в которых увлекаемое частицей (собственное) поле не находится в стационарном состоянии» [5]). Работа этой части поля над частицей будет не равна нулю и приведет к ее торможению или к снижению амплитуды осцилляций, соответственно, что является признаком наличия излучения или поглощения энергии поля частицей [8]. Важно также отметить, что значение работы собственного поля частицы над ее же собственным током всегда оказывается знакоопределенным и описывает только процесс излучения. Кстати, эта знакоопределенность является одним из характерных признаков спонтанных процессов. Другим характерным признаком спонтанного излучения является тот факт, что его источники (невозмущенный собственный ток частицы и собственное поле, то есть поле этого тока) являются независимыми и процесс излучения не навязан волной на этой частоте, существующей в данной среде или системе.

Индукированное же излучение обусловлено тем обстоятельством, что внешнее поле во всем пространстве взаимодействия модулирует движение частиц среды. При этом излучение (или поглощение) расположенных в разных точках пространства многих частиц происходит в фазе с этим полем. На это обратил внимание в своей Нобелевской лекции Ч. Х. Таунс: «...энергия, излучаемая молекулярными системами, имеет то же самое распределение поля и ту же самую

частоту, что и индуцирующее излучение, а следовательно и постоянную (возможно нулевую) разность фаз» [9]. Подобное синхронизированное внешним полем излучение и поглощение частиц приводит к резкому увеличению эффективности взаимодействия частиц и поля. Сразу же отметим, что наличие процессов, нарушающих фазовое согласование внешнего поля и навязанного этим полем движения частицы, способно ослаблять эффективность подобного взаимодействия.

Причиной индуцированного (вынужденного) излучения, как выяснилось, является наличие инверсии населенностей (разности частиц на высших и низших энергетических уровнях) [10]. Вопрос в том, успевает ли спонтанное излучение эту разность населенностей свести к нулю, прежде чем она себя проявит в форме индуцированного излучения, или нет. То есть, в этом случае можно усмотреть наличие порога появления индуцированного и в значительной степени когерентного излучения [11]. Вблизи этого порога обнаруживается интересное явление формирования импульсов индуцированного когерентного излучения с резким передним и достаточно протяженным задним фронтами и длительностью, которая зависит от диссипативных механизмов поглощения энергии поля в среде и слабо зависит от начального уровня инверсии населенностей [12]. Существование такого порога легко обнаруживается экспериментально и возможно способно пояснить обилие источников импульсного когерентного излучения примерно одной длительности в космосе.

Содержательным показателем, характеризующим коллективный процесс вынужденного излучения (поглощения) является так называемое фотонное вырождение (среднее число фотонов в потоке излучения, которые находятся в одном состоянии или в одной ячейке фазового пространства). Например, если для некогерентного света этот показатель не превышает единицу, то для даже простейшего He-Ne квантового генератора, как обнаружилось уже в ранних работах (см., например, [10]), этот показатель достигал значения, равного  $10^{12}$ . Именно поэтому вынужденное излучение квантовых генераторов превысило на много порядков уровни интегрального спонтанного излучения частиц активного вещества. Однако далеко не сразу пришло осознание того, что вынужденное излучение пропорционально как числу излучающих частиц, так и числу квантов поля, которое в случае когерентного излучения сравнимо с числом излучающих частиц. Таким образом, интенсивность вынужденного излучения оказалась пропорциональной квадрату числа излучающих частиц активной инвертированной среды. А также далеко не сразу был прочувствован не имеющий прецедентов масштаб превышения интенсивности вынужденного излучения в инвертированных средах интенсивности спонтанного шума [13–15].

Интересным вариантом генерации поля, на первый взгляд обладающего чертами как спонтанного, так и индуцированного излучения является сверхизлучение. Обнаруженное в работе [16] явление суперлюминисценции или сверхизлучения [17] способно было проявить

себя в системах даже без высокочастотных резонаторов. Оказалось, что система из  $N$  инвертированных очень коротким импульсом накачки двухуровневых атомов может перейти в основное состояние за время  $\propto N^{-1}$ . Этот процесс внешне имел характер спонтанного, хотя, как отмечено в работе [18], «этот эффект обусловлен наведением корреляций между моментами перехода пространственно разделенных излучателей, взаимодействующих друг с другом через поле излучения».

Вопрос о характере сверхизлучения поднимался также в работах, обсуждаемых в обширных обзорах [19, 20]. Отметим также, что классический аналог сверхизлучения осцилляторов, которыми являлись электроны в магнитном поле, был рассмотрен позднее [21].

Экспериментально явление сверхизлучения было подтверждено тоже далеко не сразу, только в начале 70-х годов XX века. Особенностью этого вида излучения является медленное нарастание интенсивности излучения (т. н. задержка) в начальный момент после короткого импульса накачки. Это связано с тем, что для усиления связи между осцилляторами необходим рост поля излучения. Поэтому для сокращения времени задержки использовали затравочный импульс поля на частоте перехода, который мог одновременно служить спусковым механизмом генерации. Все эти особенности сверхизлучения давали основания полагать, что основой такого процесса является все же вынужденный механизм. Во многих приборах и устройствах их создатели воспользовались явлением сверхизлучения компактного сгустка заряженных частиц, например, движущегося со скоростью, превышающей фазовую скорость волны в среде.

В настоящее время многие важные элементы теории спонтанного и индуцированного излучения использованы в разнообразных задачах современной физики. Корректное рассмотрение шума в неравновесных системах [22–25], особенно вблизи порога неустойчивостей [26, 27]; описание режимов генерации при превышении порогов неустойчивости [28–33]; процессы рассеяния и релаксации с участием волн и частиц [34–37] многие другие физические явления которые сопровождаются обменом фотонами и фононами [38–40], как, впрочем, и другими частицами [41–43], могут быть эффективно описаны с помощью методов и подходов, развитых на основе этой теории. В частности, в работах [33, 44, 45] подробно рассмотрены различные явления вынужденного излучения, поглощения и рассеяния релятивистского пучка электронов в плазме и иных средах в линейном приближении и нелинейных режимах. Важность связи между процессами спонтанного и индуцированного излучения потоков заряженных частиц была подчеркнута в работах [32, 39, 46]. Данная работа, основанная в значительной степени на конструктивных разработках, идеях и представлениях упомянутых выше предшественников, продолжает обсуждение подходов к описанию тесной связи спонтанных и индуцированных явлений в неравновесных средах.

## РАЗДЕЛ 1. ИЗЛУЧЕНИЕ В ИНВЕРТИРОВАННЫХ СРЕДАХ

В данном разделе рассмотрим основные принципы описания процессов спонтанного излучения и индуцированных процессов излучения и поглощения в двухуровневых системах, которые являются основой современной теории квантовых генераторов.

### 1.1. Двухуровневая система

Согласно представлениям А. Эйнштейна, описание двухуровневой системы при наличии излучения на частоте перехода  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \hbar\omega_{12}$  следующее:

$$\partial n_2 / \partial t = -(u_{21} + w_{21} \cdot N_k) \cdot n_2 + w_{12} \cdot N_k \cdot n_1, \quad (1.1)$$

$$\partial n_1 / \partial t = -w_{12} \cdot N_k \cdot n_1 + (u_{21} + w_{21} \cdot N_k) \cdot n_2, \quad (1.2)$$

причем полное число частиц системы в первом и во втором уровне постоянно  $n_1 + n_2 = \text{Const}$ ,  $u_{21}$  — скорость изменения количества квантов второго возбужденного уровня за счет спонтанных процессов излучения. Скорость изменения количества квантов (частиц) на этих уровнях за счет индуцированных процессов излучения  $w_{21} \cdot N_k \cdot n_2$  и поглощения  $w_{12} \cdot N_k \cdot n_1$ . Здесь  $N_k$  — число квантов излучения на частоте перехода, для которого справедливо уравнение

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = (u_{21} + w_{21} \cdot N_k) \cdot n_2 - (w_{12} \cdot N_k) \cdot n_1. \quad (1.3)$$

В статистическом равновесии при температуре  $T$  производные  $\partial n_i / \partial t = 0$ , и  $n_i = \text{const} \cdot \exp\{-\varepsilon_i / kT\}$ , причем  $\varepsilon_i$  — энергия частиц в  $i$ -том состоянии. В случае статистического равновесия для интенсивности излучения должно быть справедливо соотношение  $N_k = N_{k0}$ , где правая часть определяется формулой Планка

$$N_{k0} = \frac{1}{\exp\{\hbar\omega/kT\} - 1}, \quad (1.4)$$

а при вычислении интегральной интенсивности суммирование осуществляется по волновым числам<sup>1</sup>, при этом  $\omega = \omega(\vec{k})$  и выражение (1.4) сохраняет свой вид независимо от размерности задачи.

Напомним, как в самом начале XX века появилась формула Планка (см., например, [4]). Рассмотрим существование в некотором ограниченном одномерном пространстве поля на частоте  $\omega$ . Пусть свойства пространства таковы, что в нем формируется набор энергетических уровней, кратных  $\hbar\omega$ . Степень заполнения каждого энергетического уровня состоянием с энергией  $s \cdot \hbar\omega$ , определяется для данной температуры  $T$  согласно закону Больцмана и пропорционален  $\exp\{-s \cdot \hbar\omega/kT\}$ . Среднюю энергию поля можно подсчитать, следуя Планку, в виде

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{s=0}^{\infty} s \cdot \hbar\omega \cdot \exp\{-s \cdot \hbar\omega/kT\} / \sum_{s=0}^{\infty} \exp\{-s \cdot \hbar\omega/kT\}.$$

Таким образом, получим известную формулу Планка  $\bar{\varepsilon} = \bar{N} \cdot \hbar \cdot \omega = \hbar\omega / [\exp\{\hbar\omega/kT\} - 1]$ , где  $\bar{N}$  – равновесное количество квантов энергии поля в этом пространстве. Значительно позднее, в 1916 году [1] А. Эйнштейн сформулировал теорию индуцированного и спонтанного излучения и окончательно прояснил физический смысл формулы Планка. Для этого им было использовано условие равенства актов поглощения и излучения осцилляторами квантов поля при равновесии. Спустя почти десятилетие (1925), индийский физик Ш. Бозе, используя симметрию волновых функций в описании систем и принцип неразличимости квантов, более строго вывел такое же их распределение. Предварительно ознакомившись с этой работой, А. Эйнштейн, воспользовавшись также условием сохранения числа частиц, получил распределение атомов с учетом вырождения [47] (что, кстати, стимулировало позднее исследование статистических свойств систем при низких температурах).

<sup>1</sup> Определим  $\iiint N_k d^3k = \iiint \frac{|E_k|^2}{4\pi\hbar\omega} d^3k = \int \frac{|E_\omega|^2}{4\pi\hbar\omega} D(\omega) \cdot d\omega$ , тогда при переходе от интегрирования по волновым векторам к интегрированию по частоте понадобится спектральная плотность колебаний, то есть  $\iiint d^3k \rightarrow \int D(\omega) \cdot d\omega$ . При этом получим соотношение  $D(\omega) = 4\pi \cdot \omega^2 / c^3$ . Этим и объясняется простота выражений (1.4)–(1.6). Кстати, заметим, что при суммировании по волновым векторам переход от тройной суммы к тройному интегралу  $\frac{V}{8\pi^3} \iiint d^3k \rightarrow \sum_{k_x} \sum_{k_y} \sum_{k_z}$  можно совершить с помощью коэффициента  $\frac{V}{8\pi^3}$ .

Чтобы уравнение (1.3) оставалось справедливым в состоянии статистического равновесия, необходимо чтобы выражение

$$N_{k0} = \frac{u_{21}}{w_{12} \exp\{\hbar\omega/kT\} - w_{21}} \quad (1.5)$$

совпадало с формулой Планка (1.4). Другими словами, для коэффициентов оказываются справедливыми соотношения

$$u_{21} = w_{12} = w_{21}. \quad (1.6)$$

Используя полученные соотношения, уравнение (1.3) можно представить в виде

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \Sigma + \frac{\partial \Sigma}{\partial(\hbar\omega)} N_k \cdot \hbar\omega, \quad (1.7)$$

где  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \hbar\omega$ ,  $\Sigma = u_{21} \cdot n_2 = u_{21} \cdot n(\varepsilon_2)$ ,

$$u_{21} \cdot (n_2 - n_1) = u_{21} \cdot [n(\varepsilon_2) - n(\varepsilon_1)] = \frac{\partial \Sigma}{\partial(\varepsilon)} \cdot \hbar\omega = \frac{\partial \Sigma}{\partial(\hbar\omega)} \cdot \hbar\omega.$$

Как будет показано ниже, соотношение (1.7) между вкладами спонтанного излучения и индуцированных процессов излучения и поглощения в генерацию квантов поля является достаточно общим не только для инвертированных сред, но и для многопоточковых систем (см. в следующем разделе выражение (2.19), и для многоволновых взаимодействий (см. ниже выражение (3.12)).

Продолжим рассмотрение двухуровневой системы. Полезно ввести понятие инверсии  $\mu = (n_2 - n_1)$ . Если начальные значения величин  $n_2(0) \gg N_k(0), n_1(0)$ , и  $\mu > 0$ , то можно пренебречь спонтанными процессами, тогда

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -2u_{21} \cdot \mu \cdot N_k = -2\gamma \cdot N_k. \quad (1.8)$$

Очевидно, при развитии процесса сохраняется сумма  $N_k + n_2 = \text{Const}$ . Учитывая, что ранее мы убедились, что  $n_1 + n_2 = \text{Const}$ , получим

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = u_{21} \cdot \mu \cdot N_k = u_{21} (2N_k(0) + n_2(0) - n_1(0) - 2N_k) \cdot N_k. \quad (1.9)$$

Обратим внимание, что только учет индуцированных процессов позволяет обнаружить при значительной инверсии заселенностей

уровней ( $n_2 \gg n_1$ ) явление неустойчивости – быстрого роста количества квантов поля  $N_k$  на начальной стадии  $\propto \exp\{\gamma \cdot t\}$  с инкрементом равным  $\gamma$  [33], когда изменениями инверсии можно пренебречь. Затем рост интенсивности замедляется, вследствие снижения уровня инверсии. В режиме насыщения неустойчивости  $N_{kMAX} = N_k(0) + \mu(0)/2$ .

В случае конечного поглощения энергии квантов в системе

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = -\delta \cdot N_k + u_{21} \cdot \mu \cdot N_k, \quad (1.10)$$

здесь  $\delta$  – декремент поглощения энергии колебаний. Обычно потери в активных средах обусловлены выносом излучения из объема резонатора. Корректно задать эти потери можно, определив граничные условия для поля. Однако можно их описать в достаточно общем виде следующим образом:

$$\delta = \oint_S \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \cdot \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \cdot d\vec{s} / \oint_V \frac{\partial[\omega \varepsilon(\omega, \vec{k})]}{\partial \omega} \frac{1}{8\pi} (|\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2) dV, \quad (1.11)$$

то есть, в рассматриваемом случае поток электромагнитной энергии через зеркала следует разделить на энергию поля, заключенную в резонаторе. Важно, чтобы величина, равная произведению характерного времени изменения поля  $\{\partial |\vec{E}|^2 / |\vec{E}|^2 \partial t\}^{-1}$  в резонаторе на групповую скорость колебаний  $|\partial \omega / \partial \vec{k}|$ , была значительно больше размеров резонатора  $L$ . В этих условиях в теоретических расчетах и оценках вполне можно заменить потери через зеркала распределенными потерями. Порог неустойчивости определяется условием

$$\mu > \mu_{TH1} = \delta / u_{21}. \quad (1.12)$$

При приближении к порогу неустойчивости уровень шума растет, и при превышении порога процесс роста числа квантов может приобрести экспоненциальный характер.

## 1.2. С в е р х и з л у ч е н и е

Отметим, что в случае свержизлучения [16–18], где, вообще говоря, в начальный момент при значительной начальной инверсии заселенностей отсутствует внешнее поле конечной интенсивности, прежде традиционно использовалось представление о спонтанном характере излучения. Однако при развитии процесса, как отмечается, например,

в работе [48], «по отношению к каждой молекуле речь идет, конечно, об индуцированном излучении под действием коллективного самосогласованного поля остальных молекул».

Действительно, медленное нарастание интенсивности сверхизлучения обусловлено постепенным включением все большего числа излучателей, расположение которых в модели Дике [16] достаточно компактно в сравнении с длиной волны поля. Это усиление связи между излучателями определяется числом квантов поля в их окрестности и, соответственно, скорость отбора энергии у осцилляторов обратно пропорциональна числу квантов поля. В конечной фазе количество квантов поля пропорционально числу осцилляторов, а характерное время сброса энергии обратно пропорционально числу осцилляторов. То есть, интенсивность излучения равная числу квантов, деленному на время сброса энергии, оказывается пропорциональной квадрату числа осцилляторов.

Сохранение суммы квантов и числа частиц на верхнем уровне  $N_k + n_2 = \text{Const}$  отвечает консервативной системе, где число квантов поля ограничено (в частном случае  $N_{k\text{MAX}} \leq n_{20}/2$ ). Возникающий в такой системе в режиме сверхизлучения импульс волнового поля (в полностью инвертированной среде  $\mu_{0\text{MAX}} = (n_{20} - n_{10}) \approx n_{20}$ ) содержит энергию  $\mu_0 \cdot \hbar\omega/2 = [(n_{20} - n_{10})] \cdot \hbar\omega/2$ , причем средняя мощность импульса поля порядка  $u_{21} \cdot \mu_0^2 \cdot \hbar\omega/2$ . С ростом инверсии длительность импульса уменьшается, энергия в импульсе растет вплоть до величины  $\mu_{0\text{MAX}} \cdot \hbar\omega/2$ , а средняя мощность имеет верхним пределом  $u_{21} \cdot \mu_{0\text{MAX}}^2 \cdot \hbar\omega/2$ . Ситуация изменяется, если существует механизм восстановления инверсии в условиях относительно низкого уровня потерь энергии поля.

При достаточно больших начальных уровнях инверсии и низких начальных значениях интенсивности, как это следует из уравнений (1.1) – (1.3), линейный рост некогерентного спонтанного излучения при увеличении числа квантов  $N_k$  быстро сменяется экспоненциальным ростом поля, обусловленным вторым и третьим слагаемыми (1.3), которые ответственны за индуцированные (вынужденные) эффекты. Важно отметить, что несмотря на невозможность использования в рамках этого описания классических фаз излучателей, тем не менее, ясно, что индуцированное излучение носит когерентный характер.

### 1.3. Новый порог индуцированного излучения

В некоторых случаях пренебрегать спонтанным излучением нельзя. Спонтанные процессы способны уменьшать инверсию и исполнять роль поглощения по отношению к генерации индуцированного излучения.

Если, опираясь на результаты исследований корреляции флуктуаций в лазерном излучении [49], полагать, что в индуцированном излучении велика доля когерентной составляющей, то можно обнаружить порог возникновения такого излучения, обусловленного существованием спонтанных процессов, при некотором критическом значении инверсии заселенностей [11]. Особенность этого порога индуцированного излучения в том, что в случае отсутствия механизмов поглощения энергии поля он отвечает значению начальной инверсии заселенностей, равной корню квадратному из полного числа состояний<sup>2</sup>.

С другой стороны, при значениях начальной инверсии в окрестности этого порога не трудно увидеть изменение характера процесса. При превышении этого порога число излучаемых квантов начинает расти экспоненциально со временем. Причем ниже порога такого экспоненциального роста не наблюдается. То есть, превышение начальной инверсией обнаруженного порога, приводит к экспоненциальному росту числа квантов.

Перепишем систему уравнений (1.1) – (1.3) в отсутствии поглощения энергии квантов в виде

$$\partial n_2 / \partial \tau = -n_2 - \mu \cdot N_k, \quad (1.13)$$

$$\partial \mu / \partial \tau = -2n_2 - 2\mu \cdot N_k, \quad (1.14)$$

$$\partial N_k / \partial \tau = n_2 + \mu \cdot N_k, \quad (1.15)$$

где  $\tau = w_{21} \cdot t$ ,  $u_{21} = w_{21} = w_{12}$ . Так как целью работы является поиск порога когерентного излучения, ниже обсудим случай, когда инверсия  $\mu = n_2 - n_1 \ll n_1, n_2$ . Из уравнений системы (1.13) – (1.15) получим  $N_k = N_{k0} + (\mu_0 - \mu) / 2 \approx (\mu_0 - \mu) / 2$ , а на больших временах  $n_{2st} \approx N / 2 = -\mu_{st} \cdot (\mu_0 - \mu_{st}) / 2$ , где  $\mu_0 = \mu(\tau = 0)$ ,  $N_{k0} = N_k(\tau = 0)$ . Откуда найдем стационарное значение инверсии

$$\mu_{st} = (\mu_0 / 2) - \sqrt{(\mu_0 / 2)^2 + N}. \quad (1.16)$$

Интересны два случая. Для относительно большой инверсии  $(\mu_0 / 2)^2 \gg N$ , инверсия  $\mu$  быстро убывает до своего стационарного значения  $\mu \rightarrow \mu_{st1} = -(N / \mu_0)$ , причем  $|\mu_{st1}| \ll \mu_0$ . При этом реализуется экспоненциальный рост числа квантов, причем достижимый в дальнейшем стационарный уровень  $N_k \rightarrow N_{kst1} = \mu_0 / 2$ . В этом случае,

<sup>2</sup> Косвенным подтверждением наличия такого порога является следующее замечание. Интенсивность спонтанного излучения, не синхронизованного (случайно распределенного) по фазам осцилляторов, как известно, пропорциональна их числу. Интенсивность же когерентного вынужденного излучения пропорциональна квадрату числа осцилляторов.

очевидно, доминирует индуцированное излучение (вторые слагаемые правой части уравнений (1.13)–(1.15)).

Для сравнительно небольшой начальной инверсии  $(\mu_0 / 2)^2 \ll N$ , текущее значение инверсии  $\mu$  приближается к своему стационарному значению  $\mu \rightarrow \mu_{st} = -(N)^{1/2}$ , причем  $|\mu_{st}| > \mu_0$ , а число квантов достигает значений  $N_k \rightarrow N_{kst} = N^{1/2}$ .

Если бы существовало только спонтанное излучение (первые слагаемые правой части уравнений (1.13)–(1.15)), то характерное время достижения стационарного числа квантов в первом случае было бы порядка  $\Delta\tau \approx \tau_m = \mu_0 / N > \mu_0^{-1}$ , а во втором –  $\Delta\tau \approx 1 / \sqrt{N} < \mu_0^{-1}$ , где  $\mu_0^{-1}$  – характерное время развития экспоненциального роста числа квантов в первом случае. То есть, во втором случае экспоненциальный рост числа квантов оказывается явно подавленным и роль вторых слагаемых уравнений (1.13) – (1.14), сводится лишь к стабилизации числа частиц и уровня инверсии за счет процессов поглощения.

Таким образом, очевидно, что характер процесса изменяется, если начальное значение инверсии  $\mu_0$  оказывается больше или меньше порогового значения [11], равного  $\mu_{TH2} = (2N)^{1/2}$ . Подавление экспоненциального роста квантов в случае  $\mu_0 < \mu_{TH2} = (2N)^{1/2}$  свидетельствует не только о смене режима процесса, но дает основания предположить, что процесс индуцированного излучения подавлен преимущественным ростом спонтанного излучения. Действительно, первое слагаемое правой части уравнений (1.13)–(1.15), ответственное за спонтанное излучение за очень короткое время  $\tau < 1 / \mu_{TH2}$  снижает уровень инверсии до нуля, исключая, тем самым, возможность экспоненциального роста числа квантов, характерного для индуцированных процессов излучения.

Полезно, пусть на качественном уровне, рассмотреть природу изменения излучения инвертированной системы вблизи порога  $\mu_{TH2} = (2N)^{1/2}$ . Следует также ожидать и других особенностей в характере излучения, в частности формирования короткого импульса когерентного излучения на фоне роста излучения некогерентного [11, 12].

Проиллюстрируем данные аналитические оценки численным решением уравнений (1.14)–(1.15) в виде

$$\partial M_1 / \partial T = -N_0 - 2M_1 \cdot N_1, \quad (1.17)$$

$$\partial N_1 / \partial T = (N_0 / 2) + M_1 \cdot N_1, \quad (1.18)$$

где  $M = M_1 = \mu / \mu_0$ ,  $T = w_{21} \cdot \mu_0 \cdot t = \mu_0 \cdot \tau$ ,  $N_1 = N_k / \mu_0$ , единственным свободным параметром является  $N_0 = N / \mu_0^2$ . На рис. 1.1 показана динамика развития процесса для случаев изменения параметра  $N_0 \in (30 \div 0.01)$ . Следует обратить внимание на изменение характера процесса при переходе через порог

$$\mu_{TH2} = \sqrt{2(n_1 + n_2)} \quad , \quad (1.19)$$

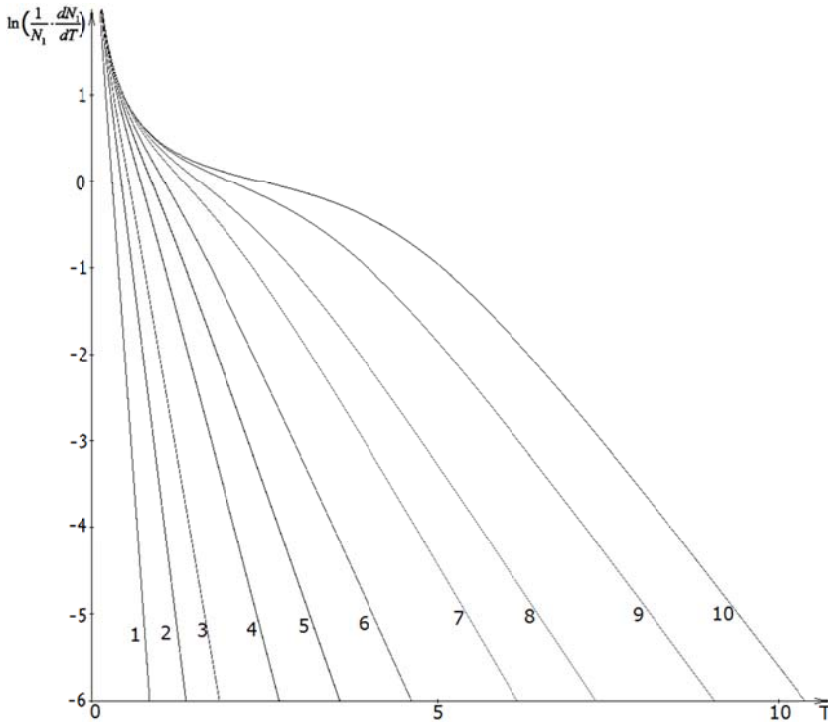


Рис. 1.1. Поведение величины  $\ln\{dN_1 / N_1 dT\}$  от времени для значения

$$\text{параметра } N_0 = (n_1 + n_2) / (n_2 - n_1)^2$$

$$1 \cdot N_0 = 30 ; 2 \cdot N_0 = 10 ; 3 \cdot N_0 = 5 ; 4 \cdot N_0 = 2 ; 5 \cdot N_0 = 1 ; 6 \cdot N_0 = 0.5 ;$$

$$7 \cdot N_0 = 0.2 ; 8 \cdot N_0 = 0.1 ; 9 \cdot N_0 = 0.03 ; 10 \cdot N_0 = 0.01$$

При больших значениях начальной инверсии начинает проявлять себя индуцированное излучение, причем все более четко выделяется режим экспоненциального роста числа квантов. Ниже попытаемся выяснить следствия, к которым приведут представления о спонтанном излучении как о процессе случайном (по крайней мере, в однородной среде), а индуцированном процессе, как о процессе когерентном. Понятно,

что разделение излучения на когерентное-индуцированное и спонтанное-случайное, некогерентное является идеализированным, модельным, но такое разделение может пояснить, хотя бы на качественном уровне, характер излучения квантовой системы вблизи обнаруженного критического значения начальной инверсии заселенностей уровней (1.19).

#### 1.4. Г е н е р а ц и я к о г е р е н т н ы х   и м п у л ь с о в

Прежде всего, для понимания дальнейшего необходимо напомнить, что осциллятор под действием внешнего когерентного поля излучает с той же частотой и фазой, то есть излучение внешнее по отношению к нему и вынуждаемое этим внешним полем излучение самого осциллятора оказываются когерентными [10, 13]. Причем, чем интенсивнее когерентная составляющая внешнего поля, тем больше энергии в единицу времени теряет на излучение осциллятор. С другой стороны, спонтанное излучение – это излучение, независимое от внешнего поля и, по крайней мере, при однородном распределении излучателей, некогерентное.

Можно, пренебрегая процессами стабилизации числа квантов, на качественном уровне предположить, что слагаемые в правых частях уравнений (1.15) пропорциональные  $N_k$ , отвечают когерентным процессам, также как и число квантов  $N_k$ , записанное там же. Рационально представить  $N_k = N_k^{(incoh)} + N_k^{(coh)}$  и записать систему уравнений (1.1)–(1.3) в виде [11]

$$\partial n_2 / \partial t = +w_{12} \cdot N_k^{(coh)} \cdot n_1 - (u_{21} + w_{21} \cdot N_k^{(coh)}) \cdot n_2, \quad (1.20)$$

$$\partial n_1 / \partial t = -w_{12} \cdot N_k^{(coh)} \cdot n_1 + (u_{21} + w_{21} \cdot N_k^{(coh)}) \cdot n_2, \quad (1.21)$$

$$\partial N_k^{(incoh)} / \partial t = u_{21} \cdot n_2, \quad (1.22)$$

$$\partial N_k^{(coh)} / \partial t = w_{21} \cdot N_k^{(coh)} \cdot n_2 - w_{12} \cdot N_k^{(coh)} \cdot n_1. \quad (1.23)$$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\partial n_2 / \partial \tau = -n_2 - \mu \cdot N_k^{(coh)}, \quad (1.24)$$

$$\partial \mu / \partial \tau = -2n_2 - 2\mu \cdot N_k^{(coh)}, \quad (1.25)$$

$$\partial N_k^{(incoh)} / \partial \tau = n_2, \quad (1.26)$$

$$\partial N_k^{(coh)} / \partial \tau = \mu \cdot N_k^{(coh)}, \quad (1.27)$$

где  $u_{21} = w_{21} = w_{12}$ ,  $n_2 = (N + \mu)/2$ , а полное число частиц на двух уровнях  $N = n_1 + n_2$ .

Сравним характеры развития процесса описываемого уравнениями (1.24)–(1.27) (левая колонка таблицы 1.1) и процесса, описываемого уравнениями (1.17)–(1.18) (правая колонка таблицы 1.1).

Таблица 1.1

Качественная система уравнений с разделением квантов по их происхождению	Традиционная система уравнений
$\partial M / \partial T = -N_0 - 2M \cdot N_c ;$ (1.28)	$\partial M_1 / \partial T = -N_0 - 2M_1 \cdot N_1 ;$ (1.31)
$\partial N_{inc} / \partial T = (N_0 / 2) - \theta \cdot N_{inc} ;$ (1.29)	$\partial N_1 / \partial T = (N_0 / 2) + M_1 \cdot N_1 - \theta \cdot N_1 .$ (1.32)
$\partial N_c / \partial T = M \cdot N_c - \theta \cdot N_c .$ (1.30)	

где  $N_{inc} = N_k^{(inc)} / \mu_0$ ,  $N_c = N_k^{(coh)} / \mu_0$ ,  $M = \mu / \mu_0$ ,  $M = M_1 = \mu / \mu_0$ ,  $T = w_{21} \cdot \mu_0 \cdot t = \mu_0 \cdot \tau$ ,  $N_1 = N_k / \mu_0$ , единственным свободным параметром является  $N_0 = N / \mu_0^2$ . Для корректности сравнения будем считать, что общее число реальных состояний  $N = n_1 + n_2 = 10^{12}$ , а пороговая инверсия  $\mu_{0th} = \sqrt{N} = 10^6$ . Переход к единой шкале времени будем оценивать согласно соотношению  $T = \tau \cdot \mu_0$ , где  $T$  – время в каждом отдельном случае. Начальные значения определим следующим образом  $M(T = 0) = M_1(T = 0) = 1$

$$N_{inc}(T = 0) = N_k^{(inc)}(\tau = 0) / \mu_0 = 3 \cdot 10^4 / \mu_0$$

$$N_c(T = 0) = N_k^{(coh)}(\tau = 0) / \mu_0 = 3 \cdot 10^4 / \mu_0$$

$$N_1(T = 0) = N_k(\tau = 0) / \mu_0 = 3 \cdot 10^4 / \mu_0.$$

Поглощение энергии поля учитывается значением  $\theta = \delta / \mu_0$ , где  $\delta$  – декремент поглощения поля в среде.

В отсутствие поглощения энергии квантов согласно качественному описанию (1.28)–(1.30) после уменьшения амплитуды импульса когерентного излучения число квантов спонтанного излучения продолжает расти. В традиционной модели (1.31)–(1.32) процессы поглощения ограничивают рост полного числа квантов и уровень излучения выходит на свое стационарное значение. Однако, сравнивая динамику процессов,

можно понять, что после уменьшения амплитуды когерентного импульса основной вклад в полное число квантов дает спонтанный процесс. То есть, на временах, превышающих длительность когерентного импульса, доминирует некогерентное излучение [11, 12]

В отсутствие потерь или поглощения энергии квантов, результаты расчетов для разных значений начальной инверсии представлены в таблице 1.2. Размер импульса и его форма определялись по его полуширине [12].

Таблица 1.2

№	$\mu_0$	$N_c$	$N_c \cdot \mu_0$ $\times 10^6$	Полу- ширина $\Delta T$	Полуширина ( $\Delta \tau = \Delta T / \mu_0$ ) $\times 10^{-6}$	Отношение заднего фронта к переднему $\Delta \tau_2 / \Delta \tau_1$
1	$\sqrt{2} \cdot 10^6$	0.053	0.075	3.352	2.37	1.04
2	$2 \cdot 10^6$	0.083	0.166	4.743	2.37	1.08
3	$\sqrt{10} \cdot 10^6$	0.204	0.645	7.716	2.44	1.55
4	$\sqrt{20} \cdot 10^6$	0.318	1.422	12.46	2.78	2.46
5	$\sqrt{50} \cdot 10^6$	0.415	2.934	27.26	3.85	5.34
6	$10^7$	0.454	4.540	52.30	5.23	9.88
7	$\sqrt{2} \cdot 10^7$	0.475	6.716	102.5	7.25	17.6
8	$2 \cdot 10^7$	0.487	9.740	202.8	10.1	31.7
9	$\sqrt{10} \cdot 10^7$	0.494	15.62	503.3	15.9	71.4

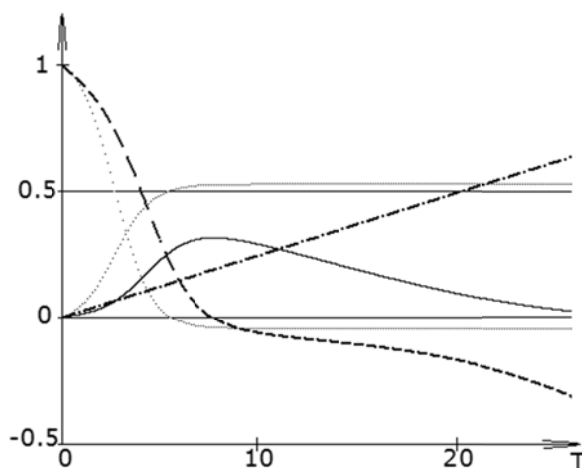


Рис.1.2. Поведение величин, как функций времени представлено кривыми  $M_1$  и  $N_1$  маленькими густыми точками,  $M$  – пунктиром,

$N_c$  – сплошной,  $N_{inc}$  – штрихпунктиром ( $N_0 = N / \mu_0^2 = 0.05$ ,  $\theta = 0$ )

В случае фиксированного поглощения, отвечающего значениям  $\delta = 4 \cdot 10^5$ , результаты расчетов приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

№	$\mu_0$	$N_c$	$N_c \cdot \mu_0$ $\times 10^6$	Полу- ширина $\Delta T$	Полуширина ( $\Delta\tau = \Delta T / \mu_0$ )  $\times 10^{-6}$	Отношение заднего фронта к переднему $\Delta\tau_2 / \Delta\tau_1$
1	$\sqrt{2} \cdot 10^6$	0.034	0.048	3.036	2.15	1.28
2	$2 \cdot 10^6$	0.046	0.092	4.554	2.28	1.05
3	$\sqrt{10} \cdot 10^6$	0.12	0.38	6.641	2.1	1.23
4	$\sqrt{20} \cdot 10^6$	0.211	0.94	8.348	1.87	1.63
5	$\sqrt{50} \cdot 10^6$	0.33	2.33	12.396	1.75	2.64
6	$10^7$	0.382	3.82	17.14	1.71	3.64
7	$\sqrt{2} \cdot 10^7$	0.418	5.91	24.35	1.72	5.14
8	$2 \cdot 10^7$	0.441	8.82	34.28	1.71	7.19
9	$\sqrt{10} \cdot 10^7$	0.462	14.6	54.77	1.73	10.9

Вид импульсов когерентного излучения в отсутствие поглощения представлен на рис. 1.3.

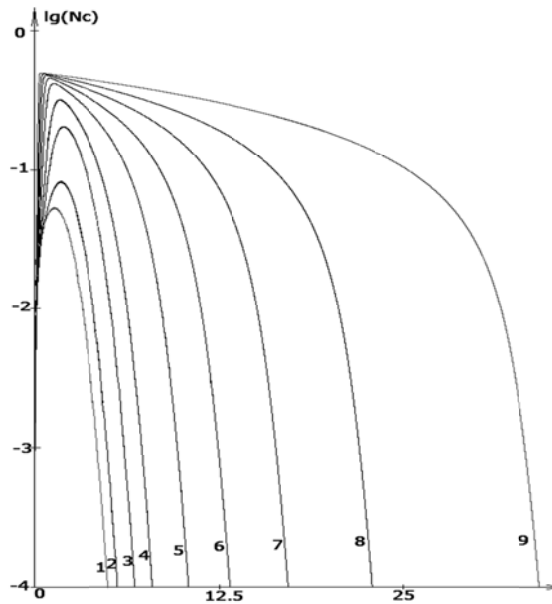


Рис.1.3. Вид импульса в единицах времени  $10^6 \cdot T / \mu_0$ , в отсутствие поглощения для значений инверсии, представленных в таблице 1.2.

Вид импульсов когерентного излучения в поглощающей среде представлен на рис. 1.4.

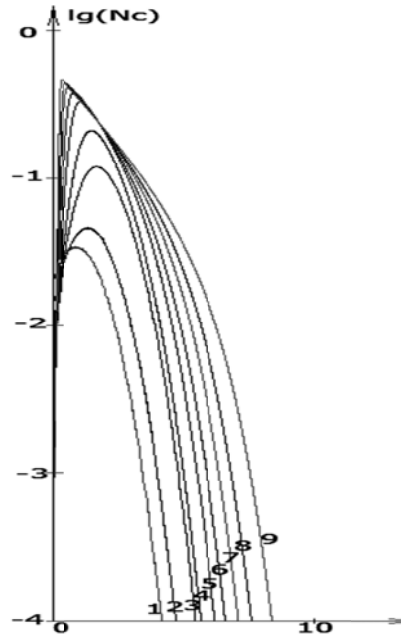


Рис.1.4. Вид импульса в единицах времени  $10^6 \cdot T / \mu_0$ , при поглощении  $\delta = 4 \cdot 10^5$  для значений инверсии, представленных в таблице 1.3.

Следует обратить внимание на тот факт, что в случае фиксированного конечного уровня потерь или поглощения энергии квантов, размер когерентного импульса заметно не изменяется даже при значительном увеличении уровня инверсии заселенностей. Таким образом, если формирование переднего фронта импульса определяется начальным уровнем инверсии, то длительность его заднего фронта обусловлена в большей степени уровнями потерь энергии квантов в системе. Именно последнее обстоятельство и позволяет ожидать, что данный механизм может быть одной из причин формирования когерентных импульсов примерно одной длительности в космических условиях, где относительные уровни инверсии крайне невелики.

### 1.5. Роль нелокальности в а взаимодействии

На линейной стадии роста амплитуды поля, величина  $u_{21} \cdot \mu$  при  $\mu = \text{Const}$  имеет смысл ширины линии индуцированного процесса,

обратной характерному времени развития процесса. Однако следует заметить, что изменение уровня инверсии со временем, вообще говоря, отвечает нелокальности инверсии (т. е. зависимости инверсии не только от данного момента времени, а также от её значений в предшествующие моменты времени, о чем свидетельствует, в частности, наличие производной по времени в выражении (1.8)). Нелокальность, в свою очередь, приводит к тому, что величина  $u_{21} \cdot \mu$  в выражении (1.9) в некоторых случаях теряет смысл обратного характерного времени развития индуцированных процессов. Более интенсивные поля и высокая когерентность излучения оказываются способны заметно уменьшить значения характерных времен развития процессов. Вообще говоря, члены, описывающие вклад индуцированных процессов излучения и поглощения в уравнениях, подобных (1.9), могут иметь и более сложный вид интегро-дифференциальных операторов. Но, несомненно, важным остается отмеченное А. Эйнштейном явление самосогласованного взаимодействия частиц и поля как основной механизм индуцированных эффектов излучения и поглощения.

Существуют примеры подобной нелокальной зависимости, которые порождают специфические режимы развития индуцированных процессов. В частности, распространение индуцированного импульса с бегущей впереди него областью воздействия накачки. В этом случае формируется короткий импульс (см. [50]). Неоднородная накачка и распределенная нелинейная диссипация также могут формировать уединенные импульсы [51, 52]. Интенсивные сравнительно короткие электромагнитные импульсы, модифицируя среду (то есть, изменяя, в частности,  $\mu$ ), способны в определенных условиях создавать отклик, который формирует пучок еще более коротких импульсов [53]. Авторы этой работы склонны считать, что природа появления такой тонкой структуры начального интенсивного импульса связана с периодичностью волновода или магнитной решетки ондулятора. Заметим, что формирование тонкой структуры сверхкороткого импульса может быть обусловлено интерференцией мод возбуждаемого спектра, динамика фаз которых определяется накачкой (т.н. вынужденная интерференция [54]).

Примером учета нелокальности изменений поляризации среды может быть известная полуклассическая теория возбуждения двух-уровневой среды [27, 55], которая в ряде случаев может быть сведена к рассматриваемой выше модели (см., например, [56]).

## 1.6. Режим постоянной накачки

При постоянной накачке уравнение (1.1) может быть представлено в виде

$$\partial n_2 / \partial t = S - n_2 \cdot \tau_2^{-1} - u_{21}(1 + N_k) \cdot n_2 + u_{21} \cdot N_k \cdot n_1, \quad (1.33)$$

где  $S$  – скорость перехода частиц на второй уровень за счет внешнего воздействия,  $\tau_2$  – их время жизни, не связанное с процессами излучения на частоте перехода  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \hbar\omega_{12}$ . Уравнение для изменения количества частиц  $n_1$  на нижнем уровне может быть представлено как

$$\partial n_1 / \partial t = -S + n_2 \cdot \tau_2^{-1} + u_{21}(1 + N_k) \cdot n_2 - u_{21} \cdot N_k \cdot n_1. \quad (1.34)$$

Таким образом, при постоянной накачке и при значительной инверсии заселенностей уровней ( $n_2 \gg n_1$ ) уравнение (1.8) принимает следующий известный (см., например, [27]) вид:

$$\partial \mu / \partial t = 2[S - (n_2 / \tau_2) - u_{21} \cdot n_2] - 2\mu \cdot u_{21} \cdot N_k = (\mu_{00} - \mu) / \tau_2 - 2\gamma \cdot N_k, \quad (1.35)$$

где  $\mu_{00} = n_2(0) - n_1(0)$  и использованы соотношения  $S \cdot \tau_2 (u_{21} \cdot \tau_2 + 1)^{-1} = n_2(0)$  и  $\mu_{00} - \mu = 2n_2(0) - 2n_2$ .

Следует обратить внимание на возможность значительного накопления поля в системе с постоянной накачкой, где нет механизмов потерь энергии квантов поля. Действительно, например, в условиях малого времени релаксации инверсии ( $\tau_2$  – мало) и в режиме насыщения  $\mu \approx \mu_{00} - 2\gamma \cdot \tau_2 \cdot N_k \rightarrow 0$ . При этом максимальное значение числа квантов в системе достигает величины  $N_{kMAX} = \mu_{00} / (2\gamma \cdot \tau_2)$  и при  $\gamma \cdot \tau_2 \ll 1$  в случае малых начальных уровней интенсивности поля значительно превосходит аналогичную величину в консервативной системе, где отсутствует внешняя накачка (см. оценку в предыдущем разделе).

## 1.7. С п о н т а н н ы е   и   и н д у ц и р о в а н н ы е э ф ф е к т ы   в   п р о ц е с с а х   и з л у ч е н и я и   п о г л о щ е н и я

Вкратце обсудим интересные стороны процессов излучения и поглощения в средах. В процессах рассеяния квазичастиц одновременно вверх (фиолетовый спутник) и вниз по энергии (красный спутник) рост числа рассеянных квазичастиц обеспечивает слагаемое, ответственное за спонтанное взаимодействие. Именно спонтанные эффекты определяют развитие процесса рассеяния в этом случае. Игнорирование спонтанных процессов не раз приводило к ошибочным утверждениям об отсутствии рассеяния из-за подавлении неустойчивости интенсивного излучения с резонансным возбуждением стоксовой и антистоксовой части спектра [57]. В условиях же сильного подавления фиолетового спутника из-за

отсутствия подобного перехода в квантовых системах или особенностей дисперсии и высокого уровня поглощения в сплошных средах, спонтанными эффектами можно пренебречь и интенсивность рассеянного излучения достигает значительно больших значений.

В случае поглощения и излучения свободным осциллятором, частота падающего излучения  $\omega_1$  и частота рассеянного излучения  $\omega_2$  под углом  $\theta$  связаны с собственной частотой осциллятора  $\omega_0$  следующими соотношениями

$$\omega_1 = \omega_0(1 + \alpha / 2), \quad \omega_2 = \omega_0(1 - \alpha / 2) + \beta_Q \cos \theta, \quad (1.36)$$

где  $\alpha = \hbar \omega_0 / M_{Q0} c^2 < 1$ ,  $c \beta_Q$  - скорость, приобретаемая осциллятором с массой покоя  $M_{Q0}$  при поглощении кванта  $\hbar \omega_1$  в условиях эффекта отдачи, причем соотношение

$$\omega_2^{-1} - \omega_1^{-1} = (1 - \cos \theta) \hbar / M_Q c^2, \quad (1.37)$$

которое характеризует эффект Комптона, соблюдается с точностью до слагаемых, квадратичных по малому параметру  $\alpha$ . Законы сохранения импульса и энергии выполняются в этом приближении как для процессов поглощения и излучения квантов по отдельности, так и в целом для процесса рассеяния. Следует обратить внимание на тот факт, что именно наличие дополнительной степени свободы у частицы-осциллятора позволяет удовлетворить законам сохранения энергии на всех этапах процесса. При малых значениях  $\alpha \ll 1$ , как показал еще П. А. М. Дирак, вероятности перехода между состояниями дискретного спектра и спектра непрерывного в случаях испускания, поглощения и, что важно, рассеяния излучения частицей-осциллятором оказываются одного порядка (см., например, [4]).

## 1.8. Излучение и поглощение высокоэнергетических квантов осцилляторами, захваченными в потенциальные ямы [58]

Представляет также интерес взаимодействие захваченных в потенциальную яму осцилляторов с внешним полем. Оказывается, что в условиях, когда энергия отдачи при акте поглощения или излучения кванта поля равна  $\hbar \Omega$  (где  $\Omega$  – частота колебаний осциллятора в потенциальной яме), наибольшей интенсивностью отличаются линии излучения и поглощения на частоте колебаний покоящегося осциллятора. Рассмотрим процесс излучения осциллятора с собственной частотой  $\omega_0$ ,

зарядом и массой равными  $e, m$ , который колеблется в потенциальной яме, ориентированной вдоль оси  $OZ$ . Вектор излучаемой электромагнитной волны пусть также ориентирован в этом же направлении.

Расположим в начале координат ВЧ осциллятор, скорость которого  $v_x = v_{x0} \cos \omega_0 t = a \omega_0 \cos \omega_0 t$ . Медленные колебания такого осциллятора в потенциальной яме происходят со скоростью  $v_z = b \Omega \cos(\Omega t)$ , причем  $\Omega \ll \omega_0$ . Законы сохранения при поглощении кванта внешнего поля  $E_v = \hbar(\omega_0 + \Omega)$  осциллятором с массой покоя  $m_0$  и зарядом  $e$  имеют вид

$$\hbar(\omega_0 + \Omega)/c = m_0 V_Q, \quad \hbar \Omega = m_0 V_Q^2 / 2. \quad (1.38)$$

В условиях  $\alpha = \hbar \omega_0 / m_0 c^2 < 1$  движение осциллятора вдоль оси  $OZ$  описывается уравнением  $z = b \sin \Omega t$ , где  $\Omega = V_Q / b$ , откуда следует соотношение  $\omega_0 b / c = kb \approx 2$  [57]. Векторный потенциал внешнего поля имеет компоненты

$$A_x = q(t) \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\{kz + \delta\}, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0. \quad (1.39)$$

Фаза  $\delta$  зависит от ориентации осциллятора. Выбор вида (1.39) определяется условиями нормировки, так, чтобы интеграл от квадрата векторного потенциала в единичном объеме был равен единице, а величина  $q(t)$  удовлетворяла уравнению  $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ , где  $\omega$  и  $\vec{k} = (0, 0, k)$  – волновой вектор электромагнитного поля. Полная энергия поля в объеме  $V$  равна при этом  $U = V \cdot (\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) / 8\pi c^2$ , откуда определим эффективную массу осциллятора поля  $m_{eff} = V / 4\pi c^2$ . Энергия взаимодействия осциллятора с внешним полем

$$H' = -e \cdot v_x A_x / c. \quad (1.40)$$

Векторный потенциал в точке, где находится частица осциллятор,

$$\begin{aligned} A_x &= \sqrt{2} \cdot q_0 \exp\{i(\omega \pm \Omega)t + ikb \sin \Omega t\} \cdot \cos\{\delta\} = \\ &= \sqrt{2} \cdot q_0 \cos\{\delta\} \sum_m J_m(kb) \exp\{i(\omega \pm \Omega)t + im\Omega t\} \end{aligned}$$

$v_x = v_{x0} \cdot \cos \omega_0 t$  – скорость осциллятора. Таким образом, в системе существует  $m$  энергетических уровней, переходы на каждый из которых

могут осуществляться независимо. При этом следует обратить внимание на изменение частоты при отдаче  $k \cdot t^{-1} \int t dt \cdot (dV_Q / dt) \approx \pm k V_Q / 2 = \pm \Omega$  в системе покоя частицы-осциллятора. В классической модели интервал времени передачи импульса и энергии частице-осциллятору достаточно длительный, в квантовом случае этот процесс мгновенный.

Добиваясь выполнения требований временного синхронизма, убедимся в том, что только при значениях частоты внешнего поля  $\omega = (m \mp 1)\Omega + \omega_0$  выражение для энергии взаимодействия осциллятора с полем оказывается отличным от нуля и может быть представлено в виде

$$H' = -e \cdot v_x A_x / c = -\frac{e \cdot v_{x0}}{c} q_0 \sqrt{2} \cdot \sum_m J_m(kb) \cdot \cos \delta. \quad (1.41)$$

Заметим, что для покоящегося осциллятора  $b = 0$ , в выражении (1.41) отличным от нуля оказывается только один член ряда с  $m = 0$ . Таким образом, частота поглощаемого излучения  $\omega = \omega_0 + \Omega$  отличается от частоты излучаемого  $\omega = \omega_0 - \Omega$  на  $2\Omega$ , что отвечает разнице энергий поглощаемого и излучаемого квантов в две энергии отдачи.

В системе покоя захваченного в потенциальную яму осциллятора в случае поглощения кванта  $\omega - m \cdot \Omega = \omega_0 + \Omega$ , что при частоте внешнего излучения  $\omega = \omega_0$  определяет значение  $m = -1$ . В случае излучения кванта захваченным в потенциальную яму осциллятором  $\omega - m \cdot \Omega = \omega_0 - \Omega$ , что при частоте внешнего излучения  $\omega = \omega_0$  определяет значение  $m = 1$ .

Легко видеть, что при выполнении соотношения  $\omega_0 b / c = kb \approx 2$  излучение и поглощения на собственной частоте осциллятора  $\omega_0$  наиболее интенсивное. Для этого матричный элемент представим как

$$H_{if} = -\frac{e}{c} \sqrt{2} \cdot \omega_0 \cdot x_{ab} \cdot q_{nn'} \cdot J_{\pm 1}(kb) \cdot \cos \delta. \quad (1.42)$$

Два состояния осциллятора обозначены нижними индексами  $a, b$ , а индексы  $n, n'$  отвечают двум состояниям излученного  $(n, n+1)$  или поглощенного  $(n, n-1)$  поля. Причем для случая поглощения  $|q_{nn'}|^2 = |q_{n, n-1}|^2 = n |q_{01}|^2$ , а для случая излучения  $|q_{nn'}|^2 = |q_{n+1, n}|^2 = (n+1) |q_{01}|^2$ , где  $|q_{01}|^2 = \hbar c^2 / V \omega_0$  и использовано

значение массы  $m_{eff} = V / 4\pi c^2$ . Для квадрата матричного элемента получим выражение

$$|H_{if}|^2 = -\frac{2e^2}{c^2} \cdot \omega_0 \cdot (x_{ab}^2 + y_{ab}^2) \cdot \frac{hc^2}{V} J_1^2(kb) \cdot \cos^2 \delta \cdot \begin{Bmatrix} n+1 \\ n \end{Bmatrix}, \quad (1.43)$$

где верхнее значение соответствует излучению (ограничимся случаем  $n=0$ ), а нижнее – поглощению (здесь, положим  $n=1$ ). Вероятность перехода можно найти, умножая на  $\frac{4\pi^2}{h^2} \rho(\nu_{ab})$ , где  $\rho(\nu_{ab})$  – плотность колебаний в интервале частот, и учесть, что при усреднении по начальным фазам  $\langle \cos^2 \delta \rangle = 1/2$

$$P_{if} = \frac{4\pi^2}{h^2} |H_{if}|^2 \rho = \frac{8\pi e^2}{hc^3} \omega_0^2 (|x_{ab}|^2 + |y_{ab}|^2) \cdot J_1^2(kb) \cdot \cos^2 \delta. \quad (1.44)$$

Отметим, что вероятность поглощения на частоте  $\omega_0 \pm \Omega$  можно получить, заменяя в (1.44)  $J_1^2(kb)$  на  $J_0^2(kb)$ . Интенсивность вдоль направления OZ можно получить, умножая (1.44) на  $\hbar\omega_0$ , а полную интенсивность по всем направлениям – интегрируя по углу  $\theta = \vec{k} \wedge O\vec{Z}$ .

Нетрудно видеть, что в случае колеблющегося в потенциальной яме осциллятора с частотой  $\Omega$  и амплитудой колебаний  $b$  так как  $J_1^2(kb) \gg J_0^2(kb)$ , интенсивность линий поглощения и излучения на собственной частоте осциллятора  $\omega_0$  почти на порядок превосходит интенсивность линий излучения на частоте  $\omega_0 - \Omega$  и поглощения на частоте  $\omega_0 + \Omega$  [58]. Заметим также, что природа ВЧ осциллятора, энергия колебаний которого в потенциальной яме равна энергии отдачи, не влияет на обсуждаемый характер излучения и поглощения на его собственной частоте. Отметим, что при излучении под углом  $\theta_0 \approx 50^\circ$ , когда  $J_1^2(kb \cdot \cos \theta_0) = J_0^2(kb \cdot \cos \theta_0)$ , интенсивности излучения на собственной частоте  $\omega_0$  и на комбинационной частоте  $\omega_0 - \Omega$  сравниваются, что позволяет экспериментально проверить данную теорию.

## 1.9. Учет процессов релаксации НЧ возбуждений в сплошных средах

Если система, обсуждаемая выше, находится в среде, то следует рассмотреть возможность излучения низкочастотного кванта  $\Omega = \omega_0 (\hbar \omega_0 / 2m_0 c^2)$ . Сравнительно низкая скорость, приобретаемая осциллятором в результате отдачи часто оказывается заметно меньше фазовой скорости фононов:

$$v_s \gg c(\hbar \omega_0 / 2m_0 c^2). \quad (1.45)$$

Это делает невозможным прямую передачу кинетической энергии отдачи фонону. Об этом свидетельствует также невозможность выполнить законы сохранения энергии и импульса. Например, для импульса

$$\hbar \omega_0 / c \gg \hbar \Omega / v_s = \hbar \omega_0 \left( \frac{\hbar \omega_0}{2m_0 c^2} \right) / v_s = (\hbar \omega_0 / c) \left( \frac{\hbar \omega_0}{2m_0 c^2} \right) \frac{c}{v_s}. \quad (1.46)$$

Однако если осциллятор оказывается захваченным в потенциальную яму, его движение становится неравномерным, он, вообще говоря, уже способен излучать фононы, при этом пространственный период низкочастотных осцилляций

$$b = \frac{V_Q}{\Omega} = \frac{\hbar \omega_0}{m_0 c} \frac{2m_0 c^2}{\hbar \omega_0^2} = 2 \frac{c}{\omega_0} \quad (1.47)$$

в потенциальной яме много меньше длины волны фононов, частота которых равна частоте колебаний в потенциальной яме

$$k_s b = \frac{\Omega}{v_s} \frac{c}{\omega_0} = \left( \frac{\hbar \omega_0}{2m_0 c^2} \right) \frac{c}{v_s} \ll 1. \quad (1.48)$$

Следует оценить время жизни такого низкочастотного осциллятора. В том случае, если время жизни НЧ осциллятора окажется заметно больше периода колебаний в потенциальной яме, то механизмы излучения и поглощения изолированной системы «осциллятор – потенциальная яма», обсуждаемые в данной работе применимы и для случая, когда такая система находится в среде. Другими словами, релаксационными процессами с участием фононного спектра в этом случае можно пренебречь.

В одномерном случае возмущение, вносимое в среду НЧ движением осциллятора равно

$$\rho_{\text{внешн}}(t, x) = m_0 \cdot \delta[x - V_Q \cos(\Omega t)]. \quad (1.49)$$

Для Фурье-образа возмущений плотности в среде получим

$$\rho(\omega, k) = \frac{\omega^2}{v_s^2 k^2 - \omega^2} \left( \frac{1}{4\pi} \right) m_0 \frac{kb}{2} [\delta(\omega - \Omega) - \delta(\omega + \Omega)] \cdot \quad (1.50)$$

Выполняя обратное преобразование, найдем

$$\rho(x, t) = -\frac{m_0 b \Omega^2}{8 v_s^2} \{ \sin(\Omega t - k_0 z) + \sin(\Omega t + k_0 z) \} \cdot \quad (1.51)$$

Так как возмущение скорости среды  $u = v_s \rho / \rho_0$ , то отношение интенсивности излучения к величине энергии одного кванта равно

$$I / \hbar \Omega = \frac{1}{8} \left( \frac{m_0 c^2}{\hbar \omega_0} \right) \frac{m_0}{\rho_0 \lambda_s} \frac{\Omega^2}{\omega_0} \cdot \quad (1.52)$$

Отметим наличие малого параметра  $m_0 / \rho_0 \lambda_s$  в выражении (1.52), который равен отношению массы одного осциллятора-атома, к массе подобных частиц на длине звуковой волны. Время релаксации НЧ движений

$$\tau_{LF} \approx 8 \rho_0 \lambda_s / \pi m_0 \Omega \quad (1.53)$$

оказывается много больше периода низкочастотных колебаний в потенциальной яме. Кроме того, если время релаксации НЧ движения в потенциальной яме значительно превышает время жизни ВЧ кванта, то процесс НЧ релаксации не влияет на характер обсуждаемого выше излучения и поглощения ВЧ квантов. Отметим, что в трехмерном случае характерное время релаксации НЧ движения порядка

$$\tau_{LF} \approx 3(\rho_0 \lambda_s^3 / m_0)(\omega_0 / \pi^2 \Omega^2) \quad (1.54)$$

пропорциональное весьма большому параметру  $\rho_0 \lambda_s^3 / m_0$ . Этот параметр равен отношению массы атомов в трехмерном кубе, сторона которого равна длине волны звука, к величине массы одного атома. А также большому параметру  $(\omega_0 / \Omega)$ . В этом случае время жизни ВЧ осциллятора вполне может оказаться меньше времени релаксации НЧ движения за счет излучения звука [58].

\*\*\*

Можно показать также, что учет быстрых осцилляций потенциальной ямы с частотой  $\omega_s$  и амплитудой  $b_s$ , для которых справедливы

неравенства  $b_s^2 \omega_s^2 > b^2 \Omega^2$ ,  $b_s^2 \ll b^2$ , приводит к снижению амплитуды векторного потенциала  $A_x$  и энергии взаимодействия  $H'$ , определяемых выражением (1.40), в  $\exp\{-W/2\} = (1 - b_s^2/b^2)$  раз и уменьшает вероятность перехода (1.44) в  $\exp\{-W\}$  раз. Подобным образом на вероятность перехода будет влиять наличие сравнительно высокочастотного фононного спектра окружающей среды. В случае достаточно широкого спектра осцилляций потенциальной ямы  $\exp\{-W\} = (1 - b^{-2} \sum_{i=1} b_i^2)$ , при выполнении условий на энергию  $b^2 \Omega^2 \ll \sum_{i=1} b_i^2 \omega_i^2$  и амплитуды отклонений  $b^2 > \sum_{i=1} b_i^2$ .

Так, например поглощение ядрами атомов  $^{57}\text{Fe}$  и  $^{119}\text{Sn}$  гамма-квантов 14,4 кэВ и 23,8 кэВ соответственно, согласно выражению  $\omega_0 b/c \approx 2$ , приводит к колебаниям атомов в потенциальной яме кристалла с размахами (удвоенной амплитудой) равными  $0,55 \cdot 10^{-8}$  см. и  $0,33 \cdot 10^{-8}$  см. Время релаксации такого колебательного движения атомов железа и олова из-за генерации звука, определяемого выражением (1.54), порядка 0.1 и 0.01 секунды соответственно, что на много порядков больше времени жизни возбужденного ядра атома. Приведенные выше оценки ослабления интенсивности линий  $\sim \exp\{-W\}$  остаются справедливыми даже для температур Дебая  $\theta_D$  (например, для железа  $\theta_D = 467^\circ \text{K}$ ,  $\omega_{\text{SMAX}} \approx k\theta_D / \hbar \approx 10^{14}$ ,  $b^2 \gg \sum_{i=1} b_i^2$ ). Процесс излучения и поглощения на

собственной частоте ядра  $\omega_0$  в большой степени определяется наличием значительного числа атомов, колеблющихся в потенциальных ямах кристалла, как с возбужденными, так и с не возбужденными ядрами.

Источником же атомов с возбужденным ядром, совершающих колебания в потенциальной яме (на частоте  $\Omega$ ) в начальный момент является внешнее излучение с частотой  $\omega_0 + \Omega$ , количество квантов которого в единицу времени  $G_k^{(+)}$  поступает извне. Очевидно, что независимо от факта возбуждения ядра атома, совершающего колебания в потенциальной яме в присутствии внешнего поля, система энергетических уровней остается той же. В работе [57] показано, что количество квантов на собственной частоте ядра  $\omega_0$  на развитой стадии процесса превосходит число квантов на частоте  $\omega_0 + \Omega$  в отношении  $(w_{2*1} \cdot n_{10} / \delta_k) \gg 1$ . Здесь  $\delta_k$  – декремент поглощения энергии поля средой,  $w_{2*1} \cdot n_{10}$  – скорость изменения количества возбужденных ядер за счет индуцированного

поглощения кванта на частоте  $\omega_0 + \Omega$  прежде покоящимися атомами с не возбужденными ядрами, равновесная плотность которых равна  $n_{10}$ .

## РАЗДЕЛ 2. ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ ПРИ РАЗВИТИИ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЛАЗМЕ

### 2.1. Спонтанное излучение частиц электронного пучка в плазме

Рассмотрим процесс спонтанного излучения плазменных волн отдельным электроном, движущимся со скоростью  $v$  в направлении оси  $OZ$ . Ограничимся для простоты описания одномерным случаем (см., например, [59]). Представим плотность заряда электрона в следующем виде:

$$\rho = -e \cdot \delta(v \cdot t - z + s). \quad (2.1)$$

Используем уравнение Пуассона

$$\frac{\partial}{\partial z} \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial D}{\partial z} = -4\pi\rho, \quad (2.2)$$

где было учтено, что поле возбуждаемого излучения является потенциалным, то есть, напряженность электрического поля  $E = -\partial\Phi/\partial z$ , где  $\Phi$  – потенциал.

Из уравнений (2.1) – (2.2), не трудно выписать выражение для Фурье-образа напряженности электрического поля

$$E(\omega, k) = 8\pi^2 i e \frac{\delta(\omega - kv)}{k\varepsilon(\omega, k)} \exp\{-iks\}. \quad (2.3)$$

В случае плазменной среды, состоящей из электронов и неподвижных ионов с плотностями  $n_e, n_i$  (в равновесии, очевидно,  $n_e = n_i = n_0$ ), соответственно, диэлектрическая проницаемость имеет сравнительно простой вид<sup>3</sup> (кроме того, будем считать, что здесь и ниже

<sup>3</sup> Индукцию электрического поля, вообще говоря, можно представить в виде свертки [8]  $D(z, t) = \iint E(z', t') \cdot \varepsilon(z - z', t - t') \cdot dt' dz'$ . Однако вычислительные трудности расчета

выполнено сильное неравенство  $v^2 \gg k_B T_e / m_{e0}$ , где  $m_{e0} = m$  - масса покоя электрона, здесь  $k_B$  - постоянная Больцмана),  $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m}$ .

$$\varepsilon(\omega, k) = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\nu_{ei})}, \quad (2.4)$$

где  $\nu_{ei}$  - частота столкновений электронов с ионами. Используя явный вид Фурье-образа диэлектрической проницаемости и выполняя обратное преобразование выражения (2.3),

$$E(z, t) = (2\pi)^{-2} \int d\omega \cdot \exp\{-i\omega \cdot t\} \int dk \cdot E(\omega, k) \cdot \exp\{ikz\}, \quad (2.5)$$

получим значение напряженности электрического поля

$$E(z, t) = 2ie \int \frac{dk}{k\varepsilon(kv, k)} \exp\{-ikv(t - \frac{z-s}{v})\}. \quad (2.6)$$

Сила торможения частицы полем излучения равна

$$F = \frac{1}{2\pi} \int F(k) \cdot dk, \quad (2.7)$$

где  $F(k) = 4\pi \cdot ie^2 / [k\varepsilon(kv, k)]$ . Отсюда найдем спектральную интенсивность спонтанного излучения одной частицы

$$\begin{aligned} w_1(k) &= \text{Re}\{4\pi \cdot ie^2 \cdot v / [k\varepsilon(kv, k)]\} = \text{Re}\{2\pi \cdot ie^2 \cdot v^2 [\frac{1}{kv - \omega_{pe}} + \frac{1}{kv + \omega_{pe}}]\} = \\ &= 2\pi^2 e^2 \omega_{pe}^2 \cdot \delta(kv - \omega_{pe}) / k^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для пучка частиц с функцией распределения

$$f_b = [n_{b0} / \sqrt{\pi} v_{Tb}] \cdot \exp\{-(v - v_{0b})^2 / v_{Tb}^2\}, \quad (2.9)$$

---

диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(z, t)$  особенно в области малых временных и пространственных масштабов часто заставляют отказаться от прямого применения этого выражения. Значительно более конструктивным оказывается переход к Фурье-образам всех величин. Фурье-образ диэлектрической проницаемости в большей части спектральных интервалов хорошо изучен, что позволяет достаточно корректно описывать множество физических явлений. Для Фурье-образов напряженности и индукции электрического поля справедливы представления вида  $E(\omega, k) = \int dt \cdot \exp\{i\omega \cdot t\} \int dz \cdot E(z, t) \cdot \exp\{-ikz\}$ , а вместо интегральной связи получим алгебраическую  $D(\omega, k) = \varepsilon(\omega, k) \cdot E(\omega, k)$ .

где  $v_{0b}, v_{Tb} = \sqrt{2k_B T_b / m_b}$  – средняя и тепловая скорости пучка, потери энергии единицы объема пучка в единицу времени за счет спонтанного излучения плазменных (ленгмюровских) колебаний равны

$$W = \int w(k) dk = \int dk \int dv \cdot v \cdot f_b(v) \cdot F(k), \quad (2.10)$$

причем в выражении для  $w(k)$  следует отбросить мнимую часть, вследствие нечетности подынтегрального выражения (2.10). Тогда спектральная плотность потерь энергии пучка в единицу времени  $w(k)$  определяется выражением

$$\begin{aligned} w(k) &= 4\pi \cdot e^2 \int dv \cdot v \cdot f_b(v) \cdot \text{Im}\{[k\varepsilon(kv, k)]^{-1}\} = \\ &= 4\pi^2 e^2 [\omega^2(k) / k^3] \cdot f_b[\omega(k) / k], \end{aligned} \quad (2.11)$$

причем здесь  $\omega(k) \approx \omega_{pe}$ . Следует обратить внимание на знакоопределенность выражения (2.11), которая, как отмечалось выше, характерна для спонтанных процессов.

Для получения выражений (2.8) и (2.11) полезно воспользоваться представлением

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega \cdot \varepsilon(\omega)} &= \frac{1}{\omega \cdot (1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \cdot (\omega + i\nu_{ei})})} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega - \omega_{pe} - i\nu_{ei}/2} + \frac{1}{\omega + \omega_{pe} - i\nu_{ei}/2} \right) = \\ &= \frac{i\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_{pe}) + \delta(\omega + \omega_{pe})], \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция.

## 2.2. Случайное или регулярное спонтанное излучение?

Вопрос о том, является ли спонтанное излучение процессом случайным или регулярным, часто поднимается в литературе. Отметим, что, так как процесс спонтанного излучения одной частицы не зависит от поведения других частиц ансамбля, то излучение приобретает характер случайного в той степени, в которой случайны начальные условия их распределения [5–7, 24, 39]. Если ансамбль частиц представляет собой сгусток частиц с малым разбросом по скоростям и размеры которого заметно меньше длины

излучаемой волны, то интенсивность такого регулярного когерентного излучения (сверхизлучения) [32, 60, 61], по крайней мере, в начальный период процесса, будет пропорциональна квадрату их числа (детальнее см. ниже раздел 2.14). Излучение специальным образом фазированных осцилляторов, как отмечалось ранее [16, 48], также только на начальном этапе может приобретать регулярный когерентный характер. При развитии процессов генерации поля компактными сгустками и специально фазированными осцилляторами, уже «речь идет, конечно, об индуцированном излучении [частиц и осцилляторов] под действием коллективного самосогласованного поля». Однако даже поле спонтанного излучения многих частиц, которое можно считать случайным, обладает, тем не менее, весьма значительной энергией [62, 83].

### 2.3. Учет индуцированных процессов

Если интенсивность поля велика, то следует учитывать воздействие этого поля на процессы излучения, а также поглощения частицами квантов этого поля. Причем такие процессы излучения, а также поглощения квантов поля следует считать вынужденными (индуцированными), то есть навязанными частицам пучка этим полем.

Важно отметить, что в отличие от случая спонтанного излучения (при этом можно пренебречь обратным влиянием поля на частицы, то есть формально имеет место не самосогласованное описание и при этом эффект остается) в случае учета вынужденных процессов описание системы является вполне самосогласованным.

Можно также показать, следуя работам [26] (см., также, [59]), что именно учет индуцированных процессов излучения и поглощения квантов поля (который требует применения самосогласованного описания при взаимодействии частиц и поля), позволяет обнаружить в определенных условиях явление пучково-плазменной неустойчивости, то есть процесс быстрого роста амплитуды излучения.

В данном представлении частицы пучка излучают и поглощают кванты продольных (ленгмюровских) волн – плазмоны, энергия которых равна  $\hbar\omega(k)$ . Определим число квантов продольных волн, излучаемых в единицу времени в интервале волновых чисел  $dk$  в случаях спонтанного и индуцированного процессов  $n_m u_{mn} dk$  и  $n_m w_{mn} N_k dk$ , соответственно. При этом частицы, излучающие плазмон, переходят из состояния  $m$  в состояние  $n$ . Аналогично определим в этом же интервале волновых чисел скорость поглощения плазмонов  $n_n w_{nm} N_k dk$ , где  $n_n$  – число частиц в состоянии  $n$ , а  $N_k$  – число квантов поля,  $u_{mn}$ ,  $w_{mn}$ ,  $w_{nm}$  – коэффициенты в уравнениях А. Эйнштейна для этого случая.

Уравнения, описывающие изменение количества частиц на верхнем и нижнем уровнях энергии, имеют вид, подобный (1.1) и (1.2):

$$\partial n_m / \partial t = -(u_{mn} + w_{mn} \cdot N_k) \cdot n_m + w_{nm} \cdot N_k \cdot n_n, \quad (2.13)$$

$$\partial n_n / \partial t = -w_{nm} \cdot N_k \cdot n_n + (u_{mn} + w_{mn} \cdot N_k) \cdot n_m. \quad (2.14)$$

В тепловом равновесии, очевидно,  $n_m / n_n = \exp\{\hbar \omega(k) / T\}$ , число излученных и поглощенных квантов поля равны (постоянную Больцмана здесь и ниже будем считать равной единице), а для количества квантов поля справедлива формула Планка  $N_{k0} = [\exp\{\hbar \omega(k) / T\} - 1]^{-1}$ , что приводит к соотношению  $u_{mn} = w_{mn} = w_{nm}$ .

Таким образом, в неравновесном случае для описания динамики количества плазмонов получим уравнение

$$dN_k / dt = u_{mn} \cdot n_m \{(1 - n_n / n_m) \cdot N_k + 1\}. \quad (2.15)$$

Отметим, что изменение плотности энергии плазмонов  $dE_k / dt = \hbar \omega(k) \cdot u_{mn} \cdot n_m$  в отсутствии других механизмов излучения и поглощения их энергии, кроме спонтанного излучения частиц пучка равно потерям его энергии в единицу времени  $w(k)$ . С учетом этого, уравнение (2.15) принимает вид:

$$dE_k / dt = w(k) \cdot \{(1 - n_n / n_m) \cdot N_k + 1\}. \quad (2.16)$$

Изменение импульса частиц при излучении плазмона  $m(v_m - v_n) = \hbar k$ , откуда следует, что  $v_m = v_n + \hbar k / m$  и в случае, если интервал скоростей, на котором существенно изменяется функция распределения частиц заметно превышает  $\hbar k / m$ , то

$$n_n / n_m = f(v_m - \hbar k / m) / f(v_m) \approx 1 - (\hbar k / m) \cdot df(v_m) / f(v_m) dt. \quad (2.17)$$

Если функция распределения пучка по скоростям  $f(v_b)$  имеет вид (2.9), то  $1 - n_n / n_m = -\hbar k(v_m - v_{0b}) / k_B T_b$  и уравнение (2.16) принимает вид:

$$\begin{aligned} dE_k / dt &= 2\pi^2 e^2 [\omega^2(k) / k^2] \cdot f_b[\omega(k) / k] \cdot \\ &\cdot \{1 + N_k (\hbar k / m) \partial f_b(v) / f_b(\omega(k) / k) \partial v|_{v=\omega(k)/k}\} = \\ &= 2\gamma_L \cdot \{E_k + \omega(k) T_b / [k v_{0b} - \omega(k)]\}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $\gamma_L = (\sqrt{\pi} / 2) \frac{\omega_b^2 \omega(k)}{k^3 v_{Tb}^3} \exp \left\{ -\frac{[kv_{ob} - \omega(k)]^2}{k^2 v_{Tb}^2} \right\} [kv_{ob} - \omega(k)]$  – линейный инкремент пучково-плазменной неустойчивости в отсутствии потерь энергии плазмонов,  $\omega(k) \approx \omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m}$ . Связь между плотностью энергии  $E_k$  и напряженностью электрического поля плазмонов  $E_k$  определяется соотношением  $E_k = \frac{\partial \omega \varepsilon(\omega, k)}{8\pi \cdot \partial \omega} |E_k|^2 \approx \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi \omega^2(k)} |E_k|^2$ .

Кстати, равенство коэффициентов  $u_{mn} = w_{mn} = w_{nm}$ , а также зависимость слагаемого, ответственного за индуцированные процессы от  $N_k$ , позволяет представить выражение (2.16) в более общем виде

$$dN_k / dt = \Sigma_m + \{\Sigma_m - \Sigma_n\} N_k = \Sigma_m + \frac{\partial \Sigma_m}{\partial(\hbar \omega)} E_k, \quad (2.19)$$

где  $\Sigma_m$  – изменение числа квантов  $N_k$  энергии излучения  $E_k = \hbar \omega \cdot N_k$  за счет спонтанных процессов в единицу времени, причем переход  $\Sigma_m \rightarrow \Sigma_n$  соответствует излучению кванта  $\hbar \omega$ , то есть

$$\begin{aligned} \Sigma_m &= \Sigma(\varepsilon_m) = \Sigma(\varepsilon_n + \hbar \omega), \\ \Sigma_m - \Sigma_n &= \Sigma(\varepsilon_m) - \Sigma(\varepsilon_n) = \frac{\partial \Sigma_m}{\partial \varepsilon} \hbar \omega = \frac{\partial \Sigma_m}{\partial(\hbar \omega)} \hbar \omega. \end{aligned}$$

Соотношение (2.19) между вкладами спонтанного излучения и индуцированных процессов излучения и поглощения в генерацию квантов поля является достаточно общим не только для многопоточковых систем, но и для инвертированных сред (см. выше выражение (1.7)), и для многоволновых взаимодействий (см. ниже выражения (3.12) и (3.21)).

Важно отметить, что подобное (2.18) уравнение без слагаемого правой части, ответственного за спонтанные процессы излучения, можно получить, используя самосогласованное описание только для возмущений в рамках традиционной кинетической теории (см., например, [31, 59]). Для учета спонтанных процессов в этом описании следовало бы принять во внимание (невозмущенные) собственные токи и собственные поля пучков частиц.

При учете потерь энергии плазмонов за счет других механизмов поглощения и диссипации, уравнение (2.18) может быть записано в виде

$$dE_k / dt = -2\delta_D E_k + 2\gamma_L \cdot \{E_k + \omega(k) T_b / [kv_{ob} - \omega(k)]\}, \quad (2.20)$$

где  $\delta_D$  — декремент затухания, определяемый другими механизмами потерь энергии. Так как максимальный инкремент достигается при  $kv - \omega(k) \approx kv_{Tb}$ , то уравнение (2.20) для спектральной плотности колебаний вблизи максимального инкремента принимает вид:

$$\frac{dE_k}{dt} \approx -2\delta_D E_k + 2\gamma_L \{E_k + \sqrt{mv_{0b}^2 T_b / 2}\}. \quad (2.21)$$

## 2.4. Затухание Ландау

Не трудно получить значение декремента затухания Ландау [64] для плазмонов, фазовая скорость которых заметно превышает тепловую скорость плазмы. Роль пучка частиц в этом случае может играть высокоэнергетическая часть — «хвост» Максвелловского распределения электронов плазмы (2.9), а дисперсионные характеристики определяются основной массой плазменных электронов.

Уравнение для спектральной интенсивности плазмонов в пренебрежении спонтанными процессами принимает вид:

$$dE_k / dt = -2\delta_l \cdot E_k, \quad (2.22)$$

где значение декремента затухания Ландау равно

$$\delta_l = -\sqrt{\pi} \cdot \frac{\omega^4(k)}{2k^3 v_{Te}^3} \exp\left\{-\frac{\omega^2(k)}{k^2 v_{Te}^2}\right\}, \quad (2.23)$$

$v_{Te} = \sqrt{2k_B T_e / m_b}$  а  $T_e$  — температура плазменных электронов.

В связи с интенсивным развитием нелинейной физики в распределенных системах и средах основное внимание традиционно уделяется индуцированным самосогласованным процессам. Однако учет спонтанных процессов в общей динамике развития множества физических явлений часто необходим для выяснения роли собственного шума систем, особенно вблизи порога неустойчивостей. Это позволит скорректировать представления о динамике неравновесных процессов.

## 2.5. Рост флуктуаций при приближении к порогу неустойчивости

Особый интерес представляет увеличение уровня шума при приближении к порогу неустойчивости. Действительно, решая уравнение (2.20) при условии  $\delta_D - \gamma_L > 0$ , получим

$$E_k \rightarrow E_{kst} = \frac{\gamma_L \sqrt{mv_{0b}^2 T_b / 2}}{\delta_D - \gamma_L}. \quad (2.24)$$

При приближении к порогу неустойчивости ( $\delta_D = \gamma_L$ ) уровень шума быстро увеличивается взрывным образом. Это, в частности, улучшает стартовые условия для развития неустойчивости. Аномальный рост флуктуаций в этом случае подобен хорошо известному явлению критической опалесценции при приближении параметров системы к порогу неустойчивости – области фазового перехода.

## 2.6. Уровень шума

(интенсивность плазменной  
турбулентности)

В плазме без пучка интенсивность плазменной турбулентности (флуктуаций), как это следует из уравнения (2.20), где следует положить  $v_0 = 0$ , определяется величиной  $E_k \propto T_e$ . При инжекции пучка ниже порога неустойчивости (или в спектральных областях, где неустойчивость не развивается) уровень шума может существенно возрасти [26]. Действительно, из уравнения (2.21) в стационарных условиях получим, что интенсивность шума, обусловленная спонтанным излучением пучка, может достигать значений порядка

$$E_k = \frac{\omega(k)}{kv_{0b} - \omega(k)} \cdot T_b \propto \sqrt{mv_{0b}^2 T_b / 2}. \quad (2.25)$$

Явление значительного роста шума в системе при инжекции пучка в широких спектральных интервалах, даже вне области неустойчивости было обнаружено еще в первых экспериментах по плазменно-пучковому взаимодействию [62, 63].

Следует заметить, что возрастание числа квантов спонтанного поля в единицу времени в объеме взаимодействия в квантовом или рост энергии поля в классическом описаниях, имеют некоторые особенности, отличающие их от случая роста энергии индуцированного поля при развитии неустойчивости. Прежде всего, спонтанные поля отдельных осцилляторов или частиц пучка (при их однородном распределении и при отсутствии внешних механизмов синхронизации), отличаются фазой, которая вообще говоря, по крайней мере, в начальный момент, случайная, то есть спонтанное излучение однородно распределенных и не фазированных излучателей – некогерентное. Изменение энергии спонтанного излучения в единицу времени пропорционально числу излучателей. Поле спонтанного

излучения растет линейно, но начиная с некоторого момента, группировка излучателей может оказаться такой, что инициативу способно перехватить индуцированное, то есть навязанное волной, излучение. Этот рост индуцированного излучения происходит экспоненциально и формируется та часть поля, в котором велика доля когерентности, то есть фазы многих отдельных излучателей слабо отличаются друг от друга. Изменение энергии поля в единицу времени в этом случае пропорционально квадрату числа синхронизованных осцилляторов. Причем подобная синхронизация происходит под действием излучаемой волны и управляется ею.

Некоторый и все время растущий уровень спонтанной составляющей излучения, который имеет характер нарастающего шума, также следует учитывать, особенно в режимах длительных импульсов корпускулярной и волновой накачки.

## 2.7. Развитие неустойчивости

При превышении порога такой кинетической пучковой неустойчивости, то есть при  $\gamma_L > \delta_D$ , для интенсивности колебаний справедливо выражение

$$E_k = [E_k(t=0) + \frac{\gamma_L \sqrt{mv_{ob}^2 T_b / 2}}{\gamma_L - \delta_D}] \exp\{2(\gamma_L - \delta_D)t\} - \frac{\gamma_L \sqrt{mv_{ob}^2 T_b / 2}}{\gamma_L - \delta_D}, \quad (2.26)$$

то есть вплоть до величин  $E_k = \frac{\gamma_L \sqrt{mv_{ob}^2 T_b / 2}}{\gamma_L - \delta_D}$  происходит быстрый линейный рост интенсивности колебаний [59], который затем сменяется экспоненциальным ростом. Следует отметить, что динамика начального этапа развития любой неустойчивости подобна рассмотренной.

## 2.8. Обратное воздействие излучения на пучок. Влияние спонтанных процессов на развитие пучковой неустойчивости

Пренебрежем влиянием спонтанного шума, что возможно при больших уровнях инверсии, то есть при значительной величине производной от функции распределения по скорости. Возмущение функции распределения  $f_b'$  принимает вид:

$$f_b' = [ieE_k / m(\omega - kv)] \partial f_0 / \partial v. \quad (2.27)$$

Удерживая квадратичные по возмущениям члены, получим уравнение для медленной эволюции функции распределения

$$\partial f_b / \partial t = (eE_k * / m) \partial f_b' / \partial v. \quad (2.28)$$

Интегрируя по волновым числам, окончательно получим основное уравнения квазилинейной теории, описывающее деформацию функции распределения пучка при взаимодействии спектра возбуждаемых колебаний с резонансными частицами

$$\partial f_b / \partial t = \pi \frac{e^2 |E_{\omega_{pe}/v}|^2 \omega_{pe}}{m^2 v} \partial^2 f_b / \partial v^2. \quad (2.29)$$

Вместе с уравнением (2.22) это уравнение самосогласованно описывает процесс обмена энергией между модами спектра и резонансными частицами пучка. Условие применимости ограничивает амплитуду мод спектра весьма малыми значениями, взаимодействием мод между собой при этом можно пренебречь. Перераспределение энергии в спектре возможно лишь посредством частиц пучка.

Уравнения квазилинейной теории учитывают весьма эффективное взаимодействие резонансных частиц с волнами. Вообще говоря, при увеличении амплитуд, участвующих в процессе взаимодействия волн, последние способны взаимодействовать с множеством нерезонансных частиц, число которых заметно превышает число резонансных [65] (см. также [66]), однако такие виды взаимодействия квазилинейная теория не рассматривает.

Нелинейная теория учитывает взаимодействие волн конечной амплитуды с нерезонансными частицами, захватывая часть из них в свою потенциальную яму. В некоторых случаях при перекрытии потенциальных ям различных колебаний результаты нелинейной теории частично отвечали описаниям квазилинейной теории, так как при таком перекрытии захват частиц затруднен, и они фактически являются пролетными.

Обнаруженное явление перекрытия потенциальных ям колебаний в развитой волновой турбулентности в плазменной среде позволило заметно продвинуться в понимании релаксационных процессов и процессов переноса в плазме. С другой стороны, в нелинейных режимах развитых неустойчивостей нерезонансные частицы, оказавшиеся захваченными в потенциальную яму колебаний, в значительной степени определяют развитие процесса.

Учтем теперь существование спонтанного излучения частиц пучка, что существенно при небольших значениях производной функции распределения по скоростям. Полагая, что темп изменения функции распределения и темп изменения числа квантов совпадают, получим для функции распределения соотношение

$$\partial f_b / \partial \tau = \partial f_b / \partial s + N_k \partial^2 f_b / \partial s^2, \quad (2.30)$$

где  $N_k = E_{\omega_{pe}/v} / \hbar \omega(k)$ , масштаб времени  $2\pi^2 \cdot t \cdot e^2 \omega(k) / \hbar k^3 = \tau$ , причем первое слагаемое правой части обеспечивает дрейф в сторону меньших значений  $s$  или, что то же самое энергии  $mv^2/2 = s \cdot \hbar \omega$  или скорости  $v = s \cdot \sqrt{2\hbar \omega / m}$  за счет воздействия на пучок его собственного спонтанного излучения. Если за время равное величине обратного инкремента неустойчивости область пучка, обеспечивающая начальную инверсию функции распределения, сместится на величину, большую, чем  $\Delta v \propto \gamma_{LMax} / k$ , то индуцированный процесс не будет реализован (см., например, [11]).

Подобный процесс можно трактовать как подавление инверсии в области фазовой скорости волны за счет спонтанного шума. В этом случае в системе будет наблюдаться линейный рост со временем спонтанных шумов во всей области волновых чисел.

## 2.9. Особенности динамики развитой кинетической неустойчивости в одномодовом режиме

В процессе развития рассмотренной выше кинетической пучковой неустойчивости в одномодовом режиме амплитуда волны растет. Реализация такого одномодового режима возможна при специальном подборе начальных условий. При этом все большая часть частиц пучка, скорости которых близки к фазовой скорости волны (то есть, с позиции линейной теории, нерезонансных частиц), оказывается захваченной в потенциальную яму колебаний. Уравнения, описывающие нелинейную динамику возбуждаемой пучком волны, имеют вид (см., например, [67]):

$$\begin{aligned} \partial A / \partial \tau &= 8\pi \cdot \int_{-1/2}^{1/2} d\zeta_{p0} \int_{-\eta}^{\eta} d\eta_0 \eta_0 \exp\{-2\pi i \xi\}, \\ 2\pi \cdot d^2 \xi / d\tau^2 &= -\text{Re}[A \cdot \exp\{2\pi i \xi\}], \end{aligned} \quad (2.31)$$

где  $\gamma = \gamma_L$  – инкремент кинетической пучковой неустойчивости,  $\omega_b = (4\pi e^2 n_{b0} / m_{e0})^{1/2}$  – плазменная частота электронного пучка, а  $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_{e0} / m_{e0})^{1/2}$  – ленгмюровская частота плазмы (здесь –  $e, m_{e0}, n_{b0}, n_{e0}$ , – заряд, масса покоя электрона и невозмущенная

плотность пучка и плазмы),  $2\pi\xi_0 = kz_0 - \omega t$ ,  $\eta_0 = (kv - \omega_{pe})/2\pi\gamma$ . Можно оценить среднюю частоту осцилляций  $\Omega_{TR}$  захваченных частиц в потенциальной яме волны:  $\Omega_{TR} = \sqrt{ek\tilde{E}_k / m_{e0}}$ . В результате такого осцилляторного движения захваченных частиц происходит изменение знака производной от функции распределения в окрестности фазовой скорости волны [68, 69].

Такое изменение знака производной способно приводить к осцилляторной смене направления процесса, то есть к последовательной смене излучения квантов поля их поглощением и наоборот. Отметим, что изменение знака производной от функции распределения обусловлено динамикой частиц пучка в поле волны, которая представлена вторым уравнением системы уравнений (2.31). Этот процесс учитывает нелокальность процессов взаимодействия частиц пучка с волной. Полезно ввести в рассмотрение параметр  $\Omega_{TR} / \gamma_L$ , который в процессе неустойчивости постепенно возрастает от начальных значений много меньше единицы. При достижении этим параметром величины порядка единицы неустойчивость насыщается [67]. В дальнейшем происходит обмен энергией между волной и захваченными частицами [70] с характерным временем порядка  $\Omega_{TR}^{-1} \approx \gamma_L^{-1}$ . Вследствие перемешивания частиц в потенциальной яме волны, осцилляции интенсивности волны быстро затухают.

## 2.10. Модулированные пучки

Ранее для эффективного взаимодействия пучка с синхронной волной применяли предварительную бунчировку (модуляцию, представляющую собой разбиение пучка на последовательность коротких сгустков) частиц (см., например, [60, 61]). В этом случае, если размер сгустка, который один позиционировался в пределах длины волны излучения в соответствующей фазе и был заметно меньше этой длины, интенсивность его излучения оказывалась пропорциональной квадрату числа частиц сгустка. Действительно, в этом случае в начальный момент для электрического поля и плотности пучка справедливы выражения  $\tilde{E}_k|_{t=0} \approx M \cdot N_b \cdot E_{ksp}$

$\tilde{n}_b(x) \sim N_b \cdot \delta(x - \tilde{x}_b)$ , где  $N_b$ ,  $M$  и  $\tilde{x}_b$  – число частиц в сгустке, число сгустков в зоне когерентности (в зоне взаимодействия) и координата сгустка, соответственно [71]. Часто такое излучение поначалу полагали спонтанным, так как поле излучения, по крайней мере, в начальный момент, представляло собой излучение квазичастицы с зарядом, равным сумме зарядов всех частиц сгустка. Затем все чаще стали определять этот процесс как сверхизлучение. Понятно, что при таком излучении сгустка (квазичастицы) его интенсивность была велика.

Конечно, поле излучения является интегральным полем частиц пучка. И, кроме того, поле сразу же начнет влиять на динамику сгустка, усиливая отбор энергии от пучка и заметно увеличивая при этом свою амплитуду. То есть, в развитом процессе легко обнаружить все признаки вынужденного, индуцированного излучения. И так как в случае начальной бунчировки протяженного пучка он являет собой последовательность компактных квазичастиц с большим значением заряда и массы, поэтому, имели место попытки представить процесс излучения как суперпозицию «спонтанного» излучения (или сверхизлучения) каждой такой квазичастицы и индуцированного излучения этих квазичастиц в общем поле излучения, по крайней мере, вплоть до момента разрушения этих квазичастиц. Но даже излучение одиночного сгустка заряженных частиц трудно назвать спонтанным, ибо интегральное поле в его объеме влияет на эффективность отбора энергии от частиц, в частности, формируя его тонкую структуру [72–75] .

### 2.11. Реактивная гидродинамическая неустойчивость в одномодовом режиме

Однако компактные сгустки заряженных частиц могут в определенных условиях самостоятельно формироваться в объеме пучка заряженных частиц с малым разбросом по скоростям. Именно это явление лежит в основе явления так называемой гидродинамической пучковой неустойчивости. Механизм гидродинамической пучковой неустойчивости с возбуждением синхронной с пучком волны был обнаружен в замедляющих структурах [76], в плазме [77, 78], а затем детально изучен в позднейших работах [79, 80, 67]. В этом случае процесс глубокой пространственной модуляции пучка с малым начальным разбросом частиц по скоростям (т.н. пучков «хорошего качества» для приборов плазменной электроники [79, 80]) происходит непосредственно в процессе неустойчивости. В системе покоя пучка для малых возмущений его плотности справедливо (см., например, [67]) уравнение

$$\partial^2 n_b^* / \partial t^2 = (-iek \cdot n_{b0} \cdot \tilde{E}_k^* / m_{e0}). \quad (2.32)$$

Наличие нелокальной самосогласованной связи между возмущениями плотности пучка и амплитудой поля приводит к заметному уменьшению значения характерного времени развития неустойчивости с возбуждением интенсивных колебаний и вынужденной глубокой модуляцией плотности пучка (детальнее см. ниже). В случае развития гидродинамической неустойчивости пучка частиц с малым разбросом по скоростям, механизм ограничения роста амплитуды поля подобный обсуждаемому выше для кинетической пучковой неустойчивости [81].

Часть захваченных полем интенсивной волны частиц пучка формируют весьма компактную квазичастицу, которая совершает достаточно регулярные колебания в потенциальной яме волны с частотой  $\Omega_{TR} = \sqrt{ek\tilde{E}_k / m_{e0}}$ . Так как квазичастица, образованная захваченными частицами пучка, в этом случае более компактная, это приводит к глубокой модуляции интенсивности возбуждаемых колебаний (подробнее см. обстоятельный обзор [67]).

Однопараметрическая система нелинейных уравнений, описывающая начальную стадию процесса релаксации моноэнергетического пучка заряженных частиц в диссипативной среде, может быть представлена в виде [81]

$$\partial A / \partial \tau = -\Theta A + \int_{-1/2}^{1/2} d\xi_0 \cdot \exp\{-2\pi i \xi\}, \quad (2.33)$$

$$2\pi \cdot d^2 \xi / d\tau^2 = -\operatorname{Re}[A \cdot \exp\{2\pi i \xi\}], \quad (2.34)$$

где  $\tau = t(2\gamma / 3^{1/2})$ ,  $A = eE_k k / m_e (2\gamma / 3^{1/2})^2$ ,  $2\pi \xi = kz - \omega t$ ,

$$\Theta = \delta|_{\gamma=0} / \gamma|_{\delta=0}.$$

При этом выполняется закон сохранения энергии в виде

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{|A|^2}{2} + 2\pi \int_{-1/2}^{1/2} d\xi_0 \frac{d\xi}{d\tau} \right) = -\Theta |A|^2. \quad (2.35)$$

Параметр  $\Theta$ , здесь отвечает отношению  $\delta_D(\omega, k)$  – декремента затухания колебаний в отсутствие неравновесного элемента (здесь пучка), к  $\gamma(\omega, k)|_{\delta=0}$  – максимальному инкременту бездиссипативной неустойчивости (т.е. в отсутствие потерь), который в данном случае равен  $(\sqrt{3}/2)(\omega_b / \omega_0)^{2/3} \omega_0$ , причем,  $\omega_0$  – собственная частота волновода, а  $\omega_b = (4\pi e^2 n_{b0} / m_{e0})^{1/2}$  – плазменная частота электронного пучка,  $\omega_b \ll \omega_0$ .

## 2.12. Диссипативная

### гидродинамическая неустойчивость

Практический интерес представляют режимы с  $\Theta > 1$ , при которых достигается наибольший поток энергии из системы в канал потерь. Именно при анализе таких диссипативных режимов неустойчивости было обнаружено явление аномально больших потерь энергии частиц

пучка [82, 83]. Для  $\Theta$  справедливо выражение  $\Theta = (\delta_D / \omega_0)(\omega_0 / \omega_b)^{2/3}$ . Инкремент диссипативной неустойчивости [84–86] при  $\Theta > 1$  оказывается равным

$$\text{Im } \omega = \omega_b (\omega_0 / \delta_D)^{1/2} / \sqrt{2}. \quad (2.36)$$

Можно убедиться в том, что энергия возмущений в системе отрицательна, то есть наличие возмущений приводит к уменьшению полной энергии системы «среда-пучок заряженных частиц». Рассмотрим возмущения в среде и возмущения в пучке (то есть возмущения его плотности и скорости). Можно убедиться в том, что при значениях  $\Theta \gg 1$  энергия возмущений в пучке заметно превосходит энергию возмущений в среде, сквозь которую распространяются его частицы. Полная плотность энергии системы может быть записана в виде

$$W = W_0 + \delta W \approx \frac{1}{2} n_{b0} m_{e0} v_0^2 - \frac{1}{16} |E|^2 \Theta^{-3/2}, \quad (2.37)$$

то есть, плотность энергии оказывается меньше плотности энергии невозмущенной системы и продолжает уменьшаться с ростом амплитуды электрического поля возмущения  $|E|$ . В этом случае диссипативные процессы *не приводят к появлению порога неустойчивости* [31, 59, 82]. Обратим внимание на тот факт, что при значениях  $\Theta \gg 1$  левой частью уравнения (2.33) вполне можно пренебречь.

### 2.13. Многомодовые режимы гидродинамических пучковых неустойчивостей

Если начальные условия не позволяют выделить одну моду поля, то характер развития неустойчивости становится многомодовым [79, 80, 87]. Отметим, что даже в условиях одномодовой генерации, на достаточно больших временах, осцилляции захваченных частиц, как известно [67], приводят к так называемой сателлитной (модуляционной) неустойчивости. То есть неустойчивости с возбуждением колебаний, частоты которых отличаются от частоты возбуждаемой моды на величину кратную частоте осцилляций формируемых квазичастиц  $\Omega_{TR} = \sqrt{ek\tilde{E}_k / m_e}$ . Причем, возбуждение колебаний в коротковолновой части спектра в определенной степени подавляет движение ВЧ энергии в длинноволновую часть спектра [59, 88]. Наличие плотной квазичастицы, образованной захваченными частицами пучка, может привести к заметному уширению возбуждаемого частотного спектра колебаний [89].

В последних разделах процессами спонтанного излучения частиц можно было пренебречь, вследствие явного доминирования индуцированного излучения и поглощения при взаимодействии плотных пучков заряженных частиц с плазмой. Однако ниже представим способ корректного описания процессов спонтанного излучения отдельных частиц уединенного компактного сгустка и реализацию режима сверхизлучения в этом случае.

## 2.14. Режимы сверхизлучения сгустков заряженных частиц

В случае сгустков – коротких пучков моноэнергетических заряженных частиц, продольные размеры  $a_{\parallel}$  которых не превосходят несколько длин волн возбуждаемых колебаний [90], в его объеме практически не накапливается поле. Особенностью подобного движущегося электронного сгустка в плазме является также практически полная компенсация его заряда [72, 76], если его начальные размеры (продольные  $a_{\parallel}$  и поперечные  $a_{\perp}$  заметно превосходили величину  $v_0 / \omega_{pe}$ , где  $v_0$ ,  $\omega_{pe}$  – невозмущенная скорость пучка и ленгмюровская частота плазмы). В работах [91, 92] было также обнаружено явление самофокусировки такого сгустка. Это эквивалентно тому, что *макроскопическая диэлектрическая проницаемость в объеме такого сгустка оказывалась отрицательной* [92].

**Редкий пример отрицательной макроскопической диэлектрической проницаемости.** Эффект обращения кулоновских сил в объеме одиночного моноэнергетического сгустка обусловлен тем, что при интегрировании по волновым числам полей в системе покоя сгустка ( $\xi = z - v_0 t$ ), создаваемых отдельными частицами сгустка и зависящих от диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega, k) \equiv \varepsilon(0, k) = 1 - (\omega_{pe} / kv)^2$ , вклад крупномасштабных возмущений (малые значения волнового числа  $k$ ) превышает вклад мелкомасштабных. Например, в одномерном случае выбирая функцию распределения частиц не модулированного сгустка в виде  $f(\xi, v) = (N / a\sqrt{\pi}) \exp(-\xi^2 / a^2) \cdot \delta(v - v_0)$ , для напряженности сопровождающего сгусток поля получим выражение

$$\begin{aligned} E(\xi) &= 2i|e|N \int dk \cdot \exp\{ik\xi - k^2 a^2 / 4\} [k \cdot \varepsilon(0, kv_0)]^{-1} \approx, \\ &\approx -2\sqrt{\pi} \cdot \xi \exp\{-\xi^2 / a^2\} / a \cdot \varepsilon_{eff} \end{aligned} \quad (2.38)$$

где  $\varepsilon_{eff} = -\omega_{pe}^2 a^2 / 2v_0^2 < 0$  – значение эффективной диэлектрической проницаемости. Можно убедиться [92], что в и трехмерном случае для

сгустка таких размеров макроскопическая диэлектрическая проницаемость в его объеме отрицательна. То есть в случае электронного сгустка его частицы испытывают не отталкивание, а притяжение. В отличие от случая генерации электромагнитного излучения, когда на являющийся источником генерации движущийся сгусток действовали как фокусирующие, так и дефокусирующие силы, возбуждение продольных волн в плазме приводило одновременно к радиальной [93–95] и продольной [91, 92, 96] фокусировке. Однако возникающая в этих условиях пучковая диссипативная неустойчивость генерирует внутри сгустка поля, которые превосходят фокусирующее воздействие сопровождающего пучок обращенного кулоновского поля и приводят к интенсивной модуляции его плотности.

При размерах пучка  $a_{\parallel}$ , заметно меньших характерного расстояния, на котором развивается пучковая неустойчивость в безграничной плазменно-пучковой среде  $(V_0 / \omega_{pe})(\omega_{pb} / \omega_{pe})^{-2/3}$  (напомним,  $\omega_{b,pe} = (4\pi e^2 n_{p,bo} / m_{eo})^{1/2}$  – плазменные (ленгмюровские) частоты пучка и плазмы), поле не успевает накопиться в размерах сгустка. Эффективный декремент затухания колебаний  $\delta_D$  в сгустке можно определить как отношение потока энергии колебаний, покидающих сгусток, к полной энергии колебаний в его объеме, при этом  $\delta_D = V_0 / a$  (см. выражение (1.11)). Отношение эффективного декремента затухания к максимальному инкременту пучково-плазменной неустойчивости  $\propto \omega_{pe}(\omega_{be} / \omega_{pe})^{2/3}$  порядка

$$\Theta = \delta_D / \gamma|_{\delta=0} = (V_0 / a \cdot \omega_{pe})(\omega_{be} / \omega_{pe})^{-2/3} \gg 1. \quad (2.39)$$

Полезно отметить, что пучковая неустойчивость, которая развивается в этих условиях, является гидродинамической диссипативной с инкрементом [80, 81] (см. также [59]) с точностью до численного множителя, равного максимальному инкременту, умноженному на  $\Theta^{-1/2}$  [85, 86]. Энергия поля за время  $a / V_0$  выносится из объема сгустка, а изменение в пространстве амплитуды за это время пропорционально  $\exp\{(a / V_0) \cdot [\omega_{pe}(\omega_{be} / \omega_{pe})^{2/3} / \Theta^{1/2}] \approx 1 - (1 / \Theta^{3/2})\}$  и весьма незначительно. Таким образом, рост поля в объеме пучка обусловлен в большей степени группировкой частиц и повышением когерентности их излучения.

В этих условиях уравнения, описывающие нелинейную динамику такого короткого одномерного электронного сгустка, распространяющегося сквозь плотную плазму в системе его покоя, можно записать в виде [72, 97]:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \nu, \quad \frac{d\nu}{d\tau} = E(\xi), \quad (2.40)$$

$$E(\xi) = -\frac{2}{N} \sum_{\alpha}^N f_{\alpha} \cos[2\pi g_{\alpha}(\xi - \xi_{\alpha})] \Theta(\xi_{\alpha} - \xi), \quad (2.41)$$

где  $2\pi\xi = K_0(z - V_0t)$ ,  $\nu = K_0(V - V_0)/2\pi\gamma_L$ ,  $\gamma_L^2 = e^2 K_0 M / m_e$ ,  $g = (1 + \Delta \cdot \nu)^{-1}$ ,  $\Delta = 2\pi\gamma_L / K_0 V_0$ ,  $\tau = \gamma_L t$ , и  $M$  – общее число частиц в сгустке (длина которого выражена в единицах  $2\pi/K_0$ ) в единичном сечении,  $E(\xi) = eK_0 E_k / 2\pi m_e \gamma_L^2$ ,  $E_k$  – напряженность электрического поля,  $f_{\alpha}$  – статистический вес крупной частицы, моделирующей пучок. Не трудно показать, что эта система уравнений эквивалентна системе уравнений (2.33)–(2.34), где  $\Theta = \delta_D / \gamma|_{\delta=0} = (V_0/a \cdot \omega_{pe})(\omega_{be}/\omega_{pe})^{-2/3} \gg 1$ , и в которой можно пренебречь правой частью уравнения (2.33).

Заметим, что при возбуждении кильватерной волны компактным релятивистским электронным сгустком величина максимально достигаемого поля описывается выражением [98]  $(n_b/n_{pe}) \cdot E_{km}$ , где  $E_{km} = m_e c \omega_{pe} / e$  – предел опрокидывания продольной волны в плазме [99]. Максимальное значение амплитуды поля компактного сгустка в модели (2.40)–(2.41)  $E_k \sim (n_b/n_{pe}) (m_e V_0 \omega_{pe} / e) (2\pi \omega_{pe} a / V_0)$ , так как  $\gamma_L^2 \approx \gamma_m^3 a / V_0 \approx (n_b/2n_{pe}) \omega_{pe}^3 a / V_0$ .

Как показано в работах [97, 100] на начальном этапе эволюции короткого пучка возникает модуляция его плотности и формируется одна или несколько квазичастиц – компактных плотных электронных сгустков. Так же как и в модели Дике, на начальном этапе поле излучения в значительной степени некогерентное. Затем в результате формирования квазичастиц амплитуда интегрального кильватерного поля увеличивается, его рост приобретает экспоненциальный характер, доля когерентного излучения быстро возрастает. Затем в результате перемешивания частиц в потенциальных ямах излучения интенсивность кильватерного поля снижается вплоть до начального уровня.

Как справедливо отметил В. А. Буц (см., также, [32]), основной проблемой в описании сверхизлучения является *выяснение природы процесса синхронизации осцилляторов*. До сих пор в литературе появляются работы (см., например, [101]), где признается отсутствие объяснения природы самомодуляции движущихся коротких сгустков электронов. Однако, как показано еще в работах [97, 100] (см. также [75, 90]), в случае моноэнергетических сгустков заряженных частиц именно пучковая (здесь диссипативная пучковая) неустойчивость и приводит к бунчировке частиц, что обеспечивает необходимую синхронизацию частиц-излучателей.

Для получения кильватерного поля сгустка нам понадобилось найти кильватерное поле отдельной частицы. Важно отметить, что если рассматривать бесконечную периодическую систему расположения отдельных частиц, как это часто делают, а затем неограниченно увеличивать величину периода, то переход к кильватерному полю отдельной частицы сгустка окажется затруднительным. Ибо в периодической системе поле присутствует как впереди, так и позади отдельно взятой частицы. А для одиночной частицы поле излучения впереди нее в направлении ее движения отсутствует. Для получения корректного результата нужен иной способ расчета кильватерного поля отдельной частицы. Представим плотность заряда электрона, движущего со скоростью  $v > 0$  в следующем виде:  $\rho = -e \cdot \delta(-v \cdot t + x - s) = -e \cdot \delta(\xi - s)$ . Используем уравнение Пуассона  $\partial D / \partial x = \partial \hat{\varepsilon} E / \partial x = 4\pi\rho$ , которое в Фурье представлении запишем в виде:

$$-ik\varepsilon(\omega, k) \cdot E(\omega, k) = 4\pi\rho(\omega, k) \quad (2.42)$$

Выполняя обратное преобразование левой части уравнения, получим

$$\begin{aligned} & -i \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-ik\xi\} \cdot dk \cdot [k \cdot \varepsilon(k) \cdot E(k)] = \\ & = k_0 \cdot \frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial k} \Big|_{k_0} \cdot \frac{\partial E(\xi)}{\partial \xi} \cdot \exp\{-ik_0\xi\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что волновой пакет располагается в пространстве волновых векторов вблизи  $k_0$ , и тогда  $d(k_0 + K) = dK$ , кроме того  $E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-iK\xi\} \cdot dK \cdot E(K)$  — медленно меняющаяся в пространстве амплитуда напряженности электрического поля.

Используем также тот факт, что движущейся системе отсчета уравнение  $\varepsilon(\omega, k) = \varepsilon(kv, k) = \varepsilon(k) = 1 - \omega_{pe}^2 / kv(kv + iv) = 0$  имеет корни  $k_{1,2}v = k_0v = \pm\omega_{pe} - iv/2$ .

Уравнение Пуассона при этом принимает вид:

$$\begin{aligned} & (\partial E(\xi) / \partial \xi) \cdot \exp\{-ik_0\xi\} = \\ & = -4\pi e \cdot \{k_0 \cdot \partial \varepsilon(k) / \partial k \Big|_{k_0} \cdot \}^{-1} \cdot \delta(\xi - s), \end{aligned} \quad (2.44)$$

причем, в этом случае выполняется соотношение  $k_0 \cdot \partial \varepsilon(k) / \partial k|_{k_0} = \partial \omega \varepsilon(\omega) / \partial \omega|_{\omega=k_0 v}$ . Заметим, что преобразовывать правую часть (2.42) вообще не понадобилось. Для дальнейшего преобразования уравнения (2.44), воспользуемся представлением  $\delta(x) = d\theta(x)/dx$ , где  $\theta(x)$  – симметричная единичная функция, равная нулю при  $x < 0$ , и равная единице, при  $x > 0$ . Учитывая наличие дельта-функции, уравнение (2.44) можно представить в виде

$$\partial E(\xi) / \partial \xi = \alpha \cdot \delta(\xi - s), \quad (2.45)$$

где  $\alpha = -4\pi e \cdot \{k_0 \cdot \partial \varepsilon(k) / \partial k|_{k_0} \cdot \exp\{ik_0 s\}\}^{-1}$ . Решение ищем в виде  $E = C + \alpha \cdot \theta(\xi - s)$ , где  $C$  – некоторая неопределенная константа. Так как напряженность поля имеет вид

$$E(\xi) \cdot \exp\{-ik_0 \xi\} = [C + \alpha \cdot \theta(\xi - s)] \cdot \exp\{-ik_0 \xi\}, \quad (2.46)$$

то в области больших значений  $\xi > 0$  выражение стремится к бесконечности, что недопустимо. Поэтому, следует выбрать  $C = -\alpha$ . Таким образом, окончательно напряженность поля кильватерного следа за частицей, движущейся в положительном направлении

$$E(\xi) = -4\pi e \cdot \{k_0 \cdot \partial \varepsilon(k) / \partial k|_{k_0} \cdot \exp\{ik_0(s - \xi)\}\}^{-1} \cdot \theta(s - \xi). \quad (2.47)$$

Нетрудно увидеть, что при соответствующей нормировке сумма таких спонтанных полей частиц представлена выражением (2.41).

Важно отметить, что поле (2.47) описывает полное поле отдельной частицы в плазме. То есть, кулоновское поле прежде покоящейся частицы при ее движении трансформировалось именно в данное поле. Поэтому, суммируя все такие поля частиц сгустка, мы получим полное поле сгустка, которое можно представить как сумму сопровождающего сгусток поля и отстающего от сгустка поля излучения [72]. Именно сопровождающее поле – это собственное поле сгустка, или обращенное кулоновское поле сгустка (2.38), – фокусирует сгусток. Попытки учесть влияние собственных полей пучка на развитие пучковой неустойчивости были начаты еще в работах Н. Л. Карбушева и его коллег, но пока не удалось сформулировать корректное описание этого процесса.

В описании на основе уравнений (2.40)–(2.41) рассматривается поведение квазичастиц, которые состоят из очень большого количества электронов. В классическом представлении фаза спонтанного излучения каждого электрона жестко связана с его положением, поэтому размещая

$Z$  электронов в очень малой окрестности одной точки можно добиться высокой когерентности излучения, которая при стремлении этой окрестности к нулю станет абсолютной. То есть можно считать, что мы имеем дело с очень плотной квазичастицей, заряд и масса которой равны соответственно  $Z \cdot e$  и  $Z \cdot m$ . То, что частицы собираются в небольшой области пространства, много меньшей длины излучаемой волны, и формирует сильную связь между ними, как и в случае, рассмотренном в модели Дике [16]. Потери энергии такой квазичастицы в единицу времени (интенсивность излучения) в трехмерном случае [35] равны  $w_Z \propto Z^2 e^2 \omega_{pe}^2 \cdot V_0^{-1}$ , то есть пропорциональны квадрату числа частиц. Если считать, что излучается сразу  $Z$  квантов, то есть  $Z \cdot \hbar \omega_{pe}$ , то характерное время излучения такой порции энергии равно  $Z^{-1} \alpha_v^{-1} \cdot \omega_{pe}^{-1} = (Ze^2 / \hbar v_{ph})^{-1} \cdot \omega_{pe}^{-1}$  и обратно пропорционально числу электронов в объеме квазичастицы (или числу излучаемых квантов, ибо как было отмечено выше, накопления поля в объеме сгустка не происходит), который при этом сохраняет компактное распределение в пространстве. Таким образом, суммарное поле в объеме сгустка есть сумма спонтанных полей отдельных частиц, что легко усмотреть в выражении (2.38), причем с малым разбросом по фазам, то есть напряженность поля для компактной квазичастицы пропорциональна числу частиц сгустка. Интенсивность же излучения каждой частицы, пропорциональна напряженности поля, и тем самым тоже пропорциональна числу частиц сгустка. Суммируя по всем частицам, обнаруживаем, что полная интенсивность излучения пропорциональна квадрату частиц сгустка. Такое излучение и является сверхизлучением данной квазичастицы.

Подобная система уравнений для описания трехмерного сгустка была представлена в работе [100] и монографии [88]. Отметим, что в случае сгустков частиц с малым разбросом по скоростям, размеры которых превосходили или даже в несколько раз превышали длину волны излучения, с одним и тем же фиксированным числом частиц  $(a\omega_{pe} / 2\pi V_0) > 1$ , наибольшая амплитуда излучения, достигаемая в процессе неустойчивости, слабо зависела от начального продольного размера сгустка, что позволяло считать ее (амплитуду) максимально возможной. Можно показать, что максимальная достижимая напряженность электрического поля за таким сгустком в  $\Theta$  раз меньше, чем в случае протяженного пучка той же плотности. Действительно, оценка максимально достижимой амплитуды при развитии неустойчивости дает  $\Omega_{TR}^{-1} \approx \gamma^{-1}$  или  $eK_0 E / 2\pi m_e \gamma^2 \propto 1$ , где  $\gamma$  – линейный инкремент. Причем для инкремента реактивной (в отсутствии потерь) неустойчивости однородного протяженного пучка  $\gamma_m$  и инкремента диссипативной неустойчивости (или процесса самомодуляции, что в

обсуждаемом случае одно и то же) короткого пучка–сгустка  $\gamma_L$  справедливо соотношение  $\gamma_L^2 \approx \gamma_m^3 a / V_0 = (n_b / 2n_{pe}) \omega_{pe}^3 a / V_0 \approx \gamma_m^2 \cdot \theta^{-1}$ .

За времена, значительно превышающие обратный инкремент процесса неустойчивости, амплитуда поля излучения убывает до уровня, отвечающего спонтанному излучению размытого пучка тех же размеров. Рассмотрение поведения трехмерного сгустка таких же размеров [88, 100] показало, что пучки с продольным размером меньшим длины излучаемой волны, так же как и в случае одномерном, неустойчивы и быстро разлетаются. В объеме пучков, продольный размер которых в несколько раз превышает длину излучаемой волны, развивается неустойчивость диссипативного типа, подобная рассмотренной выше. Степень достигнутой когерентности излучения ниже, чем в одномерном случае, а перемешивание захваченных частиц в уже неоднородной потенциальной яме излучения происходит более эффективно, что приводит к быстрому уменьшению амплитуды излучения. Процессы в продольном направлении (по движению сгустка) происходят быстрее, поэтому поперечная модуляция плотности слабее выражена, чем в случае, обсуждаемом в работе [102], что следует связывать с различным выбором начальной формы сгустка.

## 2.15. О применимости описания

Уравнение (2.45) получено для равномерно движущегося заряда. Более строгие вычисления [103], позволяют получить аналогичную формулу для поля заряда с произвольным законом движения  $t = t_L(x)$ :

$$E = E_0 \theta[t - t_L(x)] \exp[i \omega_p(t - t_L(x))]. \quad (2.48)$$

Здесь  $t_L(x)$  – так называемое лагранжево время, т. е. время прилета частицы в точку  $X$  (в лабораторной системе отсчета). Выражение (2.48) обладает прозрачным физическим смыслом: частица, пролетая через точку  $X$ , возбуждает продольное поле с амплитудой  $E_0 = -4\pi e \cdot \{k_0 \cdot \partial \varepsilon(k) / \partial k|_{k_0}\}^{-1}$ . В дальнейшем, поле в этой точке осциллирует с плазменной частотой и никак не зависит от последующей эволюции частицы. Важно подчеркнуть, что фаза поля, создаваемого зарядом в точке  $X$ , зависит только от разности текущего времени и времени пролета заряда через данную точку.

В случае равномерного движения заряда выражения (2.47) и (2.48) эквивалентны, т. к.

$$\omega_p(t - t_L(x)) = k_0(x(t) - x) = k_0(x(t) - x) = k_0(\xi(t) - \xi),$$

где  $x(t)$  и  $\xi(t)$  текущая координата частицы в лабораторной системе отсчета и системе отсчета, связанной с частицей соответственно. Отсюда несложно получить оценку применимости выражения (2.47) для использования в самосогласованной модели возбуждения кильватерного поля сгустком с учетом неравномерности движения частиц сгустка, обусловленной влиянием самосогласованного поля:

$$\frac{\phi_t - \phi_x}{2\pi} = \frac{\phi_x}{2\pi} \left[ \frac{v_0}{\bar{v}(t, x)} - 1 \right] = \frac{\phi_x}{2\pi} \left[ 1 - \frac{\bar{v}(t, x)}{v_0} \right] \approx \frac{\phi_t}{2\pi} \frac{\Delta v}{\bar{v}} \ll 1, \quad (2.49)$$

где  $\phi_t = \omega_p(t - t_L(x))$ ,  $\phi_x = k_0(x(t) - x)$ ,  $\bar{v}(t, x) = (x(t) - x)/(t - t_L(x))$  и  $\Delta v(x, t)$  – соответственно средняя скорость и вариация скорости частицы на участке  $[x, x(t)]$ .

Таким образом, уравнение для поля (2.47) и вытекающая из него модель (2.40) – (2.41), имеют определенные ограничения. Применимость этих уравнений ограничена пространственной (или временной) областью, в которых вариация скорости пренебрежимо мала по сравнению с начальной скоростью сгустка (в большинстве приложений ее можно считать близкой к скорости света). Уточним границы применимости модели (2.40) – (2.41) в принятых нами безразмерных единицах. Будем исходить из более строгой модели [103], использующей лагранжево время. Уравнение для лагранжева времени имеет в приведенных ранее обозначениях вид:

$$\frac{d\tau_{L\alpha}(\xi)}{d\xi} = \frac{\Delta}{1 + \Delta \cdot v_{L\alpha}(\xi)}, \quad (2.50)$$

к которому следует добавить уравнение движения:

$$\left( \frac{1 + \Delta \cdot v_{L\alpha}}{\Delta} \right) \frac{dv_{L\alpha}(\xi)}{d\xi} = E(\xi, \tau) \quad (2.51)$$

и уравнение для поля

$$E(\xi, \tau) = -\frac{2}{N} \sum_{\alpha}^N f_{\alpha} \cos[\tilde{w}_p(\tau - \tau_{L\alpha}(\xi))] \Theta(\tau - \tau_{L\alpha}(\xi)) \quad (2.52)$$

Здесь  $\tau_{L\alpha}(\xi)$  – время, когда частица с номером  $\alpha$  проходит через точку  $\xi$ ,  $v_{L\alpha}(\xi)$  – ее скорость в этот момент. Интегрируя уравнение (2.50) в интервале  $[\xi, \xi_{\alpha}]$ , получим

$$\tau_{L\alpha}(\xi) = \tau - \Delta \cdot \int_{\xi}^{\xi_{\alpha}} \frac{d\xi}{1 + \Delta \cdot v_{L\alpha}(\xi)}. \quad (2.53)$$

Чтобы замкнуть это уравнение, нам надо знать  $v_{L\alpha}(\xi)$ . Учитывая, что в лабораторной системе отсчета частица очень быстро преодолевает расстояние  $[\xi, \xi_{\alpha}]$  (со скоростью около  $\Delta^{-1}$ ), можно предположить, что ее скорость на этом интервале меняется слабо и, поэтому, величину  $v_{L\alpha}(\xi)$  можно разложить в ряд по  $\xi_{\alpha} - \xi$  относительно текущего положения частицы:

$$\begin{aligned} v_{L\alpha}(\xi) &\approx v_{\alpha} + \frac{dv_{\alpha}}{d\xi}(\xi - \xi_{\alpha}) + \dots = \\ &= v_{\alpha} + \frac{\Delta}{1 + \Delta \cdot v_{\alpha}} \frac{dv_{\alpha}}{d\tau}(\xi - \xi_{\alpha}) + \dots \end{aligned} \quad (2.54)$$

подставляя это разложение в 2.53), получим

$$\begin{aligned} \tau_{L\alpha}(\xi) &= \tau - \Delta \int_{\xi}^{\xi_{\alpha}} \frac{d\xi}{1 + \Delta \cdot v_{L\alpha}(\xi)} \approx \tau - \Delta(1 - \Delta \cdot v_{\alpha})(\xi - \xi_{\alpha}) + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta^3 (1 - \Delta \cdot v_{\alpha}) \frac{dv_{\alpha}}{d\tau} (\xi - \xi_{\alpha})^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.55)$$

Несложно показать, что если в полученном выражении удержать только линейное по  $\xi_{\alpha} - \xi$  слагаемое, и подставить его в (2.52) то мы получим уравнение (2.46). Различие возникает при учете слагаемых более высокого порядка. Отсюда вытекает условие применимости уравнения (2.46). Исходя из требования малости квадратичного слагаемого

$$\frac{1}{2} \Delta^3 (1 - \Delta \cdot v_{\alpha}) \frac{dv_{\alpha}}{d\tau} (\xi - \xi_{\alpha})^2 \ll 1, \quad (2.56)$$

получим границу пространственной области применимости рассматриваемой модели [104]

$$|\xi| > |\xi^*|, \quad \xi^* = -\frac{2}{\Delta^{3/2} |E|}. \quad (2.57)$$

Так как  $|E| \leq 2$ , а для релятивистских сгустков  $\Delta \ll 1$ , то можно считать, что предложенная нами упрощенная модель применима в достаточно широкой пространственной области и может быть использована в практических расчетах. Исходя из (2.57), границы применимости модели можно определить так: если даже  $|E| \approx 2$ , то для  $\Delta = 0$ :  $\xi^* \rightarrow -\infty$  –

эквивалентно бесконечной скорости пучка, т.к. скорость пучка в выбранных единицах пропорциональна  $\Delta^{-1}$ , для  $\Delta = 0.1$ :  $\xi^* \approx -31$  – самый проблемный случай, для  $\Delta = 0.01$ :  $\xi^* \approx -1000$ .

Предложенная в работе модель (2.40) – (2.41) имеет важное преимущество по сравнению с более строгой моделью [103] с точки зрения вычислительных ресурсов, так как содержит только уравнения, зависящие от времени, а модель [103] представляет собой более сложную пространственно-временную задачу. Есть и другие особенности модели (2.40) – (2.41), которые делают ее применение предпочтительным при изучении динамики пучков с относительно небольшой плотностью, рассмотрение которых позволяет использовать линейное описание возмущений окружающей плазмы. Прежде всего, можно не учитывать магнитное поле, созданное током пучка, ибо токи в системе покоя пучка-сгустка пренебрежимо малы. Более того, все возмущения в системе можно считать потенциальными, игнорируя электромагнитные эффекты, что недопустимо в при описании динамики движущихся сгустков заряженных частиц в лабораторной системе отсчета. Данное обстоятельство приобретает еще большее значение при переходе к трехмерному моделированию [104].

## 2.16. О динамике протяженных сгустков – пучков заряженных частиц

Обратим внимание, что напряженность поля в объеме компактного сгустка в случае его сверхизлучения не превышает суммарной напряженности спонтанного поля (при суммировании нужно учесть малый разброс по фазам этих полей) всех его частиц. В случае же пучка, который представляет собой множество компактных сгустков, напряженность поля в объеме каждого отдельного сгустка может оказаться заметно больше, чем суммарная напряженность спонтанного поля его частиц за счет эффекта накопления поля. Именно это обстоятельство повышает эффективность излучения протяженных пучков заряженных частиц.

В случае накопления поля излучения в объеме пучка постоянной плотности, эффективность его бунчировки возрастает, уменьшается характерное время процесса бунчировки (в  $\sqrt{\Theta}$  раз меньше), существенно растет напряженность электрического поля излучения (в  $\Theta$  раз больше) по сравнению с рассмотренным выше случаем сверхизлучения коротких пучков-сгустков.

Этот случай подобен рассмотренной выше реактивной гидродинамической пучковой неустойчивости. Кроме заметной самофокусировки в ряде случаев [96, 105], интенсивность излучения протяженных пучков не демонстрирует заметного снижения со временем при их транспортировке в плазме [105–109], в отличие от обсуждаемого выше случая коротких одиночных сгустков.

## РАЗДЕЛ 3. ОПИСАНИЕ МНГОВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Использование представлений о спонтанном и индуцированном излучении может быть полезно при рассмотрении многоволновых взаимодействий. Кроме прояснения физического смысла различных нелинейных слагаемых, подобный подход, как будет показано ниже, позволяет существенно упростить вычисления и дать полезный инструмент проверки корректности такого описания.

### 3.1. О характере возбуждения длинноволнового излучения пакетами ВЧ волн

В случае взаимодействия неоднородных в пространстве полей – волновых импульсов, требования к выполнению условий пространственно-временного синхронизма участвующих во взаимодействии волн ослабляются. Это, в частности, дает основание применить представления об индуцированном и спонтанном излучении длинноволновых колебаний непосредственно пакетами коротких волн другой природы. Можно представить неоднородное высокочастотное поле как набор случайно или специально организованных волновых пакетов [110–113], способных к спонтанному возбуждению весьма интенсивных длинноволновых низкочастотных (НЧ) колебаний. В дальнейшем, при накоплении энергии низкочастотных колебаний, последние могут воздействовать на среду, где распространяются высокочастотные пакеты волн. При этом возникнет обратная связь и излучение НЧ волн ВЧ пакетами станет приобретать характер вынужденного. Процессы формирования ВЧ пакетов волн и их взаимодействие с длинноволновыми низкочастотными колебаниями становятся согласованными (см., в качестве примера [114] и работы по турбулентно-волновому взаимодействию [115, 116]).

Существует и иная возможность спонтанного и индуцированного возбуждения НЧ колебаний компактными пакетами высокочастотных волн, фаза которых изменяется случайным образом. Такие ВЧ поля способны генерировать низкочастотные достаточно длинноволновые колебания (подобный подход детально изложен, например, в книгах [66]). Хотя отметим, что, вообще говоря, теория волновой турбулентности [117–118] и разработанный для этих целей гамильтонов формализм для самосогласованного многоволнового (многомодового) взаимодействия в нелинейных средах [119–121] являются самодостаточным, физически ясным и легко интерпретируемым методом описания процессов с

участием волн со случайной фазой. Возможно, прогресс в корректном описании кинетики волн на основе представлений о спонтанных и индуцированных процессах следует ожидать при дальнейшем развитии аналогий между волнами и частицами (см. например, [122]).

Интенсивность спонтанного излучения НЧ колебаний при подобных взаимодействиях из-за коллективных эффектов достаточно велика. И также, как в обсуждаемом выше случае спонтанного излучения сгустков частиц на начальном этапе их инжекции в волноводную систему, количество спонтанно излучаемых квантов энергии возмущениями ВЧ поля и тока здесь также значительно превышает единицу. Представление об индуцированном процессе при этом подразумевает, что достаточно интенсивное длинноволновое излучение, в свою очередь, воздействует на параметры и положение ВЧ пакетов (что не всегда четко просматривается). Обеспечивая тем самым вынужденный характер взаимодействия и когерентность длинноволнового излучения. Важно подчеркнуть, что одним из основных эффектов индуцированного взаимодействия является именно создание условий для когерентности, по крайней мере, излучаемого пакетами ВЧ волн низкочастотного поля, для которого представление о случайности, вообще говоря, не применимы.

### **3.2. Об интерпретации спонтанного излучения токами**

Следует отметить, что при описании волновых взаимодействий инициированные волновыми процессами нелинейные токи в среде являются распределенными, а характер взаимодействия волн зависит от интегральных фазовых соотношений, что создает трудности с интерпретацией их излучения как спонтанного, так и индуцированного.

Так же, как вокруг каждой движущейся заряженной частицы существует поле, поле существует и вблизи инициированного одной из волн или их суперпозицией тока, представляющего собой коллективное движение заряженных частиц. В случае если это поле или его часть может распространяться в пространстве независимо от источника (здесь это ток), то можно говорить о спонтанном излучении этим током. Если же поле не может распространяться в окружающем пространстве, то такого излучения нет. Проверить наличие спонтанного излучения достаточно просто. Для этого следует вычислить работу этого поля над порождающим это поле током. Если работа имеет отличную от нуля действительную часть, то имеет место спонтанное излучение. Подобный тест приобретает важнейшее значение в случае если ток и связанное с ним поле занимают все пространство взаимодействия, то есть если нет пространственной локализации тока и невозможно проанализировать поле в дальней зоне.

Имеет смысл распространить отдельные представления о спонтанном и вынужденном процессах на случай многоволнового взаимодействия, не прибегая к требованиям существования компактных пакетов ВЧ волн и к условиям случайного поведения фаз колебаний.

### 3.3. Спонтанные и индуцированные эффекты в рамках трехволнового взаимодействия

Индукцированные процессы в случае многоволнового взаимодействия отличаются большим разнообразием в отличие от систем «волна–частица», одна из которых обсуждалась в предыдущем разделе. Рассмотрим для определенности взаимодействие в неизотермической плазме трех звуковых волн, частоты и волновые числа которых сравнимы (впервые подобный «распадный» процесс был рассмотрен в работе [123]). При этом будем считать неприменимыми представления о компактных пакетах волн и случайном изменении их фаз. Пусть две распространяющиеся в нелинейной среде волны с частотами  $\omega_2$  и  $\omega_3$  возбуждают нелинейный ток  $\tilde{j}_{23}$ , способный при выполнении условий пространственно временного синхронизма

$$\omega_1 \approx \omega_2 + \omega_3 \text{ и } \vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3, \quad (3.1)$$

излучать кванты поля собственной волны среды на частоте  $\omega_1$ .

Если учесть действие волн с частотами  $\omega_2, \omega_3$  и пренебречь воздействием поля первой волны с частотой  $\omega_1$  на этот нелинейный ток  $\tilde{j}_{23}$ , то такой процесс излучения квантов поля  $\hbar\omega_1$  можно было бы считать спонтанным. Однако, если поле первой волны, к примеру, будет накапливаться в пространстве взаимодействия и его амплитуда станет достаточно значительной, воздействием этого поля на нелинейный ток  $\tilde{j}_{23}$  пренебрегать будет уже нельзя. В этом случае можно говорить о взаимодействии трех волн, причем синхронизация фаз мод и формирование когерентного поля проходит при самосогласованном участии всех взаимодействующих волн.

На частоте первой волны характер обмена энергией с точностью до четвертого порядка малости по амплитудам взаимодействующих волн определяется соотношением

$$(\tilde{j}_{23} + \tilde{j}_1^{(3)})(\tilde{E}_1^* + \tilde{E}_{23}^*) \approx \tilde{j}_{23} \cdot \tilde{E}_{23}^* + \tilde{j}_{23} \cdot \tilde{E}_1^* + \tilde{j}_1^{(3)} \tilde{E}_1^*, \quad (3.2)$$

где для напряженности поля на частоте  $\omega_1$  удержаны величины первого  $\tilde{E}_1^{(1)}$  и второго  $\tilde{E}_{23}^*$  порядка, а для токов удержаны величины второго  $\tilde{j}_{23}$  и третьего  $\tilde{j}_1^{(3)}$  порядка по амплитудам волн. Первое слагаемое правой части (3.2) отвечает за процессы взаимодействия тока  $\tilde{j}_{23}$  и сформированного этим током поля  $\tilde{E}_{23} = \tilde{E}_{23}(\tilde{j}_{23})$  на комбинационных частотах. Происхождением ток  $\tilde{j}_{23}$  обязан нелинейному взаимодействию колебаний на частотах  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . Эти процессы при условиях пространственно-временного синхронизма (3.1) могут приводить к генерации излучения на частоте первой волны, причем эта генерация по отношению к этой волне, как показано ниже, обладает характерными чертами спонтанного процесса. Второе слагаемое (3.2) можно считать ответственными за процессы взаимодействия сразу трех волн. Последнее слагаемое определяет индуцированные процессы излучения и поглощения квантов поля на частоте первой волны. Если действительная часть этого выражения отлична от нуля, то возможно индуцированное излучение или поглощение квантов поля на частоте  $\omega_1$ . Доминирующим в хорошо изученных процессах трехволнового взаимодействия является второе слагаемое (3.2), а роль третьего слагаемого сводится лишь к поправкам к медленным фазам и отчасти амплитудам волн (см, например, [124, 125]).

Напомним, что когерентность излучения способны нарушить некоторые процессы, речь о которых, в частности, шла во введении. Однако в случае многоволнового взаимодействия нарушения когерентности излучения и также эффективности взаимодействия возможны не только в результате обсуждаемых выше явлений. Эффективность взаимодействия определяется дисперсией, порождающей фазовые расстройки пространственно-временного синхронизма, и в еще большей степени зависит от интегральных фазовых соотношений.

Прежде мы обращали внимание на явление синхронизации полем интегрального излучения процессов индуцированного (вынужденного) излучения и поглощения квантов поля частицами среды, что обеспечивало когерентность изучения. Однако часто при многоволновом взаимодействии имеет место фазовая расстройка  $\Delta$  между частотами волн, участвующих во взаимодействии. При этом первое из соотношений (3.1) принимает вид

$$\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = \Delta_{-1,2,3} = \Delta. \quad (3.3)$$

Фурье образ тока на комбинационной частоте  $\omega_2 + \omega_3$  может быть записан в виде

$$j_{23}(\omega, k) = (k_2 + k_3) \frac{n_0 e^3 \{E_2 E_3\}_\omega}{m_i^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \delta(k_1 - k_2 - k_3), \quad (3.4)$$

где для  $\{E_2 E_3\}_\omega$  можно использовать представление

$$\{E_2 E_3\}_\omega = \{E_2 E_3\}_o \frac{1}{\Delta_{\Omega 23} \sqrt{\pi}} \exp \{-(\omega - \omega_2 - \omega_3)^2 / \Delta_{\Omega 23}^2\},$$

причем  $\Delta_{\Omega 23}$  – спектральная ширина пакета на комбинационной частоте,  $E_i = |E_i| \exp \{i\varphi_i\}$  – медленно меняющаяся комплексная амплитуда  $i$ -той волны.

Для поля, сопровождающего этот ток, справедливо выражение

$$E_{23}(\omega, k_2 + k_3) = 4\pi \frac{ie(k_2 + k_3) \{E_2 E_3\}_\omega \Omega_i^2}{m_i \omega^2 \omega_2 \omega_3 \varepsilon(\omega, k_2 + k_3)} \delta(k - k_2 - k_3), \quad (3.5)$$

где  $\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} + \frac{\Omega_i^2}{k^2 v_s^2} = 0$ ,  $\Omega_i$  и  $v_s$  – Фурье-образ диэлектрической

проницаемости, ионная плазменная частота и скорость звука, соответственно. Применяя теорему Бореля, найдем работу поля (3.5) над током (3.4) и после обратного преобразования это выражение примет вид:

$$E_{23}^{(2)} * j_{23}^{(2)} = -i \left( \frac{e}{m_i v_s} \right)^2 W_2 W_3 \frac{8}{3} \frac{\omega_1}{\omega_2 \omega_3} [1 - i\alpha] \exp \left\{ -i(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)t - \frac{(\Delta_{\Omega 23} t)^2}{4} \right\}. \quad (3.6)$$

Для получения (3.6) необходимо воспользоваться соотношением

$$\frac{1}{\omega \varepsilon(\omega, k_2 + k_3)} = \frac{\omega_1}{3\omega_2 \omega_3} + i\pi \cdot \frac{k_1^2 v_s^2}{2\Omega_i^2} \{ \delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1) \}, \quad (3.7)$$

кроме того, использованы следующие представления

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} \omega_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_1} |E_1|^2 = 2 \frac{\Omega_i^2}{8\pi \omega_1^2} |E_1|^2 - \text{плотность энергии колебаний на}$$

частоте  $\omega_1$ ,  $\Delta_{-1,2,3} = (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = 3\omega_1 \omega_2 \omega_3 / 2\Omega_i^2$  – частотная расстройка, обусловленная дисперсией,

$$\alpha = \pi \cdot \frac{3\omega_1 \omega_2 \omega_3}{2\Omega_i^2} \frac{1}{\Delta_{\Omega 23} \sqrt{\pi}} \exp \{-(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)^2 / \Delta_{\Omega 23}^2\}, \text{ причем так как}$$

$\Delta_{\Omega 23} \geq \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$ , то в этих условиях  $\alpha$  – величина порядка единицы.

В условиях незначительной расстройки  $\Delta_{-1,2,3}$  не превышающей спектральную ширину волновых пакетов для звуковых волн, из-за

наличия резонанса  $\varepsilon(\omega_1, k_2 + k_3) = 0$  ток (3.4) способен возбуждать поле на частоте  $\omega_1$ . При малых расстройках изменение энергии поля на частоте  $\omega_1$  за счет тока на комбинационной частоте

$$-(E_{23}^{(2)*} j_{23}^{(2)} + E_{23}^{(2)} j_{23}^{(2)*}) / 2 = \alpha \left( \frac{e}{m_i v_s} \right)^2 W_2 W_3 \frac{8}{3} \frac{\omega_1}{\omega_2 \omega_3}. \quad (3.8)$$

Следует обратить внимание, что знак выражения (3.8) не зависит от участвующих во взаимодействии волн, что соответствует процессу генерации (излучения) колебаний. Подобная знакоопределенность характерна для спонтанных процессов. Кроме того, генерация на частоте  $\omega_1$ , обусловлена посторонними источниками (здесь волнами на частотах  $\omega_2$  и  $\omega_3$ ) по отношению к волне на этой же частоте, что также характерно для спонтанных процессов. Поэтому такая генерация по отношению к волне на частоте  $\omega_1$  обладает свойствами спонтанных процессов. Очевидно, при больших расстройках в спектральном интервале взаимодействующих мод, излучение (3.8) экспоненциально мало. Для энергии колебаний на частоте  $\omega_1$ , оказывается справедливым следующее уравнение [126]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial t} = & \alpha \frac{8}{3} \left( \frac{e}{m_i v_s} \right)^2 \omega_1 \frac{W_2}{\omega_2} \frac{W_3}{\omega_3} - \operatorname{Re} \frac{2\Omega_i^2 e E_2 E_3 E_1^*}{\pi m_i v_s \omega_2 \omega_3} + \\ & + \frac{8}{3} \left( \frac{e}{m_i v_s} \right)^2 \omega_1 \left\{ \frac{\alpha'}{2} \frac{W_1}{\omega_1} \frac{W_1}{\omega_1} + \alpha \frac{W_1}{\omega_1} \left( \frac{W_2}{\omega_2} + \frac{W_3}{\omega_3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Это уравнение можно записать для количества квантов в единице объема  $N_i = W_i / \hbar \omega_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t} = & \alpha \frac{8\hbar}{3} \left( \frac{e}{m_i v_s} \right)^2 N_2 N_3 - \operatorname{Re} \frac{2\Omega_i^2 e E_2 E_3 E_1^*}{\pi m_i \hbar v_s \omega_2 \omega_3 \omega_1} + \\ & + \frac{8\hbar}{3} \left( \frac{e}{m_i v_s} \right)^2 \left\{ \frac{\alpha'}{2} N_1 N_1 + \alpha N_1 (N_2 + N_3) \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Аналогичное уравнение можно записать для медленной фазы колебаний на частоте  $\omega_1$ :

$$N_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{8\hbar}{6} \left( \frac{e}{m_i v_s} \right)^2 N_2 N_3 - \text{Im} \frac{\Omega_i^2 e E_2 E_3 E_1^*}{\pi m_i \hbar v_s \omega_2 \omega_3 \omega_1} -$$

$$- \frac{8\hbar}{6} \left( \frac{e}{m_i v_s} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} N_1 N_1 - N_1 (N_2 + N_3) \right\} \quad (3.11)$$

Первое слагаемое правой части каждого из уравнений (3.10) и (3.11) отвечает спонтанным эффектам, второе слагаемое определяет процесс взаимодействия всех трех волн<sup>4</sup>, а третье слагаемое определяет индуцированные эффекты самовоздействия ( $\propto N_1^2$ ) и кроссмодуляции, которые могут быть получены прямыми расчетами.

Отметим, что коэффициент перед произведением числа квантов в уравнениях (3.10) и (3.11) равный  $\hbar e^2 / (m_i v_s)^2$ , можно представить в виде (ср. с подобными выражениями после формулы (2.11))  $\alpha_v \cdot \omega \cdot \tilde{\lambda}_v^2 \cdot k^{-1}$ , где  $\alpha_v = e^2 / \hbar v_{ph}$  – аналог постоянной тонкой структуры для случая, когда фазовая скорость  $v_{ph} = v_s$ , а величина  $\tilde{\lambda}_v = \hbar / m_i \cdot v_{ph}$  формально подобна комптоновской длине волны при  $v_{ph} = v_s$  для рассеяния на ионе.

Можно убедиться, что для первого и третьего слагаемого правой части каждого из уравнений (3.9) и (3.10) справедливы соотношения вида (2.19). Уравнение (3.10) без учета самовоздействия (слагаемое, пропорциональное  $\propto N_1^2$ ) можно формально записать в виде (на возможность такого представления было указано еще в докладе [127])

$$dN_1 / dt = \Sigma + \frac{1}{\hbar \omega} \{ j_{23} E_1^* + j_{23}^* E_1 \} + \frac{\partial \Sigma}{\partial (\hbar \omega)} W_1, \quad (3.12)$$

где

$$\Sigma = \alpha \frac{8}{3\hbar} \left( \frac{e}{m_i v_s} \right)^2 \frac{W_2 W_3}{\omega_2 \omega_3},$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial (\hbar \omega_1)} W_1 = \frac{8}{3\hbar^2} \left( \frac{e}{m_i v_s} \right)^2 \alpha \frac{W_1}{\omega_1} \left( \frac{W_2}{\omega_2} + \frac{W_3}{\omega_3} \right), \quad (3.13)$$

<sup>4</sup> Именно эти слагаемые определяют не только трехволновое взаимодействие, но и процессы турбулентно-волновой неустойчивости в условиях развитой турбулентности и в присутствии волны конечной амплитуды.

причем определим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial(\hbar\omega_1)} &= \alpha \frac{8}{3\hbar} \frac{e^2 [(W_2 + \hbar\omega_2)(W_3 + \hbar\omega_3) - W_2 W_3] / \hbar\omega_1}{(m_i v_s)^2} \frac{1}{\omega_2 \omega_3} = \\ &= \alpha \frac{8}{3\hbar} \frac{e^2}{(m_i v_s)^2} \left( \frac{W_2}{\omega_2} + \frac{W_3}{\omega_3} \right) \frac{1}{\hbar\omega_1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Эти соотношения может быть записано иначе:

$$\Sigma = w \cdot \alpha \cdot N_2 N_3 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial(\hbar\omega)} W_1 = w \cdot \alpha \cdot N_1 (N_2 + N_3),$$

где

$$w = \frac{8e^2 \hbar}{3(m_i v_s)^2}, \quad (3.15)$$

тогда процедура (3.14) принимает вид:

$$w \cdot \alpha \cdot [(N_2 + 1)(N_3 + 1) - N_2 N_3] = w \cdot \alpha \cdot (N_2 + N_3). \quad (3.16)$$

Важно отметить, что в уравнении (3.12), соотношение между выражением для спонтанного излучения (первое слагаемое правой части) и выражением для индуцированных процессов излучения и поглощения (третье слагаемое правой части) совпадает по виду и по смыслу с соответствующими выражениями в уравнениях (1.7) и (2.19).

Следует отметить, что первые слагаемые (3.10) и (3.11) того же порядка, что и последние слагаемые этих уравнений. Это дает порой основание считать физические механизмы, за которые они ответственные, однотипными, что далеко не так. Кроме того, генерация колебаний на частоте  $\omega$ , определяемая первыми слагаемыми правой части уравнений (3.10) и (3.11), может быть значительной и не имеет явных признаков шума, и можно усмотреть определенное подобие обсуждаемого явления с излучением пучка, модулированного на определенной частоте.

### 3.4. О б о п и с а н и и п р о ц е с с о в с а м о в о з д е й с т в и я

Слагаемое  $\propto N_1^2$  в правых частях (3.10) – (3.11) описывает результат самовоздействия и, что примечательно, также может быть формально

получено подобной (3.16) процедурой. Для тока на комбинационных частотах  $2\omega_1 - \omega_1$  (можно показать, что ток увлечения дает существенно меньший вклад, чем учет возмущений на второй гармонике) можно записать

$$j_{2\omega_1 - \omega_1}(x, t) E_{2\omega_1 - \omega_1}^*(x, t) = -\frac{w}{2} \cdot N_{2\omega} N_{\omega}(i + \alpha'), \quad (3.17)$$

где численный коэффициент

$$\alpha \rightarrow \alpha' = 3 \cdot 4 \frac{\omega_1^3}{\Omega_i^2} \left( \frac{1}{\Delta_{\Omega 23} \sqrt{\pi}} \right) \exp \left\{ - \left( \frac{3\omega_1^2}{\Omega_i^2} \right)^2 / \Delta_{\Omega 23}^2 \right\} \quad \text{порядка} \quad \text{единицы.}$$

Аналогично (3.16) запишем процедуру получения нелинейного слагаемого для самовоздействия

$$-\frac{w}{2} \cdot (i + \alpha') [(N_{2\omega} + 1)(N_{\omega} - 1) - N_{2\omega} N_{\omega}] \cdot N_1 \approx -\frac{w}{2} N_1^2 (i + \alpha'), \quad (3.18)$$

(т. к.  $N_{2\omega} \ll N_{\omega}$ ), значение которого также может быть получено прямым расчетом. Но так как величина тока на комбинационных частотах  $2\omega_1 - \omega_1$  определяется величинами более высокого порядка малости по амплитудам колебаний, то в этом случае корректнее ориентироваться на прямые расчеты слагаемых, ответственных за эффекты самовоздействия.

Подобные схемы расчетов активно использовались для описания волновых взаимодействий многими авторами (см., [62, 66] и литературу там же). Однако следует заметить, что применение таких операций в рамках развитых феноменологий, в большинстве случаев весьма успешное, может исказить физический смысл отдельных элементов описания и должно опираться на прямые расчеты.

В отсутствии расстройки первое слагаемое правой части (3.10) отвечает за излучение на частоте  $\omega_1$ , порожденное только комбинационным взаимодействием двух волн с частотами  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . Второе слагаемое правой части (3.10) определяет хорошо известный коллективный процесс взаимодействия всех трех волн. Учет процесса спонтанной генерации, описываемого первым слагаемым правой части (3.10), который можно назвать спонтанным, обеспечивает не только формирование определенного уровня флуктуаций в системе, но и способен заметно повлиять на динамику многоволнового взаимодействия (подобно явлениям, обсуждаемым в работе [23, 25]). В частности, нарастающий уровень шума способен привести к сглаживанию осцилляций амплитуд и выравниванию уровней интенсивности взаимодействующих волн, также как и воздействие случайных фазовых нарушений [120, 128]. В однородном случае, при достаточно больших значениях расстройки  $\Delta$ , превышающих ширину спектра участвующих в процессе взаимодействия волн, первое слагаемое правой части пренебрежимо мало, т. е. эффективность подобного спонтанного взаимодействия волн ослабляется.

### 3.5. Процессы в турбулентной среде

Наличие достаточно широких спектров приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \alpha \cdot w \sum_{k'} N_{k'} N_{k-k'} + w \left\{ \frac{\alpha'}{2} N_k^2 + \alpha N_k \sum_{k'} [N_{k'} + N_{k-k'}] \right\}, \quad (3.19)$$

$$N_k \frac{\partial \phi_k}{\partial t} = \frac{w}{2} \sum_{k'} N_{k'} N_{k-k'} + \frac{w}{2} \left\{ \frac{1}{2} N_k^2 + N_k \sum_{k'} [N_{k'} + N_{k-k'}] \right\}. \quad (3.20)$$

Здесь исключены слагаемые, отвечающие трехволновому взаимодействию. Из-за усреднения по турбулентным пульсациям. Без учета самовоздействия, уравнение (3.19) принимает вид:

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \Sigma_k + \hbar \omega_k N_k \frac{\partial}{\partial (\hbar \omega_k)} \Sigma_k, \quad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_k &= w \cdot \alpha \sum_{k'} N_{k'} N_{k-k'}, \\ \hbar \omega_k N_k \frac{\partial}{\partial (\hbar \omega_k)} \Sigma_k &= \alpha \cdot w \cdot N_k \sum_{k'} [N_{k'} + N_{k-k'}]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Таким образом, описание процессов излучения в случае волновых пакетов в представлении (3.19) подобно описанию спонтанного и индуцированного излучения в случае активных сред (1.7) и в случае взаимодействий «частица – волна» (2.19).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсуждается характер коллективных процессов излучения неравновесных сред, которые лежат в основе большинства физических явлений с участием частиц, токов и полей с позиций современных представлений, без изменений традиционных подходов. Последнее предполагает, что процессы спонтанного излучения непосредственно не зависят от интегрального поля на этой частоте, а индуцированные процессы могут приводить к генерации когерентного излучения. Что касается явлений сверхизлучения, то они, несмотря на значительную

аналогию с процессами спонтанного излучения, тем не менее, относятся к разновидности индуцированного излучения. В большинстве случаев индуцированные процессы излучения реализуются в режиме накопления ВЧ энергии за счет спонтанного поля частиц и токов, но могут быть реализованы и при заметных интенсивностях начальных возмущений. Во всех этих случаях интенсивности поля превосходят суммарную интенсивность спонтанного излучения частиц и токов.

Характеристикой спонтанных процессов является тот факт, что если существует отличное от нуля значение работы поля над порождающим это поле током, то оно всегда оказывается знакоопределенным и описывает только процесс излучения. Другой характерный признак спонтанного излучения – существование его источников (в частности, осцилляторного и поступательного движения заряженных частиц, невозмущенного собственного тока) которые являются независимыми от волн на этой частоте и процесс излучения не навязан этими волнами. Этими чертами обладают процессы инжекции частиц пучка в среду и генерации колебаний токами на комбинационных частотах при взаимодействии с порожденными ими полями.

На примере двухуровневой квантовой системы рассматриваются условия сверхизлучения, обнаружен порог появления импульсов когерентного излучения при превышении начальной инверсией заселенностей величины, равной корню квадратному из полного числа состояний. Появление этого порога обусловлено конкуренцией спонтанных и индуцированных процессов. При превышении порога число квантов начинает расти экспоненциально со временем, возникает генерация индуцированного когерентного излучения в виде импульсов с коротким передним фронтом и протяженным задним фронтом. Учет потерь энергии квантов приводит тому, что длительность когерентного импульса практически не изменяется при росте инверсии, по крайней мере, достаточно далеко от порога. Рассмотрены спонтанные и индуцированные эффекты в процессах рассеяния. В частности обсуждается квантово-механическая модель излучения осциллятора, захваченного во внешнюю потенциальную яму в случае отличной от нуля энергии отдачи. Если энергия отдачи равна энергии кванта низкочастотных колебаний в потенциальной яме, наблюдается наибольшая интенсивность линий поглощения и излучения на собственной частоте покоящегося осциллятора.

Отмечается роль спонтанного шума в формировании поля излучения при развитии и срыве кинетической неустойчивости электронного пучка в плазме. Показано, что сверхизлучение и самомодуляция движущихся коротких электронных сгустков может быть интерпретированы как результат диссипативной пучковой неустойчивости. Именно эта неустойчивость обеспечивает синхронизацию излучателей – электронов сгустка.

Рассмотрено возбуждение колебаний токами. При взаимодействии множества волн с возбуждаемыми ими токами, видимо трудно рассчитывать на полные аналогии с процессами излучения и поглощения волн частицами. Так, например, наличие фазового рассогласования,

неизбежного в условиях существования дисперсии фазовых скоростей взаимодействующих волн, приводит к появлению слагаемых в уравнении для медленной фазы колебаний, которые определяются внешними по отношению к данной волне токами. Тем не менее, показано, что колебания, которые генерируются токами на комбинационных частотах, демонстрируют характеристики как спонтанного, так и индуцированного излучения.

Следует отметить наличие весьма определенной связи между спонтанным и индуцированным слагаемыми в уравнении (1.7) для активных сред, в уравнении (2.19) для взаимодействий «частица-волна» и в уравнениях (3.12), (3.21) для процессов «ток-волна». Надо отметить, что соотношения эти в последнем случае распространяются не только на нелинейные слагаемые, описывающие изменения энергии волн (3.9), но и на слагаемые, ответственные за фазовые характеристики взаимодействия (3.10). Полезной является приведенная в 3 разделе работы методика расчета, ориентированная на понимание физического смысла нелинейных слагаемых третьего порядка малости по амплитуде возмущений. Ибо сформулированная связь между нелинейными слагаемыми, описывающими процессы спонтанной генерации поля и индуцированных эффектов на данной частоте, позволяет корректно, избегая погрешностей получить систему уравнений, описывающую нелинейный процесс взаимодействия волн.

В нелинейных системах индуцированные эффекты отличаются большим разнообразием. Прежде всего, потому, что в условиях высокой плотности энергии в сильно нелинейных средах (таких как плазма, плотные электронные пучки) зависимость между параметрами систем приобретает нелинейный и нелокальный характер. С дальнейшим ростом интенсивности возмущений значительно изменяются динамика (особенно в случаях сильной параметрической неустойчивости и волновых коллапсов [30, 129]) и времена развития процессов. С другой стороны, в последнее время растет понимание важности влияния собственного спонтанного шума на характер развития различных явлений и на формирование конечных состояний систем [130]. Последовательный учет процессов спонтанного излучения способен прояснить характер начальных условий развивающихся неустойчивостей, может привести к изменению их динамики. Корректное применение теории, которая согласованно учитывает как спонтанные, так и индуцированные эффекты, позволит добиться лучшего согласия между теорией и экспериментом.

Сделаем также одно важное замечание. В данной работе авторы, в согласии с развитыми в обзорах В. Л. Гинзбурга представлениями [5–7], при обсуждении природы спонтанного излучения не привлекали квантовые эффекты, что, тем не менее, не повлияло на общность рассмотрения. По крайней мере, в описании классических систем. При обсуждении квантовых систем возможны иные чисто квантовые интерпретации природы спонтанного излучения, дискуссия о которых все еще продолжается (см., например, [14, 15, 32, 33]), однако этот вопрос в данной работе не затрагивался. Важно, что все непротиворечивые описания,

корректно использующие аппарат квантовой теории, дают один и тот же результат, который там, где это возможно, должен совпадать с классическими аналогами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Einstein A. Quantentheorie der Strahlung. // Mitteilungen d. Phys. Ges. Zurich, 1916. Nr. 18; Phys. Zs. 1917. Nr.18, P.121. Перев.: К квантовой теории излучения. // УФН, 1965, т. 86, в. 3, – С. 371–381.
2. Ладенбург Р. Дисперсия в электрически возбужденных газах // УФН, 1934, т. 14, в.6, – С.721–741; Reviews of Modern Phys. 1933. N.4. – P. 243–260.
3. Таунс Ч. Получение когерентного излучения с помощью атомов и молекул // УФН, 1966, т. 88, в. 3, – С. 461–483.
4. Борн М. Современная физика. – М.: ОНТИ. 1935. – 264 с.
5. Гинзбург В. Л. О природе спонтанного излучения // УФН, 1983, т. 140, № 4, – С. 687–698.
6. Гинзбург В. Л. Излучение равномерно движущихся источников (эффект Вавилова-Черенкова, переходное излучение и некоторые другие явления) // УФН, 1996, т. 166, №10, – С. 1033–1042.
7. Гинзбург В. Л. Несколько замечаний об излучении зарядов и мультиполей, равномерно движущихся в среде // УФН, 2002, т.172, №2, – С. 373–376.
8. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 532 с.
9. Таунс Ч. Получение когерентного излучения с помощью атомов и молекул // УФН, 1966, т. 88, в. 3, – С. 461–483.
10. Бирнбаум Дж. Оптические квантовые генераторы. Пер. с англ. – М., Советское радио. – 1967. – С. 360.
11. Zagorodny A. G., Kuklin V. M. To realization conditions of maser radiation// High-power pulsed electrophysics. International conference XIV Khariton's topical scientific readings. Digest of technical papers – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2013. – С. 38–43.
12. On the formation of pulses of coherent radiation in weakly inverted media / Kirichok A.V., Kuklin V. M. , Mischin A. V., Prymak A. V., Zagorodny A. G. // XII international workshop "plasma electronics and new acceleration methods" 26-30 August, 2013, Kharkov, Ukraine; VANT, Series "Plasma Electronics and New Methods of Acceleration" 2013, N.4 (86). Issue 8. – P. 267–271.
13. Blotmbergen N. Nonlinear Optics. A Lecture Note. – W. A. Benjamin, Inc. New York – Amsterdam, 1965.
14. Файн В. М. Квантовая радиофизика. Фотоны и нелинейные явления. – Советское радио, 1972.
15. Ханин Я. И. Основы динамики лазеров. – М.: Физматлит, 1999. – 368 с.
16. Dicke R. H. Coherence in Spontaneous Radiation Processes // Physical Review. 1954. Vol. 93. № 1. – P. 99–110.
17. Габитов И. П., Захаров В. Е., Михайлов А. В. Нелинейная теория суперфлюоресценции // ЖЭТФ, 1984, т. 86, – С. 1204–1216.
18. Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А. Коллективное спонтанное излучение (Излучение Дике) // УФН, 1980, том. 131, в. 4, – С. 655–694.
19. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. Волны поляризации и сверхизлучение в активных средах / УФН, 1989, т. 159, №2, – С. 193–260.
20. Меньшиков Л. И. Сверхизлучение и связанные явления // УФН, 1999, т. 169, № 2, – С. 113–154.
21. Сверхизлучение электронов в магнитном поле и нерелятивистский гиротрон / А. Г. Загородний, П. И. Фомин, А. П. Фомина // Доп. НАН України. 2004, № 4, – с. 75– 80; Fomin P. I., Fomina A. P. Dicke Superradiance on Landau Levels / Problems of Atomic Science and Technology, 2001. N 6. – P. 45–48.
22. Ситенко А. Г. Электромагнитные флуктуации в плазме. – Харьков: Изд. Харьк. ун – та, 1965. – 184 с.
23. Ситенко А. Г. Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме. – Киев: Наук. думка, 1977. – 248 с.
24. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме – М.: Изд. Моск. ун-та, 1964. – 282 с.

25. Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН, 1999, т. 169, в. 1, – С. 7–38.
26. Андронов А. А. К вопросу о затухании и нарастании плазменных волн // Изв. ВУЗов Радиофизика. 1961, т.4, №5, – С. 861–866.
27. Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах. – М.: Наука. 1983. – 320 с.
28. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. Индуцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике // Изв. ВУЗов Радиофизика, 1967, т.10, №10, – С. 1414–1453.
29. Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов. – М. Наука, 1971. – 339 с.
30. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. – М.: Наука, 1973. – 287 с.
31. Электродинамика плазмы / Авт.: Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. – М. Наука, 1974, – 720 с.
32. Буц В. А., Лебедев А. Н. Когерентное излучение интенсивных электронных пучков. – М. Изд. ФИАН РАН. 2006. – 333 с.
33. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. – М.: Наука, 1990. – 336 с.
34. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. – М.: Атомиздат, 1961. – 244 с.
35. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. – М.: Наука, 1967. – 288 с.
36. Вильгельмсон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. – М.: Энергоатомиздат, 1981. – 224 с.
37. Weiland J., Ericsson A., Nordman H., Zagorodny A.G. Progress on anomalous transport in tokamaks, drift waves and nonlinear structures // Plasma Phys. Control. Fusion 2007, Vol. 49, N. 5A, – P. 45–57.
38. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. – М.: Изд. Наука, 1975. – 416 с.
39. Статистическая теория плазменно-молекулярных систем. /Авт.: Климонтович Ю. Л., Вильгельмсон Х., Якименко И. П., Загородний А. Г. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 224 с.
40. Яновский В. В. Лекции о нелинейных явлениях. Том 2. – Харьков: Институт монокристаллов, 2007. – 448 с.
41. Пайнс Д. Элементарные возбуждения в твердых телах. – М.: Мир, 1965. – 320 с.
42. Барьяхтар В.Г. Феноменологическая теория релаксационных процессов в магнетиках. В кн. Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов: Сб. науч. тр. // АН УССР. Ин-т теор. физики: Отв. ред. Барьяхтар В.Г., Захаров В. Е., Черноусенко В. М. – Киев: Наук. думка, 1990. – 472 с.
43. Ораевский А.Н. Бозе-конденсаты с точки зрения лазерной физики // УФН, 2001, т. 171, № 6, – С. 681–684.
44. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Вынужденное излучение ультрарелятивистских электронных пучков // УФН, 1987, т. 152, в. 2, – С. 285–300.
45. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Механизмы спонтанного и вынужденного излучений релятивистских электронных пучков. В сб. "Проблемы теоретической физики и астрофизики." К 70-летию В. Л. Гинзбурга. – М.: Наука, 1989, – С. 70–92.
46. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Спонтанное и вынужденное излучение электрона, электронного сгустка и электронного пучка в плазме// УФН, 2008, т. 178, № 10, – С. 1025–1055.
47. Einstein A. Quanten theorie des einatomigen idealen Gases // Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss. 1924, Nr. 22. – P. 261; Ibid, 1925, Nr. 23, – P.3; перев.: Квантовая теория одноатомного идеального газа. УФН, 1965, т. 86, в. 3, – С. 371–396.
48. Железняков В. В., Когаровский В. В., Когаровский Вл. В. Волны поляризации и сверхизлучение в активных средах // УФН, 1988, т. 159, вып. 2, – С.193–260.
49. Brown Hanbury R., Twiss R. Q. Interferometry of the intensity fluctuations in light. I. Basic theory: the correlation between photons in coherent beams of radiation// Proc of the Royal Society of London. 1957. V. A 242 (1230). – P. 300–324; Interferometry of the intensity fluctuations in light. II. An experimental test of the theory for partially coherent light // Ibid 1958. V. A 243 (1234). – P. 291–319.
50. Меньшиков Л. И. Сверхизлучение и некоторые родственные явления // УФН, 1999, т. 169, в. 2, – С. 113–154.
51. Сазонов С. В. Сверхсветовые электромагнитные солитоны в неравновесных средах // УФН, 2001, т.171, вып. 6, – С. 663–677.
52. Розанов Н. Н. Диссипативные оптические солитоны // УФН, 2000, Т.170, в. 4, – С. 462–465.

53. Ким А. В., Рябикин М. Ю., Сергеев А. М. От фемтосекундных к аттосекундным импульсам // УФН, 1999, т. 169, в. 1, – С. 58–66.
54. Kuklin V. M. Effect of induced interference and the formation of spatial perturbation fine structure in nonequilibrium open-ended system // Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ), Серия: «Плазменная электроника и новые методы ускорения. 2006, № 5 (5), – С. 63–68.
55. Зейгер С. Г., Климонтович Ю. Л., Ланда П. С., Ларионцев Е. Г., Фрадкин Э. Е. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах. – М.: Наука, 1974. – 416 с.
56. Белкин Е. В., Киричок А. В., Петренко А. С. Мазерная накачка модуляционно-нестабильной волны в плазме / ВАНТ, Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения, 2010, вып. 7, № 4 (68), – С. 299–301.
57. Куклин О. В., Куклин В. М. Об относительной роли фононного спектра и столкновительной релаксации в процессах генерации и рассеяния // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. 2009. № 846, в. 2(50), – С. 20–28.
58. Kirichok A. V., Kuklin V. M., Zagorodny A. G. On the emission spectrum of oscillator trapped in a potential well. // XII international workshop "Plasma electronics and new acceleration methods" 26-30 August, 2013, Kharkov, Ukraine; VANT, 2013, N.4 (86). – series "Plasma Electronics and New Methods of Acceleration" issue 8. – P. 256–259; О спектрах захваченного в потенциальную яму осциллятора // Физические основы приборостроения. 2013, т. 2. № 3, – С. 56–63.
59. Кондратенко А. Н., Куклин В. М. Основы плазменной электроники. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.
60. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. – М.: Изд. Сов. Радио, 1957. – 320 с.
61. Шевчик В. И., Трубецков О. Н. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. – М.: Сов. Радио, 1970. – 280 с.
62. Взаимодействие электронного пучка с плазмой / И. Ф. Харченко, Я. Б. Файнберг, Р. М. Николаев, Е. А. Корнилов, Е. А. Луценко, Н. С. Педенко. // ЖЭТФ, 1960, т. 38, вып. 3, – С. 685–692.
63. Демирханов Р. А., Геворков А. К., Попов А. Ф. Взаимодействие пучка заряженных частиц с плазмой // ЖТФ, 1960, т. 30, в. 3, – С. 315–319.
64. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы // ЖЭТФ, 1946. т.16, вып. 7, – С. 574–586.
65. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы – Вопросы физики плазмы. Вып. 4. – М.: Госатомиздат, 1964. – С. 188–339.
66. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы. – М.: Атомиздат, 1971. – 423 с.
67. Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Взаимодействие волна-частица в неравновесных средах // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1976, т. 19, № 5–6, – С. 787–791.
68. Мазитов Р. К. О затухании плазменных волн // Журн. прикл. матем. и теорет. физ. 1965, №1, – С. 27–31.
69. O'Neil Th. Collisionless damping of non-linear plasma oscillation // Phys. Fluids. 1965. Vol.8. N 12, – P. 2255–2264.
70. К нелинейной теории возбуждения монохроматической плазменной волны электронным пучком. / И. Н. Онищенко, А. Р. Линецкий, Н. Г. Мациборко, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко // Письма в ЖЭТФ, 1970, Т.12, в. 8, – С. 407–410.
71. Калмыкова С. С., Курилко В. И. Физические механизмы гидродинамической плазменно-пучковой неустойчивости // УФН, 1988, т. 155, в. 4, – С. 681–701.
72. Куклин В. М. Одномерные движущиеся сгустки заряженных частиц в плазме // УФЖ, 1986, т. 31, № 6, – С. 853–857.
73. Rozenzweig J. Nonlinear plasma dynamics in the plasma wavefield accelerator // IEEE transaction on plasma science. 1987. PS-15, N 2. – P.186–191.
74. Su J. J., Katsonleas T., Dawson J. M. et al. Stability of the driving bunch in the plasma wakefield accelerator // Ibid. P. 192–198.
75. Куклин В. М. Роль поглощения и диссипации энергии в формировании пространственных нелинейных структур в неравновесных средах // УФЖ, Обзоры, 2004, т. 1, №1, – С. 49–81.
76. Haefl A.V. Space charge wave amplification effects // Phys. Rev. 1948. V. 74. N. 1. – P. 1532–1533.
77. Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б. О взаимодействии пучка заряженных частиц с плазмой // Доклады АН СССР, 1949, т. 69, №4, – С. 555–558.
78. Bohm D, Gross E. P. Theory of Plasma oscillation B. Excitation and damping of oscillation // Phys. Rev. 1949. V. 75. N 12. – P. 1864–1876.
79. Файнберг Я. Б. Плазменная электроника // УФЖ, 1978, т. 23, № 11, – С. 1885– 901.
80. Файнберг Я. Б. Некоторые вопросы плазменной электроники // Физика плазмы. 1985, т.11, № 11, – С. 1398–1410.
81. Nordsieck A. Theory of the large signal behavior of traveling wave amplifiers // Proc. IRE. 1953, Vol. 41, N 5, – P. 630–637.

82. Кондратенко А. Н., Куклин В. М., Ткаченко В. И. Нелинейная теория пучковой неустойчивости в столкновительной плазме // Изв. вузов. Радиофизика, 1978, т. 21, № 10, – С. 1535–1537.
83. Кондратенко А. Н., Куклин В. М., Ткаченко В. И. Об аномальном уровне потерь энергии пучка при развитии диссипативной пучковой неустойчивости // УФЖ, 1979, т. 24, № 4, – С. 559–561.
84. Briggs. R. J. Two-beam instability. – Advances in Plasma Physic. Ed. by A. Simon and W. B. Thompson. Interscience Publ. V. 4. 1971.
85. Абрамович В. У., Шевченко В. И. К нелинейной теории диссипативной пучковой неустойчивости релятивистского пучка в плазме // ЖЭТФ, 1972, т. 62, в. 4, – С. 1386–1391.
86. Иванов А. А., Парайл В. В., Соболева Т. К. Нелинейная теория взаимодействия моноэнергетического пучка с плотной плазмой // ЖЭТФ, 1972, т. 63, № 11, – С. 1678–1685.
87. Рабинович М. С., Рухадзе А. А. Принципы релятивистской плазменной электроники // Физика плазмы, 1976, т. 2, в. 5, – С. 715–722.
88. Куклин В. М., Панченко И. П., Хакимов Ф. Х. Многоволновые процессы в плазме. – Душанбе, Дониш, 1999. – 175 с.
89. Куклин В. М., Панченко И. П., Севидов С. М. К нелинейной теории гидродинамической пучковой неустойчивости в высокотемпературной плазме // Радиотехника и электроника. 1986, т. 31, № 3, – С. 611–614.
90. Киричок А. В., Куклин В. М., Мишин А. В. Об особенностях излучения движущихся одиночных электронных сгустков // ВАНТ, Серия Плазменная электроника и новые методы ускорения. 2010, вып. 7, № 4 (68), – С. 58–61.
91. Гришин В. К., Шапошникова Е. Н. Устойчивость заряженного пучка малой длительности в плазменном волноводе // Физика плазмы, 1982, т. 8, в. 2, – С. 287–292.
92. Кондратенко А. Н., Куклин В. М., Репалов Н. С. Эволюция сгустка заряженных частиц в поле собственного излучения // УФЖ, 1982, т. 27, № 8, – С. 1159–1164.
93. Красовицкий В. Б. Нелинейная радиальная самофокусировка электронного пучка в плазме // Письма в ЖЭТФ, 1969, № 9, – С. 679–684.
94. Дорофеев В. Г., Красовицкий В. Б. Самофокусировка модулированного электронного пучка в плазме // Укр. Физ. Журнал, 1984, т. 29, № 3, – С. 395–405.
95. Krasovitsky V. B. Self-focusing of relativistic electron bunches in a plasma. – Kharkov, Folio, 2000. – 196 p.
96. Гладкий А. М., Коваленко В. П., Юсманов П. Н. Свойства плазменных волн, возбуждаемых электронными сгустками // Письма ЖЭТФ, 1976, № 24, – С. 533–542.
97. Куклин В. М., Моисеев С. С., Панченко И. П. К вопросу транспортировки и излучении коротких одномерных сгустков заряженных частиц в плазме // Препринт №1314, Институт космических исследований. Москва, 1987. – С. 15.
98. Acceleration of Electrons by the Interaction of a Bunched Electron Beam with a Plasma / Chen P., Dawson J. M., Huff R. W., Katsouleas T. // Physical Review Letters. 1985. V. 54. Issue 7. – P. 693–696.
99. Ахизер А. И., Половин Р. В. К теории волновых движений электронной плазмы // Журнал экспериментальной и теоретической физики // 1956, т. 30, № 5, – С. 915–928.
100. Kuklin V. M., Moiseev S. S., Panchenko. I. P. 3-D short Beam Dynamics // Moscow. Reprint of Institute of Space Research, N 1619, 1989. – 11 P.
101. Seletskiy S., Podobedov B., Shen Y., and Yang X. Seeding, Controlling, and Benefiting from the Microbunching Instability // Phys. Rev. Lett. – 2013, PRL 111, 034803, 5P.
102. Альтеркоп Б. А., Жексембин С. Р., Рухлин В. Г. Тараканов В. П. Двумерная динамика компенсированного электронного сгустка в плотной плазме // Препринт ин-та Высоких температур АН СССР, 1986, N 6–193, – С. 35–45.
103. Балакирев В. А., Карбушев Н. И., Островский А. О., Ткач Ю. В. Теория черенковских усилителей и генераторов на релятивистских пучках. – Киев: Наукова думка, 1993. – 208 с.
104. Киричок А. В., Куклин В. М., Мишин А. В., Приймак А. В. 1D модель движущегося в плазме сгустка заряженных частиц // Физические основы приборостроения. 2013, т. 2, № 3, – С. 80–93.
105. Батищев О. В., Красовицкий В. Б., Сигов Ю. С. и др. Самофокусировка ленточного РЭП в плотной плазме // Физика плазмы, 1993, т. 19, – С. 738–743.
106. Batishchev O. V., Karas' V. I., Sigov Yu. S. and Fainberg Ya. B. 2.5 Dimensional computer simulation of relativistic bunch propagation in tenuous and dense plasmas // Plasma Physics Reports, 1994. V. 20. – P. 583–586.
107. Балакирев В. А., Сотников Г. В., Файнберг Я. Б. Модуляция релятивистских электронных сгустков в плазме // Физика плазмы, 1996, т. 22, № 2, – С. 165–169.

108. Balakirev V. A., Karas' I. V., Karas' V. I., Levchenko V. D., Bornatici M. Charged particle (CP) acceleration by an intense wake-field (WF) excited in plasma by either laser pulse (LP) or relativistic electron bunch (REB) // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (3), 2003, № 4, – С. 29–32.
109. Onishenko N. I., Sotnikov G. V. Theoretical studies of the resonator concept of dielectric wakefield accelerator // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (3), 2006, № 5, – С. 203–207.
110. Лоусон Дж. Д. Механизмы ускорения частиц: возможности и ограничения // УФН. 1989, т. 158, в. 2, – С. 303–313.
111. Пайерлс Р. Импульс и квазимпульс света и звука // УФН, 1991, т.161, №9, – С. 161–176.
112. Андреев Н. Е., Горбунов Л. М. Лазерно-плазменное ускорение электронов // УФН. 1999, т. 169, № 1, – С. 53–58.
113. Balakirev V. A., Karas' V. I., Karas' I. V. et al. Charged particle acceleration by an intense wake-field excited in plasmas by laser pulse or relativistic electron bunch // Laser and Particle beams. 2004. Vol. 22. – P. 383–392.
114. Басович А. Я., Таланов В. И. Адиабатическое взаимодействие волн. – в кн. Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981, – с. 147–166.
115. Kirichok A. V., Kuklin V. M., Panchenko I. P., Moiseev S. S. Wave-Turbulence Instability in Nonequilibrium Hydrodynamics Systems // Physics and Chemistry of the Earth. Part A. 1999. № 6. – P. 539–541.
116. Киричок А. В., Корсунский С. В., Куклин В. М. Пример турбулентно-волновой неустойчивости в плазме // Доклады АН Украины, 1994, № 11, – С. 85–89.
117. Веденов А. А. Введение в теорию слаботурбулентной плазмы. Вопросы физики плазмы. Вып. 3. – М.: Госатомиздат, 1963, – С. 203–244.
118. Hasselman K. On the non-linear energy transfer in a gravitywave spectrum. //J. Fluid Mech. 1962. V. 12. – P. 481–500; 1963. V.15 – P. 273–281.
119. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Гамильтонов формализм для нелинейных волн // УФН, 1997, т. 167, № 11, – С. 1137–1167.
120. Ахизер А.И., Алексин В.Ф., Ходусов В. Д. К нелинейно теории низкочастотных колебаний в слаботурбулентной плазме // ЖЭТФ, 1977, т. 73, в. 5(11). – С. 1757–1766.
121. Ахизер А. И., Алексин В. Ф., Ходусов В. Д. К теории колебаний газа плазмонов в слаботурбулентной плазме // ЖЭТФ, 1978, т. 74, в. 3, – С. 944–951.
122. Маркувиц Н. Распространение пучков волн в нелинейной среде как движение квазичастиц. В кн.: Нелинейные электромагнитные волны. Пер. с англ. Под ред. П. Усленги. – М.: Мир, 1983. – С. 92–103.
123. Сагдеев Р. З., Ораевский В. Н. Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы // ЖТФ, 1962, том 32, в. 7, – С. 1291–1299.
124. Oraevskii V. N., Wilhelmsson H., Kogan E. Ya., Pavlenko V. P. On the stabilization of explosive instabilities by nonlinear frequency shift // Physica Scripta, 1973. V. 7. – P. 217–221.
125. Weiland J. Influence of nonlinear frequency Shifts and effective nonlinear dissipation on explosive Instabilities // Physica Scripta, 1973. V. 9. – P. 343–349.
126. Киричок А. В., Куклин В. М. Об учете спонтанного излучения модулированных на комбинационных частотах токов при трехволновых взаимодействиях // Вісник ХНУ ім. В.Н.Каразіна. 2009, № 845, в. 1(49), — с. 67–72. Theory of Some Nonlinear Processes in Plasma in Terms of Spontaneous and Stimulated Radiation // Phys. Scripta, 2010. V. 82, N 11.
127. Kirichok A. V., Kuklin V. M., Zagorodny A. G. A Theory of Some Nonlinear Processes in Plasma in Terms of the Spontaneous and Induced Radiation // Modern Problem of Theoretical and Mathematical Physics: Proc.Bogolubov Kyiv Conference, Kyiv, Ukraine, 15–18 Sept. 2009.
128. Абрамович Б. С., Тамойкин В. В. Диффузионное приближение в теории нелинейного взаимодействия волн в хаотически-неоднородных средах. – В кн. : Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. – М.: Наука, 1981. – С. 225–234.
129. Захаров В. Е. Волновые коллапсы в физике сплошной среды. В кн.: Проблемы физической кинетики и физики твердого тела. : Сб. науч. трудов : отв. ред. Ситенко А.Г. ; АН УССР, Ин-т теор. физ. – Киев. Наукова думка, 1990, – С. 469–486.
130. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: пер с англ. – М.: Мир, 1987. – 400 с.

## ЧАСТЬ II

---

# МЕХАНИЗМЫ ПОВЫШЕНИЯ ЧАСТОТЫ И СТЕПЕНИ КОГЕРЕНТНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ

**В. А. Буц**

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»  
НАН Украины, ул. Академическая 1; г. Харьков, 61108, Украина  
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы 4;  
г. Харьков, 61022, Украина*

**И** зложены результаты исследований по преобразованию НЧ-колебаний в ВЧ-излучение, а также результаты исследований, направленных на преобразование некогерентного излучения в излучение с высокой степенью когерентности. Практически все исследования были выполнены в ННЦ «ХФТИ». Перечислим более существенные из них. Показано, что нерелятивистские осцилляторы могут излучать как релятивистские. Это означает, что максимум интенсивности их излучения приходит на высокие номера гармоник. Оказывается, что для этого они должны излучать в периодически-неоднородной среде. Важно, что величина неоднородности может быть исчезающе малой. Она не определяет спектр излучения. Ее влияние оказывается только на интенсивности излучения. При этом интенсивность излучения нерелятивистских осцилляторов на высоких номерах гармоник может превосходить интенсивность излучения релятивистских осцилляторов. Описана теория и результаты экспериментальных исследований этого механизма. Потенциально такой механизм позволяет создать ЛСЭ в рентгеновском диапазоне с использованием потоков нерелятивистских осцилляторов. В работе описана возможность

преобразования энергии НЧ-колебаний в ВЧ-излучение при использовании вторичных резонансов. Эти резонансы возникают между системами, свойства которых (или одно из них) были изменены в результате первичных резонансов. Описана теория такого преобразования, а также результаты экспериментальных исследований этого механизма. Этот механизм позволяет преобразовывать энергию ВЧ-излучения в излучение терагерцового и оптического диапазонов. Основная трудность на пути создания лазеров в УФ и рентгеновском диапазонах связана с быстрым уменьшением времени жизни возбужденных состояний с увеличением энергии возбуждения. В работе описан механизм, названный механизмом юлы. Этот механизм во многих чертах похож на квантовый эффект Зенона. Показано, что его использование позволяет стабилизировать как квантовые, так и классические системы. В частности, открывается возможность существенного увеличения времени жизни возбужденных квантовых систем. Принципиально другой путь создания интенсивного, коротковолнового (до рентгеновского) излучения с высокой степенью когерентности описан во второй части обзора. В ней описаны механизмы, позволяющие существенно увеличить как плотность энергии, например, рентгеновского излучения, так и степень его когерентности при взаимодействии с идеальными кристаллами или нелинейными средами. В частности, получена формула, обобщающая формулу Ван-Циттерта-Цернике на случай распространения излучения в идеальных кристаллах. Показано, что степень когерентности при этом, например, для рентгеновского излучения увеличивается в  $10^4 - 10^6$  раз. Вторая возможность увеличить степень когерентности излучения заключается в использовании плохой обусловленности второго начала термодинамики. Показано, что при определенных значениях параметров между взаимодействующими системами незначительный обмен энергии между ними может привести к полной передаче энтропии. В качестве примера описан процесс распада некогерентной волны при ее распространении в нелинейных средах (плазме). Показано, что, например, некогерентная высокочастотная поперечная волна может распадаться на когерентную поперечную высокочастотную волну и на низкочастотную ленгмюровскую волну. При таком распаде незначительная часть энергии от распадающейся поперечной волны переходит в энергию ленгмюровской волны. Вместе с этой энергией переходит вся энтропия.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящем обзоре дано описание некоторых механизмов возбуждения коротковолнового излучения. Эти механизмы были, в основном, обнаружены и исследованы в НИЦ «ХФТИ». Основное содержание этих механизмов заключается в том, что они позволяют преобразовать энергию низкочастотного излучения в высокочастотную

энергию. Коэффициент частотного преобразования может превосходить  $10^6$ . Таким образом, открывается возможность, используя СВЧ-излучение или оптическое излучение, возбуждать рентгеновское излучение. Это излучение может обладать высокой степенью когерентности и быть достаточно интенсивным. Понятие высокой степени когерентности и величина интенсивности будут описаны в соответствующих главах данного обзора.

Содержание обзора состоит из двух глав. В первой главе описаны механизмы преобразования энергии низкочастотного излучения в энергию высокочастотного излучения. В этом случае, как исходное излучение, так и возбуждаемое излучение обладают высокой степенью когерентности. Во второй главе описаны механизмы, которые позволяют преобразовать энергию некогерентного излучения в излучение с высокой степенью когерентности.

**В первой главе** дано описание трех механизмов: механизм возбуждения высоких номеров гармоник нерелятивистскими осцилляторами; механизм вторичных резонансов и механизм квантовой юлы. В первом разделе этой главы показано, что спектр излучения нерелятивистских осцилляторов может быть аналогичен спектру излучения релятивистских осцилляторов. Это означает, что максимум излучения нерелятивистских осцилляторов приходится на высокий номер основной гармоники осциллятора. Показано, что для реализации такого механизма излучения необходимо наличие периодической неоднородности среды (диэлектрической или магнитной проницаемости среды), либо периодического потенциала. Причем степень этих периодических неоднородностей может быть исчезающе малой. В качестве примера показано, что наличие периодической неоднородности диэлектрической проницаемости величиной  $10^{-4}$  дает возможность возбуждать тысячную гармонику нерелятивистского осциллятора. В таких условиях интенсивность этой гармоники будет такой же, как излучение релятивистского осциллятора с энергией  $\gamma = 2 \cdot 10^3$  ( $\beta = 0.99999$ ) в отсутствии периодической неоднородности. Построена также квантовая теория излучения нерелятивистских осцилляторов в периодическом потенциале (в кристаллах). Показано, что частотные спектры излучения осциллятора от периодической неоднородности потенциала и от периодической неоднородности диэлектрической проницаемости совпадают, если период этих неоднородностей одинаков. При излучении нерелятивистского осциллятора в периодическом потенциале спектральная плотность излучения на высоких номерах гармоник превосходит спектральную плотность черенковского излучения. Отметим, что эти результаты потенциально позволяют создавать источники интенсивного когерентного рентгеновского излучения. Такие источники можно сравнить с ЛСЭ. Причем ондуляторами в таких ЛСЭ является периодическая структура кристаллов. Период этих ондуляторов минимальный из тех, который может быть реализован в природе. Излучателями при этом могут служить все электроны твердого тела, т. е. плотность таких эмиттеров является наибольшей из тех, которые можно

реально создать. Таким образом, для таких приборов не видно конкурентов. Построена также самосогласованная нелинейная теория возбуждения высоких номеров гармоник ансамблями релятивистских осцилляторов. Отметим, что сами осцилляторы могут создаваться воздействием на заряженные частицы внешним, например, лазерным излучением. В подразделе 1.6 кратко описаны экспериментальные исследования эффекта возбуждения высоких номеров гармоник.

Во втором разделе описаны механизмы преобразования энергии низкочастотного излучения в энергию высокочастотного излучения, которые можно назвать эффектами вторичных резонансов. Суть этих эффектов можно пояснить таким образом. Предположим, что у нас имеется два одинаковых линейных маятника. Пусть между ними имеется слабая связь. Тогда, как известно, если один из осцилляторов в начальный момент времени возбужден, а второй находится в покое, то по истечении некоторого времени энергия от возбужденного осциллятора перейдет в энергию невозбужденного осциллятора. Время такой перекачки оказывается обратно пропорциональным величине связи между маятниками. Если эта связь мала, то период перекачки энергии между осцилляторами будет большим. Соответственно, частота перекачки будет маленькой. Таким образом, такая система из двух связанных осцилляторов приобретает новую динамику, которая характеризуется низкой частотой. В этом разделе показано, как можно использовать наличие этой низкочастотной динамики двух высокочастотных осцилляторов для параметрического возбуждения этих высокочастотных осцилляторов. Отметим только что это не тривиально. Оказывается, что для систем с конечным числом высокочастотных осцилляторов для их возбуждения низкими частотами нужна невязимая связь.

В третьем разделе изложен механизм квантовой юлы. Этот механизм во многом похож на квантовый эффект Зенона и позволяет стабилизировать как квантовые возбужденные состояния, так и классические возбужденные состояния. Этот механизм проще всего понять, если представить себе детскую игрушку юлу. Если юла не вращается, то ее вертикальное положение неустойчиво – она падает. Причем время падения является вполне определенной величиной и можно его назвать временем жизни вертикального положения юлы. Если теперь юла будет вращаться и период этого вращения будет значительно меньшим времени жизни юлы, то вертикальное положение юлы будет устойчивым. Этот механизм похож не только на квантовый эффект Зенона, но и на маятник с перевернутым подвесом. Однако последний всегда рассматривался как нелинейный эффект. Эффект юлы может быть использован как для нелинейных систем, так и для стабилизации линейных систем. Использование эффекта квантовой юлы потенциально позволяет создавать плотный ансамбль высоковозбужденных атомных систем. Время жизни такого ансамбля с использованием эффекта квантовой юлы, может быть существенно увеличено.

Во второй главе данного обзора изложены механизмы, которые позволяют преобразовать энергию некогерентного излучения в энергию когерентного излучения. В первом разделе этой главы рассматриваются процессы распространения и рассеяния излучения на периодически неоднородном диэлектрике. В частности, рентгеновского излучения на кристаллах. Найдены условия, при которых степень когерентности рентгеновского излучения при взаимодействии с идеальными кристаллами существенно возрастает. Может существенно возрастать и плотность энергии излучения. В качестве примера отметим результат, изложенный в подразделе 4.5, который представляет собой обобщение теоремы Ван-Циттерга-Цернике на случай наличия за экраном с отверстием идеального кристалла. Показано, в частности, что если этим кристаллом будет кристалл бериллия толщиной 1 мм, то за этим кристаллом степень когерентности прошедшего рентгеновского излучения будет таким же, как на расстоянии в один километр в отсутствии этого кристалла.

Во втором разделе этой главы описаны некоторые особенности второго начала термодинамики. Показано, что существует область параметров, при которых второе начало термодинамики является плохо обусловленным законом. Это означает, что небольшие изменения в исходной постановке задачи радикально меняют результаты наблюдений. В частности, показано, что наличие даже незначительного канала обмена энергией между изучаемой системой и ее окружением может приводить к полной передаче энтропии в окружающую среду. При этом если мы будем наблюдать за изучаемой системой и игнорировать незначительный обмен энергией между изучаемой системой и окружающей средой, то мы можем наблюдать процессы, которые противоречат второму началу термодинамики. Такую особенность второго начала необходимо иметь в виду. Кроме того, эту особенность можно использовать. Например, для преобразования некогерентного излучения в когерентное излучение. В подразделе 5.4 приведен пример такого преобразования. В этом примере рассматривается распространение некогерентной поперечной электромагнитной волны в редкой плазме. Показано, что при распаде этой волны на другую поперечную волну и на плазменную волну вся энтропия может перейти к плазменной волне. Отметим, что при этом часть энергии, перешедшая к плазменной волне, может быть незначительной (соотношения Менли-Роу). Поэтому, если мы, например, пренебрежем этой потерей энергии, то будет наблюдаться процесс, который противоречит второму началу термодинамики. В действительности показано, что учет плазменной волны восстанавливает справедливость второго начала термодинамики.

## ГЛАВА 1. МЕХАНИЗМЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ КОРОТКОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В этой главе будут описаны механизмы возбуждения коротковолнового излучения, которые являются альтернативными, по отношению к широко известным механизмам. Будут рассмотрены три механизма: возбуждение высоких номеров гармоник нерелятивистскими осцилляторами; механизм, основанный на вторичных резонансах; механизм, основанный на квантовых эффектах Зенона и квантовой юлы.

### РАЗДЕЛ 1. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВЫСОКИХ НОМЕРОВ ГАРМОНИК НЕРЕЛЯТИВИСТСКИМИ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

В настоящее время для возбуждения интенсивного коротковолнового когерентного излучения (до рентгеновского) исследуются, в основном, два направления. Первое – представляет собой традиционное направление, связанное с использованием ансамбля возбужденных атомов. В этом случае в качестве излучателей являются электроны, связанные атомом. Во втором направлении используются релятивистские потоки заряженных частиц (электроны). При этом электроны движутся во внешних периодических электрических или магнитных полях. Они относительно свободны по сравнению с электронами, связанными атомами. Такая свобода эмиттеров обусловила название такого класса генераторов коротковолнового излучения – лазеры на свободных электронах (ЛСЭ). Каждое из этих двух направлений имеет свои важные особенности. Источники коротковолнового излучения, построенные на основе ЛСЭ, обладают тем преимуществом, что позволяют оперативно управлять частотой возбуждаемого излучения. Действительно, длина волны, которая возбуждается в ЛСЭ, определяется формулой  $\lambda \sim \lambda_0 / \gamma^2$ , где  $\lambda_0$  – длина волны, рассеиваемого электронным пучком излучения или период ондулятора;  $\gamma$  – безразмерная энергия частиц пучка. Из этой формулы видно, что изменением энергии потока заряженных частиц можно легко менять частоту излучения. Каждый механизм излучения имеет свои трудности при попытке использовать их при продвижении в ультрафиолетовую и рентгеновскую области.

Основной трудностью на традиционном пути является необходимость создать инверсную населенность за очень короткое время. Причем это время обратно пропорционально кубу частоты возбуждаемого излучения. Такая особенность времени жизни возбужденной квантовой системы обусловлена тем фактом, что плотность энергии нулевых колебаний растет

пропорционально кубу частоты нулевых колебаний. Именно нулевые колебания и ответственны за столь короткое время жизни инвертированных состояний. В Лоуренсовской национальной лаборатории в Ливерморе создан лазер в вакуумном ультрафиолетовом диапазоне (15,5 нм) [1]. Следует сказать, что в США это направление очень активно развивается. Важной особенностью таких лазеров является их компактность (некоторые из них помещаются на лабораторном столе), простота и относительно невысокая стоимость по сравнению с ЛСЭ. Кроме того, это направление позволяет продвинуться в создании очень коротких импульсов до  $10^{-18}$  с (аттосекундные импульсы). Однако значения энергии импульсов очень незначительны и измеряются мДж и даже наноджоулями.

Основная трудность при продвижении ЛСЭ в ультрафиолетовую и рентгеновскую области связана с необходимостью создания для этих целей потоков релятивистских частиц высокого качества и большой плотности. Действительно, минимальная длина волны ( $\lambda_{\min}$ ), которая может быть индуцировано возбуждена в ЛСЭ, может быть оценена формулой  $\lambda_{\min} \approx \sqrt{1/Dn}$  [2]. Здесь  $D$  – период ондулятора,  $n$  – плотность электронного пучка. Учитывая, что период ондулятора порядка сантиметра, тогда из этой оценки можно сделать заключение, что для возбуждения излучения с длиной волны 1 нм, необходимо иметь пучки с плотностью  $n \sim 10^{14}$  см<sup>-3</sup>. Создание релятивистских пучков с такой плотностью само по себе является сложной задачей. Следует сказать, что в настоящее время на пути создания ЛСЭ в ультрафиолетовом и в рентгеновском диапазонах достигнуты впечатляющие результаты. Действительно, как сообщалось в [1, 3, 4], в Гамбурге успешно осуществлен запуск первого ЛСЭ в вакуумном ультрафиолете. Этот прибор позволяет генерировать излучение в диапазоне от 6 до 30 нм. Мощность излучения составляет в максимуме порядка 1 ГВт. Такая мощность достигнута благодаря короткому импульсу излучения – 50 фс. Однако следует отметить, что этот лазер представляет собой громадное сооружение, которое состоит из линейного ускорителя на энергии порядка 500 МэВ и ондулятора длиной 260 метров. Преимуществом ЛСЭ является их высокая средняя мощность, возможность оперативного изменения частоты генерируемого излучения.

Следует сказать, что с получением когерентного коротковолнового (ультрафиолетового и рентгеновского) излучения связывают успехи огромного числа как научных направлений, так и прикладных. Большие научные усилия (и большие финансовые затраты) направлены для создания источника такого излучения. В апреле 2009 года в Калифорнии был запущен первый и единственный в мире лазер на свободных электронах (ЛСЭ), излучающий когерентное излучение на длине волны  $1,5 \cdot 10^{-8}$  см (см., например, [3]). Этот ЛСЭ был построен на основе уникального ускорителя SLAC. Нужно сказать, что несколькими годами ранее в Гамбурге был запущен аналогичный ЛСЭ, который генерировал

излучение с длиной волны порядка  $65 \cdot 10^{-8}$  см. Имеются большие планы для постройки аналогичных ЛСЭ в Японии (Spring-8 Compact SASE Source). Продолжаются работы в этом направлении и в Европе. К 2014 году предполагается запустить европейский XFEL. Все эти установки являются уникальными. Достаточно сказать, что основным элементом этих установок являются уникальные ускорители. Например, ускоритель в Калифорнии, на основе которого построен ЛСЭ, формирует электронные пучки с энергией 14 ГэВ. Длина вигглера такого ЛСЭ составляет 130 метров. Причем точность установки и изготовления всех элементов этого вигглера составляет 5 микрон. Необходимость таких уникальных устройств для возбуждения когерентного ультрафиолетового и рентгеновского излучения обусловлена тем фактом, что механизм излучения является принципиально релятивистским. Для его реализации необходимы плотные потоки релятивистских частиц. Чем выше энергия этих частиц, тем более коротковолновое излучение можно получить.

В принципе, использование релятивистских потоков заряженных частиц для возбуждения ультрафиолетового и рентгеновского излучения не является необходимым. Действительно, энергия квантов даже рентгеновского диапазона с 0.1 нм составляет всего ~10 кэВ. Электроны с такими энергиями являются нерелятивистскими. Потоки таких электронов широко используются для возбуждения рентгеновского излучения в промышленности и в медицине. Однако в используемых схемах преобразования энергии частиц в энергию излучения остается нерешенным принципиальный вопрос: как организовать коллективное индуцированное излучение? Существующие источники рентгеновского излучения – некогерентные. Ниже мы рассмотрим несколько возможностей создания условий, при которых нерелятивистские частицы могут индуцировано возбуждать коротковолновое (до рентгеновского) излучение [5–7].

\* \* \*

Сначала (подраздел 1.1) коротко опишем механизмы умножения частоты при отражении электромагнитных волн от одной и многих движущихся границ раздела. При этом будет показано, что наличие среды или электродинамических структур, которые уменьшают фазовую скорость волн, взаимодействующих с границей, позволяет использовать для изменения частоты волны даже нерелятивистские скорости движения границ. В подразделах 1.2 и 1.3 рассмотрены механизмы излучения заряженных частиц при наличии слабых периодических неоднородностей. В качестве неоднородностей рассмотрена периодическая неоднородность диэлектрической проницаемости (подраздел 1.2), а также наличие периодического потенциала (подраздел 1.3). Будет показано, что спектр излучения нерелятивистского заряженного осциллятора при учете среды может быть аналогичен спектру излучения релятивистского осциллятора в вакууме. В частности, это означает, что основные потери энергии нерелятивистского осциллятора (как и релятивистского) приходится на высокие

номера гармоник осциллятора. Для реализации такого спектра излучения нерелятивистского осциллятора достаточно учесть наличие исчезающе малой периодической компоненты диэлектрической проницаемости. Такие условия реализуются, например, для рентгеновского излучения в кристаллах. Возбудить рентгеновское излучение нерелятивистскими потоками заряженных частиц можно при использовании периодического потенциала, период которого соизмерим с периодом кристаллической решетки твердого тела. При этом можно говорить об ЛСЭ, в котором используется в качестве ондулятора периодический потенциал. Однако использовать периодический потенциал кристаллических решеток твердого тела в обычной схеме ЛСЭ затруднительно. Действительно, в этих схемах используются прямолинейные потоки заряженных частиц. В твердом теле они будут испытывать интенсивное рассеяние, которое не позволит организовать коллективный процесс излучения. По этой причине до настоящего времени потенциалы кристаллических решеток не использовались в качестве ондуляторов. Исключением являются попытки использовать излучение, возникающее при каналировании. В работе [8] было показано, что при каналировании развивается динамический хаос и надеяться на возбуждение излучения с высокими спектральными характеристиками трудно. Однако, если вместо прямолинейных потоков использовать ансамбль осцилляторов, максимальные отклонения которых в твердом теле не будут превышать длины свободных пробегов электронов в твердом теле, то можно рассчитывать, что такой ансамбль можно использовать для коллективного индуцированного процесса излучения. Квантовая теория излучения частиц в периодическом потенциале описана в подразделе 1.4. Когда плотность эмиттеров достаточно высока, можно рассчитывать на развитие коллективных неустойчивостей, приводящих к возбуждению интенсивного когерентного излучения. Теория коллективного возбуждения коротковолнового излучения ансамбля осцилляторов в периодических средах изложена в разделе 1.5. Условия реальных экспериментов существенно отличаются от тех, которые исследованы теоретически. Однако во всех случаях должны выполняться законы сохранения энергии и импульса при излучении. Анализ этих законов содержится в подразделе 1.5. Результаты некоторых экспериментальных исследований содержатся в подразделе 1.6. Далее обсуждаются полученные результаты и формулируются их потенциальные возможности – подраздел 1.7.

### **1.1. Умножение частоты при отражении излучения от движущихся границ**

Исторически первым, обратившим внимание на возможность использования релятивистских эффектов для увеличения частоты излучения, был А. Эйнштейн. Он предложил использовать для этой цели отражение излучения от зеркала, которое движется с релятивистской

скоростью. В качестве зеркала было предложено использовать резкий фронт движущейся плазмы или релятивистских пучков (см., например, [9,10] и цитированную там литературу). Во всех этих случаях можно добиться значительного увеличения частоты:  $\omega \sim 4\gamma^2 \cdot \omega_0$ , где

$\omega_0$  – частота падающего излучения;  $\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$  – релятивистский фактор;  $v$  – скорость границы плазмы или пучка;  $c$  – скорость света. Возможность такого значительного увеличения частоты, отраженного от границы излучения, сразу следует из условия релятивистской инвариантности фазы излучения. Граница раздела «видит» частоту падающего на него излучения ( $\omega_1$ ), которую мы определим из инвариантности фазы:  $\omega_0 t - k_0 z = \omega_1 t - k_1 z$ . Отсюда находим следующее выражение для частоты излучения, которую воспринимает граница:  $\omega_1 = \omega_0 \cdot \gamma \cdot (1 + \beta)$ ,  $\beta \equiv v / c$ . В системе отсчета, которая движется вместе с границей, граница отражает излучение именно с такой частотой ( $\omega_1$ ).

В лабораторной системе отсчета значение частоты этого отраженного излучения также можно определить из условия инвариантности фазы. В результате мы получаем следующее значение максимальной частоты, которую отражает релятивистски движущаяся граница:  $\omega = \omega_0 \cdot \gamma^2 \cdot (1 + \beta)^2 \sim 4\gamma^2 \cdot \omega_0$ . Однако получить плотные потоки заряженных частиц с резкими градиентами плотности трудно, поэтому в таком упрощенном варианте рассмотренная схема имеет только общефизический интерес. В. Л. Гинзбург, по-видимому, первым обратил внимание на тот факт, что уравнения Максвелла при наличии среды будут инвариантны относительно преобразования Лоренца, в котором вместо скорости света в вакууме следует положить фазовую скорость излучения ( $c \rightarrow v_f$ ). Такие преобразования, конечно, будут справедливы

только в том случае, когда параметры среды, а вместе с ними и фазовая скорость волны, не будут зависеть от системы отсчета. В этом случае, как и в вакууме, фазы излучения будут инвариантными относительно инерциальных систем отсчета. Тогда, при отражении излучения от движущейся границы, мы получим следующее выражение для максимального значения частоты отраженного от границы излучения:

$$\omega = \omega_0 \cdot \gamma_f^2 \cdot (1 + \beta_f)^2 \sim 4\gamma_f^2 \cdot \omega_0. \quad \text{Здесь } \beta_f = v / v_f, \gamma_f = 1 / \sqrt{1 - \beta_f^2}. \quad \text{Эти}$$

формулы аналогичны приведенным выше с одним существенным отличием от них – в них вместо скорости света в вакууме стоит фазовая скорость, которая может быть значительно меньше скорости света в вакууме. Эта особенность отражения волн от движущихся границ была использована в теоретических и экспериментальных работах ННЦ «ХФТИ» (см. [9–12] и цитированную там литературу). В этих работах исследовался эффект умножения частоты при отражении электро-

магнитных волн от движущейся границы плазмы, в то время как волна распространялась вдоль замедляющей электродинамической структуры. Кроме того, исследовался эффект многократного отражения волн от движущейся границы плазмы. При этом плазма играла роль поршня, сжимающего электромагнитное поле в резонаторе. Несмотря на небольшое изменение частоты при однократном отражении, благодаря большому числу отражений волн от движущейся границы, теория предсказывала, а в эксперименте наблюдалось значительное увеличение частоты падающей волны. Кроме того, исследовалось также отражение от движущихся доменных границ феррита. Фазовая скорость волн в ферритах может быть значительно меньше скорости света, поэтому даже нерелятивистское движение его доменных границ может приводить к значительному изменению частоты отраженных от движущихся доменных стенок волн. Отметим, что в [9] содержится обзор результатов некоторых работ этого направления.

При достаточно высоких частотах трудно создать движущуюся границу, которая бы отражала волну с большим коэффициентом отражения. В этом случае можно рассматривать отражение волн от периодической последовательности движущихся границ. Практически речь идет об отражении волн от модулированных электронных пучков. В этом случае могут быть реализованы условия брэгговского отражения. Если продольные размеры пучка будут большими чем длина экстинкции, то такой модулированный пучок будет практически полностью отражать падающую на него волну. Процесс модуляции плотности пучка может возникать самосогласованно в результате развития пучковой неустойчивости. Однако для реализации такой неустойчивости необходимы достаточно плотные электронные пучки. В последнем случае мы имеем дело с ЛСЭ.

Описанные выше схемы умножения частоты в настоящее время, на первый взгляд, представляют только исторический интерес. Однако, как мы увидим ниже, основная физическая причина, определяющая возможность значительного увеличения частоты при отражении от нерелятивистских границ, — наличие медленных волн, — сохраняется и в других схемах умножения частоты. Мы уверены, что эти схемы могут быть использованы для создания нерелятивистских ЛСЭ в ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах.

## **1.2. Качественная теория излучения высоких номеров гармоник нерелятивистскими осцилляторами**

Полученные в следующих подразделах формулы строгой теории, определяющие мощность излучения осцилляторов в периодически-

неоднородном диэлектрике, в общем случае, очень громоздки. Их трудно анализировать. Однако главный результат, который заключается в том, что спектр излучения нерелятивистских частиц, аналогичен спектру излучения релятивистских частиц, может быть получен достаточно простым и прозрачным способом. Действительно, как показывает строгий анализ, такая особенность спектра нерелятивистских частиц в периодически-неоднородном диэлектрике обусловлена тем фактом, что структура поля в таком диэлектрике содержит медленные «виртуальные волны» – моды пространственного спектра [13]. Именно синхронизм этих медленных «виртуальных» волн с нерелятивистскими частицами приводит к эффективному излучению высоких номеров гармоник. Мы воспользуемся этим фактом. Кроме того, мы воспользуемся понятием длины формирования [14–16].

Основное предположение будет заключаться в том, что эффективное взаимодействие заряженных частиц происходит только с одной из медленных «виртуальных» волн. Взаимодействием с другими волнами мы будем пренебрегать.

Итак, пусть у нас имеется периодически-неоднородная среда, диэлектрическую проницаемость которой можно представить в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + q \cos \vec{k} \vec{r}. \quad (1.1)$$

Причем степень неоднородности мы будем считать малой ( $q \ll 1$ ). Тогда структуру электрического поля электромагнитной волны в такой среде на частоте  $\omega$  можно представить в виде

$$\vec{E} = \sum_n \vec{E}_n \exp \left[ i \omega t - i \left( \vec{k} + n \cdot \vec{\kappa} \right) \vec{r} \right]. \quad (1.2)$$

Каждое слагаемое спектра в формуле (1.2) имеет вид плоской электромагнитной волны. Амплитуды слагаемых в выражении (1.2) быстро спадают с номером  $E_n \sim q^n$ . В соответствии с терминологией работы [13], эти слагаемые, – моды пространственного спектра, – можно назвать «виртуальными» волнами. Причем волновые числа этих волн равны  $(\vec{k} + n \cdot \vec{\kappa})$ , а частота равна  $\omega$ . Если, как в обычных волнах, представить волновые числа как отношение частоты к фазовой скорости волны, то видно, что выражение (1.2) содержит как быстрые «виртуальные», так и медленные «виртуальные волны». Степень замедления существенно зависит от величины вектора обратной решетки ( $\vec{\kappa}$ ) и от номера члена в сумме (1.2). Учитывая, что степень неоднородности мала ( $q \ll 1$ ), мы в сумме (1.2) ограничимся только одной медленной «виртуальной» волной. Более того, мы будем считать, что только с этой волной происходит взаимодействие заряженных частиц.

Пусть в такой среде движется заряженная частица. Траекторию ее движения мы будем описывать формулой:

$$\vec{r} = \vec{V}_0 t + \vec{r}_0 \sin \Omega t. \quad (1.3)$$

Из формулы (1.3) видно, что мы рассматриваем, в общем случае, движение осциллятора. Если это движение нерелятивистское, то такой осциллятор будет эффективно взаимодействовать только с медленной виртуальной волной.

Учитывая сказанное выше, мы, по аналогии с работой [14], введем в рассмотрение длину формирования:

$$\vec{l} = q \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{V}(t) \cdot \exp \left[ i \omega t - i (\vec{k} + \vec{\kappa}) \vec{r}(t) \right] \cdot dt. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) отличается от той, которая представлена в работе [14], тем, что в ней фигурирует не та волна, которая излучается, а «виртуальная» волна со всеми своими характеристиками. Действительно, эффективное формирование излучения нерелятивистских частиц будет происходить только при взаимодействии с медленной «виртуальной» волной. Подставим в формулу (1.4) выражение для координаты частицы (1.3) и для ее скорости. В результате получим следующее выражение для длины формирования:

$$\vec{l} = q \cdot (\Omega \cdot \vec{r}_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\vec{\kappa} \cdot \vec{r}_0) \frac{n}{(\vec{\kappa} \cdot \vec{r}_0)} \exp \left[ i (\omega - n \cdot \Omega) t \right] \cdot dt. \quad (1.5)$$

Известно, что мощность излучения на частоте  $\omega$  связана с длиной формирования следующим выражением [14]:

$$dW_{\omega, \vec{k}} = \frac{e^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot c} \left[ \vec{k} \cdot \vec{l} \right]^2 \cdot d\omega \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi. \quad (1.6)$$

Обратим внимание, что, как следует из выражения (1.5), длина формирования при  $\omega = n \cdot \Omega$  стремится к бесконечности. Эта ситуация аналогична той, которая возникает при черенковском излучении. В этом случае полные потери энергии на излучение оказываются бесконечно большими. Однако потери энергии на единицу пути или за конечный интервал времени ограничены. Поступая при этом так же, как это сделано в [14], для черенковского излучения, выражение для квадрата длины формирования можно представить в виде

$$|\vec{l}|^2 = \frac{2\pi}{\omega} \left(\frac{q}{2}\right)^2 \cdot (\Omega \cdot \vec{r}_0)^2 \cdot J_n^2(\vec{k} \cdot \vec{r}_0) \cdot \left(\frac{2 \cdot n}{\vec{k} \cdot \vec{r}_0}\right)^2 \cdot T \cdot \delta\left(1 - \frac{n \cdot \Omega}{\omega}\right), \quad (1.7)$$

где  $T$  – время взаимодействия частиц с полем.

С учетом (1.7) окончательное выражение для мощности излучения на частоте  $\omega$  ( $\omega = n \cdot \Omega$ ;  $n \approx \vec{k} \cdot \vec{r}_0$ ) можно представить в виде:

$$\partial W / \partial t = \left(\frac{e^2 \cdot \beta^2}{c}\right) \left(\frac{q}{2}\right)^2 \cdot \omega^2 \cdot J_n^2(n) \cdot \int_0^\pi \sin^3 \theta \cdot d\theta. \quad (1.8)$$

Из выражения (1.8) видно, что диаграмма направленности излучения соответствует дипольному излучению. Кроме того, формула (1.8) с точностью до численного множителя порядка единицы совпадает с соответствующим выражением, полученным по строгой теории (см. следующий подраздел, сравни, например, с формулой (1.20)).

### 1.3. Строгая теория излучения осциллятора при наличии слабой периодической неоднородности диэлектрической проницаемости

В этом подразделе рассмотрена строгая теория излучения осциллятора, который движется с произвольной скоростью  $\vec{r} = \vec{V}_0 t + \vec{r}_0 \sin \Omega t$  в среде с периодической неоднородностью  $\varepsilon = \varepsilon_0 + q \cos \vec{k} \cdot \vec{r}$ . Будет показано, что спектр излучения даже нерелятивистского осциллятора в такой среде может быть аналогичен спектру излучения релятивистского осциллятора в вакууме. Это означает, что максимум излучения нерелятивистского осциллятора приходится на высокий номер гармоники частоты осциллятора. Причем мощность излучения на высокой гармонике для нерелятивистского осциллятора сравнима с мощностью излучения на той же частоте релятивистского осциллятора даже в том случае, когда степень неоднородности может быть исчезающе малой ( $q \ll 1$ ,  $q \sim 10^{-4} - 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ ).

Плотность тока такого осциллятора равняется

$$\vec{j} = e \delta(\vec{r} - \vec{v}_0 t - \vec{r}_0 \sin \Omega t) [\vec{v}_0 + \Omega \cdot \vec{r}_0 \cos \Omega t]. \quad (1.9)$$

Скорости  $\vec{v}_0$  и  $\Omega \cdot \vec{r}_0$  ничем не ограничены. Будем считать, что ни наличие среды, ни процесс излучения не меняют траектории частицы.

Поле, которое излучается, как всегда, описывается уравнениями Максвелла:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4 \cdot \pi}{c} \vec{j}, \quad (1.10)$$

где  $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ .

Для решения уравнений (1.10) с током (1.9) могут быть использованы различные подходы. Каждый из них оттеняет различные стороны процесса излучения. Так как у нас задача однородная во времени и в пространстве, мы используем самый простой и самый известный способ – разложение всех компонент поля и тока в полный интеграл Фурье. Кроме того, при таком подходе мы получим результаты в таком виде, который легко сравнивать с известными результатами. Ниже мы будем рассматривать простейшую ситуацию, когда  $\varepsilon_0$  и  $q$  зависят только от частоты. Из уравнений Максвелла (1.10) для компонент Фурье находим:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - k^2\right) \vec{E}_{\vec{k}, \omega} + \vec{k} (\vec{k} \vec{E}_{\vec{k}, \omega}) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} [\vec{j}_{\vec{k}, \omega}^{(0)} + \vec{j}_{\vec{k}, \omega}^{(1)}], \quad (1.11)$$

$$\text{где } \vec{j}_{\vec{k}, \omega}^{(0)} = \frac{e}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{L}_{\vec{k}}^{(n)} J_n(\vec{k} \cdot \vec{r}) \delta(\omega - \vec{k} \vec{v}_0 - n\Omega),$$

$$\vec{j}_{\vec{k}, \omega}^{(1)} \equiv -i \left(\frac{\omega q}{8\pi}\right) [\vec{E}_{\vec{k}-\vec{k}, \omega} + \vec{E}_{\vec{k}+\vec{k}, \omega}],$$

$$\vec{L}_{\vec{k}}^{(n)} \equiv \left[ \vec{v}_0 + \frac{n\Omega \cdot \vec{r}_0}{k \vec{r}_0} \right], \quad J_n(\vec{k} \cdot \vec{r}_0) - \text{функция Бесселя } n \text{ -го порядка.}$$

Прежде всего, нас интересует случай, когда  $q \ll \varepsilon_0$ . Поэтому можно считать последний член в правой части формулы (1.11) в качестве возмущения. В нулевом приближении по параметру  $q$  мы можем записать поле излучения как сумму продольного (по отношению к вектору  $\vec{k}$ ) и поперечного поля:

$$\vec{E}_{\vec{k}, \omega} = \vec{E}_{\vec{r}, \omega}^{(0)} = \vec{E}^{(0)l} + \vec{E}^{(0)tr}, \quad (1.12)$$

$$\text{где } \vec{E}_{\vec{k}, \omega}^{(0)l} = -\frac{\vec{k}(\vec{k} \vec{I}) c^2}{k^2 \cdot \omega^2 \varepsilon_0}; \quad \vec{I} \equiv +i \frac{4\pi \omega}{c^2} \vec{j}_{\vec{k}, \omega}^{(0)}, \quad \vec{E}_{\vec{k}, \omega}^{(0)tr} = \frac{1}{D_0} \left[ \vec{I} - \frac{\vec{k}(\vec{k} \vec{I})}{k^2} \right],$$

$$D_0 = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0\right).$$

Поперечное поле в первом приближении по параметру  $q$  и выражение для тока в этом приближении имеют вид:

$$\vec{E}_{\vec{k},\omega}^{(1)} = \frac{q\omega^2}{2c^2 D_0} \left\{ \vec{E}_{\vec{k}-\vec{k},\omega}^{(0)} - \frac{\vec{k}}{k^2} (\vec{k} \vec{E}_{\vec{k}-\vec{k},\omega}^{(0)}) + \vec{E}_{\vec{k}+\vec{k},\omega}^{(0)} - \frac{\vec{k}}{k^2} (\vec{k} \vec{E}_{\vec{k}+\vec{k},\omega}^{(0)}) \right\}, \quad (1.13)$$

где  $\vec{M}_{\vec{k},\omega}^n = \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} \vec{L}_{\vec{k},\omega}^n - \vec{k} (\vec{k} \vec{L}_{\vec{k},\omega}^n)$ .

Для расчета мощности излучения удобно найти  $\vec{E}_{\vec{k}}^{(1)}(t), \vec{J}_{\vec{k}}^{(1)}(t)$ . Тогда для мощности излучения можно написать формулу

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -(2\pi)^3 \int \vec{E}_{\vec{k}}^{(1)}(t) \vec{J}_{\vec{k}}^{(1)}(t) d^3 k. \quad (1.14)$$

Будем считать, что осциллятор движется в плазмоподобной среде. Для такой среды, как известно, (см., например, [13,28])  $\varepsilon'_0 \equiv \text{Re } \varepsilon_0(\omega, \vec{k}) = \text{Re } \varepsilon_0(-\omega, \vec{k})$ ;  $\text{Im } \varepsilon_0(\omega, \vec{k}) = -\text{Im } \varepsilon_0(-\omega, \vec{k})$ . Воспользуемся этим фактом, а также известным соотношением для  $\delta$ -функции

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{k^2 - \varepsilon'_0 \frac{\omega^2}{c^2} - i\nu \frac{\omega}{|\omega|}} - \frac{1}{k^2 - \varepsilon'_0 \frac{\omega^2}{c^2} + i\nu \frac{\omega}{|\omega|}} \right] = 2\pi i \frac{\omega}{|\omega|} \delta \left( k^2 - \varepsilon'_0 \frac{\omega^2}{c^2} \right). \quad (1.15)$$

После громоздких, но простых преобразований, можно получить следующее выражение для мощности излучения осциллятора:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & \left( \frac{eq}{c\varepsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3 k \left[ \left( \omega_1 \left( \delta(k^2 - \frac{\omega_1^2}{c^2} \varepsilon_0) \frac{J_n^2(\vec{k}_{-1} \vec{r}_0) \vec{N}_{k_{-1},\omega}^n \vec{M}_{k_{-1}}^n}{(k_{-1}^2 - \frac{\omega_1^2}{c^2} \varepsilon_0)} + \right. \right. \right. \\ & + \left. \left( \omega_2 \left( \delta(k^2 - \frac{\omega_2^2}{c^2} \varepsilon_0) \frac{J_n^2(\vec{k}_{+1} \vec{r}_0) \vec{N}_{k_{+1},\omega}^n \vec{M}_{k_{+1}}^n}{(k_{+1}^2 - \frac{\omega_2^2}{c^2} \varepsilon_0)} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \int d^3 k \left( \vec{k}_{-1} \vec{v}_0 \left( \delta(k^2 - \frac{(\vec{k}_{-1} \vec{v}_0)^2}{c^2} \varepsilon_0) \frac{J_0^2(\vec{k}_{-1} \vec{r}_0) \vec{N}_{k_{-1},\omega}^0 \vec{M}_{k_{-1},\omega}^0}{(k_{-1}^2 - \frac{\omega_1^2}{c^2} \varepsilon_0)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$\vec{M}_{\vec{k},\omega}^n = \left( \omega^2 \varepsilon_0 / c^2 \right) \cdot \vec{L}_{\vec{k},\omega}^n - \vec{k} \left( \vec{k} \vec{L}_{\vec{k},\omega}^n \right); \vec{N}_{\vec{k}_{\pm 1},\omega}^n = \vec{M}_{\vec{k}_{\pm 1},\omega}^n - \frac{\vec{k}}{k^2} \left( \vec{k} \vec{M}_{\vec{k}_{\pm 1},\omega}^n \right); \vec{k}_{\pm 1} = \vec{k} \pm \vec{\kappa}.$$

Эта формула содержит, в частности, известные результаты. В качестве примера рассмотрим важный случай излучения ультрарелятивистской частицы. Из законов сохранения энергии и импульса в этом случае следует, что  $k \approx \frac{\omega}{c} \approx 2\kappa\gamma^2 \gg \kappa$ , т. е. излучаются высокие частоты.

Для определенности будем считать, что скорость частицы направлена параллельно вектору обратной решетки  $\vec{v} \parallel \vec{\kappa}$ , который направлен вдоль оси z, а промодулированной является плотность электронов среды  $N = N_0 + \Delta N \cdot \cos(\vec{\kappa} \vec{r})$ . Тогда учитывая, что  $\omega_p^2 / \omega^2 \ll 1$ , а угол между волновым вектором  $\vec{k}$  излучаемой волны и вектором скорости  $\vec{v}$  мал, получим следующее выражение для мощности излучения релятивистского заряда:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{(e\Delta N \omega_p^2)^2}{(cN\kappa)^2 c 32} \int \theta^2 d\theta^2 \int_0^\infty d\omega \delta\left(\frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) - \kappa v\right). \quad (1.17)$$

Эта формула полностью совпадает с выражением для мощности излучения, которое было получено в нескольких работах (см. [13] и цитируемую там литературу).

Перейдем к рассмотрению излучения нерелятивистского осциллятора. Если частица нерелятивистская, то из законов сохранения следует, что  $\omega \approx \vec{\kappa} \vec{v}$ ,  $\kappa \gg k$ ,  $\kappa \approx k/\beta$ , т. е. излучение является длинноволновым. Для простоты будем считать, что осциллятор покоится и что вектор обратной решетки  $\vec{\kappa}$  и осцилляторная скорость параллельны оси z. Тогда, если обозначить  $(\vec{k} \pm \vec{\kappa}) \vec{r}_0 = \pm m (m \gg 1)$  и пренебречь слагаемым, которое пропорционально  $\frac{r_0 \Omega}{c} \frac{n}{m}$ , мы можем написать простую формулу, которая описывает мощность потерянную осциллятором на излучение:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left( \frac{e^2 \Omega^2 \cdot \beta_\perp^2}{3c} \right) \cdot \frac{3q^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{m^2} \cdot J_n^2(m) \int_0^\pi (\sin \theta)^3 d\theta, \quad (1.18)$$

где  $\beta_\perp = \frac{r_0 \Omega}{c}$  – отношение осцилляторной скорости к скорости света.

Формулу (1.18) легко сравнить с другими известными выражениями для потерянной мощности заряженных частиц на излучение. Так, первый множитель в (1.18), который находится в круглых скобках, описывает потерянную мощность осциллятора в вакууме в дипольном приближении. Общий вид формулы (1.18) похож на выражение для мощности излучения осциллятора в вакууме (см., например, [18]):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{e^2 \Omega^2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_0^{\pi} J_n^2(n\beta_{\perp} \cos \theta) \sin \theta \tan^2 \theta d\theta. \quad (1.19)$$

Наибольшее и принципиальное различие заключается в зависимости мощности излучения от номера гармоники. Действительно, известно, что функция Бесселя быстро падает с увеличением номера  $n$  и имеет максимальное значение только тогда, когда аргумент функции равняется (немного больше) номеру  $n$ . При этом  $J_n(n) \approx 1/(n)^{1/3}$ . В вакууме мощность излучения пропорциональна  $(J_n^2(n\beta \cdot \cos \theta))$  и условие, когда аргумент равен номеру  $n$  невозможно, т. к.  $\beta \cos \theta$  всегда меньше 1. В периодически-неоднородной среде, как видно из формулы (1.18), такое условие достигается без труда. Чтобы сравнить возможности и особенности излучения осциллятора в вакууме и в среде, характеристики этого излучения изображены на рис. 1.1.–1.6. На рис. 1.1 показана характерная зависимость мощности излучения релятивистского осциллятора от номера гармоники в вакууме.

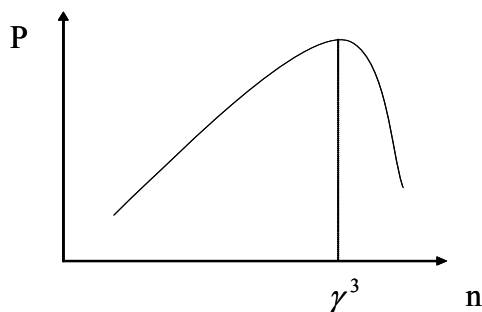


Рис. 1.1. Спектр излучения релятивистского осциллятора в вакууме

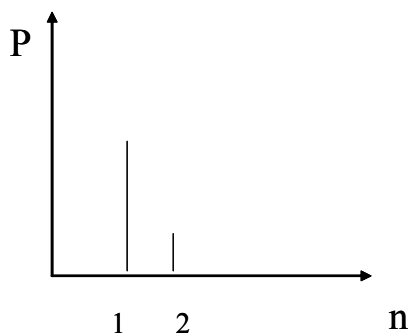


Рис. 1.2. Спектр излучения нерелятивистского осциллятора в вакууме

На рис. 1.2 показана та же зависимость для нерелятивистского осциллятора. Видно, что излучение сосредоточено практически в одной основной моде (дипольное излучение). На рис. 1.3 показана та же зависимость излучения нерелятивистского осциллятора при наличии слабой периодической неоднородности диэлектрической проницаемости

( $q = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ ). Видно, что максимум излучения приходится на высокие номера гармоник, т.е. характер спектра нерелятивистского осциллятора в этом случае аналогичен спектру излучения релятивистского осциллятора. На рис. 1.4 и рис. 1.5 представлены диаграмма излучения релятивистского осциллятора и нерелятивистского осциллятора.

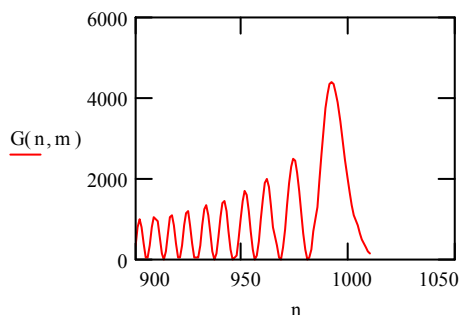


Рис. 1.3. Зависимость эффективности излучения осциллятора в среде от номера гармоники  $n$  ( $m=1000$ )

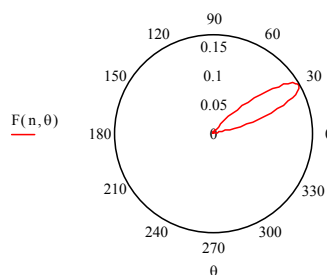


Рис. 1.4. Диаграмма направленности излучения релятивистского осциллятора в вакууме. 10-я гармоника

Легко увидеть, что основной лепесток диаграммы направленности релятивистского осциллятора с ростом энергии осциллятора все ближе приближается к направлению скорости осциллятора. Диаграмма направленности нерелятивистского осциллятора соответствует дипольному излучению. Причем это оказывается справедливым для всех гармоник. На рис. 1.6 показано отношение мощности излучения нерелятивистского осциллятора при излучении в среде с периодической неоднородностью и в вакууме.

На этом рисунке изображена функция, которая равняется отношению мощности излучения осциллятора в среде ( $q = 10^{-5}$ ) к мощности излучения в вакууме при  $\beta = 0.1$  на сотой гармонике ( $n = m = 100$ ). Из этого рисунка видно, что даже незначительная добавка периодически-неоднородной среды ( $q = 10^{-5}$ ) может коренным образом изменить характер излучения [7].

Из рис. 1.3 также следует, что мощность излучения растет с ростом номера  $n$  и принимает максимальное значение для  $n = m$ . Обратим внимание на тот важный факт, что для достижения мощности излучения осцилляторов в вакууме на гармонике  $n = 10^3$  этот осциллятор должен иметь энергию  $\gamma = 2 \cdot 10^3$  ( $\beta = 0.99999$ ) в то время, как при наличии слабой периодической неоднородности среды ( $q = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ ) такое излучение может дать осциллятор, у которого энергия всего  $\gamma = 1.0005$  ( $\beta = 0.1$ ).

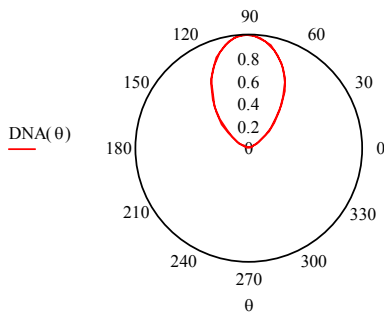


Рис. 1.5. Диаграмма направленности излучения нерелятивистского осциллятора в вакууме. Для всех гармоник. Заряженная частица осциллирует в направлении, параллельном горизонтальной оси

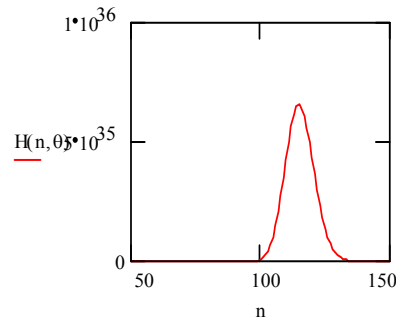


Рис. 1.6. Зависимость отношения эффективности излучения осциллятора в среде к эффективности излучения в вакууме от номера  $n$

Высокая эффективность «длинноволнового» излучения ( $\lambda = d/\beta$ ) характерна не только для нерелятивистского осциллятора, но и для нерелятивистской заряженной частицы, которая движется с постоянной скоростью без осцилляций ( $r_0 = 0$ ) через периодически-неоднородную среду. Для такой частицы из законов сохранения следует, что  $\omega \approx \vec{k}\vec{v}$ . Как и в случае излучения осциллятора, будем считать, что  $\vec{k} \parallel |\vec{v}| \parallel z$ . Из общей формулы (1.16) в этом случае можно получить следующее простое выражение для мощности излучения частицы:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left( \frac{e^2 \omega^2 \cdot \beta_{\perp}^2}{3c} \right) \cdot \frac{3q^2}{4\varepsilon_0^{3/2}} \int_0^{\pi} (\sin \theta)^3 d\theta. \quad (1.20)$$

Из этой формулы видно, что диаграмма направленности излучения частицы совпадает с диаграммой направленности излучения осциллятора (1.18) и (1.19). Более того, сравнивая формулу (1.20) с формулой (1.19), описывающей излучение осциллятора в вакууме, легко увидеть, что частица равномерно движущаяся со скоростью  $v$  в периодически-неоднородной среде излучает как неподвижный осциллятор в вакууме в дипольном приближении, который колеблется с частотой  $\omega$ , а его осцилляторная скорость равна  $v_{osc} = v \cdot q$ .

#### 1.4. Квантовая теория излучения нерелятивистских осцилляторов в периодических потенциалах [19]

В предыдущих разделах было показано, что спектр излучения нерелятивистских заряженных частиц может быть таким же, как у релятивистских. Необходимым условием такого качественного изменения спектра нерелятивистских частиц является наличие периодической неоднородности среды или потенциала. Важно отметить, что степень неоднородности при этом может быть исчезающе малой. Был выяснен физический механизм излучения высоких номеров гармоник. Оказалось, что такое излучение обусловлено связью заряженных частиц с медленными «виртуальными» волнами – модами. Дело в том, что структура электромагнитных волн, которые распространяются в среде, имеющей слабую периодическую неоднородность, содержит в своем составе пространственные гармоники («виртуальные» волны). Причем фазовые скорости таких «виртуальных» волн могут быть как значительно большими, так и значительно меньшими, чем фазовая скорость волн, распространяющихся в однородной среде. Все пространственные гармоники («виртуальные» волны) связаны друг с другом. Поэтому возбуждение любой из этих волн автоматически приводит к возбуждению остальных. При этом даже нерелятивистские заряженные частицы и осцилляторы могут иметь скорость, которая близка к скорости одной из медленных «виртуальных» волн. Именно эта связь и приводит к эффективному излучению высоких номеров гармоник осцилляторами. Причем спектр нерелятивистских осцилляторов напоминает спектр излучения релятивистских осцилляторов в вакууме – максимум этого спектра приходится на высокие номера гармоник.

Все эти теоретические и экспериментальные результаты указывают на то, что для возбуждения коротковолнового (ультрафиолетового и рентгеновского) излучения могут быть использованы нерелятивистские частицы. Необходимым условием при этом является достаточная для излучения высокоэнергетичных квантов энергия частиц. Она не высока. Так, для излучения квантов с длиной волны  $10^{-8} \text{ см}$  необходимая энергия частиц составляет всего 10 кэВ. При этом могут быть использованы кристаллы. Причем кристаллическая решетка кристаллов может быть использована в качестве ондулятора (вигглера), а свободные электроны кристалла при воздействии на них, например, лазерного излучения, могут быть эффективными эмиттерами ультрафиолетового и рентгеновского излучения. Следует заметить, что период такого ондулятора минимальный из тех, который можно реально осуществить, а плотность потенциальных эмиттеров является максимальной из реально возможных.

**Постановка задачи. Основные уравнения.** Ниже рассмотрим квантовую теорию излучения нерелятивистских частиц и осцилляторов в периодически-неоднородном потенциале. Исходным уравнением теории будет следующее уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - e \cdot U(\vec{r}) - e \cdot U_1(x, t) = 0. \quad (1.21)$$

Ниже будем считать, что потенциал  $U_1(x, t)$  в уравнении (1.1) имеет следующий вид:

$$U_1(x, t) = e \cdot (x/d) d \cdot \mathcal{E} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t), \quad (1.22)$$

где  $d$  – максимальное отклонение заряженной частицы в поле внешнего электрического поля.

Наличие такого потенциала можно объяснить наличием внешнего длинноволнового излучения, длина волны которого значительно превосходит все характерные размеры рассматриваемой задачи. Потенциал  $U(\vec{r})$  имеет пространственную периодическую неоднородность:

$$U(\vec{r}) = U_0 + g \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (1.23)$$

При этом, как мы увидим ниже, в отсутствии периодической пространственной неоднородности уравнение (1.21) может быть решено точно без каких-либо ограничений на величину внешнего электрического поля.

Будем считать, что величина периодического в пространстве потенциала мала. Учет влияния этого потенциала мы ниже осуществим методом возмущения. Для этого, прежде всего, рассмотрим уравнение (1.21), в котором опустим этот потенциал. Для решения такого уравнения введем новую функцию  $\varphi(\vec{r}, t)$  с помощью подстановки:

$$\psi = \varphi \cdot x \cdot \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} \int_0^t [d \cdot e \cdot \mathcal{E} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)] dt \right]. \quad (1.24)$$

Подставляя (1.24) в (1.21) для нахождения новой функции  $\varphi(\vec{r}, t)$ , получим следующее уравнение ( $U_0 = 0$ ):

$$i\hbar \cdot x \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \left[ x \cdot \Delta_{\perp} \varphi + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] = 0. \quad (1.25)$$

В этом уравнении  $\Delta_{\perp}$  — лапласиан по поперечным координатам. Решение уравнения (1.25) будем искать в виде

$$\varphi = \eta(x) \cdot \exp \left[ -i \frac{E}{\hbar} t + i \vec{k}_{\perp} \vec{r}_{\perp} \right], \quad (1.26)$$

где  $E$  — энергия частицы, которую она имела до воздействия внешнего периодического электрического поля;  $\eta$  — новая функция, которую следует определить.

Подставляя (1.26) в уравнение (1.25) для нахождения функции  $\eta$ , получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с меняющимися коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + k_x^2 \eta = 0. \quad (1.27)$$

При получении (1.27) мы учли следующие соотношения:  $E = (\hbar^2 \cdot k^2) / 2m$ ;  $k^2 = k_{\perp}^2 + k_x^2$ . Строгое решение уравнения (1.27) выражается через функции Бесселя (см., например, [20]):

$$\eta = \frac{C}{\sqrt{x}} Z_{-1/2}(|k_x| x), \quad (1.28)$$

где  $Z_{\nu}$  — одна из произвольных функций Бесселя;  $C$  — произвольная постоянная.

Выражение (1.28) для волновой функции можно существенно упростить. Действительно, обратим внимание, что величина  $k_x$  обратно пропорциональна длине волны де Бройля ( $k \sim 1/\lambda_{dB}$ ). Причем эта величина в нашей задаче является самым малым пространственным размером. Тогда, за исключением пространственной области  $x \sim \lambda_{dB}$ , мы можем воспользоваться асимптотическим выражением для функции Бесселя. Кроме того, в качестве функции Бесселя выберем функцию Ханкеля. С учетом асимптотики этой функции, а также, учитывая нормировку волновой функции, окончательное выражение для волновой функции может быть представлено в виде

$$\psi = \exp \left[ -i \alpha t + i \vec{k} \vec{r} \right] \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\alpha) \cdot \exp(-i n \omega_0 t), \quad (1.29)$$

где  $\omega = E/\hbar$ ;  $\alpha = (e \cdot d \cdot E) / \hbar \omega_0$ .

Из выражения (1.29) видно, что временная динамика волновой функции качественно зависит от величины параметра  $\alpha$ . Действительно, если этот параметр мал, то в выражении для волновой функции будут играть роль только несколько первых слагаемых в сумме (1.29), т. е. временная динамика волновой функции будет обусловлена только несколькими первыми гармониками внешнего поля. Если же параметр  $\alpha$  велик, то все временные гармоники волновой функции будут играть существенную роль. Однако все они будут малы ( $\sim 1/\sqrt{\alpha}$ ). Некоторым исключением являются члены с номерами, близкими к  $\alpha$  ( $n \approx \alpha$ ). В этом случае, как известно, функции Бесселя убывают не как квадратный корень из номера, а как кубический корень из этого номера. Эти члены (гармоники) могут существенно изменить структуру спектра осциллятора. Таким образом, структура спектра волновой функции, а также структура спектра излучения заряженной частицы будет существенно зависеть от величины параметра  $\alpha$ . Представляет интерес оценить значение этого параметра.

Пусть заряженная частица находится во внешнем электрическом поле с напряженностью равной  $\mathcal{E} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ . Тогда максимальное смещение частицы в этом поле равно  $(e \cdot \mathcal{E}) / (m \cdot \omega_0^2)$ . Подставляя это отклонение в выражение для параметра  $\alpha$ , находим, что величина параметра существенно зависит от частоты поля (при этом  $\alpha = (e \cdot \mathcal{E})^2 / (\hbar \cdot m \cdot \omega_0^3)$ ). Поэтому характер спектра излучения заряженной частицы в поле лазерного излучения и в СВЧ-поле будет совершенно различным. Действительно, для поля лазерного излучения ( $\omega_0 \sim 10^{14}$ ) этот параметр мал ( $\alpha \sim 10^{-12} \cdot (\mathcal{E} (v/cm))^2$ ) даже для достаточно больших напряженностей полей. Для СВЧ-излучения ( $\omega_0 \sim 10^{10}$ ), наоборот, этот параметр может быть очень велик. Полезно заметить, что параметр  $\alpha$  имеет простой физический смысл — он определяет число квантов внешнего поля, суммарная энергия которых равна энергии частицы, которую она приобретает на расстоянии  $d$  в электрическом поле с напряженностью  $\mathcal{E}$ .

**Учет влияния периодического в пространстве потенциала.** Учет теперь наличие слабого периодического в пространстве потенциала. Используя теорию возмущения, легко найти следующее выражение для волновой функции, которая будет решением уравнения Шредингера (1.21) как при наличии периодического во времени, так и периодического в пространстве потенциалов:

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n \cdot \exp \left[ i \vec{k}_n \vec{r} - i \omega t - \frac{i}{\hbar} \int_0^t V \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \right], \quad (1.30)$$

где  $V = e \cdot d \cdot \mathcal{E}$ ;  $\vec{k}_n = \vec{k}_0 + n \cdot \vec{k}$ ;  $\psi_n \sim \psi_0 \cdot g^n$ .

Ниже мы используем (1.30) для нахождения мощности излучения. Для этого выпишем выражение для оператора взаимодействия заряженной частицы с электромагнитным полем:

$$\hat{H}_1 = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi \cdot \hbar}{L^3 \omega_\lambda n^2}} \cdot \hat{p} \cdot \sum_\lambda \hat{a}_\lambda^+ \cdot \vec{e}_\lambda \cdot \exp(-i \cdot \vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}). \quad (1.31)$$

Матричный элемент взаимодействия заряженной частицы с электромагнитными волнами будет иметь вид:

$$H_{\nu\mu} = \left[ -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi \cdot \hbar}{L^3 \omega_\lambda n^2}} \right] \int \left[ \psi_{N+1}^* \left( \sum_n \exp(-i \cdot \vec{k}_{n\nu} \cdot \vec{r}) \cdot \psi_{n\nu}^* \right) \right] \cdot \left[ \sum_\lambda \hat{a}_\lambda^+ \cdot \vec{e}_\lambda \cdot \exp(-i \cdot \vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}) \cdot \hat{p} \right] \left[ \psi_N \cdot \left( \sum_n \exp(i \cdot \vec{k}_{n\mu} \cdot \vec{r}) \cdot \psi_{n\mu} \right) \right] \cdot d\vec{r}. \quad (1.32)$$

При записи выражения (1.32) мы учли, что переходы происходят между уровнями  $\mu$  (верхний уровень) и уровнем  $\nu$  (нижний уровень). Учтем также, что действие оператора рождения на волновую функцию электромагнитного поля определяется соотношением  $\hat{a}_\lambda^+ \cdot \psi_N = \sqrt{N+1} \cdot \psi_{N+1}$ . Из выражения для матричного элемента следует, что существенную роль будут играть только те члены, для которых выполняются условия синхронизма (законы сохранения импульса):  $\vec{k}_{n\mu} - \vec{k}_{n\nu} - \vec{k}_\lambda = 0$ .

Для дальнейшего нам удобно определиться с характерными пространственными масштабами. Самым большим пространственным масштабом мы считаем длину волны внешней электромагнитной волны ( $L$ ). Вторым по размеру пространственным масштабом является величина смещения заряженной частицы в поле внешней волны ( $d$ ). Третьим масштабом является длина волны спонтанного излучения заряженных частиц ( $\lambda$ ). Четвертым масштабом является период пространственной периодической неоднородности потенциала ( $2\pi / |\vec{k}|$ ). И самым маленьким пространственным размером в нашей задаче является длина волны де Бройля, излучающих заряженных частиц  $\lambda_{DB} = \hbar / mV$ .

Таким образом, в нашей задаче можно установить следующую иерархию пространственных размеров:  $L \gg d \gg \lambda \gg 2\pi / |\vec{k}| \gg \lambda_{DB}$ . Ниже, для упрощения некоторых выражений, мы будем пользоваться этими соотношениями.

Формулы (1.30–1.32) могут быть использованы для вычисления мощности излучения во всех интересующих нас случаях. Однако общий случай, когда у нас имеется как периодическая во времени, так и периодическая в пространстве неоднородность потенциала, приводит к громоздким формулам для мощности излучения, которые трудно анализировать. Поэтому ниже мы рассмотрим наиболее интересные, с нашей точки зрения, частные случаи.

**Излучение осцилляторов.** Прежде всего, рассмотрим излучение заряженных частиц в отсутствии пространственной периодической неоднородности ( $g = 0$ ). В этом случае заряженные частицы движутся во внешнем периодическом во времени поле. При этом можно ожидать появления черенковского излучения и излучения осцилляторов. Рассмотрим случай, когда параметр  $\alpha$  мал (т. е. частицы движутся в поле высокочастотной волны, например, в поле лазерного излучения). Выражение для мощности излучения можно представить в следующем виде:

$$\frac{dW}{dt} = \int_0^\pi d\theta \int \omega \cdot d\omega \cdot \frac{e^2 \hbar^2 \cdot n}{m^2 c^3} k_{\mu 0}^2 (\sin \theta)^3 \cdot \delta \left( 1 - \frac{V \cdot n}{c} \cos \theta \right), \quad (1.33)$$

где  $\theta$  – угол между вектором скорости и волновым вектором излученной волны;  $n = \sqrt{\varepsilon}$  – коэффициент преломления.

Учитывая, что  $(\hbar \cdot k_{\mu 0})^2 = (m \cdot V)^2$ , формулу (1.33) можно преобразовать к хорошо известному выражению для мощности черенковского излучения:

$$\frac{dW}{dt} = \int \omega \cdot d\omega \frac{e^2 V}{c^2} \left( 1 - \frac{c^2}{V^2 \cdot n^2} \right) \cdot J_0^2(\alpha). \quad (1.34)$$

Формула (1.34) отличается от известного выражения для черенковского излучения только множителем  $J_0^2(\alpha)$ . Этот множитель обусловлен тем фактом, что заряженная частица представляет собой осциллятор. Причем наличие осцилляций заряженных частиц приводит к некоторому уменьшению мощности черенковского излучения:

$$J_0(\alpha) \sim 1 - (\alpha / 2)^2, \text{ при } \alpha \ll 1.$$

Если условия черенковского излучения не выполняются, то движущиеся нерелятивистские осцилляторы при малых значениях параметра  $\alpha$  будут излучать на частоте внешнего периодического поля (на частоте  $\omega_0$ ). Выражение для мощности излучения при этом можно представить в виде

$$\frac{dW}{dt} = \int_0^\pi d\theta \int \omega \cdot d\omega \cdot \frac{e^2 \hbar^2 \cdot n}{m^2 c^3} k_{\mu 0}^2 (\sin \theta)^3 \cdot \delta \left( 1 - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \cdot J_1(\alpha) \approx \frac{2 \cdot \omega_0^2 \cdot e^2}{3 \cdot c} (\alpha \cdot \beta^2) \quad (1.35)$$

Из выражения (1.35) следует, что диаграмма направленности излучения таких осцилляторов соответствует дипольному излучению, а мощность излучения примерно в  $\alpha \cdot \beta$  раз меньше черенковского излучения.

Выше мы обращали внимание, что наличие осцилляций у заряженных частиц ослабляет черенковское излучение. Такое ослабление происходило при малых значениях параметра  $\alpha$ . Еще более сильное подавление спектральной мощности черенковского излучения происходит в случае, если параметр  $\alpha$  не мал, а велик. Действительно, в этом случае спектр излучения будет очень широк, однако все спектральные компоненты будут малы. Этот вывод следует из выражения для волновой функции (1.9). Действительно, при больших значениях этого параметра, значения функций Бесселя становятся малыми:  $(J_n(\alpha) \sim 1/\sqrt{\alpha})$ .

**Излучение заряженных частиц при движении в пространственно-периодическом потенциале.** Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда временная зависимость потенциалов отсутствует ( $\mathcal{E} = 0$ ). Выражение для плотности вероятности излучения в этом случае можно представить в виде

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{\mu\nu}|^2 \cdot \rho(\omega) \cdot \delta(1 - \frac{\Delta E}{\hbar \cdot \omega}), \quad (1.36)$$

а для мощности излучения можно получить следующее выражение:

$$\frac{dW}{dt} = (g_{eff})^2 \cdot \frac{(e \cdot \omega \cdot V)^2 \cdot n}{4c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cdot d\theta, \quad (1.37)$$

где  $g_{eff} = eg / E_0$ ,  $E_0$  – энергия частицы до излучения.

В выписанной простой формуле для мощности излучения мы предполагали, что вектор скорости частиц направлен параллельно вектору обратной решетки периодической неоднородности ( $\vec{V} \parallel \vec{k}$ ). Такой выбор обусловлен тем фактом, что при этом может быть возбуждено самое высокочастотное излучение, а также тем, что в этих условиях мощность излучения максимальна. Из формулы (1.37) следует, что диаграмма направленности излучения соответствует дипольному излучению.

Представляет интерес сравнить эффективность рассмотренного излучения с эффективностью известного излучения, например, черенковского. Отношение мощности излучения гармоник к мощности черенковского излучения можно оценить следующей формулой:

$$\frac{(dW/dt)_{Harm}}{(dW/dt)_{Cher}} \approx (g_{eff})^2 \cdot \beta. \quad (1.38)$$

При получении (1.38) мощность черенковского излучения была оценена формулой:  $(dW/dt)_{Cher} \sim (e^2 \cdot \omega^2 \cdot V) / c^2$ . Из формулы (1.38) видно, что, в общем случае, эффективность черенковского излучения выше, так как оба множителя в правой части меньше единицы. Однако как первый, так и второй множители в правой части (1.38) могут мало отличаться от единицы. Поэтому можно рассчитывать, что эффективность излучения гармоник может быть близка к эффективности черенковского излучения.

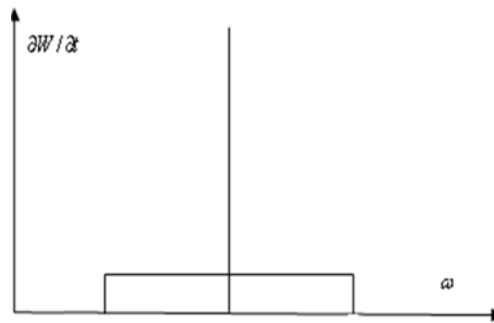


Рис. 1.7. Качественный вид спектра излучения черенковского излучения и излучения гармоник

На рис. 1.7 представлен характерный вид спектра черенковского излучения и излучения гармоник. Видно, что черенковское излучение занимает широкий спектральный диапазон. Излучение гармоник практически состоит из одной узкой линии. При оценке мощности черенковского излучения (1.38) считалось, что черенковское излучение сосредоточено в октаве ( $\Delta\omega \sim \omega$ ). Из формулы (1.38) и рис. 1.7 видно, что спектральная плотность излучения гармоник значительно выше, чем спектральная плотность черенковского излучения.

**Законы сохранения.** При получении формул для мощности излучения мы пользовались законами пространственного и временного синхронизма (законы сохранения энергии и импульса при излучении):

$$\Delta E = E_{li} - E_{mf} = \hbar \cdot \omega_\lambda;$$

$$\Delta \vec{p} = \hbar (\vec{k}_{ni} - \vec{k}_{jf}) = \hbar \cdot \vec{k}_\lambda. \quad (1.39)$$

В формуле (1.39) индексом  $\lambda$  обозначены частота и волновой вектор излученного кванта. Первые индексы в выражениях для энергии определяют номер квазиэнергии, а первые индексы в выражениях для начального и конечного импульсов определяют номер «виртуальных» волн – мод. В рассмотренном выше случае (периодическая в пространстве неоднородность учтена по теории возмущений) эти индексы могут приобретать только значение  $0; \pm 1$  ( $n; j = 0; \pm 1$ ). Будем рассматривать только те случаи, когда в процессе излучения может участвовать только одна из «виртуальных» волн, а также учтем, что переходы могут происходить только между энергетическими уровнями, содержащими только один квазиэнергетический уровень. Все остальные возможности дают значительно меньшую мощность излучения, и мы их рассматривать не будем. В этих предположениях законы сохранения энергии и импульса приобретут следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta E_0 &= E_{0i} - E_{0f} = \hbar (\omega_\lambda - s \cdot \omega_0); \\ \Delta \vec{p}_0 &= \hbar (\vec{k}_{0i} - \vec{k}_{0f}) = \hbar \cdot (\vec{k}_\lambda + \vec{\kappa}). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Здесь нулевые индексы для энергий и для импульсов указывают на значения энергий и импульсов невозмущенных периодическими потенциалами ( $E_{0i} = E_0 + \hbar \cdot l \cdot \omega_0$ ),  $s = l - m$ . Если энергия излученного кванта будет существенно меньше энергии частицы, то из формул (1.40) найдем следующее выражение для частоты излученного кванта:

$$\omega_\lambda = \frac{s \cdot \omega_0 + \vec{\kappa} \cdot \vec{V}}{(1 - \beta \cdot \cos \theta)}, \quad (1.41)$$

где  $\beta = V/c$ ,  $\theta$  – угол между волновым вектором излученной волны и вектором скорости частицы.

Введем в рассмотрение волновой вектор и фазовую скорость «виртуальной волны». По аналогии с обычным волновым вектором  $\vec{k}_{0i} = (\omega_E / V_{ph}) (\vec{k}_{0i} / |\vec{k}_{0i}|)$ , где  $\hbar \omega_E = E_{0i}$ , введем волновой вектор «виртуальной волны»:  $\vec{k}_v = (\vec{k}_{0i} - \vec{\kappa}) = (\omega_E / V_v) \cdot [(\vec{k}_{0i} - \vec{\kappa}) / |(\vec{k}_{0i} - \vec{\kappa})|]$ . Из этого выражения следует, что взаимодействие частиц с излучаемыми фотонами происходит через «виртуальные» компоненты волновой функции (через «виртуальные» волны). При этом фазовая скорость этих

компонент больше фазовой скорости основной компоненты ( $V_v > V_{ph}$ ). Таким образом, взаимодействие происходит в данном случае через быстрые «виртуальные» волны. Отметим, что при излучении частиц, движущихся в периодически-неоднородном диэлектрике, взаимодействие происходило через медленные «виртуальные» волны [5–7]. Используя выражение для фазовой скорости «виртуальной» волны, формулу (1.41) для частоты излучения можно переписать в виде

$$\omega_\lambda = \frac{s \cdot \omega_0}{(1 - \beta_v \cdot \cos \varphi)}, \quad (1.42)$$

где  $\beta_v = V_v / c$ ,  $\varphi$  – угол между волновым вектором обратной решетки периодической неоднородности потенциала и вектором скорости.

Формула (1.42) совпадает с выражением для частоты излученного кванта, приведенным в работе [21].

Для частицы, которая движется в пространственно периодически-неоднородном потенциале без влияния внешнего высокочастотного поля, длину волны излученного кванта можно определить формулой:

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}| \beta \cos \varphi}. \quad (1.43)$$

Эта формула для длины излучения также совпадает с той, которая приведена, например, в работе [21] для излучения заряженных частиц, двигающихся в периодически-неоднородной среде. Таким образом, спектры излучения заряженных частиц в периодически-неоднородной среде (с периодически-неоднородной диэлектрической проницаемостью) и спектры излучения в периодически-неоднородном потенциале с совпадающими периодами неоднородности идентичны.

**Наличие пространственной и временной неоднородности потенциала.** В общем случае, нас интересует излучение заряженных частиц в потенциале, в котором имеется периодическая неоднородность как во времени, так и в пространстве. Из формул (1.29), (1.30) легко однако увидеть, что учет влияния периодической неоднородности во времени будет влиять только на законы сохранения (учет квазиэнергий), а также в выражении для мощности излучения (1.37) появятся множители, пропорциональные произведению Бесселей. Во всем остальном процесс излучения в этом случае будет аналогичен случаю излучения при наличии только пространственной неоднородности. Относительно излучения осцилляторов сделаем еще одно замечание. Использованный нами потенциал, в котором частицы становятся осцилляторами, явно зависит от времени. Более привычным квантово-механическим осциллятором является заряженная частица, которая движется в квадратичном

потенциале:  $U = (m \cdot \omega_0^2 \cdot x^2) / 2$ . Здесь  $\omega_0$  – классическая угловая частота колебаний осциллятора. Видно, что такой потенциал не содержит явной зависимости от времени. Кроме того, приведенное во многих курсах квантовой механики решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора не содержит предельного перехода, когда  $\omega_0 \rightarrow 0$ . Для интересующей нас задачи частота осциллятора является маленькой величиной, поэтому анализ уравнения Шредингера требует дополнительного исследования для этого случая. Последуем, для определенности, за [22]. Уравнение Шредингера для квантового осциллятора приобретает вид:

$$\psi'' + (\lambda - \xi^2)\psi = 0. \quad (1.44)$$

Здесь штрихом обозначена производная по  $\xi$ , и введены следующие безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{x}{x_0}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_0}.$$

Решением уравнения (1.44) является функция:

$$\psi_n(\xi) = \exp\left(\frac{-\xi^2}{2}\right) H_n(\xi),$$

где  $H_n(\xi)$  есть полином Чебышева-Эрмита.

Из этого решения видно, что как только  $\omega_0 \rightarrow 0$ , то  $x_0 \rightarrow \infty$ , и волновая функция становится константой. С другой стороны, из уравнения (1.44) следует, что если  $\xi \rightarrow 0$ , то решением уравнения будет функция, которая описывает свободное движение заряженной частицы. Физический смысл этого решения очевиден – при  $\omega_0 \rightarrow 0$  потенциал становится постоянной функцией.

Для нашей задачи представляет интерес случай, когда период пространственной неоднородности значительно меньше, чем  $x_0$ . Поэтому при нахождении волновой функции уравнения Шредингера, в котором учитывается периодический в пространстве потенциал, мы в качестве невозмущенной волновой функции можем взять волновую функцию, которая описывает свободное движение заряженной частицы.

Во всех случаях излучения осциллятора (который образован в результате наличия либо потенциала, явно зависящего от времени, либо квадратичного потенциала) ключевой задачей для излучения частот,

которые значительно превосходят собственную частоту осциллятора, является задача об излучении в пространственно-неоднородном потенциале. Этот вывод, конечно, справедлив только при наличии сформулированной выше иерархии пространственных размеров.

Таким образом, в этом подразделе изложена квантовая теория излучения нерелятивистских заряженных частиц, движущихся в потенциале, который имеет как временную, так и пространственную периодическую неоднородность. Главным результатом построенной теории является доказательство факта достаточно высокой эффективности излучения нерелятивистских частиц на частотах, которые соответствуют высоким номерам гармоник, т. е. максимум спектра излучения может соответствовать частотам, которые значительно превосходят собственные частоты осцилляторов. Причем эти максимумы совпадают с максимумами спектра излучения осцилляторов, которые движутся в диэлектрике с пространственно-периодической неоднородностью (периоды неоднородности потенциала и диэлектрика должны совпадать). Особый интерес представляет излучение заряженных частиц, колеблющихся в кристаллах. Кристаллическая решетка обладает как периодической неоднородностью диэлектрической проницаемости, так и периодической неоднородностью потенциала. Периоды этих неоднородностей совпадают. Поэтому в эксперименте анализ только спектральных характеристик не позволяет определить, какая из неоднородностей является определяющей для процесса излучения.

Обращает внимание также полученный выше результат подавления спектральной плотности черенковского излучения заряженных частиц при наличии внешнего низкочастотного электрического поля. Этот результат может играть существенную роль при развитии коллективных пучковых неустойчивостей, в основе которых лежит элементарный эффект черенковского излучения. При развитии таких неустойчивостей одна из спектральных компонент черенковского излучения, которая является собственной для электродинамической структуры, начинает нарастать. Причем инкремент неустойчивости пропорционален мощности черенковского излучения этой спектральной компоненты. Поэтому, если эта спектральная компонента ослаблена, то порог такой неустойчивости существенно отодвигается в сторону больших плотностей заряженных частиц. Следует заметить, что переходы (излучение) при наличии внешнего периодического электрического поля рассматриваются во многих курсах квантовой механики (см., например, [23]). Однако во всех случаях такое рассмотрение проводится в рамках теории возмущения, поэтому результат подавления черенковского излучения не был отмечен. Результат подавления черенковского излучения перекликается с изложенным в третьем подразделе эффектом квантовой юлы.

### 1.5. Излучение потока осцилляторов [27]

Выше, при исследовании элементарного механизма излучения заряженного осциллятора, который движется в периодически-неоднородной среде, была показана возможность возбуждения высоких номеров гармоник нерелятивистскими осцилляторами. Для того, чтобы такое излучение было эффективным, необходимо выполнение следующего условия:  $d \approx \beta\lambda$ ,  $r_0 \approx nd / 2\pi$ , здесь  $\lambda$  – длина волны излучения,  $d$  – период неоднородности,  $r_0$  – амплитуда смещения осциллятора от своего равновесного положения,  $\beta = v/c \ll 1$ ,  $v$  – скорость осциллятора,  $n$  – номер излученной гармоники. В настоящем разделе мы представим результаты исследований самосогласованного возбуждения гармоник ансамблями заряженных осцилляторов. Исследования проводились аналитическими и численными методами. Было получено дисперсионное уравнение и инкремент возбуждения гармоник. Аналитические результаты находятся в хорошем согласии с численными результатами.

**Основные уравнения.** Мы рассмотрим возбуждение электромагнитных волн ансамблем осцилляторов, которые находятся в среде с периодической неоднородностью. Будем считать, что диэлектрическая проницаемость такой среды может быть представлена уравнением:

$$\varepsilon = 1 + 2q \cos kz, \quad q \ll 1. \quad (1.45)$$

Наиболее полное описание самосогласованного процесса взаимодействия заряженных частиц с возбуждаемым полем подразумевает одновременное решение уравнений Максвелла для электромагнитного поля и уравнений движения заряженных частиц в возбужденных полях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -c \operatorname{rot} \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \vec{H} - 4\pi \vec{j}; \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} + \vec{F}_0 \sin \Omega t, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

где  $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ ,  $\Omega$  – частота колебания осциллятора,  $F_0$  – амплитуда внешней силы, которая действует на заряженную частицу (создает осциллятор). Будем считать, что колебания осциллятора происходят вдоль оси Z. При исследовании элементарного механизма излучения осциллятора было обнаружено, что диаграмма направленности соответствует дипольному излучению, т. е. излучение направлено в поперечном направлении относительно направления колебания осциллятора. Поэтому мы будем искать решение для возбуждаемой волны в виде

$$\vec{E} = \text{Re } \vec{A}(t, z) \exp(ikx). \quad (1.47)$$

Известно, что в периодически-неоднородных средах можно искать решение для поля в виде суммы пространственных гармоник. Поэтому мы можем переписать (1.47) в виде:

$$\vec{E} = \text{Re} \sum_l \vec{E}_l(t) \exp(ikx + il\kappa z). \quad (1.48)$$

Будем изучать временную эволюцию электромагнитного поля (1.48), в котором отличны от нуля только компоненты  $E_x, E_z, H_y$ . Подставим выражения для полей (1.48) в систему уравнений (1.46). Усредняя полученные уравнения по пространственной фазе возмущения, мы получим следующую систему уравнений для нахождения полей и характеристик осцилляторов:

$$\frac{dp_x}{d\tau} = \text{Re} \sum_l \varepsilon_{x,l} \exp(ix + il\kappa z) - v_z \text{Re} \sum_l h_{y,l} \exp(ix + il\kappa z),$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_z}{d\tau} = & \text{Re} \sum_l \varepsilon_{z,l} \exp(ix + il\kappa z) + v_x \text{Re} \sum_l h_{y,l} \exp(ix + il\kappa z) + \\ & + f_0 \cos \Omega \tau, \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = v_x, \quad \frac{dz}{d\tau} = v_z, \quad \vec{v} = \vec{p} / \sqrt{1 + p_x^2 + p_y^2}, \quad (1.49)$$

$$\frac{dh_{y,l}}{d\tau} i\varepsilon_{z,l} - il\kappa \varepsilon_{x,l},$$

$$\frac{d}{d\tau} (\varepsilon_{x,l} + q\varepsilon_{x,l-1} + q\varepsilon_{x,l+1}) =$$

$$= -il\kappa h_{y,l} - \frac{2w_b^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} v_x \exp(-ix - il\kappa z) dx_o d\kappa z_o.$$

Интегрирование в правой стороне этих уравнений для полей происходит по начальным значениям координат осцилляторов. Система уравнений (1.49) записана в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned}
 kct &\rightarrow \tau, k\vec{r} \rightarrow \vec{r}, \frac{\vec{p}}{mc} \rightarrow \vec{p}, \\
 \kappa/k &\rightarrow \kappa, \Omega/kc \rightarrow \Omega, \vec{\varepsilon} = \frac{e\vec{E}}{mckc}, \\
 \vec{h} &= \frac{e\vec{H}}{mckc}, f_0 = \frac{F_0}{mckc}, \omega_b^2 = \frac{4\pi e^2 n_b}{m(kc)^2}
 \end{aligned}$$

где  $m, e$  – масса и заряд электронов,  $n_b$  – плотность осцилляторов.

**Анализ линеаризованной системы уравнений. Дисперсионное уравнение.** Будем исследовать систему уравнений (1.49) на устойчивость в линейном приближении. Для этих целей мы представим зависимость полей от времени в виде  $\exp(-i\omega t)$  и будем пренебрегать членами второй степени по возмущениям. Мы также будем рассматривать только нерелятивистские осцилляторы. Кроме того, мы оставим только главную волну  $E_0$  (собственная волна системы) и волну  $E_1$ , которая представляет собой первый порядок дифракции, т. е. мы выбираем поле в следующем виде:

$$\vec{E} = \text{Re } \vec{E}_0 \exp(ikx - i\omega t) + \text{Re } \vec{E}_1 \exp(ikx + ikz - i\omega t).$$

Выполняя необходимые преобразования, мы получим систему линейных алгебраических уравнений. Равенство нулю детерминанта этой алгебраической системы представляет собой дисперсионное уравнение. Общее уравнение громоздко. Поэтому ниже мы выпишем дисперсионное уравнение для наиболее интересного случая, когда выполняются следующие условия:  $\kappa \gg k$ ,  $\beta \ll 1$ ,  $\omega_b \ll \omega \approx kc$ . Кроме того, учитывая, что максимум инкремента неустойчивости достигается, когда частота возбуждаемых волн удовлетворяет резонансным условиям, мы в общем дисперсионном уравнении оставим только резонансные члены  $\omega \approx n\Omega$ . Члены, входящие в дисперсионные уравнения, пропорциональны функциям Бесселя  $n$ -го порядка. При больших номерах  $n$  функции Бесселя быстро уменьшаются. Оставаясь малыми, они достигают своего максимального значения для случая, когда аргумент функции Бесселя совпадает с номером функции Бесселя. В этом случае  $J_n(n) \approx (n)^{-1/3}$ . Поэтому мы будем предполагать, что аргумент функции Бесселя близок к номеру  $n = \mu$  (т.е.  $n\Omega = \kappa\beta c$ ). В этих условиях дисперсионное уравнение приобретает достаточно простой вид:

$$\left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{\omega^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_b^2 J_n^2(\mu)}{(\omega - n\Omega)^2}\right) = q^2. \quad (1.50)$$

На рис. 1.8 представлены дисперсионные кривые изучаемой системы, которые построены в соответствии с уравнением (1.50). В области пересечения электромагнитных веток (точка С) дисперсионное уравнение (1.50) имеет комплексные корни. Для их отыскания уравнение (1.50) удобно переписать в виде

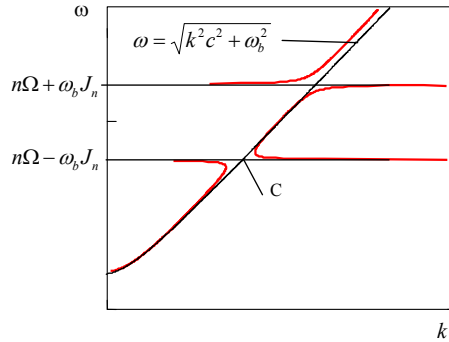


Рис. 1.8. Дисперсионные кривые

$$(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) = q^2 \omega^2 (\omega - n\Omega)^2, \quad (1.51)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{k^2 c^2 + \omega_b^2}$ ,  $\omega_1 = n\Omega - \omega_b J_n$ ,  $\omega_2 = n\Omega + \omega_b J_n$ .

Предполагая, что  $\omega = \omega_0 + \delta$ ,  $\omega_0 = \omega_1$ ,  $\delta \ll \omega_b J_n$ , мы получим из (1.51) следующее выражение для инкремента неустойчивости:

$$\text{Im } \delta = \frac{q}{2} \sqrt{\omega_0 \omega_b J_n}, \quad \omega_0 = \sqrt{k^2 c^2 + \omega_b^2}, \quad n\Omega = \omega_0 + \omega_b J_n. \quad (1.52)$$

Таким образом, самосогласованная система уравнений (1.49) имеет неустойчивые решения с инкрементом (1.52).

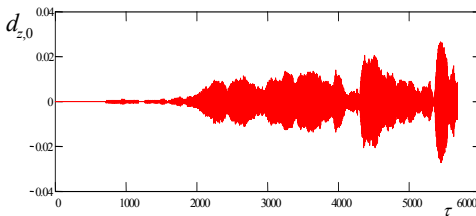


Рис. 1.9. Зависимость амплитуды возбуждаемых колебаний (гармоник) от времени

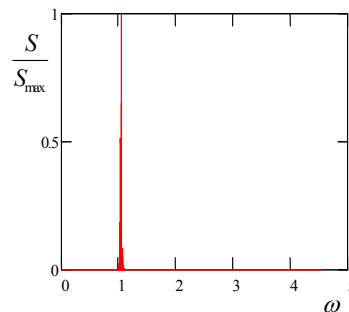


Рис. 1.10. Нормированный спектр возбуждаемых колебаний

Полная нелинейная самосогласованная система уравнений (1.49) решалась численно. Результаты численных расчетов находятся в хорошем качественном согласии с имеющимися представлениями о возбуждении гармоник. На рис. 1.9 представлена эволюция возбуждаемого поля от времени, а на рис. 1.10 – спектр возбуждаемых колебаний. Отметим, что в среднем эволюция возбуждаемого поля аналогична той, которая наблюдается в СВЧ приборах. Однако имеются и различия. Они заключаются в том, что амплитуда возбуждаемого поля подвержена случайным возмущениям. Эта случайная модуляция, по-видимому, обусловлена теми частицами ансамбля, которые находятся вблизи сепаратрисы возбуждаемой волны. Более детальный анализ развития стохастической неустойчивости осцилляторов показывает, что действительно некоторые количества осцилляторов, находящихся вблизи сепаратрисы, движутся хаотически. Чем больше плотность осцилляторов, чем больше амплитуда возбуждаемой волны, тем большее количество осцилляторов оказывается вовлеченными в хаотическую динамику. Однако этот вопрос требует дальнейшего более детального изучения.

Выше мы рассмотрели коллективное возбуждение гармоник осцилляторами в периодически-неоднородном диэлектрике. Нами были исследованы механизмы возбуждения высоких гармоник потоками осцилляторов в периодических потенциалах. Предварительные результаты этих исследований указывают на качественное подобие процессов возбуждения в периодически-неоднородных средах и в периодических потенциалах. Различия только количественные. Причем эффективность возбуждения гармоник потоками осцилляторов может быть качественно оценена из эффективности возбуждения гармоник отдельными осцилляторами. Чем выше эта эффективность, тем больше инкременты неустойчивостей, тем больше амплитуды возбуждаемых колебаний.

**Законы сохранения.** Рассмотренные выше теоретические модели механизмов увеличения частоты излучения хорошо описывают некоторые идеально поставленные эксперименты. В большинстве же случаев экспериментальные условия далеки от тех, которые соответствуют этим моделям. Особенно это относится к возможности возбуждения высоких номеров гармоник при попытке использовать в качестве ондуляторов периодические структуры твердых тел. На что, наверняка, можно рассчитывать в реальных экспериментах? Безусловно, во всех случаях при излучении должны выполняться законы сохранения энергии и импульса (1.39). Рассмотрим их более подробно:

$$E_1 - E_2 = \hbar\omega, \quad \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \hbar\vec{k}. \quad (1.53)$$

Здесь  $E_{1,2}$  – энергия частицы до излучения и после;  $\vec{p}_{1,2}$  – импульс частицы до излучения и после;  $\vec{k}$  – волновой вектор излученного фотона;  $\omega$  – его частота.

Если частица не имеет внутренних степеней свободы, то выражения для её энергии и импульса имеют вид:

$$E = mc^2\gamma, \quad \vec{p} = m\vec{v}\gamma, \quad \vec{p} = E\vec{v}/c^2. \quad (1.54)$$

Для частиц, обладающих внутренними степенями свободы, эти выражения приобретают вид:

$$E = W\gamma, \quad \vec{p} = W\gamma\vec{v}/c^2, \quad \vec{p} = E\vec{v}/c^2. \quad (1.55)$$

Подставим эти выражения в законы сохранения энергии и импульса (1.53). Будем считать, что энергия излученного фотона значительно меньше энергии частицы. Тогда, проводя разложения полученного выражения по параметру отношения энергии кванта к энергии частицы, мы получим следующее выражение для разности энергии внутреннего состояния частицы:

$$W_1 - W_2 = \hbar\gamma\omega[1 - n\beta\cos\theta], \quad (1.56)$$

где  $\theta$  – угол между вектором скорости  $\vec{v}$  и волновым вектором  $\vec{k}$  излученного кванта.

Если у нас излучает осциллятор, то изменение его внутренней энергии равно  $\hbar s\Omega_r$ ,  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Значение  $s = 0$  соответствует случаю, когда при излучении не происходит перестройки внутреннего состояния частицы. Отрицательные значения  $s$  соответствуют случаям, когда в процессе излучения кванта частица увеличивает свою внутреннюю энергию (аномальный спектр излучения). Отметим, что последняя возможность осуществляется, когда скорость частицы превосходит фазовую скорость излученного кванта. Здесь  $\Omega_r = \Omega\gamma$  – частота осциллятора в системе отсчета, в которой он покоится. Учитывая эти соотношения, получаем следующее выражение для частоты излученного кванта

$$\omega = \frac{s \cdot \Omega}{(1 - \beta n \cos \theta)}. \quad (1.57)$$

Это известное выражение для частоты излучения движущегося осциллятора.

Пусть теперь осциллятор движется в среде с периодической неоднородностью. В этом случае излучаемая частица может передать или приобрести в процессе излучения дополнительный импульс равный  $\hbar\vec{k}$ .

Здесь  $\vec{k} = 2\pi(1/d_x, 1/d_y, 1/d_z)$  – вектор обратной решетки периодической неоднородности. Учитывая возможность обмена импульсом с неоднородностью, закон сохранения импульса следует переписать в виде:

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \hbar(\vec{k} + \vec{k}). \quad (1.58)$$

Для дальнейшего нам удобно ввести волновой вектор виртуальной волны  $(\vec{k} + \vec{k}) = \frac{\omega}{v_{f,v}} \vec{e}$ , где  $\vec{e} = (\vec{k} + \vec{k}) / |\vec{k} + \vec{k}|$ ,  $v_{f,v}$  – фазовая скорость виртуальной волны, которая может существенно отличаться от скорости света. Используя эти соотношения и проводя расчеты, аналогичные проведенным выше при получении выражения для частоты (1.57), мы получим следующее выражение для частоты фотона, который излучается осциллятором при наличии периодической неоднородности.

$$\omega = \frac{s \cdot \Omega}{(1 - \beta_{f,v} \cos \theta)}, \quad (1.59)$$

где  $\beta_{f,v} = v / v_{f,v}$ .

Из этой формулы видно, что наличие периодической неоднородности позволяет даже для нерелятивистского осциллятора возбуждать частоты, которые значительно превосходят собственную частоту осциллятора.

В реальных условиях экспериментов, особенно в экспериментах, в которых в качестве периодической неоднородности используется кристаллическая решетка твердого тела, размах осцилляторов может значительно превосходить длину свободного пробега заряженных частиц в твердом теле. В этом случае частица уже не может реализовать свои внутренние степени свободы. Она перестает быть осциллятором. Однако и в этом случае наличие периодической неоднородности, как мы видели выше (см. раздел 1.3), позволяет нерелятивистской частице возбуждать очень высокие частоты. Этот факт также легко можно увидеть из анализа законов сохранения. Действительно, при излучении заряженной частицей, которая находится в периодически неоднородной среде или в периодическом потенциале, эти законы можно записать в виде

$$E_1 - E_2 = \hbar\omega, \quad \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \hbar(\vec{k} + \vec{k}). \quad (1.60)$$

Эти законы совпадают с использованными выше. Ниже мы будем считать, что при излучении не происходит перестройки внутренней энергии частицы. Кроме того, для простоты, рассмотрим излучение нерелятивистских частиц. Учитывая, что длина излучаемой волны для

нерелятивистских частиц значительно больше периода неоднородности ( $\lambda \gg d$ ), из (1.60), получим следующее выражение для длины волны излучаемого фотона:

$$\lambda = 2d / (\beta_1 \cdot \cos \theta_1 + \beta_2 \cdot \cos \theta_2), \quad (1.61)$$

где  $\theta_{1,2}$  – угол между вектором начальной (конечной) скорости заряженной частицы и вектором обратной решетки.

Если частица теряет на излучение фотона малую часть своей энергии ( $\beta_2 \approx \beta_1$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ), то длина излучаемой волны будет обратно пропорциональна скорости частицы:  $\lambda = d / \beta$ . Для случая, когда частица теряет на излучение всю свою энергию ( $\beta_2 = 0$ ,  $\theta_1 = 0$ ), то длина волны излучения равна  $\lambda = 2d / \beta$ .

Глядя на выражения для длин излучаемых волн, мы видим, что частотой излучения легко управлять, меняя скорость частиц. Причем имеется простая зависимость частоты излучения от скорости заряженных частиц и характеристик периодической неоднородности.

Важно, что в законах сохранения (1.60) никак не фигурируют особенности движения заряженных частиц. Это могут быть либо просто заряженные частицы, движущиеся с постоянной скоростью, либо осцилляторы. Во всех случаях результат один и тот же – будут излучаться фотоны с одинаковой частотой вне зависимости от особенности движения частиц. Этот важный вывод позволяет нам рассчитывать, что в реальных экспериментах, несмотря на возможное значительное отличие динамики частиц от той, которая была использована в теоретических моделях, мы получим результаты, которые будут находиться в хорошем, по крайней мере, качественном согласии с теорией.

Следует обратить внимание на ограниченность применения формулы (1.61) для длины излучаемого фотона. Действительно, из нее следует, что чем меньше будет скорость частиц в данном периодическом потенциале, тем более жестким будет излучение. Ясно, что этот вывод при каких-то значениях энергии частицы будет находиться в противоречии с законом сохранения энергии. Частица должна иметь энергию, которая превосходит энергию излучаемого ею фотона ( $mv_1^2 \geq 2 \cdot \hbar \omega$ ). Из этого условия мы находим, что длина волны излучения должна удовлетворять следующему неравенству:

$$\lambda \geq (4\pi\hbar / mc \cdot \beta^2). \quad (1.62)$$

Таким образом, в общем случае мы должны учитывать соотношения (1.61) и (1.62). Так, для периодического потенциала (периодически-неоднородной среды), который имеет период неоднородности характерный

для твердого тела ( $d \approx 10^{-8} \text{ cm}$ ) на рисунке 1.11 представлены эти два соотношения. Пунктирная кривая соответствует закону сохранения энергии (1.62). Излучение возможно только для фотонов, длина волны которых находится выше этой кривой. Сплошная кривая описывает резонансное излучение фотонов при наличии периодической неоднородности ( $\lambda = d / \beta$ ). Из этого рисунка следует, что эффективное возбуждение излучения возможно только для параметров  $(\beta, \lambda)$ , которые находятся правее и ниже точки пересечения этих двух кривых. Для описанных выше экспериментов по излучению высоких номеров гармоник из твердого тела это означает, что использование этого механизма не позволяет возбуждать, например, инфракрасное излучение. Следует отметить, что точка пересечения должна соответствовать случаю, когда частица теряет всю свою энергию на излучение. Это означает, что реальная максимальная длина волны, которую резонансно может возбудить частица, должна быть удвоена.

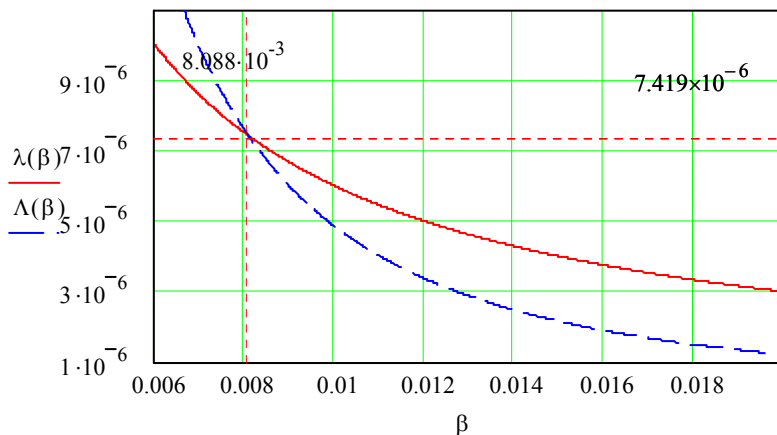


Рис. 1.11. Возбуждение гармоник находится на том участке сплошной кривой, которая выше пунктирной

## 1.6. Экспериментальные исследования возбуждения высоких номеров гармоник нерелятивистскими осцилляторами [24–26]

В экспериментах по отражению медленных электромагнитных волн замедление осуществлялось в спиральном волноводе. Величина замедления была достаточно значительной ( $v_\phi / c \approx 10^{-3}$ ). Плазменный поршень

создавался с помощью прямого разряда в двухэлектродной плазменной пушке. При отражении электромагнитной волны от переднего фронта плазменного поршня происходило возрастание частоты отраженной волны на 20 %. Эти изменения частоты отвечают скорости движения плазменного поршня  $v \approx 8 \cdot 10^6$  см/с.

Как показал Я. Б. Файнберг (см. [9,10] и цитированную там литературу), рассматриваемый эффект может быть существенно усилен в случае многократного отражения, которое достигается, в частности, если электромагнитная энергия сосредоточена в объеме, частично или полностью заполненном плазмой, а потом этот объем быстро уменьшается ("схлопывается"). При этом происходит не только увеличение частоты и плотности электромагнитной энергии, но и увеличение полной электромагнитной энергии.

Экспериментальная проверка эффекта умножения частоты при многократном отражении электромагнитных волн от движущейся плазмы, проводилась нами для  $H_{011}$  – волны в 10 см диапазоне. В резонаторе одной из торцевых поверхностей был подвижный плазменный поршень, образованный плазменной пушкой. Вторая торцевая сторона резонатора плавно переходила в запердельный волновод с критической длиной волны  $\lambda = 4,6$  см. При впуске плазменного сгустка поступление энергии от магнетрона прекращалось. За счет многократного отражения происходило возрастание частоты электромагнитного поля до значения большего критической частоты запердельного волновода. В наших экспериментах «схлопывание» происходило за время  $\tau = 0,25 \div 0,4$  мкс, чему отвечает скорость движения плазменного сгустка  $v = (2 \div 4) \cdot 10^7$  см/с. Таким образом, в ХФТИ впервые было экспериментально показано, что при быстром сжатии объема с электромагнитной энергией можно достичь достаточно большого умножения частоты. В нашем случае величина этого умножения достигала 2,3 раза.

Экспериментальные исследования по возбуждению гармоник были выполнены в ННЦ «ХФТИ» А. Н. Антоновым, О. Ф. Ковпиком, Е. А. Корниловым и В. Г. Свиченским. Прежде всего, механизм возбуждения гармоник был изучен в СВЧ-диапазоне. В этой серии экспериментов осцилляторами служили электроны плазмы, которые колебались в поле внешней электромагнитной волны. Средой служила искусственно сделанная решетка. В эксперименте изучалось возбуждение третьей гармоники падающей волны. Частота волны была 2,7 Гц. В целом, результаты проведенных экспериментальных исследований находятся в хорошем качественном согласии с теорией. Возбуждение колебаний на третьей гармонике (8,1 Гц) наблюдалось только при одновременном присутствии плазмы и погруженной в нее решетки. Если решетка удалялась, то излучение на гармониках отсутствовало. Если удалялась плазма – излучение также отсутствовало. Более того, плазму можно было удалять от решетки на различное расстояние. При этом существует некоторое критическое расстояние ( $\sim 2$  мм), начиная с которого сигнал на гармониках пропадает. Поляризация излучения по характеру соответствует излучению диполя. Это находится в согласии с теорией.

Диаграмма направленности излучения также находится в согласии с теорией: интенсивность излучения в направлении перпендикулярном решетке, значительно превосходит интенсивность излучения в направлении параллельном поверхности решетки.

**Возбуждение гармоник при воздействии электромагнитного излучения на кристалл.** Если в качестве периодической структуры использовать кристалл, то в тех же условиях экспериментов можно рассчитывать возбудить оптическое, ультрафиолетовое и рентгеновское излучение. Для проверки такой возможности была использована экспериментальная установка, в которой резонатор являлся нагрузкой высокочастотного тракта. В резонатор помещались пластины полупроводниковых кристаллов. Излучение из резонатора фиксировалось электронным умножителем и фотоумножителем со сцинтилляционным преобразователем спектра излучения (для регистрации ультрафиолетового излучения). Основным результатом проведенных экспериментов заключается в том, что во всех случаях наблюдалось излучение, происхождение которого можно объяснить описанным выше механизмом излучения. В качестве примера на рис. 1.12 представлены характерные результаты экспериментов. На этом рисунке представлены осциллограммы высокочастотного импульса в резонаторе на частоте 2,7 Гц и регистрируемого излучения с кристалла ( $\lambda \sim 10^{-5}$  см) при напряженности поля 20 Кв/см. Таким образом, наблюдалось возбуждение излучения на миллионной гармонике.

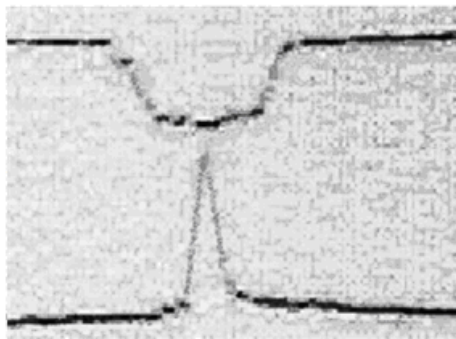


Рис. 1.12. Сигнал СВЧ (верхняя кривая) и сигнал с кристалла (нижняя кривая)

## 1.7. В ы в о д ы

Прежде всего, обратим внимание на идеи, которые объединяют исследования по отражению волн от движущихся границ для случаев, когда фазовая скорость волн меньше скорости света. В этом случае изменения характеристик электромагнитных волн позволило добиться значительного изменения частоты отраженных от движущихся границ

волн. Аналогично при распространении волн в периодически-неоднородной среде, как мы видели выше, структура поля также меняется. В пространственном спектре поля имеются компоненты, фазовая скорость которых также может быть значительно меньше скорости света. Именно наличие этой пространственной компоненты («виртуальной» волны) обусловило формирование спектра излучения нерелятивистского осциллятора, который оказался практически идентичным спектру излучения релятивистского осциллятора. При возбуждении гармоник в периодическом потенциале аналогичную модификацию пространственной структуры претерпевает волновая функция электронов. При этом, как мы видели выше, именно эти дополнительные пространственные компоненты волновой функции («виртуальные» электроны) приводят к возможности эффективного возбуждения высоких номеров гармоник. Заметим только, что если в периодически-неоднородном диэлектрике основную роль играли медленные «виртуальные» волны, то в периодическом потенциале такую же роль играют быстрые «виртуальные» частицы. Отметим, что, по-видимому, впервые на роль «виртуальных» волн при излучении заряженных частиц в периодических средах обратили внимание В. Л. Гинзбург и В. Н. Цытович [13, 17].

Оценим перспективы рассмотренного излучения относительно возможности возбуждения излучения с наиболее высокой частотой. Минимальный период неоднородности среды (потенциала), который может быть использован, представляет собой расстояние между атомами твердого тела. По порядку величины он равен  $d = 10^{-8}$  см. Практически речь может идти об ондуляторе с минимально возможным периодом. Принимая во внимание неравенство  $\lambda \gg d$ , можно рассчитывать на возбуждение электромагнитного излучения, минимальная длина волны которого составляет  $\lambda \approx 10^{-7}$  см. Излучение нерелятивистских частиц происходит на частоте  $\omega = \vec{k}\vec{v}$ . Из этого выражения для частоты можно найти величину осцилляторной скорости, которую должен иметь осциллятор:  $\beta = v/c = \lambda/d$ , т. е. в нашем случае  $\beta \approx 0.1$ . Если заряженная частица становится осциллятором в результате воздействия внешнего электромагнитного поля с частотой  $\Omega$ , то для достижения осцилляторной скорости  $\beta = 0.1$  параметр силы волны (параметр нелинейности)

$$\varepsilon = \frac{eE}{mc\omega} \quad (\text{где } E - \text{напряженность электрического поля внешней волны})$$

должен равняться 0.1.

Таким образом, в идеале можно рассчитывать, что когда на твердое тело (кристалл) будет действовать электромагнитная волна с длиной волны  $\lambda = 10^{-4}$  см, параметр силы которой равняется 0.1, то из твердого тела должно появиться излучение с  $\lambda \approx 10^{-7}$  см. Безусловно, это очень упрощенная картина излучения. Реальный процесс значительно

сложнее. Мы не будем обсуждать возникающие трудности. Многие из них очевидны. Отметим только, что даже траектория электрона в поле интенсивной электромагнитной волны значительно сложнее той, которая представлена в подразделах 1.2–1.4

Можно рассчитывать также, что аналогичное излучение будет наблюдаться, когда на твердое тело (кристалл) падает пучок заряженных частиц со скоростью  $\beta = 0.1$ . Однако пучок заряженных частиц в твердом теле будет испытывать сильное рассеяние, что приведет к нарушению когерентности излучающих частиц. Поэтому более привлекательным, по-видимому, является ансамбль осцилляторов. При этом желательно, чтобы амплитуда осцилляторов не превосходила длины свободного пробега заряженных частиц в твердом теле.

Основной интерес представляют результаты экспериментальных исследований. Поэтому ниже мы обсудим эти результаты. Результаты серии проведенных экспериментов по возбуждению гармоник, в целом, находятся в хорошем согласии с нашими представлениями о механизме излучения высоких номеров гармоник нерелятивистскими осцилляторами. Во многих случаях имеется достаточно хорошее количественное согласие теории с экспериментом. Следует отметить, что результаты экспериментов в сантиметровом диапазоне достаточно полны для однозначной интерпретации. Характеристики излучения в этом диапазоне понятны практически во всех деталях. Что касается ультрафиолетового диапазона ( $\lambda \sim 10^{-5}$  см) – ситуация менее ясна. К сожалению, мы не имеем достаточных экспериментальных возможностей для более детального исследования этого диапазона. Нам в настоящее время не ясно, какую роль играют электроны, находящиеся вблизи поверхности кристалла и в его объеме. Не ясно также соотношение вкладов в излучение периодичности потенциала и периодичности диэлектрической проницаемости.

В рамках поставленных экспериментов, смещение образованных внешним полем осцилляторов должно превышать  $10^4 - 10^5$  атомных расстояний в кристалле. При этом на динамику движения электронов, находящихся в объеме кристалла, существенную роль должны играть столкновения. Столкновения, безусловно, мешают когерентному излучению. Если в качестве падающей волны, формирующей осцилляторы, использовать лазерное излучение, то необходимое смещение электронов будет составлять всего несколько сотен атомных расстояний. Роль столкновений при этом будет существенно меньшей. Кроме того, кристалл можно охлаждать. Можно рассчитывать, что за время формирования излучения, кристалл не успеет разрушиться.

В настоящее время нам неизвестны другие механизмы (кроме механизмов, описанных выше), которые бы могли приводить к наблюдаемому излучению. Действительно, такое излучение могло быть порождено пробоем. Нами специально были подобраны условия, чтобы пробой отсутствовал. Такое излучение могло бы возникнуть в результате

возбуждения каких-либо примесных центров полупроводника. Однако релаксация примесных центров носит совсем другой характер. Следует заметить, что когда создавались условия для существования пробоя на поверхности кристалла, интенсивность наблюдаемого излучения значительно возрастала. Это можно объяснить как излучением плазмы, так и тем фактом, что количество электронов вблизи поверхности кристалла в этих условиях значительно увеличивалось. Последний факт может приводить к существенному увеличению эффективности рассматриваемого механизма излучения. Однако эти факты требуют дальнейшего изучения.

Следует отметить, что выше для мощности излучения была получена формула в предположении, что поле пространственно периодического потенциала меньше поля внешней волны. Во многих случаях это не так. Однако, как показывают предварительные расчеты, и в том случае, когда выполнено обратное неравенство, спектр излучения заряженной частицы будет иметь максимум на той же частоте  $\omega \approx K\nu$ . Таким образом, общей особенностью механизма излучения в периодических средах и в периодических потенциалах является тот факт, что частица при излучении может приобретать или отдавать часть импульса периодической структуре. Можно, по-видимому, считать, что для электронов, находящихся вблизи поверхности кристалла справедливо использованное нами выше предположение о величинах полей, в которых движутся излучающие частицы. Для электронов в объеме кристалла в условиях наших экспериментов внутрикристаллическое поле значительно превышает напряженность внешней волны.

Особый интерес представляет коллективный процесс излучения. В сантиметровом диапазоне длин волн, безусловно, наблюдалось именно коллективное излучение. В оптическом и ультрафиолетовом диапазонах можно только рассчитывать на такое излучение. Имеющиеся экспериментальные результаты не дают возможности сделать какое-либо заключение по этому поводу.

Полученные выше результаты указывают на потенциальную возможность создания достаточно простых и компактных источников ультрафиолетового и рентгеновского излучения, физическим механизмом работы которых является излучение нерелятивистских заряженных частиц. Эти частицы должны двигаться в пространственно-периодическом потенциале или в пространственно-периодическом диэлектрике. К аналогичным же выводам приводят и результаты предварительных экспериментальных исследований (см. подраздел 1.6). Отметим также, что при реализации таких источников могут быть использованы ондуляторы с минимальными из существующих в природе периодами и максимальными плотностями эмиттеров (плотность электронов твердого тела). Заметим также, что важным элементом этих источников является тот факт, что эмиттерами являются не потоки заряженных частиц, а осцилляторы, которые легко создаются при действии на твердое тело внешнего интенсивного лазерного излучения.

## РАЗДЕЛ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭНЕРГИИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЭНЕРГИЮ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ С ПОМОЩЬЮ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭФФЕКТОВ ВТОРИЧНЫХ РЕЗОНАНСОВ [30–37]

Известно, что вторичные резонансы могут играть существенную роль в динамике гамильтоновых систем только при достаточно большой величине возмущения (смотри, например, [29]). Действительно, если величина возмущения мала ( $\varepsilon \ll 1$ ), то величины эффектов, связанных со вторичными резонансами, малы (например, ширина вторичных нелинейных резонансов) и пропорциональны  $1/(1/\varepsilon)!$ . Ниже мы покажем, что при наличии внешнего низкочастотного возмущения вторичные резонансы с ним могут играть значительно более существенную роль.

В подразделах 2.1–2.4 ([30–31]), в рамках резонансной теории возмущений, рассмотрена динамика гамильтоновых систем с двумя степенями свободы при наличии низкочастотного внешнего возмущения ее параметров. Показано, что, в общем случае, низкочастотные возмущения приводят к развитию динамического хаоса и к возможности развития параметрической неустойчивости. Наличие параметрической неустойчивости позволяет возбуждать высокочастотные колебания за счет энергии внешнего низкочастотного возмущения. В линейных гамильтоновых системах с двумя степенями свободы отсутствует механизм усиления высокочастотных колебаний внешним низкочастотным возмущением. В распределенных системах это не так. В подразделе 2.5 [30, 32] рассмотрена простая модель распределенной системы. Она описывает динамику амплитуд взаимодействующих волн. В этом подразделе показано, что в результате развития параметрической неустойчивости низкочастотные возмущения в распределенных системах могут возбуждать высокочастотные. В подразделах 2.6–2.7 рассмотрены два примера влияния низкочастотных возмущений на динамику систем с бесконечным числом степеней свободы [33–34]. Возможно, что ключевой характеристикой связи между осцилляторами является их невзаимность. Доказательство этого факта содержится в подразделе 2.8 [35]. В разделе 2.9 описан механизм, который позволяет преобразовать энергию НЧ-колебаний в энергию ВЧ-колебаний, используя НЧ нормальные частоты системы одинаковых линейных осцилляторов [36]. Интересная и важная особенность вторичных резонансов описана в подразделе 2.10. В этом разделе показано, что не

только энергия регулярных низкочастотных колебаний может быть преобразована в энергию регулярных ВЧ-колебаний, но и энергия низкочастотного шумового источника также может быть преобразована в энергию высокочастотных колебаний [34, 37]. Однако следует отметить, что спектры этих высокочастотных колебаний оказываются достаточно широкими. В подразделе 2.11 обсуждаются полученные результаты. Кроме того, в нем кратко описан эксперимент [35], в котором показана возможность использовать вторичные резонансы для преобразования энергии низкочастотного излучения в энергию высокочастотного излучения. В серии этих демонстрационных экспериментов удалось в 40-100 раз увеличить частоту излучения.

## 2.1. Постановка задачи и общие уравнения [30]

Рассмотрим динамику системы с двумя степенями свободы, которая имеет следующий гамильтониан:

$$H = H_0(\vec{J}) + \varepsilon \cdot H_1(\vec{J}, \vec{\theta}, t). \quad (2.1)$$

Будем считать, что возмущение периодически по угловой переменной и представляется в виде ряда:

$$H_1 = \sum_{k,m} h_{k,m}(\vec{J}, t) \cdot \exp(i\vec{n} \cdot \vec{\theta}), \quad (2.2)$$

где  $\vec{n} \cdot \vec{\theta} = k\theta_1 + m\theta_2$ .

Пусть между невозмущенными системами существуют резонансные соотношения  $s_1 \cdot \omega_1 = s_2 \cdot \omega_2$ , где  $s_k$  – целые числа,  $\omega_k = \partial H_0 / \partial J_k$ . Следуя резонансной теории возмущений для перехода к новым каноническим переменным, воспользуемся следующей производящей функцией:

$$W(\vec{\theta}, \vec{I}) = (s_1\theta_1 - s_2\theta_2)I_1 + I_2\theta_2.$$

Обратим внимание, что производящая функция явно не зависит от времени. Используя эту функцию, получим следующее выражение для нового гамильтониана:

$$\begin{aligned} \bar{H}(\vec{I}, \vec{\Psi}) = & \bar{H}_0(\vec{I}) + \varepsilon \cdot \sum_{k,m} h_{k,m}(\vec{I}, t) \cdot \\ & \cdot \exp \left[ i \left( \frac{k}{s_1} \Psi_1 + \left( k \cdot \frac{s_2}{s_1} + m \right) \cdot \Psi_2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $\vec{I}, \vec{\Psi}$  – новые канонические переменные. Причем новая угловая переменная  $\Psi_1 = s_1 \theta_1 - s_2 \theta_2$  является медленно меняющейся. Угловая переменная  $\Psi_2 = \theta_2$  остается быстрой. Усредним гамильтониан (2.3) по быстрой угловой переменной. Будем считать при этом, что коэффициенты в ряду разложения возмущения обладают следующей симметрией  $h_{-k,m} = h_{k,-m}$ , то есть, возмущение действительно. Тогда усредненный гамильтониан приобретет вид:

$$\bar{H} = H_0(\vec{I}) + \varepsilon \cdot \sum_m h_{-ms_1, ms_2} \cdot 2 \cdot \cos(m\Psi_1). \quad (2.4)$$

## 2.2. Динамика систем без вырождения

Пусть,  $\vec{I}_0$  – значения действий, при которых условие резонансов выполняется точно. Разложим члены в (2.4) в малой окрестности этих действий. Ограничиваясь только главными членами, входящими в (2.4), получим следующее простое выражение для гамильтониана:

$$\bar{H} = \left( \frac{\partial^2 \bar{H}_0}{\partial I_1^2} \right)_{\vec{I}_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\Delta I)^2 + 2\varepsilon \cdot h_{-s_1, s_2}(\vec{I}_0, t) \cdot \cos \Psi_1. \quad (2.5)$$

Здесь учтено, что  $I_2$  является интегралом. Поэтому  $\Delta I = I_1 - I_{10}$ . Гамильтониан (2.5) представляет собой стандартный гамильтониан, в котором коэффициенты зависят от времени. Динамика системы, которая имеет гамильтониан (2.5), описывается следующим уравнением математического маятника:

$$\ddot{\Psi}_1 + \omega_B^2 \cdot \sin \Psi_1 = 0, \quad (2.6)$$

где  $\omega_B^2 = -2\varepsilon \cdot h_{-s_1, s_2}(\vec{I}_0, t) \cdot \left( \frac{\partial^2 \bar{H}_0}{\partial I_1^2} \right)_{\vec{I}_0}$ .

Выберем для определенности и простоты зависимость коэффициентов возмущения от времени в виде  $h = h(\bar{I}_0)(1 + \mu \cdot \cos \Omega t)$ ;  $h \equiv h_{-s_1, s_2}$ . При этом уравнение (2.6) можно представить в виде

$$\ddot{\Psi} + \sin \Psi = \frac{\mu}{2} [\sin(\Psi + \Omega_1 \tau) + \sin(\Psi - \Omega_1 \tau)], \quad (2.7)$$

где  $\Psi \equiv \Psi_1$ ;  $\tau = \omega_B t$ ;  $\Omega_1 = \Omega / \omega_B$ .

Динамика системы, которая описывается уравнением (2.7), характеризуется тремя нелинейными резонансами. Полуширина основного из них равна 2 ( $\Delta \Psi = 2$ ), двух других —  $2\sqrt{\mu}$ . Расстояние между этими нелинейными резонансами равно  $\Omega_1$ . Отсюда следует, что при выполнении условия  $\Omega_1 < 2(1 + \sqrt{\mu})$  динамика системы становится хаотической. Из этого условия, в частности, следует, что если частота внешнего низкочастотного возмущения порядка или меньше частоты биения связанной системы (баунс-частоты), то динамика возмущенной системы будет всегда хаотической при любых значениях амплитуды возмущения. Нужно, конечно, помнить, что характеристики этого хаотического движения, такие, например, как коэффициент диффузии, будут существенно зависеть от величины возмущения.

Обратим внимание еще на одну важную особенность динамики малых колебаний возмущенной системы. Как видно из уравнения (2.6), при малых амплитудах колебаний оно описывает динамику линейного маятника. Если частота возмущения такова, что выполняются условия параметрического резонанса  $\Omega = 2\omega_B$ , то внешнее низкочастотное возмущение вызовет параметрическую неустойчивость. Амплитуды колебаний при этом будут экспоненциально нарастать с инкрементом порядка  $\mu$ .

### 2.3. Динамика систем с вырождением

Выше мы рассмотрели невырожденный случай, то есть случай, когда вторая производная от невозмущенного гамильтониана не равна нулю. Этот случай соответствует случаю зависимости невозмущенной частоты от величины действия. Рассмотрим теперь динамику системы, обладающей вырождением. Для такой системы  $(\partial^2 \bar{H}_0 / \partial I_1^2)_{\bar{I}_0} = 0$ .

В этих условиях, как известно, под действием малого возмущения одинаково мало меняются как величина действия, так и угловая

переменная. Разложим выражение для гамильтониана (2.4) в малой окрестности тех точек, которые соответствуют стационарным точкам в отсутствии явной зависимости от времени. При этом будем производить разложение не только по переменной действия, но и по угловой переменной. Получаемый при этом гамильтониан соответствует гамильтониану линейного маятника. Уравнения движения этого маятника удобно записать в виде

$$\dot{\varphi} = A(t) \cdot j; \dot{j} = B(t) \cdot \varphi, \quad (2.8)$$

где  $\varphi \equiv \Psi - \Psi_0$  – малое отклонение угловой переменной от стационарного состояния;  $j \equiv I_1 - I_{10}$  – малое отклонение переменной действия от значения, которое соответствует точному резонансу;

$$A = \left[ \partial^2 h_{00} / \partial I_1^2 + 2 \cdot \partial^2 h_{-s_1, s_2} / \partial I_1^2 \right]; \quad B = 2h_{-s_1, s_2}.$$

Из (2.8), в частности, следует, что если отношение коэффициентов  $A$  и  $B$  не зависит от времени ( $A/B = \text{const} \equiv c$ ), то система (2.8) имеет дополнительный интеграл –  $\varphi^2 - c \cdot j^2 = \text{const}$ . В этом случае система (2.8) не имеет нарастающих со временем решений. Параметрические неустойчивости в ней не развиваются. Если же отношение коэффициентов  $A$  и  $B$  зависит от времени, то система (2.8) эквивалентна обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с меняющимися во времени коэффициентами:

$$\ddot{z} + \left[ -AB + \left( \dot{A}/2A \right)^2 + \ddot{A}/2A \right] \cdot z = 0, \quad (2.9)$$

где  $z = \Psi / \sqrt{A}$ .

Из уравнения (2.9) видно, что при определенных значениях параметров возмущения возможна параметрическая неустойчивость.

## 2.4. Связанные линейные осцилляторы

Важным примером вырожденных систем являются линейные системы. В качестве примера такой системы рассмотрим систему, представляющую собой два связанных между собой линейных осциллятора. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^2 [a_k \cdot p_k^2 + b_k \cdot q_k^2] + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{k=1}^2 [\alpha_k(t) \cdot p_k^2 + \beta_k(t) \cdot q_k^2] + \quad (2.10)$$

$$+ \varepsilon \cdot [c(t) \cdot p_1 \cdot p_2 + d(t) \cdot q_1 \cdot q_2].$$

Первая сумма в (2.10) описывает систему двух независимых осцилляторов. Вторая сумма описывает малое возмущение этих независимых осцилляторов. Третье слагаемое в (2.10) описывает малую связь между осцилляторами. Перейдем от канонических переменных  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  к новым каноническим переменным – действиям  $\vec{J}$  и углам  $\vec{\theta}$ . Для такого перехода воспользуемся следующей производящей функцией:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^2 R_i \cdot q_i^2 \cdot \operatorname{ctg} \theta_i,$$

где  $R_i = \sqrt{b_i/a_i}$ .

Чтобы связь между линейными осцилляторами была эффективной, необходимо, чтобы их невозмущенные частоты совпадали. Поэтому ниже мы будем считать, что выполнены условия (условия резонанса)  $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = \omega^2$ . Гамильтониан (2.10) в переменных действия – угол будет иметь вид гамильтониана (2.1). Производя в этом гамильтониане те же действия, которые мы проводили выше при переходе от гамильтониана (2.1) к усредненному гамильтониану (2.4), получим

$$\bar{H} = \omega \cdot I_2 + \frac{\varepsilon}{4} [I_1 \cdot (\alpha_1 \cdot R_1 + \beta_1 / R_1) + (I_2 - I_1) \cdot (\alpha_2 \cdot R_2 + \beta_2 / R_2)] + \quad (2.11)$$

$$+ \varepsilon \sqrt{I_1 \cdot (I_2 - I_1)} \left[ c \cdot \frac{b_1 \cdot b_2}{\omega^2} + d \cdot \frac{\omega^2}{b_1 \cdot b_2} \right] \cdot \cos \Psi_1.$$

Легко увидеть, что соответствующая ему система обыкновенных дифференциальных уравнений типа (2.8) такова, что отношение ее коэффициентов  $A$  и  $B$  не зависит от времени ( $A/B = \text{const} \equiv c$ ). Таким образом, система связанных линейных осцилляторов, которая описывается гамильтонианом (2.10), приобретает под действием возмущения, зависящего от времени, сложную временную динамику. Однако, в ней не могут реализоваться условия для параметрической неустойчивости под действием внешнего низкочастотного возмущения. Всегда ли это так? Ниже мы увидим, что для нестационарных систем с двумя степенями свободы с неидеальными связями это не так. Кроме того, в распределенных системах также можно реализовать условия для развития параметрической неустойчивости.

Проиллюстрируем сформулированное утверждение на простейшем примере. Этим примером может быть система двух связанных одинаковых осцилляторов, связи между которыми зависят от времени и являются невзаимными. Систему уравнений, которая описывает динамику таких осцилляторов, можно записать в виде

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \mu_1(t) \cdot x_2, \quad \ddot{x}_2 + x_2 = \mu_2(t) \cdot x_1. \quad (2.12)$$

Если  $(\mu_1/\mu_2) \neq const$ , система (2.12) не может быть записана в гамильтоновом виде с гамильтонианом (2.10) (гамильтониан для системы (2.12), в общем случае, может быть написан в расширенном фазовом пространстве). Причина отсутствия гамильтониана заключается в том, что виртуальная работа реакций связей не равна нулю, т. е. связи в этом случае являются неидеальными. Физическим примером системы, которая может быть описана системой уравнений (2.12), является динамика полей двух связанных одинаковых резонаторов. Причем связи между этими резонаторами разные. Такие связи можно осуществить, например, с помощью каналов, которые имеют гиротропные вставки.

При малых коэффициентах связи ( $\mu_i \ll 1$ ) для определения медленно меняющихся амплитуд  $a_i(t)$  колебаний маятников, для решения  $x_i = a_i(t) \cdot \exp(it)$ , получим следующую систему укороченных уравнений:

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2i} \mu_1 \cdot a_2, \quad \dot{a}_2 = \frac{1}{2i} \mu_2 \cdot a_1. \quad (2.13)$$

Пусть коэффициенты связи имеют вид  $\mu_i = \alpha_i + \beta_i \cdot \cos(\gamma \cdot t)$ , где  $\alpha_i, \beta_i$  – постоянные. Если  $\beta_i = 0$ , то возникает периодическая модуляция амплитуд  $a_i$  с частотой  $\Omega = \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2} / 2$ , т. е. энергия одного маятника перекачивается в энергию другого и обратно. При  $\beta_i \neq 0$  система уравнений (2.13) эквивалентна уравнению Хилла. При этом возможен рост амплитуды взаимодействующих осцилляторов. Отметим, что из системы (2.13), в частности, следует

$$d(a_1^2) = \frac{\mu_1}{\mu_2} d(a_2^2). \quad (2.14)$$

Из (2.14) следует, что если  $(\mu_1/\mu_2) = const$ , то система (2.13) имеет интеграл (и гамильтониан типа (2.10)):

$$a_1^2 - (\mu_1/\mu_2)a_2^2 = \text{const} . \quad (2.15)$$

При выполнении (2.15) система (2.13) не имеет нарастающих решений. Усиление при этом отсутствует. Из (2.14) также следует, что в первом приближении по параметру  $\beta_i/\alpha_i$  существует интеграл (2.15), если  $\beta_1/\alpha_1 \rightarrow \beta_2/\alpha_2$ . Чем больше различие в величинах  $\beta_1/\alpha_1$  и  $\beta_2/\alpha_2$ , тем большим будет инкремент параметрического усиления. Пусть для определенности  $\beta_1/\alpha_1 \gg \beta_2/\alpha_2$  и выполнено условие параметрического резонанса:  $\gamma = 2\Omega$ . Тогда, воспользовавшись теорией возмущения, найдем, что амплитуды связанных осцилляторов экспоненциально увеличиваются:

$$a_1 \sim a_2 \sim \exp(\Phi t), \quad (2.16)$$

где  $\Phi = (\beta_1/2 \cdot \alpha_1)$ .

## 2.5. Системы с бесконечным числом степеней свободы

Таким образом, в линейной системе с двумя степенями свободы с идеальными связями отсутствует механизм параметрической перекачки энергии низкочастотных колебаний в энергию высокочастотных движений. В такой системе для перекачки необходим элемент нелинейности, или связи должны быть неидеальными. Однако для многих интересных для приложений случаев, например, для рентгеновского излучения величины нелинейностей исчезающе малы. Для реализации условий параметрической неустойчивости в линейных системах следует организовать невзаимную (неидеальную) связь между взаимодействующими частями. Такими свойствами, по-видимому, могут обладать системы с большим числом степеней свободы. Действительно, в таких системах импульс возмущения может распространяться только в одну сторону. Если распределенную систему представить в виде бесконечной системы связанных осцилляторов, то воздействие одного осциллятора на соседнего осциллятора не будет равно обратному воздействию, т. е. в таких системах связи между осцилляторами невзаимны. Ниже мы покажем, что действительно в распределенных системах параметрическое усиление имеет место.

Для доказательства такой возможности представим себе среду, в которой происходит взаимодействие двух волновых процессов. Это может быть, например, трехволновое взаимодействие в приближении, когда амплитуда одной из волн (амплитуда волны накачки) не меняется.

Пусть, кроме того, параметры среды медленно меняются в пространстве и во времени. Конкретные примеры мы приведем ниже. Укороченные уравнения, описывающие эволюцию амплитуд этих волн, можно представить в виде

$$\begin{aligned}\alpha_0 \frac{\partial A_0}{\partial z} + \mu_0 \frac{\partial A_0}{\partial \tau} &= \frac{1}{2i} \left[ Q_0 A_0 + \frac{q_0}{2} A_1 \right], \\ \alpha_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + \mu_1 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} &= \frac{1}{2i} \left[ Q_1 A_1 + \frac{q_1}{2} A_0 \right],\end{aligned}\tag{2.17}$$

где  $A_i$  – амплитуды медленно меняющихся взаимодействующих друг с другом волн;  $q_i$  – постоянные, определяющие связь между волнами,  $Q_i = Q_i(z, \tau)$  – медленно меняющиеся во времени и в пространстве заданные функции.

К системе уравнений (2.17) сводится описание достаточно широкого круга физических процессов.

Определим вначале наиболее общие условия, при выполнении которых система уравнения (2.17) может иметь параметрически нарастающие решения. Для этого систему уравнения (2.17) в частных производных перепишем в виде системы характеристических уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dA_0}{dz} &= \frac{1}{2i\alpha_0} \left[ Q_0 \cdot A_0 + \frac{q_0}{2} A_1 \right]; \quad \frac{d\tau}{dz} = \frac{\mu_0}{\alpha_0}; \\ \frac{dA_1}{dz} &= \frac{1}{2i\alpha_1} \left[ Q_1 \cdot A_1 + \frac{q_1}{2} A_0 \right]; \quad \frac{d\tau}{dz} = \frac{\mu_1}{\alpha_1}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Первая пара уравнений в (2.18) эквивалентна первому уравнению системы (2.17), вторая пара – второму уравнению. Легко увидеть, что если функции  $Q_0$  и  $Q_1$  совпадают и совпадают характеристики  $(\mu_0/\alpha_0 = \mu_1/\alpha_1)$ , то система (2.18) полностью интегрируется. В ней, так же, как и в системе с двумя степенями свободы, отсутствует параметрическое усиление. Наличие низкочастотных возмущений при этом приводит только к усложнению динамики амплитуд  $A_i$ . Легко также увидеть, что если хотя бы одно из этих условий (совпадение характеристик и равенство функций  $Q_0$  и  $Q_1$ ) не выполняется, то, в общем случае, система уравнений (2.17) или (2.18) может иметь решение, описывающее параметрическое усиление.

Перейдем теперь к более детальному определению условий возникновения параметрического усиления. Пусть коэффициенты  $Q_i$  являются периодическими функциями времени  $\tau$  и координаты  $z$ . Выберем эту зависимость в виде  $Q_i = \varepsilon_i \cdot \cos(Kz - \tau)$ . Тогда решение системы уравнений (2.17) можно искать в виде

$$A_i = \sum a_{i,n} \cdot \exp(in\tau). \quad (2.19)$$

Подставляя решение (2.19) в систему уравнений (2.17) для отыскания амплитуд Фурье  $a_{i,n}$ , получим следующую бесконечную связанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{\partial a_{0,n}}{\partial z} + in\mu_0 \cdot a_{0,n} &= \frac{q_0}{4i} a_{1,n} + \\ &+ \frac{\varepsilon_0}{4i} \left[ a_{0,n+1} \cdot \exp(iKz) + a_{0,n-1} \cdot \exp(-iKz) \right], \\ \alpha_1 \frac{\partial a_{1,n}}{\partial z} + in\mu_1 \cdot a_{1,n} &= \frac{q_1}{4i} a_{0,n} + \\ &+ \frac{\varepsilon_1}{4i} \left[ a_{1,n+1} \cdot \exp(iKz) + a_{1,n-1} \cdot \exp(-iKz) \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Эту систему удобно представить в следующем виде:

$$v_n'' + \lambda_n^2 v_n = \varepsilon_0 F_n, \quad (2.21)$$

где  $v_n = a_{0,n} \cdot \exp(iR_n z / 2)$ ,  $B_n = \left[ \frac{q_1 q_0}{16 \cdot \alpha_0 \alpha_1} - n^2 \frac{\mu_0 \mu_1}{\alpha_0 \alpha_1} \right]$ ,

$$R_n = n \left[ \frac{\mu_0}{\alpha_0} + \frac{\mu_1}{\alpha_1} \right], \quad \lambda_n^2 = B_n + R_n^2 / 4, \quad D = \left[ 1 + (\varepsilon_1 \cdot \alpha_0) / (\varepsilon_0 \cdot \alpha_1) \right],$$

$$F_n = \frac{1}{4i\alpha_0} \left\{ \begin{aligned} &v_{n+1} \cdot \exp(iKz - iR_{n+1}z/2) \cdot \left[ C_n^+ - \frac{i}{2} DR_{n+1} \right] + \\ &+ v_{n-1} \cdot \exp(-iKz - iR_{n-1}z/2) \cdot \left[ C_n^- - \frac{i}{2} DR_{n-1} \right] + \\ &+ D \left[ v'_{n+1} \cdot \exp(iKz - iR_{n+1}z/2) + v'_{n-1} \cdot \exp(-iKz - iR_{n-1}z/2) \right] \end{aligned} \right\}$$

$$C_n^{\pm} = i \left[ \pm K + n \frac{\mu_1}{\alpha_1} + \frac{\varepsilon_1 \alpha_0 (n \pm 1)}{\varepsilon_0 \alpha_1} \mu_0 \right].$$

Система уравнений (2.21) представляет собой бесконечную систему связанных линейных осцилляторов. Связь этих осцилляторов обусловлена наличием малого ( $\varepsilon_i \ll 1$ ) медленного периодического изменения параметров среды, в которой происходит взаимодействие волн. Решение системы уравнений (2.17) будем искать в виде

$$v_n = w_n(z) \cdot \exp(i\lambda_n z) + \zeta_n(z) \cdot \exp(-i\lambda_n z) + \varepsilon_0 V(z). \quad (2.22)$$

Подставим решение (2.22) в систему уравнений (2.21) и потребуем, чтобы в уравнении для функции  $V(z)$  отсутствовали резонансные возбуждающие силы. При выполнении резонансных условий

$$K = \lambda_n - \lambda_{n+1} - \frac{1}{2}(R_n - R_{n+1}) \quad (2.23)$$

в первом порядке теории возмущений мы получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для определения  $w_n$  и  $w_{n+1}$ , а также аналогичную систему для  $\zeta_n$  и  $\zeta_{n+1}$ .

В результате для определения, например функции  $w_n$ , можно получить следующее обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка:

$$w_n'' + G \cdot w_n = 0, \quad (2.24)$$

$$\text{где } G \equiv \frac{(-1) \cdot \varepsilon_0^2}{64 \cdot \alpha_0^2 \cdot \lambda_n \lambda_{n+1}} \left[ C_n^+ - \frac{i}{2} D \cdot (R_{n+1} - 2\lambda_{n+1}) \right] \cdot \left[ C_{n+1}^- - \frac{i}{2} D \cdot (R_n - 2\lambda_n) \right].$$

Из (2.24) видно, что как только параметры системы таковы, что  $G < 0$ , то амплитуды будут экспоненциально нарастать. Вместе с ними будут нарастать и амплитуды Фурье поля  $a_{i,n}$ . При выполнении другого резонансного условия

$$K = \lambda_n + \lambda_{n+1} - \frac{1}{2}(R_n - R_{n+1}) \quad (2.25)$$

требование отсутствия резонансных возбуждающих членов в правой части уравнения для  $V(z)$  приводит к связи функций  $w_n$  и  $\zeta_{n+1}$ . Для определения функции  $w_n$  так же, как и в предыдущем резонансном случае, может быть получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, аналогичное уравнению (2.24):

$$w_n'' + G_1 \cdot w_n = 0, \quad (2.26)$$

$$\text{где } G_1 \equiv \frac{(+1) \cdot \varepsilon_0^2}{64 \cdot \alpha_0^2 \cdot \lambda_n \lambda_{n+1}} \left[ C_n^+ - \frac{i}{2} D \cdot (R_{n+1} + 2\lambda_{n+1}) \right] \cdot \left[ C_{n+1}^- - \frac{i}{2} D \cdot (R_n - 2\lambda_n) \right].$$

Как и в предыдущем резонансном случае при выполнении условия  $G_1 < 0$  будет происходить экспоненциальное усиление амплитуд взаимодействующих волн.

## 2.6. Параметрическое усиление рентгеновского излучения в кристаллах

Покажем, что к описанному выше случаю сводится процесс рассеяния рентгеновского излучения идеальными кристаллами, восприимчивость которых промодулирована низкочастотным возмущением. Пусть кристалл занимает нижнее полупространство  $z > 0$  и может быть описан следующей восприимчивостью:

$$\chi = \chi_0 + q \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varepsilon \cdot \cos(K \cdot z - \Omega t). \quad (2.27)$$

Здесь  $\vec{K}$  – вектор обратной решетки кристалла;  $q \sim \chi_0 \gg \varepsilon$  – степень пространственно-временной периодической неоднородности, созданной внешним источником;  $K \ll \kappa$ .

Для описания процесса рассеяния рентгеновского излучения таким кристаллом мы ограничимся рамками двухволновой динамической теории дифракции. Тогда поле в кристалле можно искать в виде

$$\vec{E} = \sum_{j=0}^1 A_j(\vec{r}, t) \cdot \exp(-i\vec{k}_j \vec{r} + i\omega t), \quad (2.28)$$

$$\text{где } \vec{k}_1 = \vec{k}_0 + \vec{K}; \quad k_1^2 = k_0^2 = \omega^2/c^2.$$

Будем считать, что падающее излучение ничем не ограничено в поперечном к оси  $Z$  направлению (эффектами, связанными с ограниченностью кристалла и падающего излучения в поперечном направлении пренебрегаем). Кроме того, считаем, что  $\Omega \ll \omega$ . Тогда изменения амплитуд взаимодействующих волн зависят только от времени и от  $Z$ . Из уравнений Максвелла легко получить укороченные уравнения, описывающие динамику изменения этих амплитуд. В безразмерных переменных  $\tau = \Omega t$ ;  $z = k_0 z = \omega z / c$  эти уравнения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{\partial A_0}{\partial z} + \mu \frac{\partial A_0}{\partial \tau} &= \frac{1}{2i} (Q \cdot A_0 + \frac{q}{2} A_1), \\ \alpha_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial A_1}{\partial \tau} &= \frac{1}{2i} [(Q + 2\delta) A_1 + \frac{q}{2} A_0], \end{aligned} \quad (2.29)$$

где  $\mu \equiv \frac{\Omega}{\omega} \sim q$ ;  $Q \equiv \chi_0 + \varepsilon \cdot \cos(Kz - \tau)$ ,  $\alpha_i \equiv \frac{k_{iz}}{k_0} = \cos \theta_i$ ,

$$k_o^2 - k_1^2 = 2\delta \cdot k_0^2.$$

Если в системе уравнений (2.29) положить  $\mu = \varepsilon = 0$ , то эта система переходит в известную (см., например [38, 39]), которая имеет маятниковые решения. Пусть, условия берегового резонанса выполняются точно, т. е. береговая расстройка отсутствует ( $\delta = 0$ ). Пусть, кроме того, волновые числа  $k_i$  выбраны такими, которые соответствуют распространению волн не в вакууме (как в решении (2.28)), а в среде с восприимчивостью  $\chi_0$ , т. е. пусть  $k_1^2 = k_0^2 = \omega^2 / c^2 \cdot (1 - \chi_0)$ . Тогда система уравнений (2.29) будет совпадать с системой уравнений (2.17), в которой нужно положить:  $\mu_0 = \mu_1 = \mu$ ,  $Q_0 = Q_1 = Q$ ;  $q_0 = q_1 = q$ . Если при этом окажутся равными и углы  $\alpha_i$ , что соответствует симметричной схеме рассеяния Лауэ, то система (2.29) не имеет решений с параметрическим нарастанием. Это соответствует случаю полной интегрируемости системы уравнений (2.17) (или (2.18)). Для несимметричной схемы рассеяния Лауэ, как это следует из результатов предыдущего раздела, возможно параметрическое усиление рентгеновского излучения. Полагая для простоты  $\alpha_0 \sim 1$ ,  $\alpha_1 \ll 1$ ,  $n = 0$ , легко получить следующее выражение для функции  $G_1$  в формуле (2.26):

$$G_1 = -\frac{\varepsilon^2}{64 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1} \left( \lambda_0 - \lambda_1 + \frac{\mu}{2\alpha_1} \right)^2.$$

Легко увидеть, что коэффициент усиления  $\Gamma \equiv \sqrt{-G_1}$  имеет резонансную зависимость от величины  $\mu$ . Действительно, при малых  $\mu$  коэффициент усиления растет пропорционально величине  $\mu$ , т. е.  $\Gamma \sim \mu$ . При больших  $\mu$  коэффициент усиления падает с ростом  $\mu$  ( $\Gamma \sim 1/\sqrt{\mu}$ ).

Может возникнуть вопрос о практической реализации рассмотренного механизма, вопрос о способах создания пространственно-временного периодического возмущения с нужными для усиления параметрами. Предварительный анализ такой возможности показывает, что проще всего, по-видимому, такая неоднородность может быть создана с помощью двух лазерных пучков по схеме, аналогичной схеме «beat-wave». В настоящее время для возбуждения продольных ленгмюровских волн в плазме эта схема хорошо изучена не только теоретически, но и в экспериментах (см., например, [40–43]). В этой схеме параметры  $\Omega$  и  $K$  равны  $\Omega = \omega_{i2} - \omega_{i1} \equiv \Delta\omega_i$ ,  $K = k_{i2} - k_{i1}$ , где  $\omega_{ii}$  и  $k_{ii}$  – частота и волновой вектор  $i$  – го пучка лазерного излучения, которое распространяется вдоль оси  $Z$ .

Пусть мы хотим реализовать случай усиления, описанный выше. Для этого нам необходимо удовлетворить условию резонанса (2.25) при  $n=0$ . Этому условию легко удовлетворить. Действительно, перепишем выражение для  $\mu$  в виде  $\mu = (\Omega/\omega) = (\Delta\omega_i/\omega_i) \cdot (\omega_i/\omega)$ . Из этого выражения следует, что при  $(\Delta\omega_i/\omega_i) \sim 10^{-3}$  и при  $(\omega_i/\omega) \sim 10^{-3}$  (что легко достигается)  $\mu \sim q \sim 10^{-6}$ . Для плазменной волны твердого тела условия резонанса (2.25) означают, что ее фазовая скорость должна удовлетворять условию  $V_f = c \cdot \mu/K < c$ . Если считать  $V_f = c/\sqrt{\varepsilon}$ , то диэлектрическая проницаемость кристалла для лазерного излучения должна быть порядка  $\varepsilon \sim (K/\mu)^2$ . Аналогичные оценки можно провести и для других конкретных случаев.

## 2.7. Распространение волн в гиротропных средах

В качестве второго примера роли вторичных резонансов в распределенных системах рассмотрим динамику взаимодействия  $E$  и  $H$ -волн в гиротропных средах. Как известно, в общем случае, в неограниченных гиротропных средах эти волны не разделяются. Полное электромагнитное поле волн в таких средах представлено всеми компонентами электрического и магнитного полей. Если же гиротропная среда представляет собой полупространство, на границе которого задано, например, поле  $E$ -волны

$(E_x, H_y, E_z)$ , то при распространении этой волны вглубь гиротропной среды энергия поля  $E$ -волны на некотором расстоянии полностью переходит в энергию  $H$ -волны  $(H_x, E_y, H_z)$ . Это преобразование энергии выглядит как вращение плоскости поляризации волны и представляет собой эффект вращения Фарадея. Таким образом, эффект Фарадея можно представить как результат динамики двух связанных волн. Причем первичными резонансами в этой модели будет резонанс взаимодействия  $E$ -и  $H$ -волн. Если при этом компоненты тензора диэлектрической или магнитной восприимчивости будут периодическими функциями времени и координаты, то в такой системе можно ожидать эффективного проявления вторичных резонансов. Покажем, что это действительно имеет место. Гиротропную среду будем характеризовать следующими тензорами диэлектрической и магнитной восприимчивости:

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{\perp} & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{bmatrix}, \quad \hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\perp} & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

где  $\mu_{\perp} = 1 + 4\pi \frac{\omega_H^2}{\omega^2 - \omega^2} \frac{M}{H_0}$ ,  $\mu_2 = 4\pi \frac{\omega\omega_H}{\omega^2 - \omega^2} \frac{M}{H_0}$ ,  $\mu_{\parallel} = 1$ ,  $\omega_H = \frac{eH_0}{mc}$ ,

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_H^2)}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\omega_p^2 \cdot \omega_H}{\omega \cdot (\omega^2 - \omega_H^2)}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}.$$

$\vec{M} = (0, 0, M)$  – макроскопическая намагниченность феррита (магнитный момент, отнесенный к единице объема),  $n_0$  – невозмущенная плотность плазмы. Внешнее магнитное поле  $\vec{H}_0$  направлено вдоль оси  $Z$ .

Представление (2.30) строго справедливо для однородных стационарных сред и для случая, когда зависимость от времени компонент напряженности электрического и магнитного полей, распространяющихся в такой среде волн, имеет вид  $\exp(i\omega t)$ . Можно показать, что представление (2.30) будет сохраняться и в том случае, когда компоненты тензоров  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\mu}$  будут медленно меняться в пространстве и во времени. Медленность изменения во времени компонентов тензоров означает, что характерные времена изменения их величин значительно больше периода распространяющейся в гиротропной среде волн, а медленность изменения в пространстве означает, что характерные изменения этих величин происходят на расстояниях значительно больших длины волны.

Из уравнений Максвелла можно получить следующую систему связанных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для определения величин  $D = \varepsilon_{\parallel} \cdot E_z \cdot \exp(-i\omega t)$  и  $B = \mu_{\parallel} \cdot H_z \cdot \exp(-i\omega t)$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\mu_{\parallel}} \Delta_{\perp} B + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\mu_{\perp}} \frac{\partial B}{\partial z} \right] + k^2 \varepsilon_{\perp} B - 2i \frac{\omega \cdot \varepsilon_{\perp}}{c^2} \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} (k \varepsilon_2)^2 B + \\
 & + 2ik \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_{\perp} c} \frac{\partial B}{\partial t} = k \cdot \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\mu_2}{\mu_{\perp}} \right) \cdot \frac{\partial D}{\partial z} \\
 & \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \Delta_{\perp} D + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \frac{\partial D}{\partial z} \right] + k^2 \mu_{\perp} D - 2i \frac{\omega \cdot \mu_{\perp}}{c^2} \frac{\partial D}{\partial t} - \frac{1}{\mu_{\perp}} (k \cdot \mu_2)^2 D + \\
 & + 2ik \frac{\mu_2^2}{\mu_{\perp} c} \frac{\partial D}{\partial t} = -k \cdot \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\mu_2}{\mu_{\perp}} \right) \cdot \frac{\partial B}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Из системы уравнения (2.31) видно, что если недиагональные компоненты тензоров  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\mu}$  обращаются в ноль, то  $E$ – и  $H$ –волны распространяются в среде независимо. Если же эти компоненты отличны от нуля, то  $E$ – и  $H$ –волны связаны. Мы будем считать недиагональные компоненты малыми, т. е. ( $\varepsilon_2 \ll 1$ ;  $\mu_2 \ll 1$ ). В этом случае будет происходить медленное возбуждение, например, компонент  $H$ –волны, если вначале существовали только компоненты поля  $E$ –волны. Решение системы уравнений (2.31) будем искать в виде

$$\begin{aligned}
 D &= \mathcal{E}(z, t) \cdot J(\vec{k}_1 \vec{r}_{\perp}) \cdot \exp(-ik_{\parallel} z), \\
 B &= h(z, t) \cdot K(\vec{k}_2 \vec{r}_{\perp}) \cdot \exp(-ik_{\parallel} z),
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

где  $h(z, t)$ ,  $\mathcal{E}(z, t)$  – функции, которые медленно меняются от времени и от продольной координаты  $z$ ;  $J(\vec{k}_1 \vec{r}_{\perp})$  и  $K(\vec{k}_2 \vec{r}_{\perp})$  – функции, которые определяют поперечную структуру поля  $E$ – и  $H$ –волны, соответственно.

Отметим, что, в общем случае, поперечная структура  $E$ – и  $H$ –волн различна, т.е. поперечные волновые числа  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$  различны. Различны и функции  $J(\vec{k}_1 \vec{r}_{\perp})$  и  $K(\vec{k}_2 \vec{r}_{\perp})$ . В решении (2.32) мы выбрали частоту и величину продольного вектора для  $E$ – и  $H$ –волн одинаковыми.

В то же время мы предполагаем, что в отсутствии гиротропии ( $\varepsilon_2 = 0; \mu_2 = 0$ ) каждое из решений (2.32) представляет собой собственную  $E$ – и  $H$ –волну, соответственно. При этом частота и волновые вектора должны удовлетворять своему дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned}\Delta_E &\equiv k_1^2 + \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} k_{\parallel}^2 - k^2 \mu_{\perp} \cdot \varepsilon_{\parallel} = 0, & \text{для } E\text{–волн,} \\ \Delta_H &\equiv k_2^2 + \frac{\mu_{\parallel}}{\mu_{\perp}} k_{\parallel}^2 - k^2 \varepsilon_{\perp} \cdot \mu_{\parallel} = 0, & \text{для } H\text{–волн.}\end{aligned}\quad (2.33)$$

Видно, что одновременно удовлетворить этим дисперсионным уравнения, в общем случае, можно (при одинаковых  $\omega$  и  $k_{\parallel}$ ) только при различных значениях поперечных волновых чисел.

Будем теперь считать, что все компоненты тензоров  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\mu}$  имеют малые добавки, которые периодически зависят от времени и от координаты  $z$  ( $\varepsilon_{ij} \rightarrow \varepsilon_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{ij}$ ;  $\mu_{ij} \rightarrow \mu_{ij} + \tilde{\mu}_{ij}$ ;  $\varepsilon_{ij} \gg \tilde{\varepsilon}_{ij} \ll 1$ ;  $\mu_{ij} \gg \tilde{\mu}_{ij} \ll 1$ ). Подставим решение (2.32) в систему уравнений (2.31). Будем для определенности считать, что гиротропная среда представляет собой цилиндр с радиусом  $R$ . Тогда помножим первое уравнение на  $K(\vec{k}_2 \vec{r}_{\perp})$ , а второе на  $J(\vec{k}_1 \vec{r}_{\perp})$  и проинтегрируем по поперечной координате  $\vec{r}$  от 0 до  $R$ . Из (2.33), принимая во внимание тот факт, что недиагональные компоненты тензоров малы, учтем, что периодические добавки к компонентам тензоров так же малы. Тогда для отыскания медленно меняющихся амплитуд  $h(z, t)$  и  $\varepsilon(z, t)$  получим систему укороченных уравнений, которая совпадает с (2.17), если считать, что в последней положено:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\parallel} E_z &= A_0(z, t) J(\vec{k}_1 \vec{r}_{\perp}) \cdot \exp[i(\omega t - k_{\parallel} z)]; \\ \mu_{\parallel} H_z &= A_1(z, t) K(\vec{k}_2 \vec{r}_{\perp}) \cdot \exp[i(\omega t - k_{\parallel} z)];\end{aligned}\quad (2.34)$$

$$\text{где } \alpha_0 = \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \frac{k_{\parallel}}{k}; \quad \mu_0 = \frac{\Omega}{\omega} \mu_{\perp} \cdot \varepsilon_{\parallel}; \quad \alpha_1 = \frac{\mu_{\parallel}}{\mu_{\perp}} \frac{k_{\parallel}}{k}; \quad \mu_1 = \frac{\Omega}{\omega} \varepsilon_{\perp} \cdot \mu_{\parallel};$$

$$q_0 = -\frac{ik_{\parallel}}{k} \left( \frac{\mu_2}{\mu_{\perp}} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{\perp}} \right); \quad q_1 = \frac{ik_{\parallel}}{k} \left( \frac{\mu_2}{\mu_{\perp}} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{\perp}} \right);$$

$$Q_0 = \left[ (\mu_{\perp} \cdot \varepsilon_{\parallel}) - \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \left( \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \right) \right]^{(\sim)} \cdot d_0; \quad Q_1 = \left[ (\varepsilon_{\perp} \cdot \mu_{\parallel}) - \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \left( \frac{\mu_{\parallel}}{\mu_{\perp}} \right) \right]^{(\sim)} \cdot d_1.$$

Здесь  $d_i$  – некоторые константы, величина которых определяется поперечной структурой  $E$ – и  $H$ –волн, соответственно. Значок  $(\sim)$  над квадратными скобками в определении  $Q_i$  указывает, что все члены, входящие в эти скобки, пропорциональны первой степени малых периодических добавок к компонентам тензоров  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\mu}$ . Так, например, член  $(\mu_{\perp} \varepsilon_{\parallel})$  в этих скобках равен  $(\mu_{\perp} \tilde{\varepsilon}_{\parallel} + \tilde{\mu}_{\perp} \varepsilon_{\parallel})$ . При получении (2.34) мы сохранили только величины первого порядка малости по всем малым величинам.

Из системы уравнений (2.31) с учетом (2.34) для рассматриваемого нами случая могут быть получены известные результаты. Так, если, например, компоненты тензоров постоянны, то уравнения (2.31) могут описывать временную или пространственную динамику эффекта Фарадея. В частности, если на границе гиротропной среды задана  $E$ –волна, а компоненты поля  $H$ –волны равны нулю, то система уравнений (2.31) будет описывать пространственную динамику взаимодействия  $E$ – и  $H$ –волн. Для этого в системе уравнений (2.31) положим  $\partial/\partial t = 0$ . При этом эта система уравнений представляет собой укороченную систему уравнений, которая описывает динамику двух связанных осцилляторов. Она легко решается. В частности, из ее решения следует, что на расстоянии

$$L = \frac{2\lambda}{\sqrt{\mu_{\perp} \varepsilon_{\perp}} \cdot (\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp} + \mu_{\parallel} / \mu_{\perp})} \quad (2.35)$$

энергия  $E$ –волны перейдет в энергию  $H$ –волны. Расстояние (2.35) характеризует также то расстояние, на котором произойдет смена поляризации распространяющейся в гиротропной среде волны.

Пусть, теперь какие-либо из компонентов тензоров  $\hat{\varepsilon}$  или  $\hat{\mu}$  имеют периодическую во времени и в пространстве низкочастотную модуляцию. Тогда в соответствии с результатами подраздела 2.5, эта модуляция может привести к параметрическому усилению высокочастотных волн.

## 2.8. Необходимость наличия не взаимности в коэффициентах связи

Выше мы видели, что в кристаллах и в гиротропных средах могут взаимодействовать волны. Перекачка энергии между этими волнами определяется величиной связи между этими волнами. Если эти связи малы, то период перекачки (или расстояние, на котором происходит перекачка энергии между волнами), как мы видели выше, может быть

значительно большим, чем период взаимодействующих волн. В такой связанной системе появляются новые низкочастотные (длинноволновые) параметры, определяющие ее динамику. С такой низкочастотной динамикой могут в резонансе находиться внешние силовые или параметрические возмущения. Эти внешние возмущения могут передавать энергию, как мы видели выше, взаимодействующим высокочастотным волнам. Динамика взаимодействующих волн может быть описана системой взаимодействующих, в общем случае, нелинейных осцилляторов. Возникает вопрос: «При каких условиях внешние низкочастотные возмущения могут параметрически передавать свою энергию ансамблю взаимодействующих осцилляторов?». В этом подразделе мы покажем, что только наличие невязимности коэффициента связи между дискретным набором линейных осцилляторов позволяет перекачать энергию внешнего параметрического низкочастотного излучения в энергию колебаний этих осцилляторов. В следующем подразделе мы найдем условия, при которых внешнее силовое низкочастотное возмущение может резонансно передавать энергию ансамблю связанных осцилляторов.

\* \* \*

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  – связанных линейных осцилляторов. Параметры каждого из этих осцилляторов (частота, коэффициент затухания), а также коэффициенты связи между осцилляторами, в общем случае, зависят от времени. Такая динамическая система описывается следующей системой уравнений:

$$\ddot{x}_k + \nu_k(t)\dot{x}_k + \omega_k^2(t)x_k = \sum_{j=0}^N \mu_{kj}(t)x_j. \quad (2.36)$$

Для дальнейшего – удобно избавиться от второго члена в левой части уравнений (2.36). Для этого введем новые зависимые переменные:

$$z_k = x_k \exp \left[ \frac{1}{2} \int \nu_k dt \right].$$

Для этих переменных система уравнений (2.36) переписывается в виде

$$\ddot{z}_k + \left[ \omega_k^2(t) - \frac{1}{4}\nu_k^2 - \frac{1}{2}\dot{\nu}_k \right] z_k = \sum_{j=0}^N \mu_{kj}(t)z_j \exp \left[ -\frac{1}{2} \int (\nu_j - \nu_k) dt \right]. \quad (2.37)$$

В настоящем разделе нас будет интересовать простейшая система, которая состоит из одинаковых осцилляторов. В этом случае все невозму-

щенные частоты мы выбираем равными друг другу ( $\omega_k = \omega$ ). При этом (2.37) можно переписать в виде

$$\ddot{z}_k + \omega^2 [1 + F_k(t)] z_k = \sum_{j=0}^N \mu_{kj}(t) z_j \exp \left[ -\frac{1}{2} \int (\nu_j - \nu_k) dt \right], \quad (2.38)$$

где  $F_k = -(\nu_k^2 + 2\dot{\nu}_k) / 4\omega^2$ .

Нас будут интересовать системы осцилляторов, у которых коэффициенты связей малы. Если бы они отсутствовали полностью, то мы имели бы систему независимых осцилляторов, каждый из которых колебался бы с частотой  $\omega$ . Наличие малых связей приводит к изменению динамики каждого из осцилляторов. Чтобы описать это изменение, решение системы (2.38) будем искать в следующем виде:

$$z_k = A_k(t) \exp[i \cdot \omega \cdot t].$$

Здесь  $A_k$  — новая зависимая переменная, которая медленно меняется:  $\ddot{A}_k \ll \omega \cdot \dot{A}_k$ . Учитывая эти зависимости, систему уравнений для отыскания новых переменных можно представить в виде

$$\dot{A}_k = \frac{i}{2\omega} F \cdot A_k - \frac{i}{2\omega} \sum_{j=0}^N \mu_{kj} \exp[L(t)], \quad (2.39)$$

где  $L \equiv \exp \left[ -\frac{1}{2} \int (\nu_j - \nu_k) dt \right]$ . При получении (2.39) мы пренебрегли

второй производной от  $A_k$ . Ясно, что при этом была потеряна параметрическая неустойчивость. Это означает, что все зависимые от времени параметры меняются мало за время периода основной невозмущенной частоты:  $\dot{p} \ll \omega p$  где  $p(t)$  — произвольный параметр, входящий в исходные уравнения. Для анализа системы уравнений (2.39) удобно сделать следующую замену:

$$A_k = B_k \exp \left[ \frac{i}{2\omega} \int F_k dt \right].$$

Тогда для новой функции  $B_k$  получим следующую систему уравнений:

$$\dot{B}_k = -\frac{i}{2\omega} \sum_{j=0}^N \mu_{kj}(t) \cdot B_j \cdot \exp[i \cdot \Phi_{kj}(t)], \quad (2.40)$$

$$\text{где } \Phi_{kj} \equiv \frac{1}{2\omega} \int [-F_k + F_j] \cdot dt + \frac{i}{2} \int (\nu_j - \nu_k) dt.$$

Заметим, что  $\Phi_{jk} = -\Phi_{kj}$ . Удобно также ввести комплексно-сопряженные уравнения:

$$\dot{B}_k^* = \frac{i}{2\omega_{k0}} \sum_{j=0}^N \mu_{kj}(t) \cdot B_j^* \cdot \exp[-i \cdot \Phi_{kj}(t)]. \quad (2.41)$$

Используя (2.40) и (2.41), можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & [\dot{B}_k \cdot B_k^* + B_k \cdot \dot{B}_k^*] = \\ & = -\frac{i}{2\omega} \sum_{j=0}^N \mu_{kj} \{ B_j \cdot B_k^* \cdot \exp(i\Phi_{kj}) - B_k \cdot B_j^* \cdot \exp(-i\Phi_{kj}) \}, \\ & \frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=0}^N |B_k|^2 \right] = -\frac{i}{\omega} \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \mu_{kj} \operatorname{Im} \{ B_j B_k^* \exp[i\Phi_{jk}] \} \quad (k \neq j). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Легко увидеть, что выполняется такое равенство:

$$\operatorname{Im} [B_j B_k^* \exp(i\Phi_{jk})] = -\operatorname{Im} [B_k B_j^* \exp(i\Phi_{kj})]. \quad (2.43)$$

Используя это равенство, правую часть системы (2.42) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \mu_{kj} \operatorname{Im} \{ B_j B_k^* \exp[i\Phi_{jk}] \} = \\ & = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N (\mu_{kj} - \mu_{jk}) \operatorname{Im} \{ B_j B_k^* \exp[i\Phi_{jk}] \}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Если связи взаимные ( $\mu_{jk} = \mu_{kj}$ ), то правая часть (2.42) обращается в ноль. В этом случае существует интеграл:

$$\sum_{k=0}^N |B_k|^2 = \text{const} . \quad (2.45)$$

Наличие интеграла (2.45) указывает на тот факт, что первоначальная энергия, которая была запасена в системе линейных осцилляторов, меняться не может. Это, в свою очередь, означает, что никакие изменения параметров рассматриваемой системы во времени не могут приводить к увеличению энергии этих осцилляторов. Таким образом, только при наличии невзаимных связей можно рассчитывать на параметрическое усиление низкочастотными внешними возмущениями высокочастотных колебаний связанных линейных осцилляторов.

## 2.9. Низкочастотные нормальные Частоты ансамбля связанных линейных осцилляторов

Выше мы рассмотрели низкочастотную динамику системы связанных осцилляторов для случая, когда низкая частота этой динамики не совпадает ни с одной из нормальных частот этого ансамбля. При этом ансамбль таких осцилляторов не может резонансно откликаться на внешнее силовое воздействие даже тогда, когда частота этого воздействия совпадает с частотой с низкочастотной динамикой ансамбля. Мы видели, что только изменение параметров (коэффициентов связи осцилляторов) позволяет реализовать резонансное воздействие внешнего сигнала на ансамбль. Причем, связь должна быть невзаимной. С другой стороны, известно, что система связанных линейных осцилляторов имеет набор нормальных частот, которые отличаются от парциальных частот отдельных осцилляторов. Важной особенностью нормальных частот является тот факт, что минимальная из них оказывается меньше минимальной из парциальных частот, а максимальная — больше максимальной из парциальных частот. Причем минимальная нормальная частота может быть очень маленькой. В этом случае, воздействуя на такой ансамбль связанных осцилляторов внешним низкочастотным сигналом, частота которого близка к минимальной нормальной частоте, можно резонансно усилить колебания такого ансамбля. Однако надо иметь в виду, что все связанные осцилляторы при таком возбуждении будут колебаться также на частоте значительно меньшей их парциальных частот. Однако, если в какой-то момент времени мы разорвем связи, то энергия осцилляторов, полученная от внешнего возмущения, перейдет в энергию колебаний отдельных осцилляторов на их парциальных частотах. Эти частоты (парциальные) могут быть значительно выше частоты внешнего возмущения. Таким образом, в такой схеме возбуждения возможно усиление колебаний высокочастотных осцилляторов за счет энергии внешнего

низкочастотного сигнала. Проиллюстрируем такую возможность преобразования энергии НЧ-колебаний в энергию ВЧ-колебаний на примере большого числа связанных, одинаковых, линейных осцилляторов. Пусть у нас имеется система с гамильтонианом:

$$H = \sum_{i=0}^N \left( \frac{p_i^2}{2} + \omega_0^2 \frac{q_i^2}{2} \right) + \mu \cdot q_0 \cdot \sum_{j=1}^N q_j, \quad (2.46)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \mu = \text{const}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad H = \text{const}. \quad (2.47)$$

Эта система представляет собой  $N$  связанных линейных осцилляторов. Так как коэффициент связи и собственные частоты (парциальные) не зависят от времени, то гамильтониан является постоянной функцией (энергия системы должна сохраняться). Из (2.46) легко получить систему уравнений для осцилляторов:

$$\ddot{p}_i + \omega_0^2 p_i = -\mu \cdot p_0, \quad \ddot{p}_0 + \omega_0^2 p_0 = -\mu \cdot \sum_{i=1}^N p_i. \quad (2.48)$$

Система (2.48) описывает динамику  $N$  связанных линейных осцилляторов. Причем, как говорилось выше, все осцилляторы связаны друг с другом только через нулевой осциллятор (см. рис. 2.1).

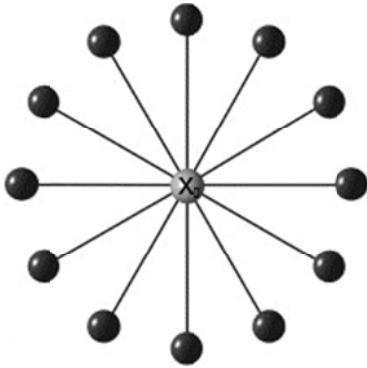


Рис. 2.1. Возможное расположение осцилляторов

Нормальные частоты такой системы легко найти. Для этого решение системы будем искать в виде

$$p_i = a_i \exp(i \cdot \omega \cdot t), \quad a_i = \text{const}.$$

Подставляя это решение в (2.48), легко получаем дисперсионное уравнение:

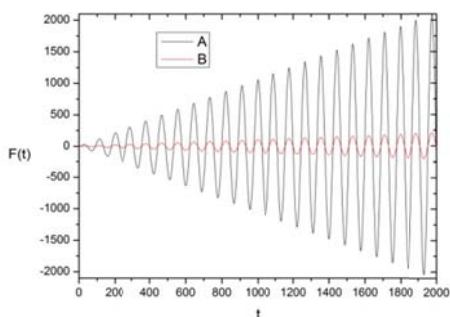
$$\left( -\omega^2 + \omega_0^2 \right)^2 = \mu^2 N. \quad (2.49)$$

Уравнение (2.49) элементарно решается:

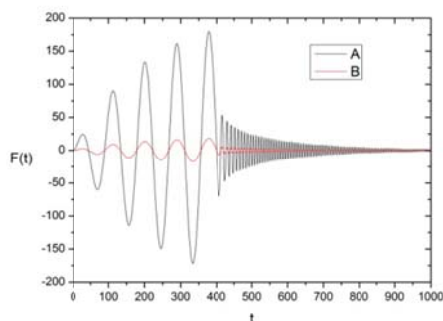
$$\omega = \pm \omega_0 \sqrt{1 \pm \mu \cdot \frac{\sqrt{N}}{\omega_0^2}}. \quad (2.50)$$

Знаки + и – в формуле (2.50) перед корнем и под корнем независимы. Видно, что даже при очень маленьком коэффициенте связи, но при большом числе осцилляторов, одна из нормальных частот может быть очень маленькой (для случая знака минус под корнем). Если теперь на систему осцилляторов (2.48) действует внешняя периодическая сила с частотой, которая равна этой минимальной нормальной частоте ансамбля, то колебания ансамбля будут нарастать по линейному закону со временем. В качестве примера мы взяли 100 осцилляторов. В результате минимальная нормальная частота была в 100 раз меньше, чем парциальные частоты. На приведенном ниже рис. 2.2 видно нарастание амплитуд колебаний отдельных осцилляторов. Приведены колебания только двух из них. Отличаются они только начальными условиями.

Если теперь в какой-то момент времени (он определяется наличием затухания, а, соответственно, насыщением усиливаемых колебаний) мы разорвем связи, то осцилляторы начнут колебаться на своих парциальных частотах. Амплитуды этих колебаний, конечно, значительно упадут, но они будут колебаться на значительно более высокой частоте, чем частота внешнего возмущения. Амплитуда этих парциальных частот будет значительно превосходить начальные амплитуды. Иллюстрацией этого факта является приведенный ниже рис. 2.3.



*Рис. 2.2. Резонансный рост амплитуд системы связанных осцилляторов. Частота нарастающих колебаний соответствует низкочастотной нормальной частоте, а также частоте внешнего возмущения*



*Рис. 2.3. Преобразование энергии низкочастотных колебаний в энергию высокочастотных колебаний при разрыве связей между осцилляторами. Частота высокочастотных колебаний соответствует парциальной частоте изолированных осцилляторов (в 100 раз больше частоты возбуждения)*

Важной особенностью динамики такого ансамбля осцилляторов является тот факт, что после разрыва связей все они колеблются в одной

фазе. Поэтому можно легко организовать когерентное излучение этого ансамбля.

## 2.10. Преобразование энергии НЧ шумовых колебаний в энергию ВЧ-колебаний

Параметрический механизм возбуждения собственных высокочастотных волн, распространяющихся в среде, реализуется как при регулярном изменении параметров среды, так и при их случайных изменениях. Последний случай наиболее сложен для анализа и наиболее интересен из общезначимых соображений.

В настоящем подразделе рассмотрена задача о возбуждении высокочастотных собственных волн неограниченного феррита внешним низкочастотным шумовым полем. В качестве среды выбран феррит, так как в этой среде проще всего реализовать в эксперименте регулярное или случайное изменение параметров. Исходными уравнениями являются уравнения Максвелла и материальное уравнение Ландау–Лифшица. В общей постановке задача оказывается очень громоздкой. Приведены результаты анализа наиболее интересных и важных случаев общей задачи. Будем считать, что внешнее магнитное поле содержит компоненту низкочастотного шума, т. е. величина поля подвержена случайным низкочастотным изменениям во времени. Под низкочастотными, т. е. медленными, изменениями будем понимать такие изменения, характерное время которых значительно превышает период высокочастотных собственных волн. При анализе задачи будем считать, что интенсивность шума в высокочастотной области, т. е. там, где сосредоточена основная интенсивность собственных волн гиротропных сред, незначительна, и не может существенно изменить характер этих высокочастотных волн. Интенсивность шумовых колебаний, в основном, сосредоточена в низкочастотной области. В этой области спектральная интенсивность шумовых колебаний постоянна на достаточно большом частотном интервале и их можно моделировать белым шумом (кривая 1 на рис. 2.4).

Будем считать, что этот участок спектра с постоянной интенсивностью находится в той области, в которой происходят низкочастотные колебания амплитуды высокочастотных собственных волн. Характерный вид рассматриваемых спектральных компонент представлен на рис. 2.4. На этом рисунке цифрой 1 обозначена спектральная компонента шумовых колебаний. Кривая 2 – это спектральные компоненты собственных высокочастотных волн гиротропной среды, участвующие во взаимодействии. Видно, что интенсивность шумовых колебаний в этой области спектра мала. В дальнейшем будем ею пренебрегать. Кривая 3 – это спектральные компоненты низкочастотных колебаний амплитуд высокочастотных волн. Следует отметить, что, как будет показано ниже, ширина этой спектральной линии (дисперсия) экспоненциально растет со време-

нем, поэтому спектральная кривая 3 имеет значительно большую ширину, чем ширина спектра исходных высокочастотных колебаний.

Такая модель позволяет не учитывать влияние шума на высокочастотную динамику собственных волн и ограничиться учетом влияния шума только на его низкочастотную динамику. Для учета этого влияния можно воспользоваться наиболее простой моделью шумовых колебаний — моделью дельта-коррелированного сигнала, т. е. моделью белого шума.

Это позволит проводить процедуру усреднения по высокочастотным компонентам, не обращая внимания на влияние шума.

Из уравнений Максвелла и Ландау–Лифшица можно получить систему уравнений, описывающую динамику электрического и магнитного полей собственных волн феррита. Внешнее шумовое поле входит в эти уравнения в виде аддитивного и мультипликативного членов. Будем изучать эволюцию во времени интенсивности собственных высокочастотных волн в феррите. Общий анализ полученных уравнений показывает, что вторые моменты для индукции магнитного поля и скорости ее изменения во времени при наличии шумового поля могут экспоненциально нарастать, т. е. происходит параметрическая раскачка собственных волн феррита. Воздействие внешнего шумового сигнала на феррит приводит к двум основным эффектам: уширению спектральных линий собственных колебаний феррита (влияние аддитивной компоненты шума) и возникновению экспоненциального роста вторых моментов (в частности, энергии) собственных колебаний феррита (влияние мультипликативной компоненты шума).

**Исходные уравнения.** Исходными уравнениями являются уравнения Максвелла и материальные уравнения макроскопической электродинамики неподвижных сред

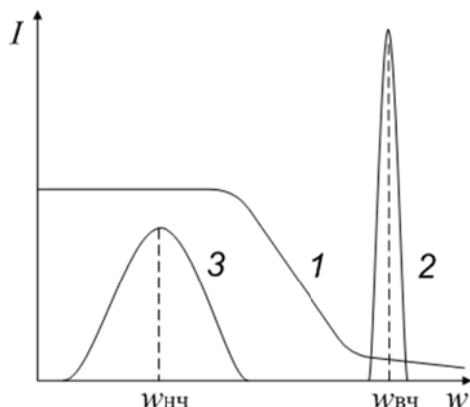


Рис. 2.4. Распределение интенсивности регулярной и шумовой компонент

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (2.51)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.52)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho, \quad (2.53)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (2.54)$$

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon} \vec{E}, \quad \vec{B} = \hat{\mu} \vec{H}, \quad (2.55)$$

где  $\vec{E}, \vec{H}$  – напряженности электрического и магнитного полей,  $\vec{D}, \vec{B}$  – индукции электрического и магнитного полей,  $\vec{j}$  – плотность свободного тока,  $\rho$  – плотность свободного заряда,  $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}$  – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости среды (феррита),  $\gamma = \frac{eg}{2mc}$ ,  $e$  – заряд электрона,  $g$  – фактор спектроскопического расщепления,  $m$  – масса покоя электрона,  $c$  – скорость света,  $\vec{M}$  – макроскопическая намагниченность феррита (магнитный момент, отнесенный к единице объема).

**Связь между быстрыми и медленными переменными.** Будем рассматривать идеализированную модель неограниченного непроводящего феррита. В диапазоне СВЧ ферриты, представляющие интерес для техники, обладают малой электропроводностью ( $10^{-7} - 10^{-12} \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ ) и такая идеализация оправдана [44]. Предположим также, что напряженности электрического и магнитного полей, индукции электрического и магнитного полей и намагниченность являются суммами постоянного (или медленно меняющегося) и быстропеременного слагаемых:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} + \vec{e}, \quad |\vec{e}| \ll |\vec{E}|, \quad (2.56)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H} + \vec{h}, \quad |\vec{h}| \ll |\vec{H}| \quad (2.57)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D} + \vec{d}, \quad |\vec{d}| \ll |\vec{D}| \quad (2.58)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B} + \vec{b}, \quad |\vec{b}| \ll |\vec{B}| \quad (2.59)$$

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \vec{M} + \vec{m}, \quad |\vec{m}| \ll |\vec{M}|, \quad (2.60)$$

где  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{M}$  – постоянные напряженности и индукции электрического и магнитного полей и намагниченность,  $\vec{E} = 0, \vec{D} = 0$ ,  $\vec{e}, \vec{h}, \vec{d}, \vec{b}, \vec{m}$  – быстропеременные напряженности и индукции электрического и магнитного полей и намагниченность.

Быстропеременные составляющие всех рассматриваемых величин будут изменяться во времени и пространстве по одинаковому, гармоническому закону с медленно меняющейся амплитудой. Например,

$$\vec{b}(\vec{r}, t) = \vec{b}(t) \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}, \quad (2.61)$$

где  $\omega$  – частота,  $\vec{k}$  – волновой вектор. Диэлектрическую проницаемость будем считать скаляром:  $\hat{\varepsilon} \equiv \varepsilon$ . В этом случае из уравнений Максвелла для комплексных амплитуд быстропеременных составляющих получим систему уравнений

$$[\vec{k}, \vec{h}] = -\frac{\omega}{c} \varepsilon \vec{e} + \frac{i\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \quad (2.62)$$

$$[\vec{k}, \vec{e}] = \frac{\omega}{c} \vec{b} + \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t}. \quad (2.63)$$

Из (2.62) получим выражение для комплексной амплитуды быстропеременной напряженности электрического поля:

$$[\vec{k}, \vec{e}] = -\frac{ic}{\varepsilon} e^{-i\omega t} \int_0^t \left\{ \vec{k}(\vec{k}, \vec{h}) - k^2 \vec{h} \right\} e^{i\omega t'} dt'. \quad (2.64)$$

Соответственно, из (2.63) получим выражение для комплексной амплитуды быстропеременной напряженности магнитного поля:

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} - i\omega \vec{b} = -\frac{c^2}{\varepsilon} e^{-i\omega t} \int_0^t \left\{ \vec{k}(\vec{k}, \vec{h}) - k^2 \vec{h} \right\} \cdot e^{i\omega t'} dt'. \quad (2.65)$$

Из уравнения (2.62), умножив его векторно на  $\vec{k}$  и подставив выражение для  $[\vec{k}, \vec{e}]$  из (2.63), получим связь между комплексными амплитудами быстропеременных напряженности и индукции магнитного поля:

$$\begin{aligned} [\vec{k}, [\vec{k}, \vec{h}]] &= -\frac{\omega}{c} \varepsilon [\vec{k}, \vec{e}] + \frac{i\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{k}, \vec{e}], \\ [\vec{k}, [\vec{k}, \vec{h}]] &= -\frac{\omega}{c} \varepsilon \left\{ \frac{\omega}{c} \vec{b} + \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \right\} + \frac{i\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\omega}{c} \vec{b} + \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \right\}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$[\vec{k}, [\vec{k}, \vec{h}]] = \vec{k}(\vec{k}, \vec{h}) - k^2 \vec{h} = -\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \vec{b} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial t^2}.$$

Из уравнения (2.66), умножив его векторно на  $\vec{k}$ , получим

$$\left[\vec{k}, \left[\vec{k}, \left[\vec{k}, \vec{h}\right]\right]\right] = \left[\vec{k}, \vec{k} \left(\vec{k}, \vec{h}\right)\right] - k^2 \left[\vec{k}, \vec{h}\right] = -k^2 \left[\vec{k}, \vec{h}\right], \quad (2.67)$$

$$k^2 \left[\vec{k}, \vec{h}\right] = \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \left[\vec{k}, \vec{b}\right] + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\vec{k}, \vec{b}\right]. \quad (2.68)$$

Пусть в декартовой системе координат волновой вектор будет направлен вдоль оси  $z$  ( $\vec{k} = (0, 0, k_z)$ ), а комплексные амплитуды быстропеременных напряженности и индукции магнитного поля имеют произвольное направление ( $\vec{h} = (h_x, h_y, h_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ).

В этом случае

$$\left[\vec{k}, \vec{h}\right] = -i h_y k_z + j h_x k_z \quad (2.69)$$

$$\left[\vec{k}, \vec{b}\right] = -i b_y k_z + j b_x k_z, \quad (2.70)$$

и уравнение (2.68), можно спроектировать на оси нашей системы координат. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b_x}{\partial t^2} + \omega^2 b_x &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} h_x, \\ \frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} + \omega^2 b_y &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} h_y. \end{aligned} \quad (2.71)$$

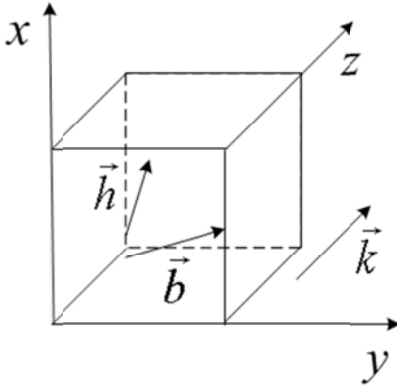


Рис. 2.5. Система координат

**Магнитная проницаемость среды.** Рассмотрим материальное уравнение Ландау–Лифшица (2.54) [44]. Намагниченность и напряженность магнитного поля представим в виде, аналогичном (2.57) и (2.60):

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H} + \vec{h} e^{i\omega t}, |\vec{h}| \ll |\vec{H}|, \quad (2.72)$$

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \vec{M} + \vec{m} e^{i\omega t}, |\vec{m}| \ll |\vec{M}|. \quad (2.73)$$

Пусть в декартовой системе координат постоянное внешнее магнитное поле и постоянная намагниченность направлены вдоль оси  $z$ :

$$(\vec{H} = (0, 0, H), \vec{M} = (0, 0, M)).$$

Комплексные амплитуды быстропеременных напряженности магнитного поля и намагниченности связаны соотношением:  $\vec{m} = \hat{\chi} \vec{h}$ , где  $\hat{\chi}$  – магнитная восприимчивость вещества по отношению к переменному магнитному полю. Тензор  $\hat{\chi}$  имеет вид:

$$\hat{\chi} = \begin{vmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.74)$$

Комплексные амплитуды быстропеременных напряженности и индукции магнитного полей связаны материальным уравнением, аналогичным (2.53):

$$\vec{b} = \vec{h} + 4\pi \vec{m} = \hat{\mu} \vec{h}, \quad (2.75)$$

$$\hat{\mu} = \hat{I} + 4\pi \hat{\chi}, \quad (2.76)$$

где  $\hat{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  – единичный тензор.

Если направление постоянной намагниченности совпадает с осью  $Z$ , то тензор  $\hat{\mu}$  для ферритов можно записать следующим образом [44]:

$$\hat{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{vmatrix} \quad (2.77)$$

$$\mu = 1 + 4\pi \frac{\omega_H^2}{\omega_H^2 - \omega^2} \frac{M}{H}, \quad \mu_a = 4\pi \frac{\omega \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} \frac{M}{H}, \quad \mu_{\parallel} = 1. \quad (2.78)$$

Введем обозначение

$$\omega_m = 4\pi M \gamma = 4\pi \frac{M}{H} \omega_H. \quad (2.79)$$

Компоненты тензора магнитной проницаемости феррита примут вид:

$$\begin{aligned}\mu &= 1 + \frac{\omega_H \omega_m}{\omega_H^2 - \omega^2} = 1 + \frac{\omega_H}{\omega} \mu_a, \\ \mu_a &= \frac{\omega \omega_m}{\omega_H^2 - \omega^2}, \\ \mu_{\parallel} &= 1.\end{aligned}\tag{2.80}$$

Из (2.53), (2.60) и (2.80) следует, что

$$h_{x,y} = \frac{\mu b_{x,y} \pm i \mu_a b_{y,x}}{\mu^2 - \mu_a^2}.\tag{2.81}$$

**Определение компонент магнитной индукции произвольных собственных волн феррита.** Учитывая (2.81), можно переписать систему (2.71) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 b_x}{\partial t^2} + \omega^2 b_x &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \frac{\mu b_x + i \mu_a b_y}{\mu^2 - \mu_a^2}, \\ \frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} + \omega^2 b_y &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \frac{\mu b_y - i \mu_a b_x}{\mu^2 - \mu_a^2}.\end{aligned}\tag{2.82}$$

Полагая  $\omega_m^2 \ll \omega^2$  и  $\omega_m^2 \ll \omega_H^2$ , получим из (2.82)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 b_x}{\partial t^2} + \omega^2 b_x &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} (\mu b_x + i \mu_a b_y), \\ \frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} + \omega^2 b_y &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} (\mu b_y - i \mu_a b_x).\end{aligned}\tag{2.83}$$

Собственная частота прецессии намагниченности, зависящая от напряженности магнитного поля, может быть представлена в виде суммы постоянной и «шумовой» компонент:

$$\omega_H = \gamma (H + h(t)).\tag{2.84}$$

$$\omega_H = \omega_H + \tilde{\omega}_H,\tag{2.85}$$

где  $\omega_H = \frac{eH}{mc}$ ,  $\tilde{\omega}_H = \frac{eh}{mc}$ .

«Быстропеременную» компоненту собственной частоты прецессии намагниченности  $\tilde{\omega}_H$  будем считать гауссовским случайным процессом. При этом выражение для антисимметричной компоненты тензора магнитной проницаемости феррита  $\mu_a$  также преобразуется:

$$\mu_a = \mu_{a_+} + \Delta\mu. \quad (2.86)$$

$$\mu_a = \frac{\omega\omega_m}{(\omega_H^2 - \omega^2)}. \quad (2.87)$$

$$\Delta\mu = \frac{2\omega_H\tilde{\omega}_H\omega\omega_m}{(\omega_H^2 - \omega^2)^2} = \mu_a \cdot \frac{2\omega_H\tilde{\omega}_H}{(\omega_H^2 - \omega^2)}. \quad (2.88)$$

В уравнения системы (2.83) входит компонента тензора магнитной проницаемости  $\mu$ . Выразим  $\mu$  через  $\mu_a$  с помощью (2.80) и воспользуемся тем, что частота прецессии намагниченности феррита и  $\mu_a$  представляют собой суммы почти постоянных и осциллирующих компонент:

$$\omega_H\mu_a = (\omega_{H_+} + \tilde{\omega}_H)(\mu_{a_+} + \Delta\mu). \quad (2.89)$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$\omega_H\mu_a = \omega_{H_+}\mu_{a_+} + \omega_{H_+}\Delta\mu + \tilde{\omega}_H\mu_{a_+}, \quad (2.90)$$

$$\mu = 1 + \frac{\omega_{H_+}}{\omega}\mu_{a_+} + \frac{\tilde{\omega}_H}{\omega}\mu_{a_+} + \frac{\omega_{H_+}}{\omega}\Delta\mu. \quad (2.91)$$

Подставив (2.86) и (2.87)) в (2.83), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b_x}{\partial t^2} + \omega^2 b_x &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \left\{ \left( 1 + \frac{\omega_{H_+}}{\omega} \mu_{a_+} \right) b_x + i \mu_{a_+} b_y \right\} + \\ &+ \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \left\{ \left( \frac{\tilde{\omega}_H}{\omega} \mu_{a_+} + \frac{\omega_{H_+}}{\omega} \Delta\mu \right) b_x + i \Delta\mu b_y \right\}, \\ \frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} + \omega^2 b_y &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \left\{ \left( 1 + \frac{\omega_{H_+}}{\omega} \mu_{a_+} \right) b_y - i \mu_{a_+} b_x \right\} + \\ &+ \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \left\{ \left( \frac{\tilde{\omega}_H}{\omega} \mu_{a_+} + \frac{\omega_{H_+}}{\omega} \Delta\mu \right) b_y - i \Delta\mu b_x \right\}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Поскольку система

$$\begin{aligned}\omega^2 b_x &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \left\{ \left( 1 + \frac{\omega_{H_+}}{\omega} \mu_{a_+} \right) b_x + i \mu_{a_+} b_y \right\}, \\ \omega^2 b_y &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \left\{ \left( 1 + \frac{\omega_{H_+}}{\omega} \mu_{a_+} \right) b_y - i \mu_{a_+} b_x \right\}\end{aligned}\quad (2.93)$$

соответствует дисперсионному уравнению для собственных волн феррита, из (2.92) получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 b_x}{\partial t^2} &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \left\{ \left( \frac{\tilde{\omega}_H}{\omega} \mu_{a_+} + \frac{\omega_{H_+}}{\omega} \Delta\mu \right) b_x + i \Delta\mu b_y \right\}, \\ \frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \left\{ \left( \frac{\tilde{\omega}_H}{\omega} \mu_{a_+} + \frac{\omega_{H_+}}{\omega} \Delta\mu \right) b_y - i \Delta\mu b_x \right\}.\end{aligned}\quad (2.94)$$

Используем (2.88) и преобразуем выражение в скобках:

$$\frac{\tilde{\omega}_H}{\omega} \mu_{a_+} + \frac{\omega_{H_+}}{\omega} \Delta\mu = \frac{\tilde{\omega}_H}{\omega} \left( \frac{\omega^2 + \omega_{H_+}^2}{\omega^2 - \omega_{H_+}^2} \right) \mu_{a_+} \quad (2.95)$$

Подставив (2.88) и (2.95) в (2.94), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 b_x}{\partial t^2} &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \left\{ \frac{\tilde{\omega}_H}{\omega} \left( \frac{\omega^2 + \omega_{H_+}^2}{\omega^2 - \omega_{H_+}^2} \right) \mu_{a_+} b_x - i \frac{2\omega_{H_+} \tilde{\omega}_H}{(\omega^2 - \omega_{H_+}^2)} \mu_{a_+} b_y \right\}, \\ \frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \left\{ \frac{\tilde{\omega}_H}{\omega} \left( \frac{\omega^2 + \omega_{H_+}^2}{\omega^2 - \omega_{H_+}^2} \right) \mu_{a_+} b_y + i \frac{2\omega_{H_+} \tilde{\omega}_H}{(\omega^2 - \omega_{H_+}^2)} \mu_{a_+} b_x \right\}.\end{aligned}\quad (2.96)$$

Таким образом, учитывая мультипликативные силы при определении компонент магнитной индукции произвольных собственных волн феррита, распространяющихся вдоль внешнего постоянного магнитного поля (вдоль оси  $z$ ), можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 b_x}{\partial t^2} &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \frac{\tilde{\omega}_H}{\omega(\omega^2 - \omega_{H_+}^2)} \mu_{a_+} \left\{ (\omega^2 + \omega_{H_+}^2) b_x - i 2\omega_{H_+} \omega b_y \right\}, \\ \frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} &= \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \frac{\tilde{\omega}_H}{\omega(\omega^2 - \omega_{H_+}^2)} \mu_{a_+} \left\{ (\omega^2 + \omega_{H_+}^2) b_y + i 2\omega_{H_+} \omega b_x \right\}.\end{aligned}\quad (2.97)$$

Аналогичными получаются и уравнения для волн, распространяющихся под произвольным углом к внешнему магнитному полю. Из уравнения (2.97) для новой величины  $B = b_x + ib_y$  получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \alpha B. \quad (2.98)$$

$$\alpha = \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \frac{\tilde{\omega}_H}{\omega} \frac{(\omega - \omega_H)^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \mu_a. \quad (2.99)$$

Здесь  $\alpha$  – случайная функция времени, т. к.  $\tilde{\omega}_H$  считаем гауссовским случайным процессом:

$$\langle \tilde{\omega}_H(t - \tau) \tilde{\omega}_H(t) \rangle = D_0 \delta(\tau). \quad (2.100)$$

$$\langle \alpha(t - \tau) \alpha(t) \rangle = \left( \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \frac{1}{\omega} \frac{\omega^2 + \omega_{H=}^2}{\omega^2 - \omega_{H=}^2} \mu_{a=} \right)^2 D_0 \delta(\tau). \quad (2.101)$$

**Статистическое описание системы.** Используя вариационную методику и формулы Фуруцу-Новикова [45], можно получить уравнения для моментов. Наибольший интерес представляют уравнения для первых двух моментов. Перепишем уравнение (2.98) в виде системы уравнений:

$$\dot{B} = y, \quad \dot{y} = \alpha B. \quad (2.102)$$

Проинтегрировав эту систему, получим зависимость  $B(t), y(t)$  от  $\alpha$ :

$$B = \int y dt, \quad y = \int \alpha B dt. \quad (2.103)$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\delta B}{\delta \alpha} = 0, \quad \frac{\delta y}{\delta \alpha} = B. \quad (2.104)$$

Усредним (2.102) по ансамблю реализаций  $\alpha(t)$  и для средних значений  $B(t), y(t)$  получим систему уравнений:

$$\langle \dot{B} \rangle = \langle y \rangle, \quad \langle \dot{y} \rangle = \langle \alpha B \rangle. \quad (2.105)$$

Эта система содержит новую функцию  $\langle \alpha B \rangle$ . Расщепляя корреляции, запишем

$$\langle \alpha B \rangle = \frac{1}{2} D \left\langle \frac{\delta B}{\delta \alpha} \right\rangle = 0. \quad (2.106)$$

$$D = \langle \alpha^2 \rangle; \quad \langle \alpha^2 \rangle = \left( \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \frac{1}{\omega} \frac{\omega^2 + \omega_{H_+}^2}{\omega^2 - \omega_{H_+}^2} \mu_{a_+} \right)^2 D_0. \quad (2.107)$$

Получим систему уравнений для первых моментов в виде

$$\langle \dot{B} \rangle = \langle y \rangle, \quad \langle \dot{y} \rangle = 0. \quad (2.108)$$

Вторые моменты величин  $B(t), y(t)$  описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle B^2 \rangle &= 2 \langle By \rangle; & \frac{d}{dt} \langle yB \rangle &= \langle \alpha B^2 \rangle + \langle y^2 \rangle; \\ \frac{d}{dt} \langle y^2 \rangle &= 2 \langle \alpha (yB) \rangle. \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь учтено, что } B\dot{B} &= By, \quad y\dot{B} = y^2, \quad B\dot{y} = \alpha B^2, \\ y\dot{y} &= \alpha yB. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned} \langle \alpha B^2 \rangle &\equiv \frac{1}{2} D \left\langle \frac{\delta B^2}{\delta \alpha} \right\rangle = 0, \\ \langle \alpha (yB) \rangle &\equiv \frac{1}{2} D \left\langle \frac{\delta (yB)}{\delta \alpha} \right\rangle = \frac{1}{2} D \langle B^2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Учитывая эти соотношения, получим

$$\frac{d}{dt} \langle B^2 \rangle = 2 \langle By \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle yB \rangle = \langle y^2 \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle y^2 \rangle = D \langle B^2 \rangle. \quad (2.112)$$

Решение этой системы содержит растущие со временем члены. Это соответствует статистической параметрической раскачке динамической системы (2.102) за счет флуктуаций параметров. Подставим в (2.112) решения пропорциональные  $\exp\{\lambda t\}$ . Тогда для характеристических чисел  $\lambda$  получим следующее алгебраическое уравнение:

$$\lambda^3 = 2D, \quad (2.113)$$

$$\text{где } D = \left( \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \frac{1}{\omega} \frac{\omega^2 + \omega_{H_+}^2}{\omega^2 - \omega_{H_+}^2} \mu_{a_+} \right)^2 D_0.$$

Инкремент нарастания  $\Gamma$  равен действительной части  $\lambda$ :  $\Gamma = \operatorname{Re} \lambda$

$$\Gamma = \left\{ \left( 2D_0 \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{k^2 c^2}{\varepsilon} \frac{1}{\omega} \frac{(\omega - \omega_H)^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \mu_a \right)^{\frac{2}{3}} \right\}. \quad (2.114)$$

Общий анализ полученных уравнений показывает, что вторые моменты собственных колебаний феррита при наличии шумового поля экспоненциально нарастают, т.е. происходит параметрическая раскачка собственных волн феррита. Это приводит к экспоненциальному уширению спектральной линии возбуждаемых колебаний (за счет экспоненциального роста дисперсии), а также к экспоненциальному росту энергии возбуждаемых колебаний. Простые аналитические формулы были получены выше в предельных случаях, когда было выполнено либо неравенство  $\omega_H \gg \omega$ , либо  $\omega_H \ll \omega$ . В общем случае, система уравнений (2.71) не распадается на систему двух независимых уравнений, и анализ ее оказывается значительно более громоздким. Основной результат – параметрическое усиление интенсивности собственных высокочастотных волн феррита низкочастотными флуктуациями – сохраняется. Более того, инкремент параметрической неустойчивости в этом случае может быть значительно большим, чем (2.114) – значение инкремента оказывается пропорциональным более высокой степени корня из малого параметра  $D$ . Можно показать, что при определенных условиях, когда параметры феррита меняются не по случайному закону, а периодически, также возможно параметрическое усиление собственных волн феррита. Однако и в этом случае наличие гиротропии феррита (или плазмы) является необходимым. Это обусловлено тем, что только при наличии связи между  $E$ -волнами и  $H$ -волнами возможны низкочастотные периодические изменения их амплитуд, с которыми, в свою очередь, возможна параметрическая связь низкочастотных изменений параметров феррита. Рассмотрение этой задачи

является предметом отдельного исследования. Временная динамика структуры полей в феррите показывает, что происходит периодическая смена структуры поля в феррите. Это, в частности, означает, что, если в начальный момент времени в феррите возбуждена  $E$ -волна, то по истечении времени  $T/2$  поле  $E$ -волны сменяется полем  $H$ -волны. Такая временная динамика поля соответствует известному эффекту Фарадея, вращению плоскости поляризации волны при распространении в гиротропных средах. Таким образом, напряженность поля в феррите может быть описана уравнением линейного маятника, которое легко получить из системы (2.71), если предположить, что комплексные амплитуды быстропеременных напряженности и индукции магнитного поля изменяются по закону  $b_x(t) = B_x(t) \cdot \exp\{i\omega t\}$ . Частота маятника в этом случае будет равна  $\Omega = kc\mu_a / 2\varepsilon(\mu^2 - \mu_a^2)$ . Время перекачки энергии  $T/2$ , по истечении которого поле  $E$ -волны сменится полем  $H$ -волны, равно  $\pi/\Omega$ , а характерная длина  $-L_F = vT/2$ , где  $v$  – скорость распространения волн в среде. Если параметры феррита будут меняться во времени (например, за счет изменения величины внешнего магнитного поля во времени), то динамика полей в феррите будет описываться уравнением маятника, частота которого становится функцией времени. В частности, если такое изменение будет малым и будет происходить с частотой равной удвоенной частоте  $\Omega$ , то динамика поля будет описываться уравнением Маттье:  $\partial^2 B_x / \partial t^2 + \Omega^2 (1 + \alpha \cos 2\Omega t) B_x = 0$ . Соответственно, возникает возможность параметрического усиления амплитуды высокочастотного поля в феррите за счет внешнего низкочастотного возмущения. Если же параметры феррита будут меняться во времени по случайному закону, то мы будем иметь модель линейного маятника, частота которого случайным образом меняется во времени. При этом, как показано выше, возможно экспоненциальное нарастание вторых моментов поля. Последнее означает, что происходит экспоненциальное уширение спектральной линии возбуждаемых колебаний (экспоненциальный рост дисперсии), а также экспоненциальное увеличение энергии высокочастотных колебаний. Выше рассмотрена возможность параметрического усиления высокочастотных волн феррита низкочастотными флуктуациями. Причем специфика феррита была не слишком существенна. Полученные результаты о параметрической стохастической неустойчивости собственных волн будут справедливы и при возбуждении собственных волн в других средах, например, в диэлектрике или в плазме. При экспериментальной реализации рассмотренной стохастической неустойчивости случайные магнитные поля легко могут быть созданы внешними устройствами. При этом внешнее поле служит резервуаром энергии для высокочастотных волн. Флуктуирующие магнитные поля всегда имеются в реальных условиях, но интенсивность их практически всегда мала и в обычных условиях всегда имеющиеся процессы затухания (которые не учтены в нашем рассмотрении) подавляют параметрическую неустойчивость. Поэтому в обычных условиях без наличия внешних случайных магнитных полей параметрическая стохастическая неустойчивость не будет

наблюдаться. Случайная параметрическая накачка приводит к экспоненциальному усилению широкого спектра собственных волн феррита. Инкремент неустойчивости, как видно из (2.114), при больших значениях частоты ( $\omega \gg \omega_H$ ) не зависит от частоты, т. е. с одинаковым инкрементом происходит нарастание широкого спектра собственных волн феррита. Кроме того, экспоненциально растет не только интенсивность волн, но и их дисперсия. В общем случае, происходит перекачка энергии низкочастотных шумовых колебаний в энергию высокочастотных шумовых волн. Однако можно ожидать, что если для определенных высокочастотных собственных волн феррита будут созданы резонансные условия, при которых другие волны будут затухать, то результатом параметрической стохастической неустойчивости будет возбуждение регулярной собственной высокочастотной волны феррита.

## 2.11. Выводы

Таким образом, из полученных выше результатов следует, что низкочастотные возмущения, в общем случае, приводят к возникновению хаотической динамики низкочастотного движения. Наиболее важным является тот результат, что существуют условия, при которых низкочастотное возмущение может приводить к параметрическому усилению резонансно взаимодействующих высокочастотных колебаний. Этот механизм позволяет перекачивать энергию низкочастотных колебаний в энергию высокочастотных. Следует однако заметить, что в вырожденных гамильтоновых системах, в частности в линейных системах с двумя степенями свободы, такой механизм не реализуется.

Выше были рассмотрены вторичные резонансы с внешним низкочастотным возмущением. Однако представление о вторичных резонансах может быть полезным для более широкой области физических приложений. Действительно, если их сформулировать как резонанс, который может возникнуть благодаря дополнительным свойствам, которые система приобрела в результате взаимодействия ее частей, то ко вторичным резонансам можно отнести широкий круг физических процессов. Например, если волна распространяется в периодически-неоднородной среде, в частности в кристалле, то структура ее поля содержит компоненты, которые можно назвать виртуальными волнами (см. например, [46]), и фазовая скорость которых значительно меньше скорости света. С этими волнами могут эффективно взаимодействовать заряженные частицы. Это так называемое параметрическое черенковское излучение, которому, начиная с работы [47], посвящена обширная литература. Эта же волна в условиях динамической дифракции может резонансно взаимодействовать с волной, которая представляет собой минус первый порядок дифракции. При этом в схеме дифракция Лауэ энергия этой волны на расстоянии длины экстинкции перекачивается в энергию волны минус первого порядка дифракции. Реализуется маятниковое решение. Эта схема была

рассмотрена выше в подразделе 2.5. В этом подразделе создавались условия для резонансного взаимодействия этого периодического процесса с внешним низкочастотным возмущением. Однако распространяющаяся в кристалле волна в результате резонансного взаимодействия с волной минус первого порядка приобрела дополнительное свойство – амплитуда этой волны периодически меняется, в простейшем случае, по закону синуса или косинуса. Волна с такой амплитудой может быть представлена в виде двух волн, фазовая скорость одной из которых меньше скорости света. С такой волной также могут эффективно взаимодействовать заряженные частицы. Такой механизм взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными волнами был впервые рассмотрен в работе [48]. Ко вторичным резонансам в такой формулировке могут быть отнесены и процессы взаимодействия волн в лазерах на свободных электронах. Действительно, электроны релятивистских пучков, взаимодействуя с волной накачки, в частности с ондулятором, становятся осцилляторами. Такие осцилляторы могут эффективно возбуждать высокочастотные волны в резонансных условиях, соответствующих нормальному или аномальному эффектам Доплера. Процессы, составляющие основу стохастического резонанса, также могут интерпретироваться как вторичные резонансы. Этот ряд легко можно продолжить. Более того, если воспользоваться понятием синергетики как процесса, при реализации которого возникают новые свойства целой системы в результате взаимодействия ее подсистем, то любое резонансное взаимодействие синергетических систем с внешним возмущением можно отнести ко вторичным резонансам. Это достаточно очевидные утверждения. Подчеркнем только, что, как было видно выше на примере отсутствия параметрического усиления в вырожденных системах, не всегда, на первый взгляд, очевидные процессы могут реализоваться.

### РАЗДЕЛ 3. СОЗДАНИЕ АНСАМБЛЯ ДОЛГОЖИВУЩИХ ВЫСОКОВОЗБУЖДЕННЫХ КВАНТОВЫХ И КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КВАНТОВОГО ЭФФЕКТА ЗЕНОНА И ЭФФЕКТА КВАНТОВОЙ ЮЛЫ

В настоящем разделе изложен механизм квантовой юлы. Этот механизм, как будет видно ниже, позволяет либо полностью стабилизировать,

либо существенно увеличить время жизни как квантовых, так и классических возбужденных систем. Рассматриваемый механизм во многих чертах подобен квантовому эффекту Зенона. Использование эффекта квантовой юлы потенциально позволяет создавать плотные ансамбли высоковозбужденных квантовых систем с достаточно большим временем жизни. Такие ансамбли могут быть использованы, например, для создания источников лазерного излучения в рентгеновском диапазоне.

Название эффекта «Квантовый эффект Зенона» впервые появилось в работе Георгия Сударшана и Бенджамина Мисры [49] в 1977 году. В этой работе они показали, что если проводить частые, а лучше постоянные, наблюдения (измерения) над возбужденными (неустойчивыми) квантовыми системами, то такие неустойчивые системы могут сохраняться неограниченно долго. Нужно сказать, что процедура измерения не описывается традиционными уравнениями квантовой механики. Название эффекта авторы позаимствовали из известного парадокса Зенона о стреле. Парадокс «Стрела» основан на предположении, что пространство и время составлены из неделимых элементов, скажем «точек» и «моментов». В некий «момент» своего полета стрела находится в некоторой «точке» пространства в неподвижном состоянии. Поскольку это верно, в каждый момент ее полета, стрела, вообще, не может находиться в движении. Название эффекта оказалось настолько удачным, что несмотря на тот факт, что как оказалось позже, аналогичные физические феномены в квантовой механике были рассмотрены ранее многими другими авторами (см., например, работы Тюринга [50], Неймана [51], Дегаспериса [52] и других), квантовый эффект Зенона в настоящее время прочно связан с именами Сударшана и Мисры. Нужно сказать, что практически до конца двадцатого столетия квантовый эффект Зенона рассматривался как своеобразный парадокс. Также как и его древний аналог – парадокс «Стрела» – он рассматривался как несовершенство квантовой механики для описания процессов измерения. Однако уже в 1989 году были поставлены первые эксперименты, и экспериментально был обнаружен квантовый эффект Зенона [53]. Нужно сказать, что эта работа вызвала огромный научный резонанс во всем мире и широкое обсуждение этого эффекта. Вслед за этой работой были поставлены другие эксперименты, из которых мы отметим работу [54], в которой было проведено прямое наблюдение эффекта Зенона, а также работу [55], в которой авторы использовали для наблюдения эффекта Бозе-Эйнштейновский конденсат, и было получено рекордное увеличение продолжительности жизни наблюдаемой квантовой системы. В настоящее время квантовый эффект Зенона прочно вошел в общенаучное мировоззрение. Его аналоги обнаруживаются в оптике. Более того, некоторые авторы предполагают, что именно квантовый эффект Зенона является тем механизмом, который позволяет нашему мозгу достаточно долго удерживать внимание на том или ином вопросе.

При объяснении квантового эффекта Зенона обычно пользуются понятиями, которые выходят за пределы традиционной квантовой меха-

ники. Ключевым из таких понятий является понятие коллапса волновой функции. В работе [56] был предложен механизм стабилизации возбужденных состояний, который не требовал введения новых понятий и описывался в рамках традиционной квантовой механики. Этот механизм во многих чертах похож на квантовый эффект Зенона. Он был назван эффектом квантовой юлы. Механизм квантовой юлы в идейном отношении близок к механизму перевернутого маятника Капицы, а также к механизму возникновения сил ВЧ-давления. Отличие заключается в том, что предлагаемый механизм может быть с успехом использован для стабилизации как нелинейных, так и линейных систем. Уже в первой работе [56] стало ясным, что механизм квантовой юлы может быть использован в классической механике. В дальнейших работах [57–60] было показано, что он может быть использован для стабилизации разнообразных пучковых неустойчивостей, для стабилизации процессов распада в плазме, а также для стабилизации взрывных неустойчивостей. Кроме того, было показано, что этот механизм позволяет стабилизировать локальную неустойчивость [61].

Коротко эффект квантовой юлы или просто эффект юлы можно пояснить на простом примере – примере устойчивости юлы. Этот пример очень простой, наглядный, легко воспринимается и в то же время он отображает основную особенность эффекта юлы. Действительно, пусть у нас имеется юла (см. рис. 3.1). Если она не вращается, то ее вертикальное положение неустойчиво. Юла падает. Причем процесс падения занимает некоторое время ( $T_L$ ). Это время можно назвать временем жизни юлы. Теперь, если юлу привести во вращение и период этого вращения будет значительно меньше времени жизни юлы, то вертикальное положение юлы будет устойчивым. Можно сказать, что юла «не знает», куда падать.

Во всех рассмотренных примерах стабилизации систем за счет механизма юлы можно выделить эти два характерных времени. Таким образом, можно сформулировать простой алгоритм стабилизации возбужденных систем при использовании эффекта квантовой юлы. Первым шагом этого алгоритма является определение времени жизни возбужденного состояния. Вторым шагом является отыскание физического воздействия на возбужденную систему такого, которое будет менять характеристики стабилизируемой системы. Причем период этого изменения должен быть значительно меньше времени жизни возбужденного состояния. Ниже, в подразделах 3.3–3.7 приведены различные примеры использования этого алгоритма. В подразделах 3.3–3.4 описан сам эффект квантовой юлы, а также некоторые примеры стабилизации квантовых систем. Наибольший интерес среди рассмотренных примеров представляет пример возможности подавления синхротронного излучения. В подразделах 3.5–3.6 на примерах подавления плазменно-пучковой неустойчивости и подавления распадных неустойчивостей показана возможность стабилизации потоков заряженных частиц и потоков излучения в плазме. Квантовый эффект Зенона кратко описан в подразделе 3.1.

### 3.1. К в а н т о в ы й э ф ф е к т З е н о н а

Механизм стабилизации возбужденных состояний, рассматриваемый в настоящем (третьем) разделе, аналогичен квантовому эффекту Зенона. Поэтому, чтобы более ясным было отличие предлагаемого механизма от механизма Зенона, кратко опишем квантовый механизм Зенона. При этом оказывается, что можно сформулировать очень простую квантовую модель, в которой будет проявляться эффект Зенона и решение которой является элементарным. В основе эффекта Зенона лежат следующие два фундаментальных процесса:

1. Неэкспоненциальный закон процесса распада возбужденных состояний.

2. Процесс измерения.

Поясним эти процессы. Если у нас имеется обычный экспоненциальный закон распада, то вероятность обнаружить возбужденную систему в возбужденном же состоянии описывается, как известно, формулой  $w = \exp(-G \cdot t)$ . Величина  $G = \text{const}$  – постоянная распада определяет время жизни возбужденного состояния ( $T_{\text{life}} = 1/G$ ). Чтобы сравнивать экспоненциальный закон распада с другими законами распада, обычно используется логарифмическая производная от вероятности:  $(\partial w / \partial t) / w = -G$ .

Как видно, эта производная для экспоненциального закона распада является постоянной. Если мы посмотрим на процедуру получения вероятности распада в квантовой механике, то мы увидим, что экспоненциальный закон является асимптотическим, т.е. он справедлив только при достаточно больших интервалах времени. Если интервалы времени оказываются малыми, закон распада будет другим законом. Проиллюстрируем это утверждение на самом простом примере. Пусть у нас имеется двухуровневая квантовая система. Нулевой уровень соответствует стационарному, невозбужденному состоянию. Первый уровень соответствует возбужденному состоянию. Пусть теперь под действием резонансного возмущения рассматриваемая квантовая система переходит с нулевого

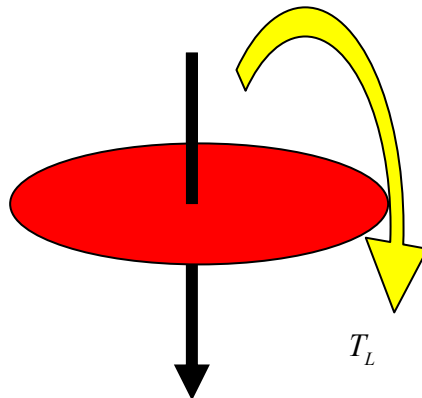


Рис. 3.1. Юла.  $T_L$  – время падения юлы (время жизни), когда она не вращается

квантовая система. Нулевой уровень соответствует стационарному, невозбужденному состоянию. Первый уровень соответствует возбужденному состоянию. Пусть теперь под действием резонансного возмущения рассматриваемая квантовая система переходит с нулевого

уровня на первый и обратно. Как известно, такой процесс описывается следующей простой системой дифференциальных уравнений:

$$i \cdot \hbar \cdot \dot{A}_0 = V_{01} A_1; \quad i \cdot \hbar \cdot \dot{A}_1 = V_{10} A_0, \quad (3.1)$$

где  $A_i$  – комплексные амплитуды волновых функций. Квадрат модуля этих амплитуд определяет вероятность нахождения на соответствующем энергетическом уровне. Матричные элементы взаимодействия  $V_{01}$  и  $V_{10}$ , в общем случае, зависят как от структуры рассматриваемой квантовой системы, так и от характеристик возмущения. Мы будем считать их равными, постоянными и действительными. Пусть в начальный момент времени квантовая система находится в возбужденном состоянии. Тогда решениями уравнений (3.1) будут функции:

$$A_1 = \cos(\Omega \cdot t), \quad A_0 = \sin(\Omega \cdot t), \quad (3.2)$$

где  $\Omega = V / \hbar$  – частота Раби.

Физическое содержание решений (3.2) заключается в том, что если в начальный момент времени система находилась в возбужденном состоянии, то, по истечении времени  $T = 2\pi / \Omega$ , она, с вероятностью равной единице, перейдет в основное невозбужденное состояние. Далее процесс будет повторяться, но на каждом небольшом отрезке времени этот процесс носит вероятностный характер. Поэтому удобно для дальнейшего весь интервал времени  $T$  разбить на небольшие временные интервалы  $\Delta t = T / n$ .

Теперь введем новый элемент – измерение состояния изучаемой системы. Пусть в момент времени  $\Delta t$  мы каким-то образом можем оценить положение нашей системы. Вероятность того факта, что она за время  $\Delta t$  не перейдет из возбужденного состояния в основное будет равна

$$w(\Delta t) = 1 - (\Omega \cdot \Delta t)^2. \quad (3.3)$$

Эта формула уже содержит важный элемент квантовых переходов. Он заключается в том, что скорость переходов при малых интервалах времени тем меньше, чем меньше эти интервалы:

$$-\frac{dw}{dt} = 2 \cdot \Omega^2 \cdot t. \quad (t \leq \Delta t) \quad (3.4)$$

Логарифмическая производная в этом случае уже не будет постоянной величиной:  $(\partial w / \partial t) / w = -2\Omega \cdot t$ . Этот результат в теории квантового эффекта Зенона называют неэкспоненциальным законом распада (смотри, например, [62–63]). По истечении следующего интервала времени мы вновь включаем процесс измерения. Вероятность обнаружения первоначально возбужденной системы в своем исходном положении будет теперь определяться формулой

$$w(2 \cdot \Delta t) = \left(1 - (\Omega \cdot \Delta t)^2\right)^2. \quad (3.5)$$

Такая формула отражает факт независимости квантовых переходов в каждом из временных интервалов  $\Delta t$ . В конечном счете, после большого числа измерений вероятность нахождения системы в возбужденном состоянии выразится формулой

$$w(n \cdot \Delta t) = \left(1 - (\Omega \cdot \Delta t)^2\right)^n. \quad (3.6)$$

Взяв логарифм от левой и правой частей выражения (3.6), мы получим, что в пределе большого количества измерений за период времени  $T$ , вероятность обнаружения системы в ее исходном возбужденном состоянии стремится к единице:

$$w(T) = \exp\left(-\Omega^2 T^2 / n\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (3.7)$$

Таким образом, процесс наблюдения за возбужденной системой не дает этой системе перейти из исходного возбужденного состояния в какое-либо другое состояние. Этот факт и составляет содержание квантового эффекта Зенона.

### 3.2. Э ф ф е к т к в а н т о в о й ю л ы

Теперь легко пояснить основное содержание эффекта квантовой юлы. Оно заключается в следующем. Прежде всего, не будем использовать не слишком ясную процедуру измерения. Однако будем предполагать, что рядом с возбужденным энергетическим состоянием системы имеется дополнительное состояние (система становится трехуровневой). Нужно сказать, что в большинстве случаев у квантовой системы имеется достаточно большое количество собственных уровней. Поэтому правильнее, наверное, сказать, что не предполагается наличие этих уровней, а они принимаются в расчет. Причем на квантовую систему кроме возмущений,

которые могут переводить систему из возбужденного состояния в стационарное, невозбужденное состояние действует дополнительное внешнее низкочастотное возмущение. Частота этого возмущения является резонансной по отношению к переходам между возбужденным состоянием и новым дополнительным энергетическим состоянием (которое теперь будем принимать в расчет). Кроме того, будем требовать, чтобы частота Раби переходов между возбужденным состоянием и новым состоянием была значительно большей, чем обратное время перехода возбужденной системы в свое невозбужденное стационарное состояние. При этом будет показано, что период этих дополнительных переходов, в которые вовлечена возбужденная система, будет играть роль интервала времени между наблюдениями в квантовом эффекте Зенона. Чем выше будет эта частота, тем меньшей будет вероятность перехода системы из возбужденного состояния в основное невозбужденное стационарное состояние.

Полезно сравнить эту процедуру с алгоритмом, который был сформулирован во введении. Действительно, имеется неустойчивая двухуровневая система. Известно время жизни каждого из этих состояний (период Раби). Это можно сравнить с вертикальным положением юлы. Период Раби можно сравнить со временем жизни юлы. Теперь рассмотрим дополнительный третий уровень, близко расположенный к стабилизируемому уровню. Кроме того, введем дополнительное внешнее возмущение, которое быстро переводит квантовую систему из стабилизируемого уровня на дополнительный уровень. Этот процесс можно интерпретировать как вращение юлы. Ниже будет показано, что если период перехода между стабилизируемым и дополнительным уровнями будет значительно меньше, чем время жизни возбужденного состояния, то вероятность распада существенно уменьшается. Причем, чем меньше время жизни по сравнению с периодом перехода между стабилизируемым и дополнительным уровнями, тем меньше вероятность распада возбужденного состояния.

**Постановка задачи и основные уравнения.** Рассмотрим квантовую систему, которая описывается гамильтонианом:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t). \quad (3.8)$$

Второе слагаемое в правой части описывает возмущение. Волновая функция системы (3.8) подчиняется уравнению Шредингера, решение которого будем искать в виде ряда по собственным функциям невозмущенной задачи:

$$\psi(t) = \sum_n A_n(t) \cdot \varphi_n \cdot \exp(i\omega_n t), \quad (3.9)$$

где  $\omega_n = E_n / \hbar$ ;  $i\hbar \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \hat{H}_0 \varphi_n = E_n \cdot \varphi_n$ .

Подставим (3.9) в уравнение Шредингера и обычным образом получим систему связанных уравнений для нахождения комплексных амплитуд  $A_n$ :

$$i\hbar \cdot \dot{A}_n = \sum_m U_{nm}(t) \cdot A_m, \quad (3.10)$$

где  $U_{nm} = \int \varphi_m^* \cdot \hat{H}_1(t) \cdot \varphi_n \cdot \exp[i \cdot t \cdot (E_n - E_m) / \hbar] \cdot dq$ .

Рассмотрим наиболее простой случай гармонического возмущения  $\hat{H}_1(t) = \hat{U}_0 \cdot \exp(i\omega_0 t) + \hat{U}_1 \cdot \exp(i\omega_1 t)$ . Тогда матричные элементы взаимодействия приобретут следующий вид:

$$\begin{aligned} U_{nm} &= V_{nm} \exp\{i \cdot t \cdot [(E_n - E_m) / \hbar + \Omega]\}, \\ V_{nm}^{(k)} &= \int \varphi_n^* \cdot \hat{U}_k \cdot \varphi_m dq, \quad \Omega = \{\omega_0, \omega_1\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Рассмотрим динамику трехуровневой системы ( $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ ). Будем считать, что частота внешнего возмущения и собственные значения энергий этих уровней удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} m=1, n=0, \quad \hbar\omega_0 &= E_1 - E_0; \quad m=2, n=0, \\ \hbar(\omega_0 + \delta) &= E_2 - E_0, \quad |\delta| \ll \omega_0 F; \quad \hbar\omega_1 = E_2 - E_1, \quad |\delta| \sim \omega_1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Эти соотношения указывают на тот факт, что частота  $\omega_0$  внешнего возмущения является резонансной для переходов между нулевым и первым уровнями, а частота  $\omega_1$  является резонансной для переходов между первым и вторым уровнями. Используя эти соотношения в системе (3.10), можно ограничиться тремя уравнениями:

$$\begin{aligned} i \cdot \hbar \cdot \dot{A}_0 &= V_{01} A_1 + V_{02} A_2 \cdot \exp(i \cdot \delta \cdot t); \quad i \cdot \hbar \cdot \dot{A}_1 = V_{10} A_0 + V_{12} A_2; \\ i \cdot \hbar \cdot \dot{A}_2 &= V_{21} A_1 + V_{20} A_0 \cdot \exp(-i \cdot \delta \cdot t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Система уравнений (3.13) является той системой, которую мы будем анализировать. Схема энергетических уровней для системы (3.13) представлена на рис. 3.2.

Рассмотрим, прежде всего, случай, когда расстройка достаточно большая и членами в системе уравнений (3.13), содержащими расстройку, можно пренебречь. Кроме того, будем считать, что матричные элементы

прямых и обратных переходов равны ( $V_{12} = V_{21}, V_{10} = V_{01}$ ). Будем считать также, что матричные элементы переходов между первым и вторым уровнями значительно больше, чем матричные элементы переходов между нулевым и первым уровнями ( $V_{12}/V_{10} \equiv \mu \gg 1$ ). Для дальнейшего удобно ввести безразмерное время  $\tau = V_{10} \cdot t / \hbar$ .

С учетом этих соображений система уравнений (3.13) становится элементарно простой:

$$i\dot{A}_0 = A_1, \quad i\dot{A}_1 = A_0 + \mu A_2, \quad i\dot{A}_2 = \mu A_1. \quad (3.14)$$

Пусть в начальный момент времени ( $t=0$ ) рассматриваемая квантовая система находится на первом, возбужденном уровне. Тогда, как легко видеть, решениями системы (3.14) будут функции:

$$A_0 = \frac{1}{i \cdot \mu} \sin(\mu \cdot t), \quad A_1 = \cos(\mu \cdot t), \quad A_2 = -i \sin(\mu \cdot t). \quad (3.15)$$

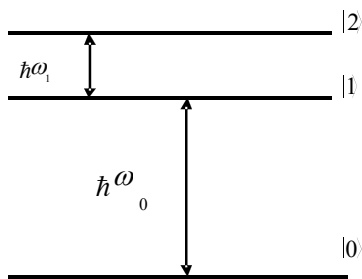


Рис. 3.2. Схема энергетических уровней

Из решения (3.15) следует, что чем больше будет параметр  $\mu$ , тем меньше будет вероятность, что система из возбужденного состояния перейдет в невозбужденное, стационарное состояние. Следует несколько слов сказать о параметре  $\mu$ . Физически этот параметр определяет отношение числа квантов низкочастотного возмущения, которое ответственно за переходы между первым и вторым уровнями к числу квантов высокочастотного возмущения, которое определяет переходы

между первым и нулевыми уровнями. Чем больше будет это отношение, тем меньше будет вероятность того, что возбужденная система перейдет в невозбужденное состояние.

Учет влияния членов, содержащих расстройку, может быть произведен численными методами. Такой анализ был осуществлен. Он показал, что наличие даже достаточно большой расстройки мало влияет на результат. Причем, чем больше величина параметра  $\mu$ , тем меньшим оказывается это влияние. На рис. 3.3 приведена характерная зависимость модуля амплитуды  $A_0$  от времени, а на рис. 3.4 – зависимость модуля амплитуды  $A_1$  от времени при расстройке, равной 0.1. Параметр  $\mu$  в этих расчетах был равен 100. В начальный момент

времени система практически находилась на первом возбужденном уровне. Зависимость модуля амплитуды  $A_2$  от времени практически не отличается от зависимости, представленной на рис. 3.4. Как видно из этих рисунков, первоначальная вероятность находиться системе в невозбужденном состоянии (на нулевом уровне) со временем практически не меняется. Она очень мала и во всех случаях обратно пропорциональна квадрату параметра  $\mu$ . Система находится в постоянных переходах между первым (возбужденным) и вторым (дополнительным) уровнями. Отметим, что результат мало меняется, если параметр расстройки увеличить до 0.5.

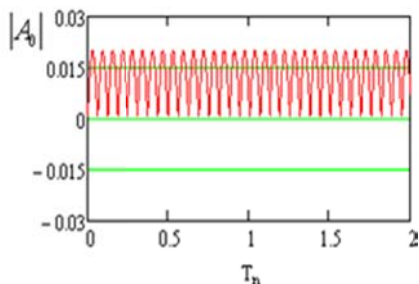


Рис. 3.3. Амплитуда вероятности нахождения системы на нижнем стационарном уровне

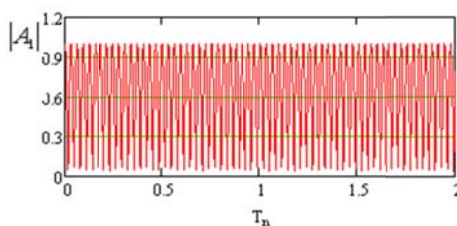


Рис. 3.4. Амплитуда вероятности нахождения системы на верхнем возбужденном уровне

### 3.3. Подавление синхротронного излучения

Выше мы рассмотрели квантовую систему, переходы между уровнями которой были обусловлены индуцированными процессами. Вероятности индуцированных процессов значительно большие. Однако спонтанные переходы могут совершаться на все нижележащие энергетические уровни. Таких переходов, в общем случае, может быть много.

Возникает вопрос, как в этом случае будет протекать процесс стабилизации возбужденного состояния. Может ли он быть реализован в этом случае? Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим конкретный случай стабилизации возбужденных состояний в синхротроне. При этом мы будем пользоваться результатами, изложенными в [64]. Таким образом, мы будем рассматривать синхротронное излучение. В отличие от рассмотрения в [64], мы будем изучать не двухуровневую систему, а трехуровневую систему. Причем мы будем предполагать, что на рассматриваемую систему действует внешнее периодическое возмущение, вызывающее индуцированные резонансные переходы между двумя верхними уровнями (между уровнем один и уровнем два на рис. 3.2).

Переходы между уровнем 1 и нулевым уровнем происходят спонтанно. Система уравнений, описывающая динамику амплитуд волновых функций для такой системы, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{A}_0 &= V^+ A_1 \exp(-i \cdot \Delta E \cdot t / \hbar) \\ i\hbar\dot{A}_1 &= V^- A_0 \exp(i \cdot \Delta E \cdot t / \hbar) + V_{12} \cdot A_2 \\ i\hbar\dot{A}_2 &= V_{21} \cdot A_1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\text{Здесь } V^+ = \int \psi_0^+ U^+ \psi_1 d^3x, \quad V^- = \int \psi_1^+ U^- \psi_0 d^3x, \quad V_{12} = \int \psi_1^+ U \psi_2 d^3x.$$

Система уравнений (3.16) отличается от приведенной в [64] только наличием третьего уравнения, а также второго члена во втором уравнении. Это добавочное уравнение и добавочный член описывают динамику индуцированных переходов между основным (возбужденным) уровнем и добавочным уровнем.

Операторы  $U^\pm$  определены в [64]. Отметим только, что оператор  $U^+$  пропорционален оператору рождения, а оператор  $U^-$  пропорционален оператору уничтожения. Оператор  $U$  определяет потенциал внешнего периодического возмущения. Следует заметить, что, в общем случае, мы должны были бы в третьем уравнении системы (3.16) дописать член, который ответственен за спонтанные переходы со второго возбужденного уровня на нулевой стационарный уровень. Однако, как будет ясно из дальнейшего, нам не потребуется дополнительный анализ этих переходов, так как они будут совершенно аналогичны спонтанным переходам с первого уровня на нулевой уровень. Будем считать, что переходы между уровнями один и два обусловлены индуцированными процессами и происходят за времена значительно меньшие времен спонтанных переходов, то последние два уравнения можно рассмотреть независимо от первого. Опять-таки, учитывая, что переходы между двумя верхними уровнями индуцированные, то матричные элементы переходов вверх и вниз равны ( $V_{12} = V_{21}$ ). Система (3.16) допускает два существенно различающихся решения.

**Рассмотрим первое, строгое решение.** Решение в духе принятом в квантовой механике. У нас есть индуцированный процесс, обусловленный наличием внешнего возмущения. Этот процесс более быстрый, чем процессы, связанные со спонтанными переходами. Поэтому в нулевом приближении мы можем получить решение:

$$A_1 = \cos(\Omega \cdot t), \quad A_2 = -i \sin(\Omega \cdot t), \quad (3.17)$$

где  $\Omega = V_{12} / \hbar$ .

В соответствии с теорией возмущения, мы должны эти решения подставить в систему (3.16). Если мы поступим таким образом, то результат стабилизации будет отсутствовать, будут слегка изменяться спектры спонтанного излучения – произойдет их расщепление. Кроме того, возникнет некоторая периодическая во времени модуляция вероятности. Все это мало скажется на времени жизни возбужденных состояний.

**Рассмотрим второе решение.** Для этого введем следующие характерные времена. Характерное время, за которое система из основного состояния перейдет под действием стабилизирующего возмущения в новое состояние  $\Delta t = \pi / 2\Omega$ . Известно (см., например, [64]), что время жизни возбужденного состояния электронов в синхротроне в отсутствии возмущения можно оценить формулой:

$$T_L = \frac{\hbar \cdot R}{r_0 \cdot mc^2 \cdot \gamma}, \quad (3.18)$$

где  $r_0$  – классический радиус электрона;  $R$  – радиус орбиты электрона в синхротроне. Будем считать, что  $\Delta t / T_L = \frac{1}{n} \ll 1$ . Можно считать, что время жизни на возбужденном уровне при наличии возмущения составляет  $\Delta t$ . Тогда в течение этого времени вероятность перейти в нижнее стационарное состояние под действием нулевых колебаний будет пропорционально квадрату отношения  $\Delta t / T_L$ . При этом вероятность остаться на возбужденном уровне можно оценить выражением

$$w \sim \left[ 1 - (\Delta t / T_L)^2 \right]. \quad (3.19)$$

В результате индуцированных переходов по истечении времени  $2\Delta t$  система опять окажется на исходном возбужденном уровне, и вероятность ее перейти на основной стационарный уровень будет определяться той же формулой (3.19). Эти два процесса перехода на стационарный уровень независимы. Поэтому вероятность остаться на возбужденном уровне будет пропорциональна произведению вероятностей остаться на возбужденном уровне в каждом из этих интервалов. По истечении всего времени жизни вероятность остаться системе на возбужденном уровне можно будет оценить формулой

$$w_n \sim \left[ 1 - (\Delta t / T_L)^2 \right]^n \sim \exp(\Delta t / 2T_L). \quad (3.20)$$

Видно, что при  $\Delta t / T_L \rightarrow 0$  вероятность остаться системе в возбужденном состоянии будет стремиться к единице. Это решение анало-

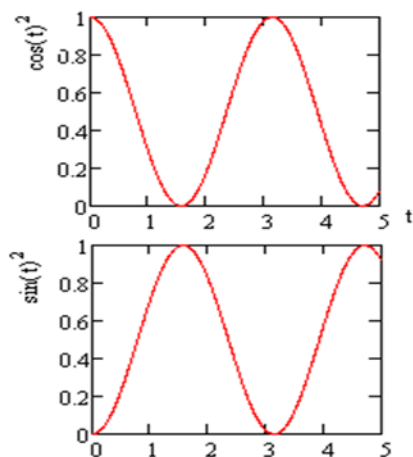


Рис. 3.5. Вероятности нахождения системы на первом (верхний рисунок) и на втором возбужденном уровнях (нижний рисунок)

гично получению решения в квантовом эффекте Зенона (см. подраздел 3.1).

Таким образом, мы видим, что имеется два решения, результаты которых противоречат друг другу. Мы будем ориентироваться на второе решение. При этом можно ожидать, что когда частота переходов между первым и вторым уровнями (частота Раби) будет значительно большей, чем обратное время жизни возбужденного состояния один, то процесс синхротронного излучения будет подавлен.

Сформулированное предположение о динамике переходов является в нашем случае наиболее важным. Поэтому поста-

раемся более детально его обосновать. Для этого на рис. 3.5 представлены амплитуды вероятностей нахождения рассматриваемой квантовой системы на первом возбужденном уровне (верхняя кривая на рис. 3.5) и на втором возбужденном уровне (нижняя кривая на рис. 3.5). Из этих рисунков видно, что практически во всех интервалах времени существует неравная нулю вероятность находиться в системе либо на первом, либо на втором уровне. Таким образом, переходы между уровнями происходят по случайному закону и не зависят друг от друга. Конечно, это общеизвестная динамика квантовых переходов. Здесь она упомянута только в связи с ее определяющим значением для формулировки схемы расчета, которая была использована выше и которая позволяет оценить степень проявления эффекта стабилизации возбужденных состояний.

Представляет интерес оценить величину и характеристики внешнего возмущения, которое может привести к подавлению синхротронного излучения. Для этого мы воспользуемся формулой (3.18). Если в качестве примера мы возьмем  $R = 100$  см,  $E = mc^2 \cdot \gamma = 500 \text{ MeV}$ , то время жизни окажется порядка  $10^{-9}$  с. Таким образом, для наблюдения эффекта подавления синхротронного излучения необходимо, чтобы частота Раби для переходов между первым и вторым уровнями была значительно больше, чем  $10^9$ . Пусть для определенности она равна  $10^{10}$ . Тогда, чтобы выводы теории, которая была использована выше (теория возмущения), были справедливы, необходимо, чтобы частота возмущения была большей, чем  $10^{11}$ . Ясно также, что чем выше будет частота Раби (большей будет напряженность стабилизирующего поля) и чем выше будет частота

возмущений, тем заметнее будет эффект подавления синхротронного излучения.

### 3.4. Подавление пучковых неустойчивостей

Выше были рассмотрены квантовые системы. Однако эффект квантовой юлы может с успехом применяться для стабилизации возбужденных (неустойчивых) классических систем. Для иллюстрации такой возможности в этом разделе рассмотрена возможность подавления плазменно-пучковой неустойчивости [60]. Такая неустойчивость очень распространена. Она является основной при реализации плазменно-пучковых генераторов. В этом случае она полезна. Однако она развивается каждый раз, когда через плазму пытаются пропустить поток заряженных частиц. В ряде случаев с ней нужно бороться. Ниже мы покажем, что использование эффекта квантовой юлы позволяет это сделать.

**Постановка задачи.** Пусть у нас имеется плазменный цилиндр ( $0 < r < R_p$ ). Он помещен в металлический кожух того же радиуса. Плазма помещена в сильное внешнее магнитное поле. Пучок проходит вдоль оси плазменного цилиндра. Радиус пучка совпадает с радиусом плазмы. В металлическом кожухе имеются отверстия (щели) для связи с внешней электродинамической структурой. В качестве внешней электродинамической структуры может быть выбрана спираль радиуса  $R_H$ . Частота и волновой вектор

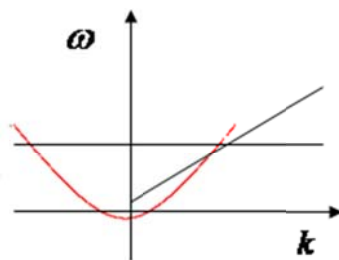


Рис. 3.6. Дисперсионные ветви для плазменных волн

( $\omega = \omega_p$ , пучковой волны ( $\omega = kv$ )  
)  
и волн внешней структуры

собственной волны этой структуры должны совпадать с частотой и волновым вектором волны, которая возбуждается пучком в плазме. Схема возможных дисперсионных соотношений представлена на рис. 3.6.

Линейная система уравнений, которая описывает динамику такой системы, состоит из уравнений Максвелла для полей и гидродинамических уравнений для движения частиц пучка и плазмы.

Для пучка:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{e}{m} (E_1 + \mu E_2), \quad \frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial z} + V \frac{\partial n}{\partial z} = 0. \quad (3.21)$$

Для плазмы:

$$\frac{\partial v_p}{\partial t} = \frac{e}{m}(E_1 + \mu E_2), \quad \frac{\partial n_p}{\partial t} + n_{0p} \frac{\partial v_p}{\partial z} = 0. \quad (3.22)$$

Поле во внешней электродинамической системе ( $E_2 = E_z$ ) может быть описано следующим уравнением:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_2}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} = \mu_1 E_1. \quad (3.23)$$

Зависимость от продольной координаты для всех переменных выберем в виде  $\exp(-ik_z z)$ .

Выражение для полей можно записать в виде  $E_j \sim \exp(-ik_z z) H(r)$ .

$$\left( \frac{\lambda_n^2}{R_s} - k_z^2 \right) E_2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = \mu_1 E_1 \cdot \frac{1}{G}. \quad (3.24)$$

В (3.24)  $G$  – норма поля во внешней электродинамической структуре. Отметим, что у нас имеется две основных колебательных системы: это плазма и внешняя колебательная структура. Частоты этих систем должны совпадать ( $\omega_p = |k_\perp|c$ ). Здесь  $k_\perp^2 = (\lambda_n^2 / R_s - k_z^2)$ . Должны совпадать и продольные волновые числа. Кроме того, имеется третья колебательная система – пучок. Все они связаны. Эту сложную колебательную систему удобно представить в виде следующей системы уравнений:

$$\ddot{E}_2 - k_\perp^2 c^2 E_2 = \mu_1 \frac{4\pi e}{ik_z} (n_p + n), \quad (3.25)$$

$$\ddot{n}_p + \omega_p^2 n_p = -\omega_p^2 n + i\mu \frac{k_z n_{0p} e}{m} E_2, \quad (3.26)$$

$$\ddot{n} + \omega_b^2 n - 2ik_z \dot{n} - k_z^2 V^2 n = -\omega_b^2 n_p + i\mu \frac{k_z n_0 \cdot e}{m} E_2. \quad (3.27)$$

Левая часть каждого из этих трех уравнений представляет собой уравнение осциллятора, которое определяет колебания этих отдельных колебательных систем. Правые части этих уравнений определяют связи между этими осцилляторами.

Представляется удобным рассмотреть следующие частные случаи.

Пусть у нас пучка нет, а связь между плазменным осциллятором и осциллятором внешней электродинамической структуры слабая. В этом случае решение можно искать в виде

$$n_p = N_p(t) \exp(i\omega t), \quad E_2 = E(t) \exp(i\omega t), \quad \omega = \omega_p = |k_\perp| c.$$

Тогда из уравнений (3.25) и (3.26) для нахождения амплитуды  $E(t)$  получим следующее уравнение:

$$\ddot{E} + \Omega^2 E = 0, \quad (3.28)$$

где  $\Omega^2 = \mu\mu_l / 4$ .

Уравнение (3.28) представляет собой уравнение осциллятора. Оно описывает периодическую перекачку энергии между колебаниями плазмы и колебаниями внешней электродинамической структуры. Это так называемое маятниковое решение, которое описывает медленную динамику двух одинаковых связанных высокочастотных осцилляторов. Из (3.28) также видно, что частота перекачки определяется коэффициентами связи между этими осцилляторами.

Рассмотрим теперь случай, когда связь между плазменными колебаниями и колебаниями внешней электродинамической структуры отсутствует. В этом случае мы имеем систему плазма-пучок:

$$\ddot{n}_p + \omega_p^2 n_p = -\omega^2 n \quad (3.29)$$

$$\ddot{n} + \omega_b^2 n - 2ik_z \dot{n} - k_z^2 V^2 n = -\omega_b^2 n_p. \quad (3.30)$$

Из этой системы уравнений обычным образом получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega^*)^2} = 0, \quad (3.31)$$

где  $\omega^* = (\omega - k_z V)$ .

Известно, что наиболее сильная неустойчивость развивается при выполнении условий:  $\omega \sim \omega_p \sim k_z V$ . При выполнении этих условий для добавки к частоте  $\delta = \omega - \omega_p$  получим следующее выражение:

$$\delta^3 = \frac{1}{2} \omega_b^2 \omega_p. \quad (3.32)$$

При этом мы получаем известные результаты. Те же результаты получаются, если воспользоваться методом медленно меняющихся амплитуд.

Пусть теперь имеются все три колебательные системы и все они связаны. Подставляя в уравнения (3.25)–(3.27) решения, которые пропорциональны  $\sim \exp(i\omega t)$ , получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega^*)^2} \right] - \frac{\mu\mu_1}{(\omega^2 + k_\perp^2 c^2)} \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_b^2}{(\omega^*)^2} \right) = 0. \quad (3.33)$$

Это дисперсионное уравнение учитывает колебания плазмы, пучка и внешней электродинамической структуры. Кроме того, оно учитывает связи между ними. Как и выше, мы будем рассматривать области параметров, в которых плазменно-пучковая неустойчивость имеет максимальный инкремент:

$$\omega \sim \omega_p \sim k_z V \sim |k_\perp c| \quad (\omega - \omega_p) = (\omega - k_z V) = (\omega - |k_\perp| c) = \delta.$$

Тогда из (3.33) мы получим следующее уравнение для определения комплексной добавки к частоте:

$$\delta^3 - \frac{1}{4} \mu\mu_1 \delta - \frac{1}{2} \omega_b^2 \omega_p = 0. \quad (3.34)$$

Мы ожидаем, в соответствии со сформулированным выше алгоритмом подавления неустойчивости, что если частота перекачки энергии между плазменными колебаниями и колебаниями внешней электродинамической структуры будет значительно большей, чем инкремент плазменно-пучковой неустойчивости, то эта неустойчивость будет подавлена. При этом можно отождествлять обратную величину инкремента неустойчивости со временем жизни юлы (без ее вращения), а период перекачки энергии между плазменными колебаниями и колебаниями внешней электродинамической структуры с периодом вращения юлы. Таким образом, мы ожидаем, что условие подавления неустойчивости будет иметь вид:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\mu\mu_1} > \left( \frac{1}{2} \omega_b^2 \omega_p \right)^{1/3}. \quad (3.35)$$

При выполнении условия (3.35) мы имеем три действительных корня уравнения (3.34) (см. рис. 3.7). Неустойчивость не развивается. На этом рисунке представлена зависимость функции  $F(\delta) = \delta^3 - \frac{1}{4} \mu\mu_1 \delta - \frac{1}{2} \omega_b^2 \omega_p$  от

$\delta$ . При этом введены следующие параметры  $x = \delta / \omega_p$ ,  $\mu_1 = \mu \omega_p^2$ ,  $\varepsilon = (\omega_b / \omega_p)^2$ .  $\varepsilon = 0.01$ . На рис. 3.7 параметр  $\mu$  равен 0.742 ( $\mu = 0.742$ ).

При уменьшении коэффициентов связи (или при увеличении плотности пучка) два действительных корня сливаются и исчезают. Остается только один действительный корень. При этом рождаются два комплексно сопряженных корня. Как результат, развивается неустойчивость. Процесс слияния корней представлен на рис. 3.8. На этом рисунке  $\mu = 0.5$ . Видно, что два отрицательных корня практически слились.

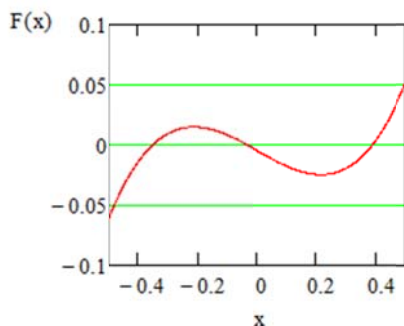


Рис. 3.7. Корни дисперсионного уравнения (3.34)

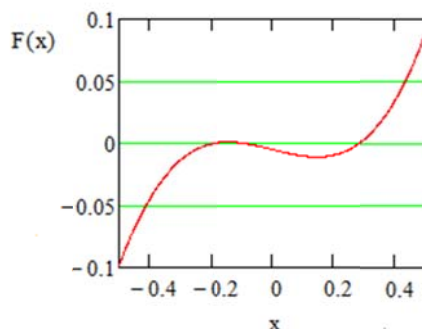


Рис. 3.8. Слияние двух действительных корней дисперсионного уравнения (3.34)

Таким образом, эффект юлы может быть использован для подавления пучковых неустойчивостей. При этом следует заметить, что максимальные инкременты пучковых неустойчивостей достаточно большие, поэтому рассмотренный выше способ стабилизации реализовать, по-видимому, достаточно сложно. Кроме того, нужно иметь в виду, что, вводя внешнее стабилизирующее электромагнитное поле, мы существенно меняем всю колебательную систему. Поэтому в некоторых случаях это дополнительное периодическое возмущение может приводить к развитию некоторых новых неустойчивостей. Такую возможность необходимо иметь всегда в виду.

### 3.5. Подавление распадных и взрывных неустойчивостей

Выше мы видели, что можно стабилизировать потоки заряженных частиц в плазме. Ниже мы покажем, что можно сделать устойчивыми и потоки электромагнитного излучения в плазме [60]. Более того, так как

неустойчивости потоков излучения в плазме обусловлены нелинейными эффектами, то стабилизировать их оказывается значительно проще.

Рассмотрим плазменный цилиндр с теми же характеристиками, что и в предыдущем подразделе. Более того, будем считать, что вокруг плазменного цилиндра имеется электродинамическая структура, колебания которой могут находиться в линейном синхронизме с одной из волн плазменного цилиндра. Таким образом, постановка задачи практически полностью совпадает с той, которая была в предыдущем подразделе. Отличие заключается в том, что вдоль плазменного цилиндра движется не электронный пучок, а поток электромагнитного излучения. Частота и волновой вектор этого излучения равны соответственно. Известно, что если амплитуда электромагнитной волны достаточно большая, то такой поток такой волны становится неустойчивым. Он распадается на некоторые собственные волны плазменного цилиндра. При этом выполняются следующие соотношения между частотами и волновыми векторами, участвующих в неустойчивости волн. Возможная схема трехволнового взаимодействия волн представлена на рис. 3.9. Ниже будет показано, что если одна из участвующих в этом трехволновом взаимодействии волн будет эффективно взаимодействовать с волной внешней электродинамической структуры, то мы можем подавить процесс трехволнового взаимодействия даже в том случае, когда распадающаяся волна имеет отрицательную энергию, т. е. удастся подавить не только процесс распада, но и процесс взрывной неустойчивости при трехволновом взаимодействии волн. Для этого необходимо, чтобы частота и волновой вектор одной из участвующих во взаимодействии волн совпадали с частотой и волновым вектором волны внешней электродинамической структуры, и чтобы между ними была достаточно эффективная связь. На рис. 3.10 в качестве примера показана дисперсия участвующих во взаимодействии волн. Причем в данном случае волна внешней электродинамической структуры близка по своим характеристикам к самой низкочастотной из участвующих во взаимодействии волн.

Если у нас взаимодействие волн с внешней электродинамической структурой отсутствует, то процесс трехволнового взаимодействия хорошо изучен и может быть описан следующей системой уравнений (см., например, [65])

$$\frac{dA_0}{dt} = -VA_1A_2, \quad \frac{dA_1}{dt} = VA_0A_2^*, \quad \frac{dA_2}{dt} = VA_1^*A_0. \quad (3.36)$$

Если знак правой части первого уравнения изменить на положительный, то система уравнений (3.36) будет описывать процесс взрывной неустойчивости.

Обозначим волну во внешней электродинамической структуре индексом 3 и предположим, что между основной волной ( $a_0$ ), которая распространяется в плазме и этой волной имеется связь, которая харак-

теризуется параметром  $\mu$ . Тогда уравнения, которые описывают взаимодействие этих двух волн, будут иметь вид:

$$\frac{d^2 E_0}{dt^2} + E_0 = \mu \cdot E_3, \quad (3.37)$$

$$\frac{d^2 E_3}{dt^2} + E_3 = \mu \cdot E_0. \quad (3.38)$$

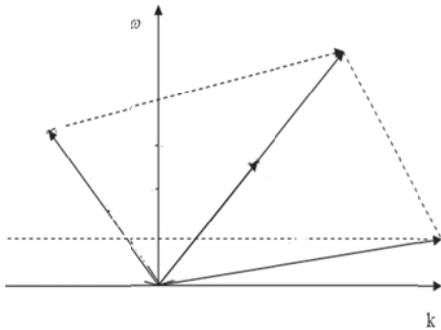


Рис. 3.9. Дисперсионная диаграмма взаимодействующих волн (без управляющей волны)

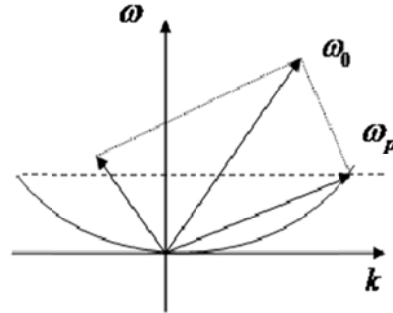


Рис. 3.10. Дисперсионная диаграмма взаимодействующих волн при наличии волны внешней электродинамической структуры

Отметим, что эти уравнения получены в линейном приближении. Кроме того, считаем, что коэффициент связи мал ( $\mu \ll 1$ ). Поэтому решения уравнений (37), (38) можно искать в виде

$$E_0 = A_0(t) \exp(it), \quad E_3 = A_3(t) \exp(it), \quad (3.39)$$

где амплитуды  $A_0(t)$  и  $A_3(t)$  являются медленно меняющимися функциями. Тогда для их определения получим следующую систему уравнений:

$$\frac{dA_0}{dt} = \frac{\mu}{2i} A_3, \quad \frac{dA_3}{dt} = \frac{\mu}{2i} A_0. \quad (3.40)$$

Система уравнений (3.40) представляет собой уравнение линейного маятника. Частота этого маятника равна  $\Omega = \mu/2$ . Физически эта частота определяет частоту перекачки энергии из основной волны в волну внешней электродинамической структуры и наоборот.

Если учесть и нелинейные члены, то полную систему уравнений для определения комплексных амплитуд взаимодействующих волн можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{dt} = -VA_1A_2 + \frac{\mu}{2i}A_3, \quad \frac{dA_1}{dt} = VA_0A_2^*, \quad \frac{dA_2}{dt} = VA_1^*A_0, \\ \frac{dA_3}{dt} = \frac{\mu}{2i}A_0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Хорошо известно, что если связь отсутствует ( $\mu = 0$ ), то система уравнений (3.41) описывает процесс распада. Причем инкремент распадной неустойчивости равен  $\delta = V|A_0(0)|$ . Теперь мы можем воспользоваться изложенным выше алгоритмом, и найти условие подавления распадной неустойчивости. Для подавления неустойчивости нам нужно, чтобы частота перекачки энергии между волной, распространяющейся в плазме и волной внешней электродинамической структуры, была большей, чем инкремент распадной неустойчивости. Это условие можно записать в виде  $\mu / 2V > |A_0(0)|$ .

Система уравнений (3.41) была проанализирована численными методами. Для этого удобно ввести следующие новые переменные и новый параметр:

$$\begin{aligned} \tau \equiv Vt, \quad A_0 = x_0 + ix_1, \quad A_1 = x_2 + ix_3, \\ A_2 = x_4 + ix_5, \quad A_3 = x_6 + ix_7, \quad \varepsilon \equiv \frac{\mu}{2V}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Прежде всего, рассмотрим обычный процесс распада, когда взаимодействие с внешней электродинамической структурой отсутствует ( $\varepsilon = 0$ ). При этом реализуется обычный распадный процесс. В качестве примера на рис. 3.11–3.13 представлена динамика реальных частей амплитуд, участвующих во взаимодействии волн. При построении этих рисунков были использованы следующие начальные условия  $x_0(0) = 0.1$ ,

$x_2(0) = 0.001$ ,  $x_4(0) = 0$ ,  $x_6(0) = 0.001$ . Связь с внешней структурой отсутствовала ( $\varepsilon = 0$ ).

Теперь учтем наличие связи между распространяющейся в плазме волной и волной во внешней электродинамической структуре.

Начальные условия для амплитуд взаимодействующих волн были выбраны такими же как и выше. Отличие заключается в том, что учтено наличие связи  $\varepsilon = 0.1$ . Результаты расчетов представлены на рис. 3.14–3.17.

Как видно из этих рисунков, дополнительные волны в плазме не возбуждены. Произошла полная стабилизация процесса распада.

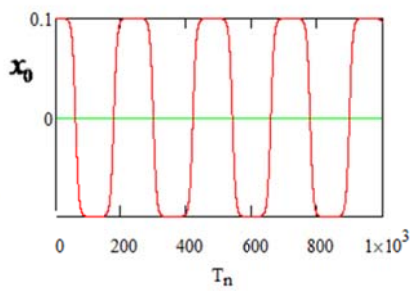


Рис. 3.11. Динамика реальной части амплитуды основной волны при трехволновом взаимодействии

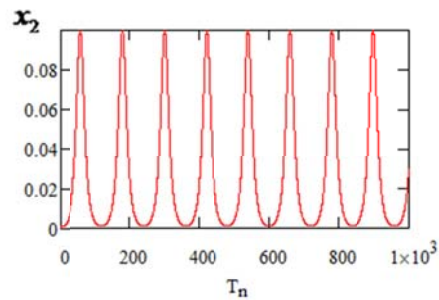


Рис. 3.12. Динамика реальной части амплитуды обратной волны при трехволновом взаимодействии

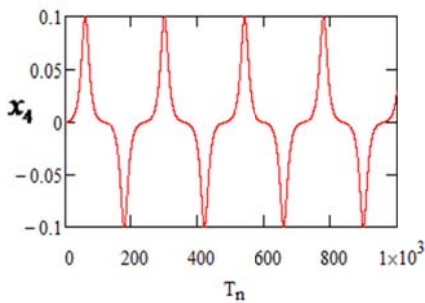


Рис. 3.13. Динамика реальной части амплитуды плазменной волны при трехволновом взаимодействии

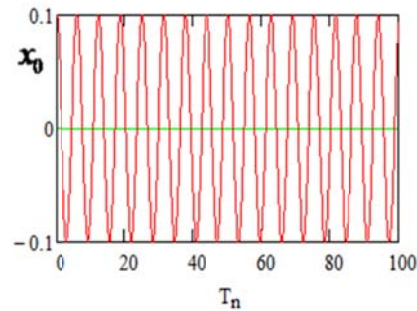


Рис. 3.14. Динамика реальной части амплитуды основной волны при наличии связи с волной внешней электродинамической структуры

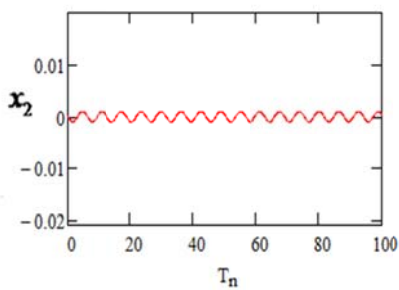


Рис. 3.15. Динамика реальной части амплитуды обратной волны при наличии волны внешней электродинамической структуры

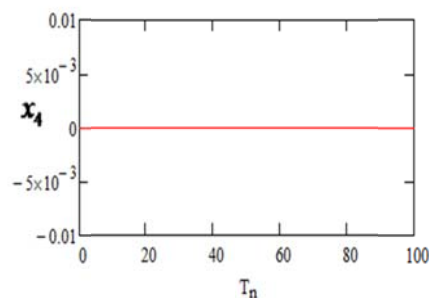


Рис. 3.16. Динамика реальной части амплитуды плазменной волны при наличии волны внешней электродинамической структуры

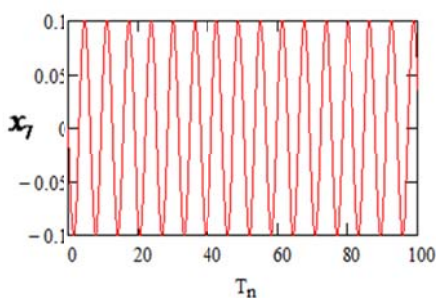


Рис. 3.17. Динамика реальной части волны внешней электродинамической структуры

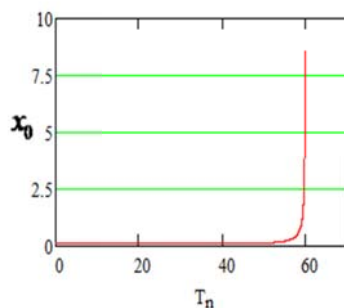


Рис. 3.18. Динамика реальной части амплитуды основной волны при взрывной неустойчивости

Как видно из этих рисунков, дополнительные волны в плазме не возбуждены. Произошла полная стабилизация процесса распада. Вся динамика волн оказалась заключенной в динамике между основной волной ( $A_0$ ) и волной, которая распространяется во внешней электродинамической структуре ( $A_2$ ). Отметим, что стабилизация наступает при достаточно малых коэффициентах связи между внешней электродинамической структурой и волной в плазме.

**Стабилизация взрывной неустойчивости.** Интересно, что также достаточно легко подавить не только процесс распадной неустойчивости, но и процесс взрывной неустойчивости [60]. Чтобы проанализировать условия, необходимые для подавления взрывной неустойчивости, воспользуемся системой уравнения (3.41). В первом уравнении этой системы в первом члене правой части поменяем знак с минуса на плюс. Если связь с внешней электродинамической структурой отсутствует, то развивается обыкновенная взрывная неустойчивость. Для иллюстрации этого процесса на рис. 3.18 представлены результаты численных расчетов системы (3.41) при таких значениях начальных амплитуд и параметра связи:  $\varepsilon = 0$ ,  $x_0(0) = 0.1$ ,  $x_2(0) = 0.001$ ,  $x_6(0) = 0.01$ . Из этого рисунка видно, что за времена порядка 60 ( $\tau \equiv Vt = 60$ ) развивается взрывная неустойчивость. Амплитуды всех взаимодействующих волн стремятся к бесконечности.

Однако уже при безразмерном коэффициенте связи равном 0.1 ( $\varepsilon = 0.1$ ) происходит полная стабилизация этой неустойчивости. В качестве примера на рис. 3.19–3.20 представлена динамика амплитуды основной волны и амплитуды волны внешней электродинамической структуры при значениях начальных амплитуд и параметра связи равных  $\varepsilon = 0.09$ ,  $x_0(0) = 0.1$ ,  $x_2(0) = 0.001$ ,  $x_6(0) = 0.01$ .

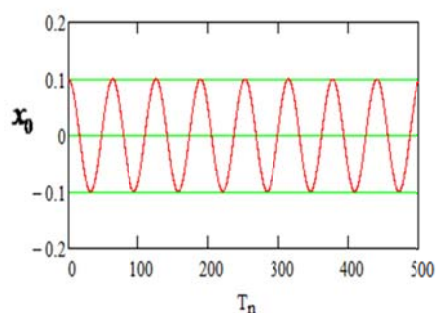


Рис. 3.19. Динамика реальной части амплитуды основной волны в условиях развития взрывной неустойчивости и при наличии связи с волной внешней электродинамической структуры

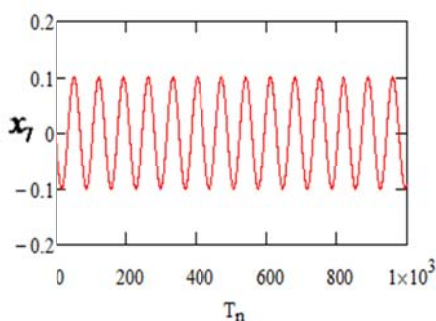


Рис. 3.20. Динамика амплитуды волны внешней электродинамической структуры

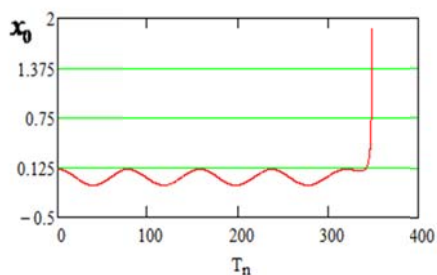


Рис. 3.21. Динамика реальной части амплитуды основной волны в условиях слабой связи с волной внешней электродинамической структуры

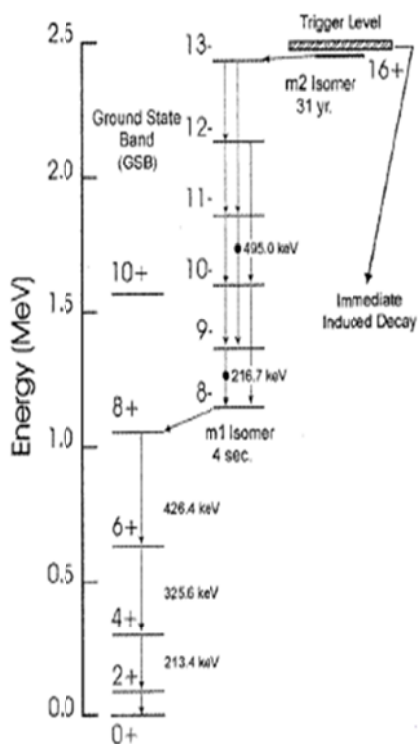


Рис. 3.22. Схема энергетических уровней изомера гафния – 178

Все остальные амплитуды волн не меняют своего значения. При этом, как видно, основная волна и стабилизирующая волна взяли на себя всю динамику. Только они и обмениваются энергией между собой. Если параметр связи будет уменьшаться, то процесс взрывной неустойчивости может проявиться, хотя время его появления может существенно отодвинуться. Так, уже при  $\varepsilon = 0.08$  взрыв проявляется в полную силу. Однако время его возникновения отодвигается и составляет вместо 60 величину порядка 330. Эта динамика представлена на рис. 3.21.

### 3.6. Экспериментальные исследования эффекта квантовой юлы

Во введении мы уже говорили о том, что в настоящее время имеется значительное количество экспериментальных доказательств существования квантового эффекта Зенона. В большинстве из этих экспериментов стабилизация возбужденного или стационарного состояния осуществлялась по отношению к достаточно низкочастотным переходам. Причем, инструментом воздействия (измерения) было импульсное или постоянное воздействие лазерного излучения. Во всех случаях при обсуждении возможностей использования и реализации квантового эффекта Зенона делалось утверждение, что такие процессы не могут быть реализованы на ядерном уровне, например, на подавление или (ускорение) процессов радиоактивного распада. Ниже мы кратко опишем некоторые результаты экспериментов, которые в течение многих лет проводились в Харьковском физико-техническом институте под руководством академика А. Н. Довбни и профессора Ю. Н. Ранюка, а также в киевском Институте ядерных исследований под руководством В. И. Киришука, в которых, возможно, наблюдался процесс торможения распада радиоактивного изомера гафния-178 [66].

Суть эксперимента заключалась в следующем. Образец материала, который содержал радиоактивный изотоп гафния-178, воздействовали потоками электронов с энергиями от 10 КэВ до 50 КэВ. На образце как на мишени энергия электронов конвертировалась в энергию рентгеновского излучения. По предположению несколько выше основного метастабильного состояния гафния-178 должен находиться короткоживущий триггерный уровень (см. рис. 3.22). Цель экспериментов заключалась в том, чтобы перевести метастабильное состояние гафния-178 на неустойчивый короткоживущий триггерный уровень. При успехе эксперимента в руках исследователей появляется идеальное ядерное топливо. Действительно, во многих экспериментах наблюдалось различное ускорение процесса радиоактивного распада под воздействием потока электронов на мишень, содержащую радиоактивный изотоп. Однако чаще авторы наблюдали противоположный эффект, когда процесс радиоактивного распада тормозился при воздействии пучка на мишень.

Эти последние эксперименты могут быть объяснены сформулированным выше механизмом стабилизации возбужденных состояний. Действительно, в рассматриваемой ядерной системе кроме триггерного уровня имеется большое количество других долгоживущих энергетических состояний. При воздействии пучка электронов на мишень возбуждается широкий спектр рентгеновского излучения. Такое излучение будет переводить ядерную систему не только на определенный энергетический (желательно триггерный) уровень, но и на многие другие долгоживущие уровни. Систему уравнений, которая будет описывать такие переходы, можно представить в виде

$$\begin{aligned} i\dot{A}_0 &= A_1, & i\dot{A}_1 &= A_0 + \sum_{k=2}^N \mu_k A_k, & i\dot{A}_2 &= \mu_2 A_1, \\ i\dot{A}_3 &= \mu_3 A_1, & \dots & i\dot{A}_N &= \mu_N A_1. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Эта система уравнений описывает связь и переходы рассматриваемой системы с первого ( $A_1$ ) метастабильного уровня на основной уровень ( $A_0$ ) за счет спонтанных переходов и на другие уровни, близкорасположенные к метастабильному уровню. Последние переходы являются индуцированными. Система (3.43) имеет аналитическое решение:

$$\begin{aligned} A_1 &= \cos(\Omega \cdot t), & A_0 &= \frac{1}{i \cdot \Omega} \sin(\Omega \cdot t), \\ A_k &= \frac{\mu_k}{i \cdot \Omega} \sin(\Omega \cdot t), & k &= 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.44)$$

где  $\Omega = \sqrt{1 + \sum_{k=2}^N \mu_k^2}$ .

Из вида этих решений следует, что чем большим будет число энергетических уровней, на которые возможен индуцированный переход, тем меньше будет вероятность спонтанного распада и меньшей будет вероятность перехода системы на триггерный короткоживущий уровень.

Из сформулированной картины переходов можно сформулировать основную рекомендацию для модификации проводимых экспериментов. Она заключается в том, что конверсию энергии электронных пучков в рентгеновское излучение следует проводить на отдельной мишени с последующим выделением необходимых спектральных компонент. Только этой узкой спектральной компонентой следует воздействовать на образец с гафнием-178. Такая схема эксперимента позволит убрать из динамики переходов все ненужные энергетические состояния.

Обработка этих результатов весьма сложна. Поэтому набрать достаточно статистическую статистику достаточно трудно. По этой причине были предприняты попытки провести другие эксперименты. Таким экспериментом был эксперимент по исследованию влияния ВЧ-поля на выход фотоэлектронов.

**Подавление фототока ФЭУ внешним ВЧ-полем** [59]. В настоящем подразделе мы изложим результаты влияния относительно сильного высокочастотного поля на фототок фотоумножителя. Было обнаружено достоверное уменьшение фототока при воздействии на фотокатод высокочастотного поля. Зависимость уменьшения фототока от мощности высокочастотного поля находится в хорошем качественном согласии с теоретическими предсказаниями.

В качестве теоретической модели выберем трехуровневую квантовую систему, на которую действует два сигнала (см. рис. 3.23).

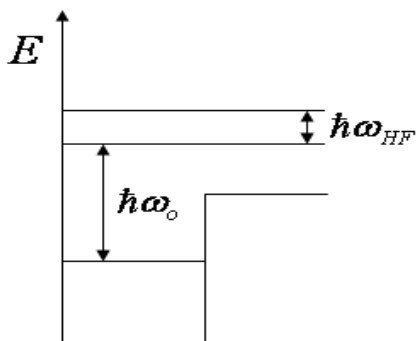


Рис. 3.23. Схема энергетических уровней

Частота одного сигнала находится в оптическом диапазоне ( $\omega_0$ ). Кванты этого сигнала могут переводить электроны фотокатода в вакуум. Частота второго сигнала ( $\omega_{HF}$ ) соответствует высокочастотному полю (2.77 ГГц). Этот сигнал потенциально может переводить вакуумный электрон с одного энергетического уровня на другой, который отстоит от него на расстоянии  $\hbar\omega_{HF}$ .

Предполагается, что сигналы таковы, что может быть использована теория возмущения. В этом случае можно использовать все результаты, изложенные в подразделе 3.2. В частности, можно использовать систему уравнений (3.14) для отыскания амплитуд волновых функций. Качественное отличие рассматриваемой задачи от той, которая была рассмотрена выше, заключается в том, что целью является отыскание условий стабилизации не верхнего возбужденного состояния, а основного нижнего энергетического уровня. Существенным отличием также является тот факт, что внешнее возмущение не действует на основной стабилизируемый уровень. Оно модифицирует конечное состояние рассматриваемой системы. Оно делает его динамичным. В этой постановке задачи необходимо решать систему уравнений (3.14) с другими начальными условиями. А именно, необходимо полагать, что в начальный момент времени ( $t = 0$ ) рассматриваемая квантовая система находится на нулевом, невозбужденном уровне. Тогда решениями системы (3.14) будут функции:

$$\begin{aligned} A_1 &= B \cdot \sin(\Omega \cdot t) & A_0 &= 1 + \frac{B}{i \cdot \Omega} (1 - \cos(\Omega \cdot t)) \\ A_2 &= \frac{B \cdot \mu}{i \cdot \Omega} (1 - \cos(\Omega \cdot t)) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Здесь  $\Omega^2 = 1 + \mu^2$ ; комплексная постоянная  $B$  может быть определена с использованием интеграла:  $\sum_{i=0}^2 |A_i|^2 = \text{const} = 1$ , которому подчиняются решения системы (3.14). Подставляя решения (3.45) в этот интеграл, мы находим:  $B_R = 0$   $B_I = -1/\Omega$ . Здесь мы использовали следующие обозначения:  $B = B_R + iB_I$ .

Таким образом, решение системы (3.14) приобретает вид:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 - \frac{1}{\Omega^2} (1 - \cos(\Omega \cdot t)); \quad A_1 = -\frac{i}{\Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot t); \\ A_2 &= -\frac{\mu}{\Omega^2} (1 - \cos(\Omega \cdot t)). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Из решения (3.46) следует, что чем больше будет параметр  $\mu$ , тем меньше будет вероятность, что система из невозбужденного стационарного состояния перейдет в возбужденное состояние. Следует несколько слов сказать о параметре  $\mu$ . Физически квадрат этого параметра определяет отношение числа квантов низкочастотного возмущения, которое ответственно за переходы между первым и вторым уровнями к числу квантов высокочастотного возмущения, которое определяет переходы между первым и нулевым уровнями. Решение (3.46) позволяет нам найти функциональную зависимость вероятностей нахождения квантовой системы на соответствующих энергетических уровнях как функцию мощности оптического и высокочастотного излучений. Например, если поток оптического излучения зафиксирован, то из (3.46) легко найти, что величина вероятности перейти на возбужденный уровень (первый уровень), а соответственно, и величина фототока будут обратно пропорциональны мощности высокочастотного излучения. Причем, чем меньше поток оптического излучения, тем более существенным будет подавление.

**Эксперимент.** Эксперимент был выполнен А. Н. Антоновым, Е. А. Корниловым и А. Н. Щербиной. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 3.24. Экспериментальная установка представляла собой ФЭУ-36, фотокатод которого помещался на маленькое отверстие, сделанное в широкой стенке прямоугольного волновода. Диаметр отверстия в волноводе был равен 23 мм. Диаметр фотокатода равен 35 мм. Отверстие волновода было ориентировано по центру фотокатода.

В волноводе возбуждалось мощное электромагнитное поле. Источником этого поля был магнетрон. Мощность магнетрона менялась от 20 кВт до 80 кВт, частота 2.77 ГГц, длительность импульса  $\sim 1.5$  мкс. Предполагалось, что такое поле будет влиять на фотоэффект.

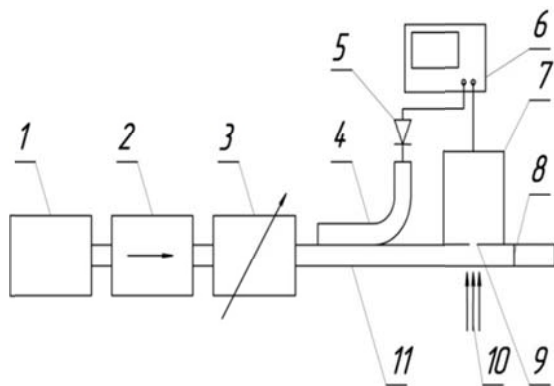


Рис. 3.24. Схема экспериментальной установки

- 1 – Магнетронный генератор СВЧ (2.77 ГГц); 2 – ферритовый вентиль;  
 3 – аттенюатор; 4 – направленный ответвитель; 5 – детектор;  
 6 – осциллограф; 7 – фотоэлектронный умножитель (ФЭУ-36);  
 8 – подстроечный поршень; 9 – отверстие в волноводе; 10 – источник света;  
 11 – стандартный волновод (72x34 мм)

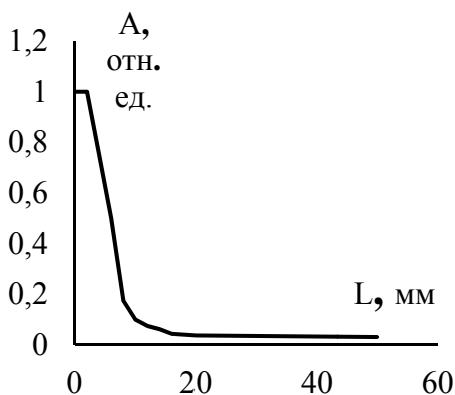


Рис. 3.25. Измеренное распределение поля, как функция расстояния от оси волновода

Действительно, в поле такой интенсивности количество высокочастотных квантов значительно больше, чем оптических квантов. Поэтому параметр  $\mu$  будет велик. При этом вероятность остаться квантовой системе в невозбужденном состоянии (отсутствие фототока) будет описываться квадратом модуля функции  $A_0$ . Выражение для этой функции приведено в формуле (3.46). Видно, что квадрат модуля этой функции будет отличаться от единицы только на величину  $\sim 1/\mu^2$ .

Таким образом, при заданном потоке оптического излучения количество фотоэлектронов будет обратно пропорциональным мощности высокочастотного излучения. Как мы увидим ниже, такая зависимость наблюдается в эксперименте.

Отверстие в волноводе мало по сравнению с длиной волны ( $\lambda \approx 10$  см), поэтому напряженность поля за пределами волновода быстро спадает (рис. 3.25). Поэтому оно, в основном, действует на фотокатод. Кроме того, видно, что градиент напряженности поля таков, что вылетевшие из фотокатода электроны, будут в этом поле ускоряться и вытал-

киваться по направлению к аноду. Кроме ускорения, фотоэлектроны будут совершать осцилляторные движения. Размах этих осцилляций не превосходит одного миллиметра. Учитывая тот факт, что фотоэлектроны рождены в маленькой центральной области фотокатода, такое движение не сможет выбросить фотоэлектроны из активной области. Таким образом, обычная электродинамика фотоэлектронов в поле такого высокочастотного поля должна приводить к увеличению фототока. В эксперименте же устойчиво, во всех случаях, уверенно наблюдалось уменьшение фототока (см. рис. 3.26).

Такое уменьшение может быть объяснено рассматриваемым нами механизмом — механизмом квантовой юлы. Однако возможно существуют и другие механизмы, которые в этих условиях могут приводить к наблюдаемому уменьшению фототока. Зависимость величины фототока в эксперименте оказывается обратно пропорциональной

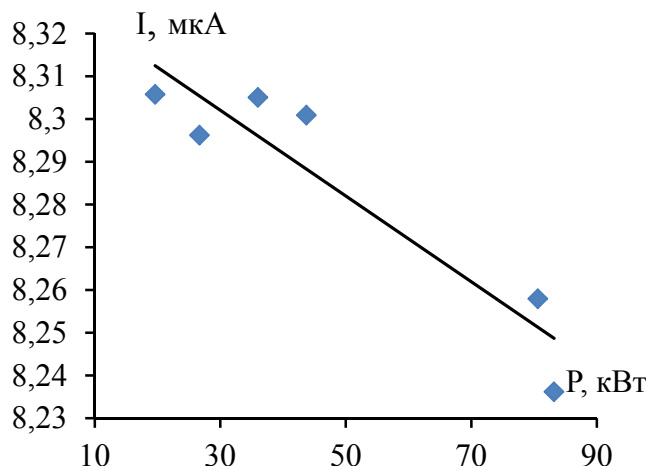


Рис. 3.26. Зависимость величины фототока от мощности импульса СВЧ

мощности высокочастотного излучения. Это находится в хорошем качественном согласии с теоретическими оценками. Следует отметить, что чем меньше поток оптического излучения, тем более заметным является процесс подавления фотоэффекта.

Несколько слов следует сказать об использованной нами выше теоретической модели фотоэффекта. Мы ее существенно упростили. В частности, отказались от учета непрерывного спектра для электронов вне твердого тела. Такое упрощение нам позволило получить простые аналитические формулы, которые дают простые функциональные зависимости влияния эффекта квантовой юлы на стабилизацию квантовых состояний.

Таким образом, анализируя результаты экспериментальных исследований, следует сделать следующий вывод. В первом эксперименте с гафнием-178 результаты экспериментов как по ускорению процессов распада, так и по подавлению этого процесса, к сожалению, находятся в пределах слегка выходящих за ошибки эксперимента. Поэтому глубокой уверенности в том, что в этих экспериментах наблюдался эффект

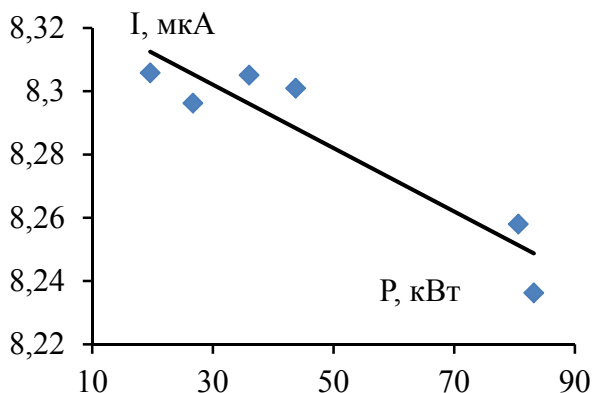


Рис. 3.26. Зависимость величины фототока от мощности импульса СВЧ

квантовой юлы, в настоящее время нет. Специально поставленный эксперимент с подавлением фототока, на первый взгляд, подтверждает существование этого эффекта в серии этих экспериментов. Однако эксперименты были поставлены с фотомножителем, который был помещен в достаточно сильное внешнее электро-

магнитное поле. Как работают приборы в таких условиях — мы знаем мало. Поэтому и в этой серии экспериментов с уверенностью утверждать, что наблюдался эффект квантовой юлы, к сожалению, нельзя.

### 3.7. Механизм юлы в классической механике

Выше мы рассматривали квантовые системы и системы классической электродинамики. Ясно однако сформулированный принцип квантовой юлы с успехом может быть использован и в классической механике. Действительно, он похож на тот, который проявляется в движениях гироскопа и в перевернутом маятнике Капицы. В качестве простейшего примера использования этого механизма в классической динамике рассмотрим динамику трех слабосвязанных линейных осцилляторов. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} \sum_i (A_i p_i^2 + a_i q_i^2) + h_1 \cdot q_1 q_2 + h_2 \cdot q_3 q_2. \quad (3.47)$$

Гамильтониану (3.47) соответствует следующая система дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + a_1 A_1 q_1 &= -A_1 h_1 q_2, \quad \ddot{q}_2 + a_2 A_2 q_2 = -A_2 h_1 q_1 - A_2 h_2 q_3, \\ \ddot{q}_3 + a_3 A_3 q_3 &= -A_3 h_2 q_2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Система (3.48) описывает динамику трех связанных линейных осцилляторов. Причем связь между осцилляторами осуществляется только через второй осциллятор. Будем для простоты считать, что частоты всех осцилляторов одинаковы ( $a_1 A_1 = a_2 A_2 = a_3 A_3 = \omega^2$ ) и что связь между ними слабая ( $h_i \ll 1$ ). Тогда решение системы уравнений (3.48) удобно представить в виде  $q_i = x_i(t) \cdot \exp(i\omega t)$ . Учитывая, что связь слабая для нахождения медленноменяющихся переменных  $x_j(t)$ , можно получить следующую систему укороченных уравнений:

$$i\dot{x}_1 = -x_2, \quad i\dot{x}_2 = -x_1 - \mu x_3, \quad i\dot{x}_3 = -\mu x_2, \quad (3.49)$$

где  $\dot{x} \equiv dx/d\tau$ ,  $\tau = t(A_1 h_1 / \omega)$ .

Если в системе (3.49) величины связей таковы, что параметр  $\mu$  значительно больше единицы ( $\mu = h_2 / h_1 \gg 1$ ), то решение этой системы можно представить в следующем простом виде:

$$x_2 = \cos \mu \tau, \quad x_1 = i \cdot \sin(\mu \tau) / \mu, \quad x_3 = i \cdot \sin(\mu \tau). \quad (3.50)$$

Из решения (3.50) следует, что при таких значениях параметров (коэффициентов связи) в обмене энергией будут участвовать только второй и третий осцилляторы. В первом осцилляторе будут только наблюдаться быстрые осцилляции маленькой амплитуды ( $x_1 \sim 1/\mu$ ). Этот результат как раз и соответствует тому факту, что энергия не переходит к первому осциллятору. Динамика первого осциллятора подавлена. Этот результат полностью аналогичен эффекту квантовой юлы.

### 3.8. В ы в о д ы

Таким образом, эффект квантовой юлы, как мы видели выше, имеет разнообразные применения. Для целей данного обзора наиболее важным является его потенциальная возможность использовать его для создания плотного ансамбля высоковозбужденных квантовых систем с длительным временем жизни. Такой ансамбль может быть использован для создания источников интенсивного когерентного излучения в ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах. Нужно сказать, что такая схема создания источников излучения может быть использована также в терагерцовом диапазоне. Как известно, этот диапазон также как и ультрафиолетовый и рентгеновский диапазоны в настоящее время освоен недостаточно. Существующие механизмы излучения в этих диапазонах не позволяют

создавать интенсивные излучатели в этих диапазонах. Поэтому любые альтернативные методы возбуждения этих колебаний представляют безусловный интерес.

## ГЛАВА II. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОТОКОВ НЕКОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОТОКИ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЫСОКОЙ СТЕПЕНЬЮ КОГЕРЕНТНОСТИ И С ВЫСОКОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ЭНЕРГИИ

Выше, в предыдущей главе, были рассмотрены механизмы, позволяющие непосредственно возбуждать интенсивное достаточно когерентное коротковолновое излучение. Однако многие задачи при использовании этих механизмов не могут быть решены. Возникает вопрос: Нет ли других путей создания источников коротковолнового излучения с заданными характеристиками? В этой главе будет показано, что такие пути есть. Они заключаются в том, чтобы использовать уже имеющееся излучение, и преобразовать излучение с данными характеристиками в излучение с нужными нам характеристиками. В качестве примера можно привести потенциальную возможность получения интенсивного когерентного рентгеновского излучения. В настоящее время для этих целей используются рентгеновские ЛСЭ. Это громадные, уникальные, дорогостоящие установки. Все они используют ускорители заряженных частиц, энергия которых составляет несколько ГэВ. С другой стороны, известно, что рентгеновское излучение достаточно интенсивное можно получить с использованием потоков заряженных частиц, энергия которых слегка превышает 10 кэВ. Однако это излучение некогерентно. Возникает вопрос: Нельзя ли преобразовать это некогерентное излучение в когерентное? В настоящей главе будут описаны несколько механизмов, позволяющих это осуществить. Это, прежде всего, механизм преобразования степени когерентности и плотности энергии излучения при взаимодействии с идеальными кристаллами. Описанию этого механизма посвящены подразделы 4.1–4.6. Другая возможность заключается в использовании механизма, основанного на плохой обусловленности второго начала термодинамики. Этот механизм позволяет при определенных условиях передать всю энтропию плохого излучения некоторому другому излучению при незначительной передаче энергии этому излучению. Описанию этого механизма посвящены подразделы 5.1–5.5.

Отметим, что нумерация разделов этой главы продолжает нумерацию разделов первой главы.

## РАЗДЕЛ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОТОКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ НА ПЕРИОДИЧЕСКИ- НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В работах [67, 68] было показано, что при рассеянии электромагнитных волн средами, имеющими слабую периодическую неоднородность, возможно возбуждение волн, плотность потока энергии которых значительно превосходит плотность потока падающей на среду волны. Такие волны были названы **резонансными рассеянными волнами** (РРВ). Условия возбуждения РРВ совпадают с условиями поверхностной дифракции в теории динамической дифракции рентгеновского излучения идеальными кристаллами, т.е. они не принадлежат ни схеме дифракции Лауэ, ни схеме дифракции Брэгга (см., например, [70]). В рамках теории связанных волн РРВ соответствует волне минус первого порядка дифракции и имеют сложную структуру. Формирование РРВ происходит в результате процесса динамической дифракции и может интерпретироваться как **динамическая фокусировка** (ДФ) рассеянного кристаллом излучения. Ниже мы будем пользоваться как термином РРВ, так и термином ДФ. Можно ожидать, что при распространении рентгеновского излучения в идеальных кристаллах, в результате процесса динамического перерассеяния, степень пространственной когерентности излучения возрастет. В пользу существования такой возможности указывают процессы, протекающие в толстых голограммах, а также результаты работ [70, 71]. Если процесс ДФ будет сопровождаться одновременно процессом роста уровня когерентности, то можно надеяться, что совокупным результатом будет РРВ с достаточно большой амплитудой (большей чем, например, при дифракции Лауэ или Брэгга) и с высоким уровнем когерентности. Ниже мы покажем, что такой процесс может быть реализован.

Ниже приведены результаты исследования условий возникновения резонансных рассеянных волн (РРВ), их структуры, а также возможности одновременного протекания процесса динамической фокусировки (ДФ) и процесса увеличения степени когерентности сфокусированного рассеянного поля. Показано, что образование РРВ сопровождается ростом степени когерентности РРВ. Кроме этого, описаны некоторые особенности процесса ДФ. В частности, показана возможность возбуждения поверхностных рентгеновских волн, а также основные характеристики этих волн. Ниже, в 4.1 и 4.2. подразделах, излагаются результаты исследования ДФ волн при их рассеянии на периодически неоднородных слоях и полупространстве. Главным результатом, полученным в этих разделах, является доказательство того факта, что наибольший возможный уровень амплитуды поля достигается в случае, когда неоднородность связывает

собственные и несобственные электромагнитные волны. Под собственными мы понимаем волны, которые могут распространяться без внешнего возбуждающего поля. К сожалению, поверхностные рентгеновские волны, как показано в этом разделе, не могут быть собственными для полупространства. В 4.3 подразделе показано, что уровень поперечной когерентности РРВ может быть значительно выше, чем уровень падающего излучения. В четвертом – рассмотрена общая задача эволюции корреляционной функции при рассеянии рентгеновского излучения на идеальном кристалле в схеме Лауэ. Для корреляционной функции в этом разделе получена формула, которая обобщает формулу Ван-Циттерта-Цернике на случай наличия кристалла. Из этой формулы следует, что наличие кристалла позволяет существенно увеличить степень когерентности излучения. В пятом разделе показано, что при выполнении условий многоволновой дифракции эффекты фокусировки излучения могут быть существенно усилены.

#### 4.1. Постановка задачи.

##### Основные уравнения [72–74]

Рассмотрим задачу о рассеянии волны на периодически неоднородном диэлектрическом слое. Пусть из однородного полупространства  $z < 0$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$  на периодически-неоднородный диэлектрический слой  $0 \leq z \leq L$  падает плоская волна  $\vec{E}^1 = \vec{E}_0 \cdot \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t))$ . Диэлектрическую проницаемость слоя будем описывать соотношением:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + q \cdot \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{r}), \quad (4.1)$$

где  $\kappa_i = 2\pi / d_i$ ,  $d_i$  – период неоднородности вдоль  $i$ -ой оси. Между величинами  $\text{Re}(q, \varepsilon_0)$ ,  $\text{Im}(q, \varepsilon_0)$  существует соотношение:  $\text{Re } \varepsilon_0 \gg \text{Re } q \gg \text{Im}(q, \varepsilon_0) \gg q^2$ . Диэлектрическую проницаемость полупространства за слоем ( $z > L$ ) для упрощения будем считать равной  $\varepsilon_1$  ( $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$ ). Поля в слое и вне его должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta \vec{E}^i - \frac{\varepsilon_i}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}^i}{\partial t^2} = 0, \quad i = \{1, 2, 3\}, \quad (4.2)$$

а также граничным условиям на поверхности слоя:

$$(\vec{E}_t^1 = \vec{E}_t^2, \vec{H}_t^1 = \vec{H}_t^2)_{z=0}, \quad (\vec{E}_t^2 = \vec{E}_t^3, \vec{H}_t^2 = \vec{H}_t^3)_{z=L}. \quad (4.3)$$

При изучении нестационарных задач эти граничные условия должны быть дополнены значениями полей при  $t=0$ . Если изучается динамика полей в ограниченных вдоль оси  $x$  слоях, то к граничным условиям (4.3) нужно добавить граничные условия при  $x=0$ . Как видно, мы описываем кристалл наиболее простой моделью, которая однако позволяет легко получить ответы на многие интересующие нас вопросы.

**Поля в слое.** Для нахождения полей в периодически-неоднородной среде с малой величиной неоднородности ( $q \ll 1$ ) будем пользоваться методом связанных волн. При этом укороченные уравнения для нахождения медленно меняющихся амплитуд связанных волн (мы ограничиваемся приближением двухволновой дифракции) будут иметь вид:

$$2i \left[ (\vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_{01} - \frac{\omega \varepsilon_0}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}_{01}}{\partial t} \right] = -\frac{q\omega^2}{2c^2} \vec{E}_1, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial z^2} + 2i \left[ (\vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_1 - \frac{\omega \varepsilon_0}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \right] = -\frac{q\omega^2}{2c^2} \vec{E}_{01},$$

где  $\vec{E}_{01}$  — амплитуда электрического поля волны, существовавшей в слое при отсутствии неоднородности а  $\vec{E}_1$  — амплитуда волны, которая появилась вследствие наличия слабой периодической неоднородности,  $\vec{k}_1 = \vec{k}_0 - \vec{k}$ .

Система уравнений (4.4) представляет собой систему двух векторных уравнений. Для поперечных волн в слабонеоднородной среде, как известно, можно отдельно рассматривать  $\sigma$ -и  $\pi$ -поляризации. Уравнения для полей волн каждой из этих поляризаций разделяются

и описываются скалярными уравнениями. Эти уравнения легко найти, если уравнения системы (4.4) скалярно умножить на единичные векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_4$  — для  $\sigma$ -поляризации и на  $\vec{e}_2, \vec{e}_5$  для  $\pi$ -поляризации соответственно

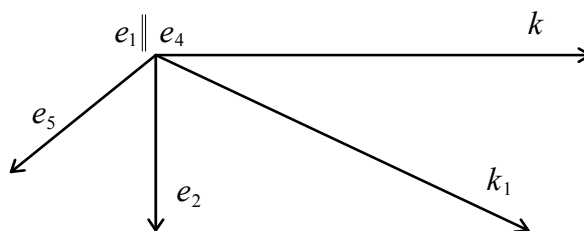


Рис. 4.1. Взаимное расположение волновых векторов взаимодействующих волн, а также расположение единичных векторов поляризации этих волн

(см. рис. 4.1). Таким образом, можно получить следующую систему частично связанных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2i \left[ (\vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}) F_{01} - \frac{\omega \varepsilon_0}{c^2} \cdot \frac{\partial F_{01}}{\partial t} \right] = -\frac{q\omega^2}{2c^2} F_1, \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + 2i \left[ (\vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}) F_1 - \frac{\omega \varepsilon_0}{c^2} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial t} \right] = -\frac{q\omega^2}{2c^2} F_{01}, \end{array} \right. , \quad (4.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2i \left[ (\vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}) F_{02} - \frac{\omega \varepsilon_0}{c^2} \cdot \frac{\partial F_{02}}{\partial t} \right] = -\frac{q\omega^2}{2c^2} F_2 \cdot c, \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} + 2i \left[ (\vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}) F_2 - \frac{\omega \varepsilon_0}{c^2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial t} \right] = -\frac{q\omega^2}{2c^2} F_{02} \cdot c, \end{array} \right.$$

где  $\vec{E}_{01} = \vec{e}_1 \cdot F_{01} + \vec{e}_2 \cdot F_{02}$ ,  $\vec{E}_1 = \vec{e}_4 \cdot F_1 + \vec{e}_5 \cdot F_2$ ,  $c \equiv \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_5$ .

Первые два уравнения системы (4.5) для скалярных величин  $F_{01}, F_1$  описывают  $\sigma$ -поляризацию, а два других —  $\pi$ -поляризацию. Заметим, что последние два уравнения отличаются от первых двух только множителем  $c$  в правой части. Таким образом, динамика полей для  $\sigma$ - и  $\pi$ -поляризаций может рассматриваться отдельно. Такое разделение значительно упрощает решение задачи о рассеянии волн на диэлектрическом слое. Действительно, вместо решения двух векторных уравнений (4.4) (шесть скалярных уравнений), нужно разрешить только четыре скалярных, которые, в свою очередь, развязаны, то есть достаточно рассмотреть только два скалярных уравнения. В общем случае, за счет граничных условий (4.3), нужно принимать во внимание все три компоненты электрического и магнитного поля волны. При этом выражения для амплитуд волн становятся громоздкими. Этого усложнения легко избежать. Для этого оси координат следует выбрать таким образом, чтобы, например, вектор  $\vec{e}_1$  лежал в плоскости  $(y, z)$ . Это не ограничивает общности рассмотрения задачи. При этом поля в периодически-неоднородном слое можно искать в виде

$$\begin{aligned} E_y = & \left[ F_{01}(\vec{r}, t) \cdot e^{i\gamma_0 z} + F_{03} \cdot e^{-i\gamma_0 z} \right] e^{ik_{0\perp} r_{\perp} - i\omega t} + \\ & + \left[ F_1(\vec{r}, t) \cdot e^{i\gamma_1 z} + F_3 \cdot e^{-i\gamma_1 z} \right] e^{ik_{1\perp} r_{\perp} - i\omega t} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$H_x = -\frac{1}{i \cdot k} \frac{\partial E_y}{\partial z},$$

где  $\gamma_0 = \sqrt{k^2 \varepsilon_0 - k_x^2 - k_y^2}$ ,  $\gamma_1 = \sqrt{k^2 \varepsilon_0 - k_{1x}^2 - k_{1y}^2}$ ,  $k = \omega/c$ ,  $\vec{k}_1 = \vec{k} - \vec{K}$ . Всю

зависимость от времени мы выбрали в виде  $e^{-i\omega t}$ , то есть ниже мы будем рассматривать только стационарный процесс ( $\partial/\partial t = 0$ ). Поля в верхней среде ( $z < 0$ ) и поля в полупространстве  $z > L$  будут иметь вид:

$$E_y^1 = \left[ e^{ik_z z} + C \cdot e^{-ik_z z} \right] e^{ik_{\perp} r_{\perp}} + D \cdot e^{-i\beta z + ik_{\perp} r_{\perp}}, z < 0 \quad (4.7)$$

$$E_y^3 = F \cdot e^{ik_z z + ik_{\perp} r_{\perp}} + C_1 \cdot e^{i\beta z + ik_{\perp} r_{\perp}}; z > L; \quad (4.8)$$

$$H_x^{1,3} = -\frac{1}{i \cdot k} \frac{\partial E_y^{1,3}}{\partial z}.$$

В общем случае, функции  $F_{01}$  и  $F_1$  отличаются от функций, входящих в уравнение (4.5), постоянным множителем, который равняется  $(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_y)$ , где  $\vec{e}_y$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $y$ . Далее мы его, для упрощения, писать не будем.

Ниже мы будем считать процесс рассеяния однородным вдоль оси  $x$ , то есть  $\partial/\partial x = 0$ . При этом, подставляя выражения для полей в граничные условия, найдем систему из восьми алгебраических уравнений для нахождения неизвестных  $(F_{01}, C, F, F_{03})$  и  $(F_1, D, C_1, F_3)$ . Если  $F_{01}$  и  $F_1$  не зависят от  $z$ , то система уравнений разбивается на две независимые подсистемы, каждая из которых имеет по четыре неизвестные. Из условия существования нетривиального решения для второй из этих систем (для  $F_1, D, C_1, F_3$ ) следует соотношение:

$$(\gamma_1 + \beta)^2 e^{-i\gamma_1 L} - (\gamma_1 - \beta)^2 e^{+i\gamma_1 L} = 0. \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) представляет собой дисперсионное уравнение для собственных волн, распространяющихся вдоль однородного диэлектрического слоя. Если  $\beta^2 > 0$ , то уравнение (4.9) не имеет решений. Уравнение (4.9) имеет решение только при  $\beta^2 < 0$ . Это условие означает, что поля собственных волн слоя вне слоя экспоненциально убывают с ростом расстояния от слоя.

В случае, когда  $F_{01}$  и  $F_1$  зависят от  $z$  (при наличии слабой неоднородности), система из восьми алгебраических уравнений остается связанной. Для нахождения всех неизвестных этой системы имеет смысл рассматривать частные случаи. Прежде всего, это случай рассеяния волны на «тонком» слое, то есть на слое, толщина которого удовлетворяет

неравенствам  $\lambda \ll L \ll L_{ekst}$ , где  $L_{ekst} = \lambda \cdot \sqrt{(\gamma/\gamma_1) \cdot q^2}$  – длина экстинкции. В этом случае можно считать  $\partial^2 / \partial z^2 \ll \gamma \cdot \partial / \partial z$ , и система уравнений (4.5) сводится к одному уравнению второго порядка. Используя решение этого уравнения, систему из восьми алгебраических уравнений можно свести к системе состоящей всего из двух алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} D_0 \cdot F_{01}(0) &= \Phi(a), \\ D_1 \cdot F_1(0) &= \Phi_1(a), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} F_{01}(0) &= [A - B] \cdot \sqrt{\gamma_1 / \gamma_0}, \quad F_1(0) = [A + B], \\ D_0 &= D_0(\omega, \vec{k}) = (\gamma_0 + k_z)^2 e^{-i\gamma_0 L} - (\gamma_0 - k_z)^2 e^{i\gamma_0 L} \neq 0, \\ D_1 &= (\gamma + k_{1z})^2 e^{-i\gamma_1 L} - (\gamma_1 - k_{1z})^2 e^{i\gamma_1 L}, \quad k_{1z} \equiv \beta, \\ \Phi(a) &= (\gamma_0 - k_z)^2 \cdot e^{i\gamma_0 L} E_{01}(a) - \\ &- i \cdot \left[ (\gamma_0 - k_z) \cdot \left( \frac{\partial E_{01}}{\partial z} \right)_L \cdot e^{i\gamma_0 L} - \left( \frac{\partial E_{01}}{\partial z} \right)_0 \cdot e^{-i\gamma_0 L} \cdot (\gamma_0 + k_z) \right] + f, \\ f &= 2k_z(\gamma_0 + k_z) e^{-i\gamma_0 L}, \quad E_1(a) = A(e^{iaL} - 1) + B(e^{-iaL} - 1), \\ \Phi_1(a) &= \rho(a) + \alpha(a)B, \quad E_{01}(a) = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_0}} \cdot [A \cdot (e^{iaL} - 1) - B(e^{-iaL} - 1)], \\ a &= qk^2 / 4\sqrt{\gamma_0 \cdot \gamma_1}, \\ \rho(a) &= f_0 [(\gamma_1 - \beta)^2 \cdot (e^{iaL} - 1) \cdot e^{i\gamma_1 L} + a[(\gamma_1 + \beta) \cdot e^{i\gamma_1 L + iaL} - \gamma_1 - \beta] e^{-i\gamma_1 L}] \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0(a) \\ \alpha(a) &= [2(\cos(aL) - 1)(\gamma_1 - \beta)^2 + 2i(\gamma_1 - \beta)a \cdot \sin(aL)] e^{i\gamma_1 L} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0(a^2). \end{aligned}$$

Вид уравнений (4.10) позволяет сделать существенные обобщения. Действительно, как мы видим из этих уравнений, они связывают собственные волны диэлектрического слоя ( $F_1, D_1 = 0$ ) с несобственными, падающими на диэлектрический слой ( $F_{01}, D_0 \neq 0$ ). Поскольку  $D_1 = 0$  представляет собой дисперсионное уравнение для собственных волн в слое, а  $D_0 \neq 0$ , то из уравнений (4.10) сразу можно сделать вывод, что  $F_1 \approx F_{01}/q$ , то есть амплитуда собственных волн в слое может быть значительно большей, чем амплитуда несобственных волн, падающих на слой. Этот результат является общим. Он позволяет утверждать, что

собственные волны диэлектрического слоя большой амплитуды могут быть возбуждены при наличии слабой связи между собственными и несобственными волнами. Причем природа связи может быть произвольной. Выше связью служила периодическая неоднородность среды. Связью может служить неоднородность границ. Более того, к уравнениям аналогичным (4.10) могут быть сведены уравнения, описывающие возбуждение волн в разнообразных структурах.

#### 4.2. Рассеивание волн на периодически-неоднородном полупространстве

Выше мы видели, что при рассеянии волн на периодически-неоднородном “тонком” слое в нем возбуждаются собственная волна, амплитуда которой значительно больше амплитуды падающей на слой волны. Если слой очень толстый, так что  $\text{Im}\varepsilon \cdot L \gg 1$ , то его более естественно моделировать неограниченным полупространством ( $z > 0$ ). При этом возникает два главных вопроса. Первый – могут ли в таком полупространстве возбуждаться собственные волны? Другими словами, можно ли процесс рассеяния описать уравнениями, аналогичными уравнениям (4.10)? Второй – какого значения может достигать амплитуда рассеянной волны в этом случае? Для отыскания ответов на эти вопросы запишем поля в верхнем полупространстве ( $z < 0$ ) и в нижнем ( $z > 0$ ) в виде

$$\begin{aligned} E_y &= \left[ e^{ik_z z} + R e^{-ik_z z} \right] e^{ik_{\perp} r_{\perp}} + D e^{-i\beta z + ik_{\perp} r_{\perp}}, z < 0, \\ E_y &= E_{01}(z) \cdot e^{i\gamma_0 z + ik_{\perp} r_{\perp}} + E_1(z) \cdot e^{i\gamma_0 z + ik_{\perp} r_{\perp}}, z > 0, \\ H_x &= -\frac{1}{i \cdot k} \frac{\partial E_y}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

«Сшивая» эти поля на поверхности  $z = 0$ , получим четыре алгебраических уравнения для нахождения четырех констант. Если  $E_{01}$  и  $E_1$  не зависят от  $z$ , то эта система распадается на две независимые подсистемы для  $(R, E_{01})$  и  $(D, E_1)$ , соответственно. Из второй системы с необходимостью вытекает, что  $(\gamma_1 + \beta) = 0$ . Учитывая значение  $\gamma_1$  и  $\beta$ , легко увидеть, что последнее соотношение не может быть удовлетворено. Таким образом, в однородной среде нет собственных волн, которые распространяются вдоль границы  $z = 0$ . Если  $E_{01}$  и  $E_1$  зависят от  $z$  (при

наличии слабой периодической неоднородности) выражения для  $E_{01}$  и  $E_1$  могут быть найдены из уравнений (4.5). В случае, который нас интересует в первую очередь  $\gamma_1 \rightarrow 0$ , и эти уравнения можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 E_1}{\partial z^3} - \frac{q^2 k^4}{8i\gamma_0} E_1 = 0. \quad (4.12)$$

Общее решение уравнения (4.12) имеет вид:

$$E_1 = A e^{\lambda_1 z} + B e^{\lambda_2 z} + C e^{\lambda_3 z}, \quad (4.13)$$

где  $\lambda_1 = \lambda_0 \cdot i$ ,  $\lambda_2 = \lambda_0 \cdot \exp(7\pi/6)$ ,  $\lambda_3 = \lambda_0 \exp(\pi/6)$ ,  $\lambda_0 = [q^2 k^4 / 8\gamma_0]^{1/3}$ .

Из вида выражений для собственных чисел  $\lambda_i$  следует, что константа  $C$  должна обратиться в нуль ( $C = 0$ ), так как соответствующий член описывает экспоненциально нарастающую в направлении  $z > 0$  волну и в случае неограниченного полупространства не имеет физического смысла. Подставляя найденные решения в граничные условия для нахождения амплитуд  $A$  и  $B$ , можно получить следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A[(k_z + \gamma_0) - i\lambda_1] + [(k_z + \gamma_0) - i\lambda_1]B &= 2k_z, \\ A\lambda_1[(\beta + \gamma_1)i + \lambda_1] + B\lambda_1[(\beta + \gamma_1)i + \lambda_2] &\lambda_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Наличие собственных волн полупространства, имеющего периодическую неоднородность, означает, что детерминант системы (4.14) может обратиться в нуль. Такая возможность означала бы, что наличие слабой неоднородности ведет к возможности существования собственных волн в периодическом полупространстве. Однако, как показывает анализ этого детерминанта, он не может равняться нулю. Таким образом, волны, которые могут распространяться в периодически-неоднородном полупространстве вдоль границы  $z=0$  не являются собственными волнами. Они существуют только благодаря наличию внешнего поля. Несмотря на то, что в неограниченном полупространстве не существует собственных волн, амплитуда возбуждаемых в такой среде волн, в том числе и поверхностных рентгеновских, может быть значительно большей, чем амплитуда падающей на кристалл волны. Это увеличение не такое значительное, как при возбуждении собственных

волн в слое, и равняется  $A \approx B \approx A_0 [1/q]^{1/3}$ , где  $A_0$  амплитуда падающей на среду волны.

### 4.3. Рост уровня когерентности при рассеянии волн на периодически- неоднородной среде

Выше мы показали, что существуют условия, при выполнении которых амплитуда рассеянной на кристалле волны значительно превышает амплитуду падающей на кристалл волны. В этом разделе будет показано, что в таких же условиях, при рассеянии некогерентного излучения степень когерентности рассеянного сфокусированного поля значительно выше, чем у падающего. Для доказательства этого факта будем считать, что на поверхность среды (кристалла) падает некогерентное излучение. При рассеянии такого излучения условия  $(\vec{k}_1 = \vec{k} - \vec{k})$  не могут быть точно выполнены. Однако укороченные уравнения (4.4) и (4.5) при учете нарушения синхронизма, а также соотношения (4.10) остаются справедливыми и в этом случае. Мы будем пользоваться этими уравнениями или близкими к ним.

Укороченные уравнения, например (4.5), вместе с граничными условиями могут быть полностью решены различными способами (например, с помощью метода Фурье). Однако полученные таким образом общие решения имеют сложную структуру и их тяжело анализировать. Поэтому ниже мы даем более простой анализ, который позволяет качественно доказать наиболее важный факт – факт значительного роста уровня когерентности резонансных рассеянных волн (РРВ). Мы будем оценивать размер когерентности рассеянного поля с помощью соотношения неопределенности:  $\Delta k \cdot l \geq 1$ , где  $\Delta k$  – ширина спектра поля, а  $l$  размер. Пусть на периодически-неоднородный слой падает однородное случайное поле  $E(\vec{r})$ . Характеристиками этого поля являются спектральная амплитуда  $E_k$  и спектральная плотность  $\Phi(k)$ :

$$(2\pi)^3 E_k = \int E(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}, \quad \langle E(k) \cdot E^*(k^1) \rangle = \Phi(k) \delta(k - k^1).$$

В полном спектре случайного поля найдется такая компонента  $E_k$ , которая будет удовлетворять необходимым для возбуждения РРВ условиям. Тогда эта компонента будет выделяться и накапливаться. Спектральная компонента, которая появится вследствие взаимодействия случайного поля с периодической неоднородностью, может быть найдена методом аналогичным методу, описанному в предыдущих разделах

4.1–4.2. Таким образом, если до рассеяния спектральная плотность была  $\Phi_0$ , то после взаимодействия поля с решеткой она будет равняться  $\Phi = \Phi_0 |\Psi|^2$  (поскольку  $\Psi$  – регулярная функция, см. ниже). Таким образом, для оценки степени когерентности поля достаточно найти спектр этого поля.

Для достижения поставленной цели мы воспользуемся уравнениями (4.10), в которых в правой части оставлена расходящаяся  $\Delta \vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k} + \vec{k}$ . Далее мы воспользуемся операторным методом ( $\omega \rightarrow \omega + i \partial / \partial t$ ,  $k \rightarrow k - i (\partial / \partial x)$ ), и найдем укороченные уравнения для амплитуд связанных волн. Если мы будем считать, что изменения амплитуды падающей волны в результате рассеяния несущественны («тонкий» слой), то эти уравнения имеют простой вид:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial x} \right) B(x) = R_0 e^{i \Delta k x}, \quad (4.15)$$

где  $V = - \left[ \frac{\partial D_1 / \partial k}{\partial D_1 / \partial \omega} \right]$ ,  $R_0 = \frac{\rho(a)}{i \cdot \partial D_1 / \partial \omega}$ , выражение для  $\rho(a)$  приведено в (4.10).

Выше мы видели, что для «тонкого» слоя предположение о неизменности падающего поля хорошо выполняется. В стационарном случае ( $\partial / \partial t = 0$ ) решение уравнения (4.15) имеет вид:

$$B = \frac{2R_0}{ik_{0x}} \cdot \frac{\sin(\Delta k \cdot x / 2)}{(\Delta k \cdot x / 2)} = A_0 \cdot \Psi. \quad (4.16)$$

Из формулы (4.16) легко увидеть, что значительное повышение амплитуды поля достигается только для тех спектральных компонент, для которых  $\Delta k L \ll 1$ , где  $L$  – длина слоя вдоль оси  $z$ . Из этого неравенства вытекает, что спектральная плотность поля имеет существенное значение только для  $\Delta k < 1 / L$ . Воспользовавшись соотношением неопределенности, можно утверждать, что размер пространственной когерентности поля достигает значения  $l \approx L$ . Принимая во внимание, что при  $\text{Im } \varepsilon \neq 0$ ,  $L \approx \lambda / \text{Im } \varepsilon$ , находим, что размер когерентности равняется размеру области, с которой собирается излучение.

Если кристалл имеет значительную толщину, оценку степени когерентности сделаем так: рассмотрим первую пару уравнений (4.5), то есть уравнений, описывающих динамику  $\sigma$ -поляризации. Будем считать процесс стационарным, а по поперечным координатам поле разложим в интеграл Фурье. Тогда система уравнений в частных производных

переходит в систему уравнений в полных производных. Решение этой системы для схемы дифракции Лауэ будет иметь вид:

$$F_1 = B_1 \exp(\lambda_1 z) + B_2 \exp(\lambda_2 z), \quad F_{01} = \frac{4k_{1z}}{2ik^2 q} \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} + i\xi \frac{k_{1x}}{k_{1z}} F_1 \right\}, \quad (4.17)$$

где  $B_i = \text{Const}$ ,  $\lambda_{1,2} = -\frac{i}{2}d \pm i\sqrt{d^2/4 + \alpha}$ ,

$d \equiv \left\{ \xi \left( k_{1x}/k_{1z} + k_{0x}/k_{0z} \right) + \left( \Delta k_z + \Delta k_x k_{0x}/k_{0z} \right) \right\}$ , а  $\xi$  — переменная

Фурье разложения. При дифракции Лауэ, на расстоянии порядка  $L_{\text{ext}}$ , энергия поля переходит в энергию поля минус первого порядка дифракции. Амплитуда этого поля при этом достигает значения амплитуды падающего поля  $F_1 \sim F_{01}$ . Как можно увидеть из (4.17), такое равенство может быть достигнуто только при условии  $\lambda_1 \leq q$ . Подставляя в это неравенство значения  $\lambda_1$ , легко найти, что ширина спектра поля, для которого возможно такое соотношение, не должна превосходить величины  $q$ , то есть  $\Delta k \sim q$  и  $\xi \sim q$ . Пользуясь соотношением неопределенности, из этих оценок для ширины спектра находим, что размер пространственной когерентности равняется значению  $l \sim \lambda/q$ . Угол расходимости поля при этом оказывается  $\Delta\theta \sim \Delta k/k \sim q$ , т.е. порядка угла расходимости при дифракции Брэгга. При дальнейшем распространении излучения вглубь кристалла степень его когерентности будет повышаться. Однако закон изменения уровня когерентности в этом случае может быть найден только при более строгом анализе, который мы проведем в следующем подразделе.

#### 4.4. Рост степени когерентности рентгеновского излучения при распространении в идеальных кристаллах. Обобщение формулы Ван-Циттерта-Цернике

Полученные выше оценки показывают, что при распространении некогерентного излучения в идеальном кристалле степень его когерентности растет. Однако полученные выше оценки хороши при распространении излучения на расстояния порядка длины экстинкции. Для выяснения вопроса степени когерентности на больших расстояниях

требуется дополнительное рассмотрение, которое мы и проведем ниже в этом подразделе.

Будем считать для определенности, что рассеяние рентгеновского излучения происходит по схеме Лауэ. Кроме того, будем рассматривать изменения степени поперечной когерентности излучения при распространении излучения вглубь кристалла. Для решения поставленной задачи можно воспользоваться следующими укороченными уравнениями:

$$\begin{aligned} 2ik_{x_0} \frac{\partial A_0}{\partial x} + 2ik_{z_0} \frac{\partial A_0}{\partial z} &= \chi_0 k^2 A_0 + \frac{k^2 q}{2} A_1, \\ 2ik_{x_1} \frac{\partial A_1}{\partial x} + 2ik_{z_1} \frac{\partial A_1}{\partial z} &= (\chi_0 + \delta) k^2 A_0 + \frac{k^2 q}{2} A_0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где  $A_0$  — амплитуда падающей волны,  $A_1$  — амплитуда рассеянной,  $2\delta = k_0^{-2}(\vec{k}_0 + \vec{k}_1)^2$  — брегговская расстройка. В (4.18) амплитуды  $A_i$  являются случайными функциями. В качестве характеристики уровня когерентности можно использовать матрицу когерентности. Для отыскания элементов этой матрицы можно либо решать каким-либо способом систему уравнений (4.18) с последующим вычислением элементов матрицы когерентности, либо из этой системы можно получить систему уравнений, которая описывает эволюцию элементов этой матрицы. Оба эти пути приводят к необходимости решать сложную систему уравнений. Получающиеся при этом формулы громоздки. Из них трудно получить прозрачные физические результаты. Поэтому ниже мы поступим по-другому. Мы воспользуемся тем физическим фактом, что степень когерентности меняется на расстояниях больших тех, на которых изменяются сами амплитуды взаимодействующих в кристалле волн, т. е. естественно предположить, что элементы матрицы меняются медленнее, чем амплитуды волн. В этом случае можно произвести повторное укорочение системы уравнений (1.18), т. е. мы будем искать решение этой системы в виде

$$A = B_1(x, z) \cdot \exp(i\lambda_1 z) + B_2(x, z) \cdot \exp(i\lambda_2 z), \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \lambda_{1,2} &= \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}, \quad \alpha = \frac{k^2}{2k_{1z}k_{0z}} [k_{1z}\chi_0 + k_{0z}(\chi_0 + \delta)], \\ \beta &= \frac{k^4}{4k_{0z}k_{1z}} \left[ \chi_0(\chi_0 + \delta) - \frac{q^2}{4} \right]. \end{aligned}$$

В этом решении коэффициенты  $B_{1,2}(x, z)$  являются медленно меняющимися функциями как координаты  $z$ , так и координаты  $x$ . Подставим решение (4.19) в исходную систему (4.18), и оставим в ней главные члены. Тогда, после процедуры усреднения, получим следующую систему уравнений в частных производных для отыскания амплитуд  $B_{1,2}(x, z)$ :

$$i \frac{\partial B_k}{\partial z} + a_k \frac{\partial^2 B_k}{\partial x^2} + i b_k \frac{\partial B_k}{\partial x} = 0, \quad (k=1; 2)$$

$$a_k = \frac{2k_{0x}k_{1x}}{\left[ k_{1z} \left( 4k_{0z}\lambda_k + k^2\chi_0 \right) + k^2k_{0z} \left( \chi_0 + \delta \right) \right]}, \quad (4.20)$$

$$b_k = \frac{\left[ k_{1x} \left( k_{0z}\lambda_k + k^2\chi_0 \right) + 2k_{1z}k_{0x}\lambda_k + k^2k_{0x} \left( \chi_0 + \delta \right) \right]}{\left[ k_{1z} \left( 4k_{0z}\lambda_k + k^2\chi_0 \right) + k^2k_{0z} \left( \chi_0 + \delta \right) \right]}.$$

Введем новые переменные  $r = x_1 - x_2$ ,  $R = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ . Умножим уравнение (4.20) на  $B_k^*(z, x_2)$ , а соответствующее ему комплексно-сопряженное уравнение на  $B_k(z, x_1)$ . Тогда, обычным образом, получим следующие уравнения для отыскания корреляционной функции

$$i \frac{\partial K}{\partial z} + a_k \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial R} + i b_k \frac{\partial K}{\partial R} = 0, \quad (4.21)$$

где  $K = B_i(x_1) \cdot B_i^*(x_2)$ .

Таким образом, мы видим, что в данном случае матрица когерентности содержит только два диагональных элемента.

Уравнения (4.21) могут быть легко решены с использованием преобразования Фурье. Решение при этом можно представить в следующем виде:

$$K(z, r, R) = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{1}{za_k} K(0, r, R) \exp \left\{ (i(r-r))(za_k) \left[ (R-R) - b_k \right] \right\} dr dR, \quad (4.22)$$

где  $K(0, r, R)$  – корреляционная функция падающего на поверхность кристалла поля.

Таким образом, мы видим, что значение корреляционной функции для поля на расстоянии  $z$  от поверхности кристалла связано Фурье-преобразованием с начальной корреляционной функцией, т.е. мы получили результат аналогичный теореме Ван-Циттерта-Цернике при рассеянии некогерентного излучения на экране со щелью. Существенным отличием от известной формулы Ван-Циттерта-Цернике является физическое содержание входящих в формулу (4.22) коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$ .

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу рассеяния на идеальном кристалле излучения, корреляционная функция которого на поверхности кристалла имеет следующий простой вид:

$$K(0, r, R) = h^2 I(R) \delta(r), \quad (4.23)$$

$$\text{где } I(R) = I_0; R \in \left[-\frac{x_0}{2}, \frac{x_0}{2}\right], \quad I(R) = 0; R \notin \left[-\frac{x_0}{2}, \frac{x_0}{2}\right].$$

Подставляя выражение (4.23) в (4.22) и полагая  $x_1 = 0$ , можно получить следующую формулу для корреляционной функции:

$$K(z, x) = \frac{h^2 I_0 x_0}{z a_k \pi} \exp \left\{ -ix \frac{(x/2 - b_k)}{z a_k} \right\} \left[ \frac{z a_k}{x x_0} \sin \left( \frac{x x}{z a_k} \right) \right]. \quad (4.24)$$

Легко увидеть, что формула (4.24) аналогична формуле, которая описывает корреляционную функцию некогерентного излучения после дифракции этого поля на непрозрачном экране со щелью размером  $2x_0$  (см., например, [71]). Опять отличие содержится только в значениях коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$ .

Используя формулу (4.24), легко получить нормированную корреляционную функцию:

$$\gamma(x, z) = \frac{K(z, x)}{K(z, 0)} = \frac{\sin(x x_0 / z a_k)}{(x x_0 / z a_k)}, \quad (4.25)$$

из которой следует следующая оценка для радиуса корреляции

$$L_{coh} = \frac{z a_k}{x_0} \approx \frac{z L_{ext}}{x_0} = \frac{L_{ext}}{\theta}, \quad (4.26)$$

где  $\theta = x_0 / z$  – угловой радиус источника.

При получении оценки (4.26) уровень когерентности определялся по уровню  $2/\pi$  ( $\gamma = 2/\pi$ ). Интересно сравнить размер радиуса корреляции некогерентного излучения пучка рентгеновского излучения с поперечным размером  $2x_0$  в отсутствии кристалла ( $L_{coh} \approx z \cdot \lambda / x_0$ ) и при его наличии. Из формулы (4.26) следует, что в последнем случае радиус корреляции в  $L_{ext}/\lambda \sim 1/q$  раз больше, чем в отсутствии кристалла. Таким образом, наличие кристалла существенно увеличивает степень когерентности рентгеновского излучения. Приведем пример. Рассмотрим кристалл бериллия ( $q \sim 10^{-6}$ ) толщиной 1мм. Тогда при наличии кристалла мы на расстоянии сразу за кристаллом (1мм.) получим такую степень когерентности, которую можно получить без кристалла на расстоянии 1км. На рис. 4.2 представлена возможная схема реализации такого эксперимента.

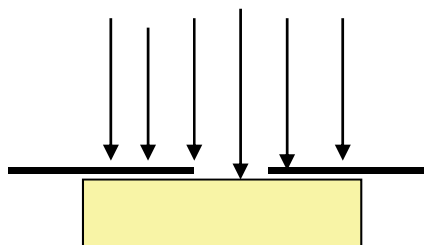


Рис. 4.2. Возможная схема эксперимента по увеличению степени когерентности излучения

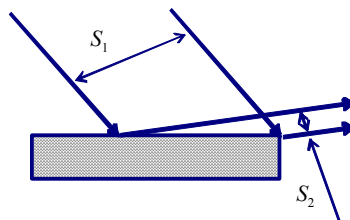


Рис. 4.3 Иллюстрация возможности повышения плотности энергии рентгеновского излучения при отражении от кристалла

На рис. 4.3 представлена схема, поясняющая механизм повышения плотности энергии в отраженном потоке излучения по сравнению с плотностью энергии в падающем потоке. Из рисунка видно, что поперечное сечение отраженного потока существенно меньше поперечного сечения падающего потока. Так как при отражении поток энергии сохраняется, то увеличение плотности энергии в отраженном излучении будет обратным пропорциональным уменьшению его поперечного сечения. Особенно значительное увеличение будет наблюдаться при скользящем отражении.

## 4.5. Многоволновая дифракция

Выше мы видели, что при рассеянии рентгеновского излучения в кристалле могут возбуждаться резонансные рассеянные волны (РРВ), амплитуды которых значительно превосходят амплитуду падающей волны. Этот результат был получен в рамках двухволновой дифракции.

Исходя из физики формирования РРВ, можно ожидать, что когда в кристалле будут взаимодействовать не две рентгеновские волны, а большее их количество, то процесс фокусирования рентгеновского излучения, который формирует РРВ, будет еще более эффективным, а амплитуда РРВ еще большею. Такой процесс может описываться теорией многоволновой дифракции. При этом будем считать, что диэлектрическая проницаемость имеет несколько периодических компонент, т. е. может быть представлена в следующем виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_i q_i \cdot \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r}).$$

Укороченные уравнения, которые описывают динамику амплитуд взаимодействующих в кристалле волн в простейшем случае трехволновой дифракции, имеют вид:

$$\begin{aligned} 2i(\vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_0 &= k^2 \chi_0 + \frac{1}{2} k^2 (q_1 \vec{E}_1 + q_3 \vec{E}_2), \\ 2i(\vec{k}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_1 + \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial z^2} &= k^2 (\chi_0 + \delta_1) \vec{E}_1 + \frac{1}{2} k^2 (q_1 \vec{E}_0 + q_2 \vec{E}_2), \\ 2i(\vec{k}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_2 + \frac{\partial^2 \vec{E}_2}{\partial z^2} &= k^2 (\chi_0 + \delta_2) \vec{E}_2 + \frac{1}{2} k^2 (q_3 \vec{E}_0 + q_2 \vec{E}_1). \end{aligned} \quad (4.27)$$

При получении этой системы мы предполагали, что кристалл имеет три решетки, вектора обратных решеток которых  $(\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3)$  и волновые вектора трех взаимодействующих волн находятся в следующем соотношении:

$$\vec{k}_i = \vec{k}_0 - \vec{K}_i; i = \{1, 2, 3\}, \quad (k_i)^2 = (k_0)^2.$$

Кроме того, мы считаем, что рассеянные волны могут распространяться вдоль поверхности кристалла (в двух последних уравнениях системы (4.27) мы оставили вторые производные по координате  $z$ ). Таким образом, мы будем рассматривать схему трехволновой поверхностной дифракции.

В простейшем случае мы имеем дело с несимметричной схемой трехволновой дифракции, которая требует наличия только двух периодических решеток в кристалле, т. е.  $q_3 = 0$ . При этом падающая волна взаимодействует с первой решеткой и порождает волну с амплитудой  $E_1$  (волна минус первого порядка дифракции), эта волна, в свою очередь, через вторую решетку порождает волну с амплитудой  $E_2$ . Первая и третья

волны взаимодействуют друг с другом только через вторую волну. Отметим, что в симметричной схеме трехволновой дифракции рассматривается случай, когда имеется третья решетка, через которую могут резонансно взаимодействовать падающая и третья волны. Максимально упрощенная система уравнений, описывающая динамику взаимодействующих волн для случая несимметричной схемы дифракции может быть представлена в виде

$$2ik_{0z}E'_0 = \frac{k^2q}{2}(E_1 + E_2) \quad E''_1 = \frac{qk^2}{2}(E_0 + E_2) \quad (4.28)$$

$$E''_2 = \frac{qk^2}{2}(E_0 + E_1) ,$$

где  $E'_i \equiv \partial E_i / \partial z$

Характеристическое уравнение системы (4.28) имеет четвертый порядок. Соответственно, имеет четыре корня:  $\lambda_{1,2} = \pm k\sqrt{q/2}$ ;  $\lambda_{3,4} = \pm ik\sqrt{q/2}$ . Используя общее решение системы (4.28) аналогично тому, как это было сделано в подразделах 4.1–4.2, легко находим, что амплитуды рассеянных волн в случае трехволновой дифракции могут быть значительно большими, чем в случае двухволновой дифракции:  $E_1 \sim E_2 \sim E_0 / \sqrt{q}$ . Необходимо отметить, что не всякая схема трехволновой поверхностной дифракции приводит к эффективному фокусированию рентгеновского излучения. Так, например, при симметричной схеме трехволновой дифракции, т. е. когда кроме двух решеток имеется еще и третья решетка с  $\vec{K}_3 = \vec{k}_0 - \vec{k}_3$ , все три участвующие во взаимодействии волны имеют одинаковую максимальную амплитуду, которая равняется амплитуде падающей волны.

Отметим, что в схемах многоволновой поверхностной дифракции с большим числом взаимодействующих (больше трех) волн можно достичь еще более эффективного фокусирования рентгеновского излучения.

## 4.6. В ы в о д ы

Проведенный выше анализ процесса рассеяния рентгеновского излучения идеальными кристаллами показывает, что при этом могут наблюдаться два наиболее интересных физических процесса. Первый – увеличение плотности потока рассеянного излучения по сравнению с плотностью потока падающего излучения. Второй – значительный рост степени когерентности распространяющегося излучения в кристалле. Комбинация этих двух процессов дает возможность формировать достаточно интенсивное когерентное рентгеновское излучение, которое

по своим характеристикам приближается к излучению, которое может быть получено в рентгеновских лазерах. Известно, что создание рентгеновских лазеров в диапазоне  $\lambda \sim 10^{-8}$  см наталкивается на принципиальные трудности.

Кроме указанных двух процессов, обращает на себя внимание структура одной из волн, распространяющихся вдоль поверхности кристалла. Эту волну можно назвать поверхностной. Действительно, амплитуда ее внутри кристалла убывает в результате процессов динамической дифракции, а вне кристалла – в результате полного внутреннего отражения. Отметим, что для осуществления полного внутреннего отражения необходимо, чтобы электронная плотность среды, из которой падает излучение должна быть большей, чем электронная плотность кристалла. Отметим также, что поверхностная волна может самостоятельно существовать только в тонких слоях. В толстом кристалле такая волна самостоятельно не существует, по крайней мере, в рамках рассмотренной теории. Однако она может существовать вынужденно. Для многих приложений этот факт не представляет существенной разницы. Поверхностная волна локализована в узкой области вблизи границы кристалла, и по ее характеристикам могут быть изучены различные особенности тонких поверхностных слоев кристаллов.

Отметим, что рассмотренная выше теория в значительной степени является упрощенной и ее результаты могут давать только качественную картину рассеяния излучения на кристалле. Для количественного сравнения нужна более полная теория, которая включает в себя тот факт, что в реальных экспериментах на кристалл падает не одна волна, а большое количество волн, сосредоточенных в некотором интервале частот и волновых векторов. Анализ такой полной теории может быть осуществлен только численными методами. Такие исследования были проведены и показали не только хорошее качественное согласие результатов теории с экспериментальными результатами, но и хорошее количественное согласие.

Полученные выше результаты, безусловно, представляют наибольший интерес для случая рассеяния рентгеновского излучения. Однако эти результаты справедливы и при рассеянии более длинноволнового излучения, например, оптического излучения на сверхрешетках. В этом случае особый интерес представляет фокусировка когерентного излучения. Действительно, при фокусировке излучения обычными линзами максимальная величина сфокусированной интенсивности не превышает величины  $I_0 (R/\lambda)^2$ , где  $I_0$  – интенсивность падающего на линзу излучения,  $R$  – радиус линзы,  $\lambda$  – длина волны. При **динамической фокусировке** (ДФ) максимальная величина сфокусированного излучения может достигать величины  $(I_0/q^4) \sim I_0(Lq/\lambda)^4$ . Различие в степени отношения размеров фокусирующей системы к длине волны обусловлено тем фактом, что при ДФ фокусируются поля, а не

интенсивности, как при фокусировке линзами. Легко видеть, что при  $q > \sqrt{\lambda R} / L \sim \sqrt{R / \lambda} \operatorname{Im} q$  эффективность ДФ выше эффективности фокусировки с помощью линз.

Кроме фокусировки и увеличения степени когерентности, следует обратить внимание на структуру рассеянного поля вблизи поверхности. Как следует из формул (4.12), (4.13), а также из выражений для характеристических чисел рассеянного излучения при выполнении условий многоволновой поверхностной дифракции (4.28), характерная глубина проникновения поля вглубь кристалла может существенно уменьшаться по сравнению, например, с глубиной проникновения при обычной береговой дифракции ( $l = l_{\text{екст.}} \sim \lambda / q$ ). Действительно, в рассмотренных нами случаях эта глубина может составлять всего  $l \sim \lambda / (q)^{2/3}$  или быть еще меньшей в случае многоволновой дифракции  $l \sim \lambda / \sqrt{q}$ . Эта особенность структуры рассеянного поля может быть использована для исследования структуры поверхности кристаллов.

## РАЗДЕЛ 5. ПЛОХАЯ ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ ВТОРОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ [91–92]

В настоящем разделе рассмотрены некоторые особенности второго начала термодинамики. Показано, что эти особенности потенциально могут быть использованы для создания разнообразных когерентных структур. В частности, для преобразования некогерентного излучения в когерентное излучение. Главная особенность заключается в том, что существуют условия, когда малые отклонения от условий применимости второго начала могут приводить к результатам, которые не укладываются в его рамки. Происходит кажущееся нарушение второго начала. Приведен пример такого кажущегося нарушения. В качестве примера рассмотрено преобразование энергии некогерентной высокочастотной волны в когерентную высокочастотную волну и некогерентную низкочастотную. Показано, что наличие стохастических слоев в фазовом пространстве приводит к неоднородности фазового пространства и, в общем случае, к отсутствию эквивалентности ячеек фазового пространства на изоэнергетической гиперповерхности, а также к нарушению адиабатических инвариантов. Эта особенность также нарушает условия, при которых выполняется второе начало термодинамики. Обсуждаются возможные другие причины нарушения второго начала.

В отличие от закона сохранения энергии, второе начало термодинамики постоянно подвергалось критике. Постоянно делались попытки

его пересмотра и переосмысления. Такое отношение ко второму началу сопутствует ему с момента его формулировки (см. работы Сади Карно, Рудольфа Клаузиуса). Резкой критике подвергалось и статистическое обоснование второго начала (полемика Людвиг Больцмана, Эрнст Цермело и Иоганна Лошмидта). Попытки пересмотра второго начала имеются и в настоящее время. Из этих попыток следует выделить серьезные научные исследования по обоснованию основ статистической физики (см., например, работы Г. М. Заславского [77, 78]), а также безосновательные утверждения о том, что второе начало просто несправедливо. Последнее утверждение чаще всего основывается на результатах разнообразных экспериментов и наблюдений. Достаточно войти в интернет (см., например, [75]), чтобы найти большое количество критического материала относительно второго начала. Сформулирована даже эпитафия по поводу кончины второго начала. Возникает вопрос: в чем же дело? Почему же второе начало с таким упорством подвергается постоянной критике? В настоящем материале мы постараемся, в какой-то мере, ответить на этот вопрос. Безусловно, предлагаемый в этом материале ответ может прояснить только некоторые стороны возможных причин непонимания второго начала.

Прежде всего (подраздел 5.1), мы покажем, что в рамках своей применимости второе начало, безусловно, всегда выполняется. Следует сказать, что этот раздел не является оригинальным. Его результаты можно найти в различных курсах теоретической физики. Однако он нам необходим для того, чтобы увидеть ключевые положения его применимости, а также для доказательства того факта, что второе начало имеет некоторые нетривиальные особенности, которые могут приводить к кажущемуся нарушению второго начала. Этому вопросу посвящен подраздел 5.2. В нем показано, что малое отклонение от условий применимости второго начала может приводить к результатам, которые, если их анализировать, вроде бы противоречат второму началу. Такое свойство второго начала в этих условиях можно интерпретировать как плохую обусловленность второго начала. В качестве примера плохой обусловленности рассмотрен процесс распада некогерентной высокочастотной волны на когерентную высокочастотную волну и на некогерентную низкочастотную волну (подраздел 5.4). Показано, что практически вся энергия некогерентной высокочастотной волны переходит в энергию высокочастотной когерентной волны и незначительная часть (в соответствии с соотношениями Менли-Роу) переходит к низкочастотной волне. При этом вся энтропия высокочастотной некогерентной волны переходит к низкочастотной волне. Если мы будем наблюдать за этим процессом и проигнорируем наличие низкочастотной волны (которая взяла незначительную часть энергии, но взяла всю энтропию), то мы будем наблюдать процесс, который нарушает второе начало термодинамики. Показано, что в действительности это, конечно, не так. Второе начало термодинамики в этом случае благополучно выполняется. Исследования динамики частиц в окрестности стохастических слоев

и в самих стохастических слоях показывают [76–83], что такие области фазового пространства обладают свойством «липкости». Это означает, что время, которое частицы проводят в этих слоях и в их окрестности, значительно превосходит время, которое частицы проводят в остальных частях фазового пространства. Впервые такая особенность стохастических слоев была описана в [81]. Эта особенность указывает на неравнозначность различных областей фазового пространства. В этом случае второе начало также перестает работать. Эта особенность фазового пространства и ее связь со вторым началом термодинамики была рассмотрена в работах Г. М. Заславского [77, 78]. Особенность динамики частиц в окрестности расщепленных сепаратрис (стохастических слоев) проиллюстрирована в подразделе 5.3. В заключении сформулированы основные результаты. Эти результаты обсуждаются. Приведены также некоторые другие возможности нарушения второго начала. В частности, показано, что наличие дифракции изучаемого ансамбля (например, фотонов) на границе области, в которую этот ансамбль помещен, может также приводить к кажущемуся нарушению второго начала.

## 5.1. Второе начало термодинамики

В современной термодинамике второе начало формулируется единым и самым общим образом как закон возрастания особой функции состояния системы, которую Клаузиус назвал энтропией (обозначается  $S$ ). Согласно этому закону **в замкнутой системе** энтропия  $S$  при любом реальном процессе либо возрастает, либо остаётся неизменной.

**Энтропия.** Основным понятием в определении энтропии является статистический вес. Чтобы ввести это понятие, напомним элементарное определение вероятности. Вероятность – числовая характеристика возможности появления какого-либо события ( $P_i = N_i / N$ ), здесь  $N_i$  – число благоприятных исходов,  $N$  – число всех возможных исходов. В качестве примера рассмотрим игральную кость. Вероятность выпадения, например числа 1, равна  $1/6$  ( $P_1 = 1/6$ ). Вероятность выпадения другого числа, например 2, также равна  $1/6$  ( $P_2 = 1/6$ ). Если мы будем бросать две кости одновременно или будем совершать два последовательных броска, то вероятность того факта, что на первой кости (при первом броске) появится число 1, а на второй кости (при втором броске) появится цифра 2 равна произведению элементарных вероятностей:  $P_{1,2} = P_1 P_2 = 1/36$ , т. е. вероятность появления двух независимых событий равна произведению вероятностей появления каждой из них. Этих понятий из элементарной теории вероятности нам будет достаточно. Статистический вес (термодинамическая вероятность  $W$ ) определяется как число различных микросостояний, которые соответствуют данному

макросостоянию. Рассмотрим пример (см. рис. 5.1). Пусть мы имеем сосуд. Сосуд мысленно разбит на две одинаковые половины. Пусть в этом сосуде находится 4 частицы (молекулы газа). Рассмотрим различные варианты расположения этих частиц в сосуде. Будем эти варианты называть макросостояниями. Из рисунка видно, что мы имеем 5 макросостояний: 1 – все частицы в левой половине сосуда; 2 – все частицы в правой половине; 3 – одна частица в левой половине, а три в правой; 4 – одна частица в правой половине, а три – в левой; 5 – две частицы в левой половине, а две в правой. Число микросостояний в данном случае, как легко видеть, равно 16. Статистический вес случая, когда все частицы находятся в левой половине сосуда, равен 1. Аналогично, для случая, когда все частицы находятся в правой половине сосуда, статистический вес равен 1. Для случая, когда три частицы находятся в одной половине сосуда, а одна в другой половине, статистический вес равен 4. Наконец, случай, когда две частицы находятся в одной половине, а две другие в другой половине, имеет максимальный статистический вес, который равен 6.

Пусть теперь мы имеем две системы. При этом статистический вес того факта, что одна система находится в некотором состоянии, например с номером 1, имеет статистический вес  $W_1$ . Статистический вес того факта, что вторая система находится в некотором другом состоянии, например с номером 2, равен  $W_2$ . Тогда статистический вес того факта, что полная система (система, состоящая из этих двух подсистем) будет находиться в таком состоянии, когда первая подсистема находится в первом состоянии, а вторая – во втором состоянии, будет равен произведению этих статистических весов:  $W = W_1 W_2$ . Удобно пользоваться не мультипликативной, а аддитивной характеристикой. Это и будет энтропия:

$$S = k \cdot \ln W. \quad (5.1)$$

Коэффициент  $k$  в физических задачах равен постоянной Больцмана. Его легко определить, если сравнить полученное выражение с термодинамическим выражением для энтропии (отметим, что последняя была введена значительно раньше). В теории информации, например, в качестве  $W$  берут число возможных событий (реализаций), которые по определению являются равновероятными. Тогда в качестве  $k$  часто выбирают логарифм с основанием 2 от числа  $e$ :  $k = \log_2(e)$ . Выражение (5.1) при этом определяет количество информации (см., например, [84]). Основную задачу статистической физики можно кратко сформулировать следующим образом. В зависимости от физических характеристик ансамбля частиц, которые изучаются статистическими методами, определяется статистический вес. Используя выражения для статистического веса, находится выражение для энтропии. Далее, используя условие

максимальности энтропии, а также некоторые физические ограничения, находят функцию распределения частиц. Нужно сказать, что во многих задачах основная трудность заключается в правильном (адекватном) выборе физических ограничений. Однако для наших целей эта проблема отсутствует – рассматриваемые задачи хорошо изучены.

1,2,3,4		W=1		1,2,3,4
1	2,3,4		2,3,4	1
2	1,3,4	W=4	1,3,4	2
3	2,1,4		2,1,4	3
4	2,3,1		2,3,1	4
1, 2	3, 4		3, 4	1, 2
1, 3	2, 4		2, 4	1, 3
1, 4	2, 3	W=6	3, 2	1, 4
2, 3	1, 4		1, 4	2, 3
2, 4	1, 3		1, 3	2, 4
3, 4	1, 3		1, 3	3, 4

Рис. 5.1. К понятию статистического веса

Покажем на примерах, как реализуется сформулированная выше схема решения основной задачи статистической физики. В дальнейшем изложении мы будем следовать [85]. Пусть у нас все состояние изучаемых частиц можно разбить на  $j$  - групп. Число квантовых состояний в каждой группе будем обозначать через  $G_j$ . Во многих случаях можно считать, что число квантовых состояний велико ( $G_j \gg 1$ ). Полное число состояний

будет равно  $G = \sum_j G_j$ . В каждой  $j$ -группе находится  $N_j$  частиц. Их часто также много ( $N_j \gg 1$ ). Для каждой группы можно определить статистический вес. Тогда статистический вес для всех частиц будет равен  $W = \prod_j W_j$ .

Прежде всего, рассмотрим *статистику Больцмана*. В этом случае у нас число состояний в каждой группе значительно больше числа частиц в этих группах. Число частиц велико ( $G_j \gg N_j \gg 1$ ). Причем считается, что заполнение частиц по состояниям происходит независимо друг от друга и все состояния равновероятны. В этом случае статистический вес в  $j$ -группе можно записать в виде

$$W_j = (G_j)^{N_j} / (N_j)! . \quad (5.2)$$

Здесь  $(G_j)^{N_j}$  – число распределений  $N_j$  частиц по  $G_j$  состояниям; знаменатель определяет число тождественных состояний. Используя выражение (5.2) для статистического веса, а также формулу Стирлинга, легко получить следующее выражение для энтропии:

$$S = \sum_j G_j \cdot n_j \cdot \ln(e / n_j) . \quad (5.3)$$

В этой формуле  $n_j = N_j / G_j$  – среднее число частиц в каждом из квантовых состояний  $j$ -ой группы;  $e$  – основание натурального логарифма. В состоянии термодинамического равновесия величина энтропии равна своему максимальному значению ( $S = S_{\max}$ ). Ограничительными условиями (уравнениями связи) в данном случае будут условия сохранения полного числа частиц и сохранения полной энергии:

$$\begin{aligned} N &= \sum_j N_j = \sum_j n_j G_j = \text{const} \\ E &= \sum_j N_j \cdot \varepsilon_j = \sum_j n_j \cdot G_j \cdot \varepsilon_j = \text{const} . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Таким образом, задача для отыскания  $n_j(\varepsilon_j)$  сводится к задаче отыскания условного максимума для энтропии. Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, легко находим следующее выражение для функции распределения частиц по энергиям:

$$n_j = \exp[\alpha + \beta \cdot \varepsilon_j], \quad (5.5)$$

где в (5.5)  $\alpha, \beta$  – неопределенные множители Лагранжа.

Неопределенные множители Лагранжа проще всего найти следующим образом. Из выражений для энтропии (5.3) и для ограничений (5.4) можно написать следующее соотношение, связывающее дифференциалы энтропии, числа частиц и энергии:

$$dS + \alpha \cdot dN + \beta \cdot dE = 0. \quad (5.6)$$

Выражение (5.6) можно сравнить с известным из термодинамики выражением:

$$dE = T \cdot dS + \mu \cdot dN. \quad (5.7)$$

Это сравнение дает:  $\alpha = \mu / T$ ,  $\beta = -1 / T$ . Здесь  $T$  – температура;  $\mu$  – химический потенциал. Для дальнейшего нам понадобится выражение для энтропии и для функции распределения частиц как для фермионов, так и для бозонов.

**Фермионы.** Обычным условием для фермионов является факт примерного равенства числа частиц с числом квантовых состояний ( $N_j \approx G_j$ ). Кроме того, в каждом квантовом состоянии может находиться только одна частица. Этих условий достаточно, чтобы найти статистический вес фермионов (число сочетаний из  $N_j$  по  $G_j$ ):

$$W_j = (G_j)! / [(N_j)! (G_j - N_j)!]. \quad (5.8)$$

Используя формулу (5.8), легко найти следующее выражение для энтропии фермионов:

$$S_F = - \sum G_j [n_j \cdot \ln(n_j) + (1 - n_j) \cdot \ln(1 - n_j)]. \quad (5.9)$$

Выражение (5.9) для энтропии фермионов может быть использовано для нахождения функции распределения фермионов по энергиям. Схема нахождения этой функции такая же, как мы использовали выше в статистике Больцмана:

$$n_j = 1 / [\exp(\varepsilon_j - \mu) / T + 1]. \quad (5.10)$$

**Бозоны.** Число бозонов, находящихся в одном из квантовых состояний, ничем не ограничено. Это условие приводит к следующему выражению для статистического веса бозонов:

$$W_j = (G_j + N_j - 1)! / [ (N_j)! \cdot (G_j - 1)! ]. \quad (5.11)$$

Повторяя приведенную выше схему для фермионов, легко находим следующее выражение для энтропии и для функции распределения бозонов (для фотонов):

$$S_B = \sum G_j [ (n_j + 1) \cdot \ln(n_j + 1) - n_j \cdot \ln(n_j) ]; \quad (5.12)$$

$$n_j = 1 / [ \exp(\hbar \cdot \omega) / (kT) - 1 ]$$

Заканчивая этот раздел, заметим, что, как следует из выше-приведенного, энтропия есть не что иное, как преобразование к удобному виду вероятности. Поэтому ожидать отклонений от второго начала термодинамики все равно, что ожидать появления невероятных событий, например, что при тысяче бросков монеты выпадут все «орлы» или все «решки». Однако следует обратить внимание, что при вычислении статистического веса мы пользовались комбинаторикой, т. е. мы предполагали, что все доступные состояния равновероятны. Как мы увидим ниже (подраздел 5.4), в общем случае, это далеко не так.

## 5.2. «Плохая обусловленность» второго начала

Нашей целью является доказательство того факта, что существуют процессы и области параметров, при которых малые отклонения от условий, при которых были получены выражения для энтропии, приводят к значительным изменениям результатов и к *кажущемуся* нарушению второго начала термодинамики. На языке прикладной математики это означает, что существуют условия, при выполнении которых второе начало термодинамики является плохо обусловленным законом. Конечно, нужно помнить, что в данном случае никакого нарушения самого закона не происходит. Наиболее распространенным отступлением от условий применимости второго закона термодинамики является неизоллированность изучаемых систем. Действительно, трудно найти реальные физические объекты, которые были бы полностью изолированы. Взаимодействие между изучаемой системой и окружающей средой всегда имеет место. Однако это взаимодействие в экспериментальных условиях стараются сделать минимальным. Возникает вопрос. Может ли это небольшое взаимодействие

существенно повлиять на процессы в изучаемой системе? Ниже мы покажем, что условия такого значительного влияния малых взаимодействий существуют. Наиболее распространенным каналом взаимодействия является, безусловно, энергетический канал. Чтобы доказать, что даже малый обмен энергией между изучаемым объектом и окружающей средой может приводить к значительным изменениям термодинамических процессов в изучаемом объекте, нам нужно рассмотреть выражение для энтропий (5.9), (5.12). Однако общие выражения для них достаточно сложны, поэтому мы воспользуемся упрощающими предположениями.

**Фермионы.** Рассмотрим вначале фермионы. Пусть энергия частиц будет значительно больше химического потенциала и тепловой энергии ( $\varepsilon \gg \mu, kT$ ). В этом случае из формул (5.9), (5.10) легко найти следующее выражение для средней плотности частиц на энергетических уровнях и соответствующее выражение для энтропии:

$$n_j \approx \exp(-\varepsilon_j / kT) \quad S = \sum \Delta \varepsilon_j / kT. \quad (5.13)$$

Здесь  $\Delta \varepsilon_j = N_j \cdot \varepsilon_j$

Как видно из (5.13), выражение для энтропии существенно упростилось. Кроме того, это выражение явно зависит от основных физических параметров – от энергии частиц и от тепловой энергии. Пусть теперь рассматриваемая система взаимодействует с некоторой другой подсистемой. При таком взаимодействии должны выполняться законы термодинамики. В нашем случае должна сохраняться полная энергия частиц и полная энтропия после взаимодействия должна быть больше энтропии до взаимодействия:

$$\Delta \varepsilon_{af} + \delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_0 \quad S_{af} + \delta S \geq S_0. \quad (5.14)$$

Здесь  $S_0, S_{af}$  – энтропия изучаемой системы до взаимодействия и после взаимодействия;  $\delta S$  – энтропия, приобретаемая подсистемой, с которой произошло взаимодействие. Для простоты мы полагали, что энтропия подсистемы до взаимодействия равна нулю. Выражение (5.13) для энтропии будем считать справедливым как для одной, так и для другой взаимодействующих подсистем. Из выражения (5.13) видно, что если взаимодействие изучаемой системы произойдет с подсистемой, температура которой значительно меньше температуры изучаемой системы ( $T_{invest.} \gg T_{subs.}$ ), то приобретаемая величина энтропии этой системы может быть порядка и даже больше энтропии рассматриваемой системы ( $\delta S \geq S_0$ ). В этом случае неравенство в (5.14), выражающее второй закон термодинамики, нарушаться не будет даже в том случае,

когда энтропия системы после взаимодействия будет равна нулю  $S_{af} = 0$ .

При этом будет наблюдаться процесс с кажущимся нарушением второго начала термодинамики:  $S_0 \rightarrow S_{af} \rightarrow 0$ .

Таким образом, если будет наблюдаться физическая система, которая передает незначительное количество своей энергии другой подсистеме, то второму началу термодинамики не противоречит факт, что при этом вся энтропия рассматриваемой системы перейдет к взаимодействующей подсистеме. При этом, если игнорировать факт незначительного ухода энергии из изучаемой системы, то могут наблюдаться процессы, которые будут идти с уменьшением энтропии, т. е. процессы, которые, на первый взгляд, противоречат второму началу термодинамики. В действительности, конечно, никакого нарушения не происходит.

**Бозоны.** Аналогичная ситуация имеет место и при изучении системы бозонов (фотонов). Действительно, рассмотрим, как и в предыдущем случае (для фермионов), частные случаи. Пусть, например, энергия фотонов превышает тепловую энергию ( $\hbar\omega \gg kT$ ), тогда из уравнений (5.12) можно получить следующее выражение для энтропии:

$$S = \sum_j \Delta\varepsilon_j / kT. \quad (5.15)$$

Здесь  $\Delta\varepsilon_j = \hbar\omega \cdot N_j$  – полная энергия фотонов в  $j$ -группе.

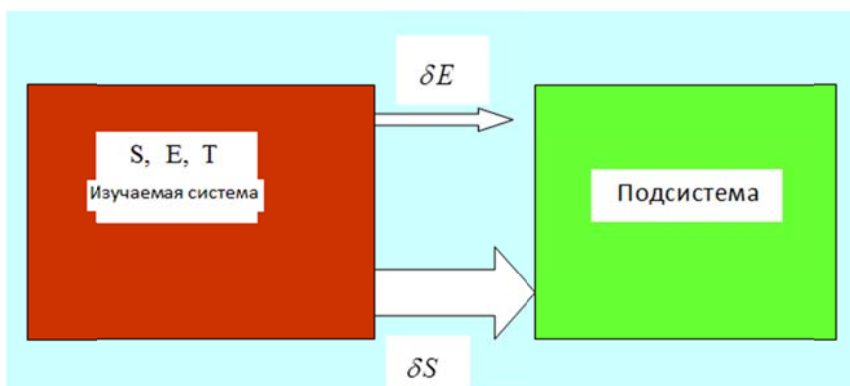
Для другого крайнего случая низкочастотных фотонов (или высокой температуры:  $\hbar\omega \ll kT$ ) из тех же формул (5.12) также легко получить похожее выражение для энтропии:

$$S = \sum_j (\Delta\varepsilon_j / kT) [1 + \ln(kT / \hbar\omega)]. \quad (5.16)$$

Опять, как и в случае с фермионами, будем считать, что наша система взаимодействует с некоторой другой подсистемой. При таком взаимодействии пусть небольшое количество энергии из изучаемой системы переходит в эту подсистему. При таком взаимодействии также должен выполняться закон сохранения энергии, и суммарная энтропия после взаимодействия должна быть большей или равной исходной энтропии. Эти выражения совпадают с (5.14). Выводы из этих соотношений также аналогичны. Если изучаемая система будет взаимодействовать с подсистемой, у которой температура значительно ниже, чем температура изучаемой системы, то даже незначительное количество энергии, которая передается этой подсистеме, приведет к значительному изменению ее энтропии (см. рисунок 5.2). При этом второе начало термодинамики не будет нарушаться, если энтропия изучаемой системы после взаимодействия будет значительно ниже, чем ее значение до взаимодействия. В этом случае, также как и в случае фермионов, мы

можем наблюдать процесс упорядочения, протекающий с уменьшением энтропии в изучаемой системе. Это также может выглядеть, как нарушение второго начала термодинамики.

Таким образом, мы видим, что, находясь в рамках строгого выполнения второго начала термодинамики, мы, в принципе, можем наблюдать процессы, которые, на первый взгляд, противоречат этому закону. Конечно, законы термодинамики не могут указать конкретных физических процессов, при которых могут реализоваться указанные особенности второго начала. Для этого нужно другое (не термодинамическое) рассмотрение. Чтобы показать, что такие процессы реально существуют в природе, ниже (см. подраздел 5.5) мы рассмотрим пример, в котором эта особенность будет проявляться. Этим примером является процесс взаимодействия волн в нелинейных средах (в плазме, в кристаллах).



*Рис. 5.2. Схема возможного процесса передачи незначительной части энергии  $\delta E$  и значительной части энтропии  $\delta S$  от исследуемой «горячей» системы к некоторой «холодной» подсистеме*

### **5.3. «Липкость» стохастических слоев и особенности динамики частиц**

Хорошо известно, что, в общем случае, структура фазового пространства гамильтоновых систем представляет собой стохастическое море с включенными в него островками устойчивости. При этом граница, отделяющая регулярные траектории от хаотических, обладает интересной особенностью, которая заключается в том, что время нахождения «частиц» в этих приграничных областях фазового пространства оказывается аномально большим. Под термином «частицы», в дальнейшем без кавычек, мы обозначаем любую систему, динамику которой мы изучаем. При этом именно динамика частиц во внешних электромагнитных полях является

наиболее важным и интересным объектом для изучения. В общем случае, такая особенность структуры фазового пространства приводит к тому, что гамильтоновы системы оказываются неэргодическими. Этот факт может привести к пересмотру основ статистической физики.

Большой цикл работ, посвященный такой особенности фазового пространства гамильтоновых систем и влиянию этой структуры на основные положения статистической физики, был выполнен Г. М. Заславским (см., например, [77–80]). В частности, в этих работах было показано, что могут быть реализованы условия, при которых не наступает термодинамического равновесия между взаимодействующими подсистемами. По крайней мере, этот результат справедлив в течение всего времени проведения численных расчетов. Длительность этих расчетов специально выбиралась очень большой. Эти условия практически оказываются аналогичными условиям существования демона Максвелла. Кроме того, оказалось, что наличие островков устойчивости и «липкости» границ приводит к необычной кинетике. Например, функция распределения времен возврата Пуанкаре подчиняется не экспоненциальному закону, а степенному закону. Наличие такой функции распределения приводит к тому, что моменты, начиная с некоторого их номера, оказываются неограниченно большими. При этом кинетические уравнения не могут быть получены обычным (например, с помощью разложения в ряд по моментам) образом. Полученные при этом кинетические уравнения оказываются интегродифференциальными либо уравнениями с дробными производными (что часто одно и то же). Некоторые особенности прохождения заряженных частиц через стохастические слои были изучены в работах [81–83]. При этом оказалось, что большинство частиц при прохождении стохастического слоя застревают в нем и не выходят в течение всего времени численного счета. Некоторые частицы проходят, а небольшое количество частиц может даже отразиться от этого слоя. Во всех указанных выше случаях стохастические слои занимали определенное место в фазовом пространстве и не перемещались.

Представляет интерес изучить динамику частиц в том случае, когда параметры изучаемой гамильтоновой системы медленно меняются. При этом можно ожидать, что при достаточно медленном изменении параметров структура стохастического слоя будет меняться незначительно. При этом можно ожидать, что попавшие в стохастический слой частицы будут увлекаться этим слоем. Забегая вперед, скажем, что существуют условия, при которых это предположение оказывается справедливым. Для изучения динамики частиц, попавших в стохастический слой, рассмотрим простейшую динамическую систему с гамильтонианом:

$$H = p^2 / 2 - \omega_0^2 \cos q. \quad (5.17)$$

Гамильтониан (5.17) представляет собой гамильтониан математического маятника ( $p = \dot{x}$ ,  $q = x$ ). Будем считать, что частота малых

колебаний математического маятника медленно меняется:  $\omega_0^2 = \omega^2(1 + \alpha \cdot t)$ ,  $\alpha \ll 1$ . Кроме того, будем считать, что на математический маятник действует внешняя периодическая сила. Наличие этой силы приводит, как известно, к расщеплению сепаратрисы, к образованию гомоклинической структуры и к возникновению стохастического слоя в окрестности сепаратрисы. Можно предположить, что медленное изменение параметров математического маятника (его частоты) качественно не изменит структуры фазового пространства. Таким образом, уравнение наиболее простой системы, на которой можно рассмотреть вопрос об особенностях движения при перемещении стохастического слоя, будет иметь вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = f \cdot \sin(\Omega t). \quad (5.18)$$

Уравнение (5.18) было изучено численно. Основной результат численных исследований заключается в том, что если начальные условия для частиц таковы, что они находятся в стохастическом слое, то при увеличении частоты эти частицы, в основном, следуют за этим стохастическим слоем и не выходят из него. При этом невозмущенная сепаратриса перемещается вверх (верхняя ветвь сепаратрисы). В качестве примера на рис. 5.3 представлена зависимость фазы математического маятника от времени.

На рис. 5.4 и рис. 5.5 представлены зависимости скорости от времени, а также фазовый портрет.

Представленные на рисунках зависимости получены при  $\omega = \Omega = 1$ ,  $f = 0.1$ ,  $\alpha = 0.0003$ . Из этих рисунков видно, что в начальный момент частица, находящаяся слегка выше сепаратрисы (пролетная частица,  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 2.01$ ), следует за стохастическим слоем. Максимальное значение скорости частицы при этом достигает значения  $\dot{x} = 4.05$  ( $t = 10^4$ ). Это значение скорости соответствует движению частицы в окрестности нового положения сепаратрисы. Следует отметить, что динамика частицы при этом хаотическая. Она оказывается то пролетной, то захваченной. Однако, в целом, она следует за стохастическим слоем. Для сравнения на рис. 5.6–5.8 представлены аналогичные зависимости для случая, когда стохастический слой отсутствует ( $f = 0$ ). Видно, что первоначально пролетная частица быстро захватывается полем волны. Все остальное время она остается захваченной. Скорость частицы изменилась только в соответствии с адиабатическим инвариантом.

**Адиабатические инварианты.** Полученный выше результат противоречит адиабатической инвариантности. Действительно, параметры рассматриваемой нами динамической системы меняются медленно, поэтому она должна иметь адиабатические инварианты. Как известно, для гамильтоновой системы адиабатическим инвариантом является

действие. Для математического маятника выражение для действия, как известно, (см., например, [86]) можно представить в таком виде:

$$I(H) = \frac{8 \cdot \omega_0}{\pi} \begin{cases} E(\pi/2; \kappa) - (1 - \kappa^2) \cdot F(\pi/2, \kappa) & (\kappa \leq 1) \\ \kappa \cdot E(\pi/2; 1/\kappa) & (\kappa \geq 1) \end{cases}, \quad (5.19)$$

где  $\kappa^2 = (1 + H / \omega_0^2) / 2$ ;  $F(\pi/2, \kappa)$ ,  $E(\pi/2; \kappa)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно,  $H = \dot{x}^2 / 2 - \omega_0^2 \cdot \cos x$ .

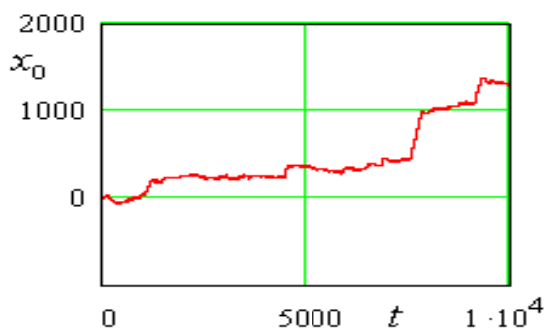


Рис. 5.3. Зависимость фазы математического маятника от времени при  $f = 0.1$ ,  $\omega = \Omega = 1$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 2.01$ ,  $\alpha = 0.0003$

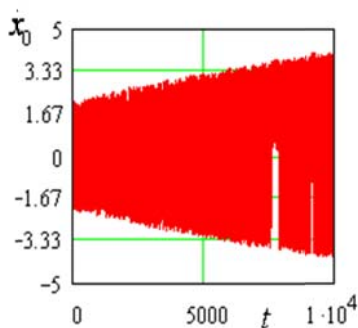


Рис. 5.4. Зависимость скорости математического маятника от времени при  $f = 0.1$ ,  $\omega = \Omega = 1$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 2.01$ ,  $\alpha = 0.0003$

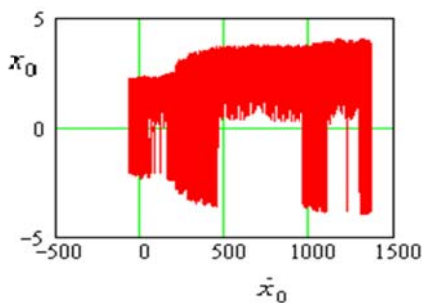


Рис. 5.5. Фазовый портрет математического маятника при  $f = 0.1$ ,  $\omega = \Omega = 1$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 2.01$ ,  $\alpha = 0.0003$

Если математический маятник совершает малые колебания ( $|x| \ll 1$ ), которые соответствуют колебаниям линейного осциллятора, то  $H \approx -\omega_0^2 + (\dot{x}^2 + x^2)/2$ ;  $\kappa^2 \ll 1$ ,  $E \sim F \sim \pi/2$ , и выражение (5.19) приобретает вид:

$$I \sim (\dot{x}^2 + x^2)/2 \cdot \omega_0 \quad (5.20)$$

Формула (5.20) выражает хорошо известный факт роста энергии линейного осциллятора с ростом его частоты. Если же частицы находятся далеко от сепаратрисы ( $H \gg \omega_0^2$ ), то выражение (5.19) можно переписать в виде

$$I \sim \sqrt{8H} \quad (5.21)$$

Из (5.21) следует, что гамильтониан математического маятника, также как и действие, не меняется. Окрестность сепаратрисы была исследована численно. Численные результаты показывают, что если частица в начальный момент времени находится слегка выше сепаратрисы, то при росте частоты она быстро захватывается в потенциальную яму и в дальнейшем остается захваченной. Колебательная скорость ее при этом меняется мало. Этот результат иллюстрируется рис. 5.6–5.9.

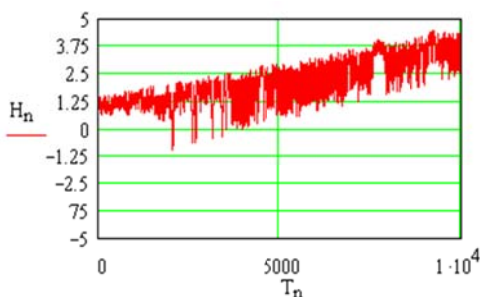


Рис. 5.6. Зависимость полной энергии маятника от времени.  
Сепаратриса расщеплена

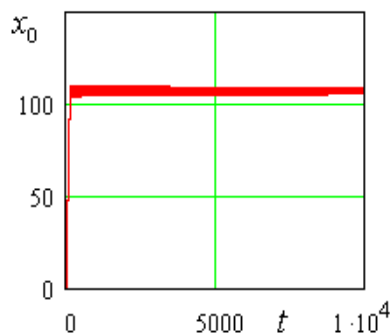


Рис. 5.7. Зависимость фазы математического маятника от времени при  $f = 0$ ,  $\omega = \Omega = 1$ ,  
 $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 2.01$ ,  $\alpha = 0.0003$

На этих рисунках представлена динамика того же математического маятника, с теми же параметрами. Отличие заключается в том, что при этом на маятник не действует внешняя периодическая сила

( $f = 0$ ), и стохастический слой отсутствует. Особенно большое различие в динамике видно при сравнении изменения полной энергии маятника от времени  $H = (\dot{x})^2 / 2 - (1 + \alpha \cdot t) \cos(x)$  (см. рис. 5.6 и рис. 5.10). При наличии стохастического слоя полная энергия (рис. 5.6) непрерывно растет, в то время как в отсутствии стохастического слоя полная энергия вначале растет, а затем убывает (рис. 5.10).

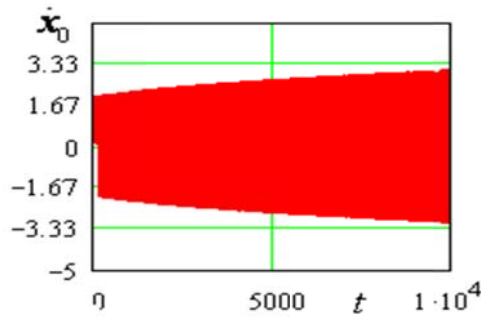


Рис. 5.8. Зависимость скорости математического маятника от времени при  $f = 0$ ,  $\omega = \Omega = 1$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 2.01$ ,  $\alpha = 0.0003$

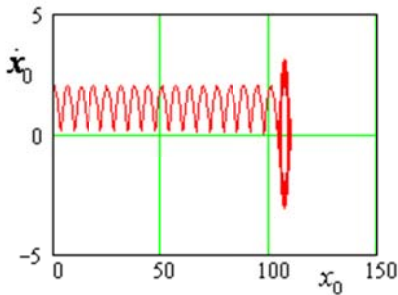


Рис. 5.9. Фазовый портрет математического маятника при  $f = 0$ ,  $\omega = \Omega = 1$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 2.01$ ,  $\alpha = 0.0003$

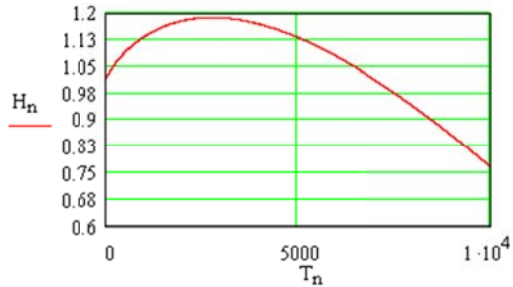


Рис. 5.10. Зависимость полной энергии маятника от времени. Сепаратриса не расщеплена

Таким образом, наличие сложной структуры стохастического слоя, и, как результат, наличие его липкости приводит к существенному изменению динамики математического маятника и, в частности, к нарушению адиабатической инвариантности.

#### 5.4. Пример плохой обусловленности второго начала. Динамика трехволнового взаимодействия

В качестве наиболее простого примера, в котором могут реализоваться описанные выше особенности энтропии, рассмотрим динамику трехволнового взаимодействия волн в нелинейной среде (в плазме). В качестве такого взаимодействия будем рассматривать процесс распада высокочастотной волны на высокочастотную и низкочастотную. Регулярный процесс такого распада достаточно хорошо изучен (см., например, [65, 87]). Мы будем считать, что в начальный момент времени в нелинейной среде распространяется немонахроматическая высокочастотная волна. Ширина спектра этой волны равна  $\Delta\omega$ . Кроме того, для простоты дальнейшего анализа, будем считать, что источником нерегулярности этой волны является случайная диффузия фазы. Отметим, что это наиболее распространенный тип нерегулярности. Любой – даже одномодовый генератор возбуждает колебания, которые подвержены тепловым флуктуациям. Известно, что такое воздействие, прежде всего, приводит к диффузии фазы и, как результат, к возникновению естественной ширины линии (см., например, [88]). При этом важно, что уравнение для случайной фазы может быть записано в виде

$$\dot{\phi} = \xi(t), \quad (5.22)$$

где  $\xi(t)$  – дельта-коррелированная функция с нулевым средним:

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \cdot \xi(t') \rangle = \delta\omega \cdot \delta(t - t'). \quad (5.23)$$

Функция  $\xi(t)$  имеет смысл мгновенной частоты сигнала. Коэффициент диффузии  $\delta\omega$  имеет смысл ширины спектра сигнала. Важно отметить, что ширина этого спектра может быть малой, в то время как при дальнейшем анализе нам достаточно будет использовать функцию  $\xi(t)$ . Работать с такой функцией достаточно просто. При этом удается провести полное аналитическое исследование задачи. Кроме высокочастотной волны в нелинейной среде, существуют малые когерентные высокочастотные возмущения, а также малые низкочастотные возмущения. Кроме того, будем считать, что амплитуда основного сигнала достаточно велика, так что инкремент распадной неустойчивости больше ширины спектра этого сигнала ( $\Gamma > \delta\omega$ ). В этом случае уравнения, описывающие динамику комплексных амплитуд взаимодействующих волн, могут быть представлены в виде

$$\dot{A}_1 = -A_2 \cdot A_3, \quad \dot{A}_2 = A_1 \cdot A_3^*, \quad \dot{A}_3 = A_1 \cdot A_2^*. \quad (5.24)$$

При получении этих уравнений были учтены факты, что при трех-волновом взаимодействии выполняется закон сохранения энергии и импульса:

$$\sum_{i=1}^3 \omega_i N_i = const \quad \sum_{i=1}^3 \vec{k}_i N_i = const. \quad (5.25)$$

Кроме того, была использована нормировка:  $|A_k|^2 = N_k$  – число квантов в  $k$ -волне;  $\dot{A} = dA/d\tau$ ,  $\tau = V \cdot t$ ,  $V$  – матричный элемент взаимодействия волн. Уравнения (24) имеют следующие интегралы:

$$\begin{aligned} |A_1|^2 + |A_2|^2 &= const, \quad |A_1|^2 + |A_3|^2 = const, \\ |A_2|^2 - |A_3|^2 &= const. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Наибольший интерес среди распадных процессов, которые описываются системой уравнения (5.24), являются процессы распада поперечной волны на поперечную и ленгмюровскую ( $t \rightarrow t' + l$ ), а также процесс распада ленгмюровской волны на ленгмюровскую и ионно-звуковую ( $l \rightarrow l' + i$ ). Возможная дисперсионная диаграмма взаимодействующих волн представлена на рис. 5.11.

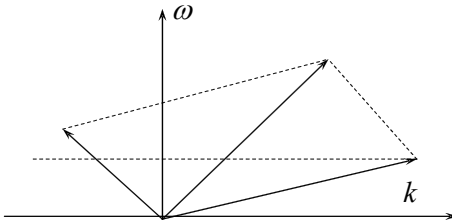


Рис. 5.11. Дисперсионная диаграмма взаимодействующих волн

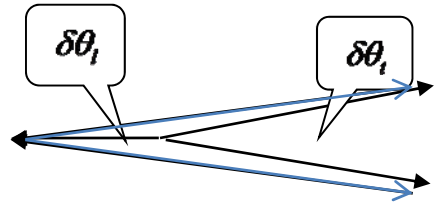


Рис. 5.12. Телесные углы ВЧ- и НЧ-волн

На начальном этапе процесса распада можно считать, что амплитуда распадающейся волны не меняется. В этом случае следует анализировать последние два уравнения системы (5.24).

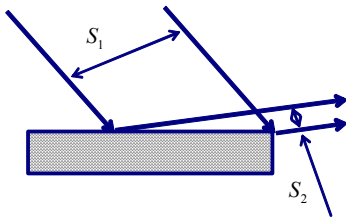


Рис. 5.13. Рассеяние волн на кристалле. Поток сохраняется. Плотность энергии растет

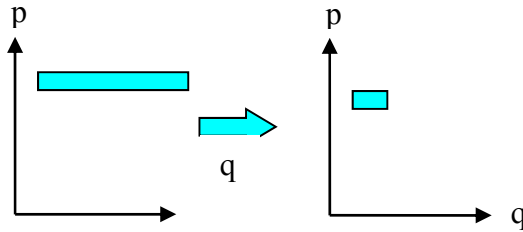


Рис. 5.14. Уменьшение фазового объема при скользящем береговом отражении

При этом удобно ввести новую функцию  $B = A_1 \cdot A_3^*$ . Тогда последние два уравнения системы (5.24) можно переписать в виде

$$\dot{A}_2 = B, \quad \dot{B} = \xi \cdot B + |A_1|^2 \cdot A_2. \quad (5.27)$$

Используя формулу Фуруцу-Новикова (см., например, [89]), а также, что  $\delta B(\xi) / \delta \xi(t) = \delta \omega \cdot B(t)$  (здесь  $\delta B(\xi) / \delta \xi(t)$  – вариационная производная), из системы (5.27) можно получить следующие уравнения для первых моментов (средних величин):

$$\langle \dot{A}_2 \rangle = \langle B \rangle, \quad \langle \dot{B} \rangle = |A_1|^2 \cdot \langle A_2 \rangle + \delta \omega / 2 \cdot \langle B \rangle. \quad (5.28)$$

Из (5.28) видно, что процесс распада для средних величин идет также (практически с тем же инкрементом  $\Gamma = \sqrt{|A_1|^2 + (\delta \omega)^2 / 16} + \delta \omega / 16 \approx |A_1|$ ), как и при распаде регулярной волны ( $|A_1|^2 \gg \delta \omega$ ). При этом из вида функции  $B(\tau)$  можно сделать заключение, что флуктуации фазы распадающейся волны компенсируются флуктуациями фазы низкочастотной волны. В результате, флуктуации комплексной амплитуды  $A_2$  и функции  $B(\tau)$  малы. Для дальнейшего анализа необходимо рассмотреть нелинейную динамику. Для этого систему уравнений (5.24) удобно переписать в виде

$$\frac{d(|A_1|^2)}{d\tau} = -[A_2 B^* + A_2^* B], \quad \dot{A}_2 = B, \quad (5.29)$$

$$\dot{B} = A_2 [2|A_1|^2 - |A_1(0)|^2].$$

Учитывая полученный выше результат, что флуктуации амплитуды  $A_2$  и функции  $B(\tau)$  малы, легко провести усреднение системы уравнений (5.29). Видно, что в этом случае эти усредненные уравнения будут совпадать с уравнениями (2.29). В свою очередь, уравнения (5.29) не отличаются от уравнений, которые описывают регулярную динамику процесса распада. При этом, как известно, за время порядка обратного инкремента ( $T \sim \Gamma^{-1}$ ) практически вся энергия распадающейся волны переходит в энергию высокочастотной когерентной компоненты. Незначительная часть энергии, в соответствии с соотношением Менли-Роу, переходит к низкочастотной волне ( $\delta E \sim (\Omega/\omega_1)E \ll E$ ). Отметим, что в соответствии с интегралами (5.26), число квантов низкочастотной волны равно числу квантов высокочастотных волн.

Таким образом, мы показали, что, несмотря на тот факт, что фаза распадающейся волны претерпевает случайные флуктуации, эта волна может практически всю свою энергию передать монохроматической когерентной высокочастотной волне, и часть энергии перейдет к низкочастотной волне. Если не обращать внимания на тот факт, что часть энергии от распадающейся волны перешла к низкочастотной компоненте, можно было бы сказать, что процесс идет с уменьшением энтропии. Легко показать, что на самом деле полная энтропия (энтропия высокочастотных волн плюс энтропия низкочастотных) будет равняться или даже превышать энтропию исходной волны. Для доказательства этого факта запишем выражение для энтропии, которую имела в начальный момент времени распадающаяся волна и определим энтропию низкочастотных волн. Число квантовых состояний для распадающейся волны можно записать в виде

$$G_i = \Delta g \cdot \delta\theta_i = \omega_1^3 \cdot \delta\omega \cdot \delta\theta_i / 8\pi^3 c^3, \quad (5.30)$$

где  $\Delta g$  – число осцилляторов поля для частотного интервала  $\omega, \omega + \delta\omega$ ;  $c$  – скорость распространения волны в среде. Для определенности будем рассматривать распад поперечной волны ( $\vec{k}_1$ ) на поперечную ( $\vec{k}_2$ ) и на ленгмюровскую ( $\vec{k}$ ). Схема такого распада представлена на рис. 5.11. Из рисунка видно, что между волновыми векторами взаимодействующих волн должно выполняться соотношение (условие синхронизма)  $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}$ . Из этого соотношения можно сразу найти связь между фазовой скоростью высокочастотных волн  $c$  и фазовой скоростью низкочастотной волны:  $v \approx c \cdot \Omega / 2\omega$ , а также  $\delta\theta_i \sim 2 \cdot \delta\theta_1$  (см. рис. 5.12,  $|\vec{k}| \sim 2|\vec{k}_1|$ ). Учтем, что высокочастотная волна, которая возбуждена в результате распада, является монохроматической, т. е. ее энтропия равна нулю. Флуктуации фазы распадающейся волны перешли во флуктуации фаз низкочастотных волн.

Поэтому характерная ширина спектра низкочастотных волн равна ширине спектра распадающейся высокочастотной волны. Учитывая эти факты, легко сделать оценку:  $G_l = \Delta g_l \cdot \delta\theta_l = \Omega^3 \cdot \delta\omega \cdot \delta\theta_l / 8\pi^3 \nu^3 \sim 8G_l$ . Учитывая также тот факт, что число низкочастотных квантов равно числу высокочастотных ( $N_l = N_l$ ), легко увидеть, что энтропия низкочастотных волн превышает энтропию распадающейся высокочастотной волны ( $S_l > S_l$ ).

## 5.5. В ы в о д ы

Таким образом, при выполнении условий, при которых второе начало термодинамики сформулировано, оно, безусловно, справедливо. Сомневаться в его справедливости практически означает сомневаться в основных постулатах теории вероятности. Отметим однако что условия, при которых справедливо второе начало, в общем случае, достаточно жесткие, и строго говоря, практически невыполнимые. Действительно, второе начало сформулировано для изолированных систем. Однако полностью изолированных систем в природе не бывает. Реальные системы в большей или меньшей степени взаимодействуют с другими подсистемами. При этом молчаливо предполагается, что малая степень неизолированности, также как и малая степень отклонения от других условий применимости второго начала, будет мало сказываться на конечном результате, т. е. наблюдаемые процессы будут протекать практически при строгом выполнении второго начала. Однако, как мы видели выше, существуют условия, при которых даже малые отклонения от условий применимости второго начала могут приводить к процессам, наблюдая за которыми, можно прийти к ошибочному выводу о нарушении второго начала термодинамики. Возможно, именно с такими случаями сталкивались те исследователи, в экспериментах которых, как они утверждают, наблюдаются процессы, протекающие с нарушениями второго начала. При этом необходимо более внимательно рассмотреть изучаемую систему, и особое внимание обратить на возможные даже малые отклонения от условий применимости второго начала. В реальных экспериментальных условиях это может оказаться достаточно сложной задачей. Физические системы, в которых наблюдаются такие особенности второго начала, могут представить значительный практический интерес. Однако, к сожалению, второе начало термодинамики, не дает никаких конкретных указаний на те физические системы, в которых такая особенность будет проявляться. Самым важным результатом при этом является сам факт принципиальной возможности существования таких условий.

Выше мы увидели, что, в общем случае, даже для гамильтоновых систем структура фазового пространства неоднородна. Имеются области фазового пространства, в которых изображающие частицы проводят значительно больше времени, чем в других областях. Такая особенность

приводит к неравнозначности различных областей фазового пространства. При этом, как мы видели во втором разделе, в получении выражения для энтропии следует учитывать этот факт. Действительно, выше при выводе выражения для энтропии мы везде неявно пользовались равнозначностью всех возможных состояний изучаемой системы. Наличие стохастических слоев, «седловых» особых точек приводит к неравнозначности различных областей, а, соответственно, к необходимости учета этого факта. В принципе, этот факт может быть учтен. Может быть введен соответствующий весовой коэффициент для вероятности нахождения частиц в различных частях фазового пространства. Формально это сделать достаточно просто. Однако пользы от этого, по-видимому, будет немного. Действительно, если мы знаем структуру фазового пространства изучаемой системы с такой точностью, в таких деталях, то введение понятия энтропии и получаемых из этого понятия результатов практически не добавляют новой информации об изучаемой системе. В этом случае исключительно полезное понятие энтропии теряет свое значение.

Следует заметить, что выше рассмотрен только наиболее важный случай отклонения от условий применимости второго начала, а именно случай неизолированности изучаемой системы. К такому же результату могут приводить и другие отклонения от условий применимости. В качестве примера укажем еще на случай, который может иметь большое практическое значение. Речь идет о случаях, когда в процессе взаимодействия изучаемого ансамбля частиц с границей области, в которую помещен этот ансамбль, существенную роль играют процессы дифракции. Такой системой, в частности, может быть ансамбль холодных частиц, например, холодных нейтронов, дебройлевская длина волны которых соизмерима с межатомными расстояниями стенок удерживающего контейнера. Вторым примером может быть ансамбль фотонов, которые отражаются от идеальных кристаллов. В таких случаях при отражении этих частиц от границ возможно существенное увеличение плотности энергии ансамбля данных частиц и, как результат, сжатие фазового объема. Процессы такой дифракционной фокусировки были изучены в работе [72]. При такой фокусировке растет и степень когерентности рассеянного потока. Иллюстрация этого процесса представлена на рис. 5.13 и рис. 5.14. На рис. 5.13 представлен простейший случай такого рассеяния. Падающее на кристалл излучение претерпевает полное брегговское отражение в том случае, когда разброс волновых векторов укладывается в столик Дарвина. При этом поток рассеянного излучения равен потоку падающего. Однако, как видно из рисунка 5.13, а также из результатов работы [72], поперечное сечение рассеянного потока может быть значительно меньшим, чем сечение падающего. Растет плотность энергии рассеянного излучения по сравнению с падающим потоком. Фазовый объем при этом, напротив, уменьшается (см. рис. 5.14). Выясним, как в этом случае будет меняться энтропия. В этом случае можно считать, что  $G_j = \text{const}$ ,  $\sum N_j = N = \text{const}$ . Для определенности будем считать,

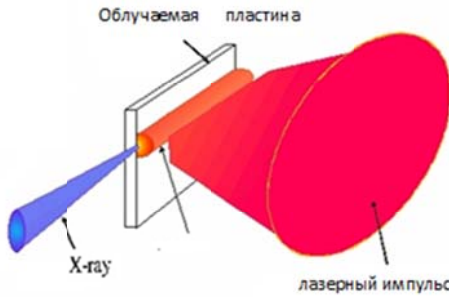
что энергия квантов значительно больше тепловой энергии ( $\hbar\omega \gg kT$ ,  $n_j \ll 1$ ). При этом выражение для энтропии существенно упрощается:  $S \approx \sum G_j \cdot n_j \cdot |\ln(n_j)|$ . Число возможных состояний ( $j$ ) уменьшается. Будет уменьшаться и энтропия. Если наблюдать за этим процессом (например, за процессом отражения рентгеновского излучения от идеальных кристаллов), то можно прийти к ошибочному выводу, что второе начало термодинамики нарушается. Еще Г. А. Лоренцем [90] было строго показано, что никакими действиями с потоком излучения (отражение, преломление, разделение, совмещение) нельзя добиться уменьшения энтропии. Этот факт легко доказать, анализируя выражения энтропии (5.12) для бозонов. Безусловно, этот результат справедлив. Однако при его выводе, также как и при выводе формулы (5.9), процессы дифракции не учитывались. Их учет, как мы видим, может привести к радикальному изменению результатов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, выше рассмотрено два типа механизмов, использование которых потенциально позволяет создавать источники интенсивного коротковолнового когерентного излучения. Отметим наиболее важные особенности каждого из этих типов.

Первый механизм, который был описан, это механизм возбуждения высоких номеров гармоник нерелятивистскими осцилляторами. Наиболее важной особенностью этого механизма является доказанный факт, что спектр излучения нерелятивистских осцилляторов может быть подобен спектру излучения релятивистских осцилляторов, т.е. максимум излучения таких осцилляторов приходится на высокие номера гармоник осциллятора. Для реализации такого излучения необходимо наличие периодической неоднородности диэлектрической проницаемости среды, в которой находятся осцилляторы либо периодического потенциала. Важным при этом, является тот факт, что номер возбуждаемых гармоник не зависит от степени неоднородностей. Они могут быть очень малы. Номер возбуждаемой гармоники зависит только от периода неоднородности. Сама степень неоднородности определяет только интенсивность излучения. Рассмотренный механизм может быть использован для создания источников интенсивного когерентного рентгеновского излучения. Схемы таких источников могут быть разнообразными. Можно представить, например, схему, которая во многом похожа на схему лазеров на свободных электронах. При этом в качестве ондуляторов могут быть использованы кристаллические решетки твердого тела. Активными элементами могут быть электроны твердого тела, которые находятся в поле интенсивного лазерного излучения. При достаточной напряженности лазерного поля все электроны твердого тела становятся

свободными в результате туннельной ионизации. В поле лазерного излучения они представляют собой осцилляторы, которые взаимодействуют с периодической структурой кристаллической решетки.



*Возможная схема источника когерентного рентгеновского излучения*

Опишем кратко возможную схему источника когерентного рентгеновского излучения. Пусть имеется источник лазерного излучения с такими характеристиками:  $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$  см  $E \geq 10^{10}$  В/см ( $10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup>). Электроны в таком поле еще нерелятивистские:

$$\beta = v/c = E \cdot e/m \cdot c \cdot \omega_1 \approx 0.5.$$

Пусть такое излучение падает на кристаллическую пластину.

Характеристики пластины таковы: период кристаллической структуры  $d \sim 10^{-8}$  см; плотность электронов

$n \sim 10^{22}$  см<sup>-3</sup>; частота соударений составляет  $\nu \sim 10^{14}$  см<sup>-1</sup>; длина свободного пробега равна  $L = V_f / \nu \sim 10^{-4}$  см. Здесь  $V_f$  – фермиевская скорость.

Время туннельной ионизации может составлять всего половину периода лазерного излучения. В действительности, она будет определяться временем нарастания амплитуды лазерного импульса до необходимой величины. Размах осцилляции электронов не превышает длины свободного пробега электронов. Как мы видели выше, такие осцилляторы будут излучать на длине волны  $\lambda \approx d / \beta$ . Кроме того, можно рассчитывать на коллективный процесс излучения. Для оценки времени развития неустойчивости можно воспользоваться формулой (1.52):

$$\text{Im } \delta = \frac{q}{2} \sqrt{\omega_0 \omega_b J_n}, \quad \text{где} \quad \omega_0 = \sqrt{k^2 c^2 + \omega_b^2}, \quad n\Omega = \omega_0 + \omega_b J_n, \quad \omega_b^2 = 4\pi e^2 n / m,$$

$\omega_b = 10^{15} \sqrt{60} \leq \omega_l$ . Нас интересуют высокие номера гармоник ( $n \sim 10^3$ ), поэтому можно воспользоваться следующей асимптотикой функций Бесселя:  $J_n(n) \approx 1/\sqrt[3]{n}$ ,  $J_n(n) \approx 1/\sqrt[3]{n} \sim 0.1$ . В результате получим следующую оценку для величины инкремента неустойчивости:  $\text{Im } \delta \sim q \cdot \omega_l$ . Формула (1.52) была получена для случая развития неустойчивости ансамбля осцилляторов в периодически-неоднородном диэлектрике. Однако можно показать, что близкая формула будет справедлива и для развития неустойчивости в периодически-неоднородном потенциале. При этом однако физический смысл величины  $q$  будет определять глубину модуляции потенциала. Для рентгеновского диапазона эта величина значительно больше, чем глубина модуляции

диэлектрической проницаемости. Оценивая все полученные соотношения, можно предположить, что в течение тысячи периодов лазерного излучения произойдет развитие неустойчивости с возбуждением когерентного рентгеновского излучения. В течение этого времени можно рассчитывать, что периодическая структура решетки существенно не изменится (характерное время разрушения структуры можно оценить временем возбуждения ионного звука).

Выше предполагалось, что период ондулятора, в котором находятся осцилляторы, составляет  $d \sim 10^{-8}$  см. В действительности это не совсем так. Действительно, когда все электроны становятся свободными, периодическая структура потенциала определяется потенциалом ядер решетки. Расстояние между ядрами составляет величину  $\sim 10^{-8}$  см. В то время как размер самих ядер равен  $\sim 10^{-13}$  см. Таким образом, имеется очень неоднородная структура потенциала. Если ее разложить в ряд Фурье, то этот ряд будет иметь  $10^5$  компонент с примерно одинаковыми амплитудами. Таким образом, потенциал кристаллической решетки имеет минимальный период, который соизмерим с размером самих ядер. Излучение осцилляторов в таком потенциале представляет собой самостоятельную задачу. Однако нужно отметить, что для излучения очень высоких частот (значительно больше рентгеновских) уже нужны релятивистские скорости электронов. Эти процессы выходят за рамки нашего рассмотрения.

Говоря о вторичных резонансах, следует, прежде всего, отметить те факты, которые были известны. Так, для ансамбля осцилляторов используются следующие наиболее важные его характеристики. Это парциальные частоты каждого индивидуального осциллятора. На этих частотах происходит колебание отдельных осцилляторов при отсутствии связи между ними. Если связи между осцилляторами существуют, то ансамбль характеризуется нормальными частотами. Нормальные частоты это именно те частоты, на которых ансамбль осцилляторов может резонансно реагировать на внешнее возмущение. Это означает, что только на этих частотах возможно резонансное воздействие внешних сил на рассматриваемый ансамбль. При этом внешнее силовое воздействие для резонансного воздействия на ансамбль должно содержать в своем спектре, по крайней мере, одну из нормальных частот ансамбля. Если внешнее воздействие меняет параметры ансамбля, то оно должно содержать в своем спектре, по крайней мере, частоту, которая равна удвоенной нормальной частоте (параметрическое возбуждение ансамбля осцилляторов). Попытка организовать резонансное воздействие внешними силами, спектры которых не содержат этих частот, обречена на неудачу. Однако, как мы видели в подразделах 2.1–2.11, ансамбль осцилляторов может иметь внутреннюю динамику, которая имеет свои характерные частоты. Обычная попытка использовать эти характерные частоты для

резонансного возбуждения ансамбля не приводит к положительному результату. Принципиально новым механизмом, который описан в этих разделах, является тот факт, что если связи между осцилляторами ансамбля организованы определенным образом, то имеется возможность использовать частоты этой внутренней динамики для резонансного возбуждения ансамбля осцилляторов. Этой особенностью связи должна быть их невзаимность. И только тогда, при наличии такой связи, удается внешними силами на частотах, которые отличаются от парциальных частот и от нормальных частот ансамбля, но совпадают с удвоенной частотой внутренней динамики связанных осцилляторов, добиться резонансного возбуждения ансамбля. Из такого возбуждения особый интерес, конечно, представляет случай, когда частота внутренней динамики является значительно меньшей, чем парциальные и нормальные частоты осцилляторов. При этом удастся эффективно преобразовывать энергию низкочастотных колебаний в энергию высокочастотных колебаний ансамбля осцилляторов.

Выше мы описали только теоретическую модель преобразования энергии НЧ-колебаний в энергию ВЧ-колебаний. В настоящее время проведена серия экспериментальных исследований, в которых на простых моделях, удалось преобразовать энергию НЧ-колебаний в энергию ВЧ-колебаний. В частности, удалось энергию колебаний на частоте порядка мегагерца преобразовать в энергию колебаний, частота которых в 40–100 раз превосходит эту частоту (см. [35]).

Следует обратить внимание на некоторое противоречие результатов подразделов 2.1–2.4, 2.8 с результатом подраздела 2.5. Действительно, в подразделе 2.8 показано, что необходимым элементом связи является невзаимность. В подразделе 2.5 для распределенных систем, вроде бы, такого ограничения не требуется. В настоящее время мы не знаем точно причины этого противоречия. Можно высказать только несколько предположений. В распределенных системах число степеней свободы неограниченно. Поэтому динамика взаимодействия мод может отличаться от динамики ограниченного числа мод (или даже дискретного неограниченного их числа). Примером этому факту может быть динамика распадного процесса волн в плазме без ограничения числа распадных каскадов [65, 93]. Как было показано в работах [94, 95], наличие конечного числа таких каскадов приводит к качественно новой динамике.

Принцип юлы достаточно универсальный принцип, который позволяет стабилизировать неустойчивые состояния как квантовых, так и классических систем. Для проблем, которые сформулированы в этом обзоре (проблема возбуждения интенсивного когерентного коротковолнового излучения), он интересен тем, что позволяет создавать плотные ансамбли высоковозбужденных квантовых и классических систем. В частности, этот механизм потенциально позволяет накапливать высоковозбужденные

атомы с высокой плотностью, время жизни которых может существенно превосходить время жизни этих систем без внешнего воздействия. Следует обратить внимание, что в последнее время принцип юлы был использован для подавления локальной неустойчивости. Локальная неустойчивость существенно ухудшает характеристики излучения (степень когерентности излучения существенно падает). По этой причине этот принцип потенциально может быть использован также для реализации механизмов второго направления, которое было описано в этом обзоре. Перейдем к анализу основных результатов этого направления.

Во многих случаях имеются источники достаточно интенсивного излучения в нужном диапазоне длин волн. Однако некоторые характеристики такого излучения недостаточны для многих приложений. Классическим примером являются источники рентгеновского излучения. Действительно, имеется громадное количество источников рентгеновского излучения. Их легко создавать. Достаточно иметь интенсивные потоки нерелятивистских заряженных частиц (для возбуждения рентгеновского излучения с длиной волны  $10^{-8} \text{ см}$  достаточно иметь электроны с энергией порядка 10 кэВ). Однако характеристики этого излучения, прежде всего, степень когерентности этого излучения недостаточны для многих желаемых приложений. Возникает вопрос: «Нельзя ли имеющееся излучение преобразовать в такое, которое будет иметь необходимые характеристики?». Во второй части описаны некоторые механизмы, которые позволяют такое преобразование осуществить. Наиболее простым и естественным способом такого преобразования является преобразование некогерентного излучения в когерентное при распространении некогерентного излучения в идеальных периодических структурах. В частности, при распространении некогерентного рентгеновского излучения в идеальных кристаллах. Наиболее интересным результатом в этом направлении является обобщение теоремы Ван-Циттерта-Цернике на случай распространения волн в идеальных кристаллах. Наличие кристалла, как следует из этой формулы, в  $L_{\text{ext}} / \lambda \sim 1/q$  раз увеличивает степень поперечной когерентности излучения. Для рентгеновского излучения  $q \sim 10^{-4} - 10^{-6}$ . Если рассеянное излучение распространяется вдоль поверхности кристалла (случай поверхностной дифракции), то степень когерентности определяется размером области кристалла, с которого происходит фокусировка излучения:  $L \approx \lambda / \text{Im} \varepsilon$ . Следует также обратить внимание, что при распространении волн в идеальных кристаллах теорема Лиувилia о сохранении фазового объема не выполняется – фазовый объем может быть существенно уменьшен. Этот факт позволяет не только существенно увеличить степень когерентности излучения, но также существенно увеличить плотность энергии такого излучения. При этом полезно провести сравнение фокусировки излучения линзами и дифракционную фокусировку излучения. Максимально достижимые увеличения интенсивности излучения в фокусе линзы можно

оценить формулой  $I \sim I_0 \cdot (D/\lambda)^2$ , где  $\lambda$  – длина волны фокусируемого излучения,  $D$  – диаметр линзы,  $I_0$  – интенсивность падающего излучения. При дифракционной же фокусировке можно эту интенсивность оценить формулой  $I \sim I_0 \cdot (L/\lambda)^4$ . Здесь  $L$  – размер области кристалла, с которого происходит фокусировка. Такая разница достаточно очевидна, так как линзы производят фокусировку лучей, т.е. происходит сложение энергии лучей, в то время как дифракционная фокусировка осуществляет сложение полей. Отметим, что такая фокусировка похожа на фокусировку, осуществляемую фазовой пластиной. Существенная разница заключается в том, что расстояние между штрихами при дифракционной фокусировке равно периоду кристаллической решетки кристаллов. Отметим также еще одно существенное различие дифракционной фокусировки от фокусировки обычными линзами. Линзы фокусируют излучение в точке (фокусе). За фокусом лучи расходятся. Это расхождение обусловлено теоремой Лиувилля. При дифракционной фокусировке лучи не разбегаются. Они сосредоточены либо в некоторой плоскости (при однократном рассеянии), либо вдоль линии распространения излучения после повторного рассеяния.

Еще одна возможность преобразовать энергию некогерентного излучения в энергию когерентного излучения заключается в использовании особенностей второго начала термодинамики. А именно, в плохой обусловленности этого закона. Эта особенность позволяет без больших затрат энергии некогерентного излучения преобразовать его в когерентное излучение. Следует только заметить, что рассмотренный в подразделе 2.4 второй части пример такого преобразования является (по нашему мнению) только демонстративным. Трудно представить, что некогерентное излучение в плазме существенно повысит свою когерентность. Однако практически без изменения этот пример и все расчеты, которые там приведены, могут быть использованы для анализа процесса преобразования степени когерентности при распространении некогерентного излучения в нелинейных кристаллах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рагозин Е. Н., Собельман И. И. Лазерные источники в мягкой рентгеновской области спектра // УФН, 2005, т. 175, №12, – С. 1339–1341.
2. Курилко В. И., Ткач Ю. В. Физические механизмы формирования когерентного излучения в ультрарелятивистском ЛСЭ // УФН, 1995, т. 165, № 3, – С. 241–261.
3. Brien McNeil. First Light From Hard X-ray Laser // Nature Photonics. 2009. V. 3. – P. 375–377
4. <http://www.dasylab.desy.de/facility/fel/vuv/projects/seeding.htm>
5. Buts V. A. Excitation of the harmonics by the oscillators flux in periodically heterogeneous medium // Intense Microwave Pulses V. San Diego, California, 31 July-1 August 1997, V. 31158. – P. 202–208.

6. Буц В. А. “Длинноволновое” излучение заряженных частиц в средах с периодической неоднородностью // Радиотехника, 1997, № 9, – С. 9–12.
7. Буц В. А. Коротковолновое излучение нерелятивистских заряженных частиц // ЖТФ, 1999, т. 69, в. 5, – С. 132–134.
8. Болотин Ю. Л., Гончар В. Ю., Трутень В. И., Шульга Н. Ф. Канализование и динамический хаос // УФЖ, 1986, т. 31, № 1, – С. 14–16.
9. Егоров О. М. Про множення частоти при відбиванні електромагнітних хвиль від рухомої плазми // УФЖ, 1998, т. 43, № 9, – С. 1157–1159.
10. Загороднов О. Г., Файнберг Я. Б., Егоров А. М., Болотин Л. И. Умножение частоты с помощью «схлопывания» плазмы // ЖТФ, 1961, т. 31, № 3, – С. 297–300.
11. Буц В. А. Отражение электромагнитных волн от феррита // Физика твердого тела, 1970, т. 12, – С. 2485–2486.
12. Буц В. А. Особенность отражения электромагнитных волн от образца феррита, находящегося во внешнем переменном магнитном поле // Известия ВУЗов Радиофизика, 1971, т. 14, № 6, – С. 926–932.
13. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Некоторые вопросы теории переходного излучения и переходного рассеяния // УФН, 1978, т. 126, вып. 4, – С. 553–608.
14. Болотовский Б. М. Путь формирования и его роль в излучении движущихся зарядов // Тр. ФИАН, т. 140, – С. 95–140.
15. Франк М. М. Эффект Доплера в преломляющей среде // Изв. АН СССР. Сер. Физ., 1942, т. 6, № ½, – С. 3–31.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. 6-изд. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
17. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. – М.: Наука, 1984. – 360 с.
18. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон – М.: Наука, 1974, – 392 с.
19. Буц В. А. Квантовая теория излучения нерелятивистских осцилляторов в периодических потенциалах // Электромагнитные волны и электронные системы, 2009, № 9, т. 14, – С. 73–80.
20. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Изд. «Наука», Москва, 1971. – 680 с.
21. Буц В. А., Егоров А. М. Лазеры на нерелятивистских электронах // Успехи современной радиоэлектроники. № 7, 2006, – С. 3–17.
22. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. – М.: Изд-во Высшая школа, 1963. – 620 с.
23. Флюгге Э. Задачи по квантовой механике. – М.: Изд-во «Мир», 1974, т. 2. – 316 с.
24. Antonov A. N., Buts V. A., Kovpik O. F., Kornilov E. A., Svishenskiy V. G.. Efficiency generation of electromagnetic short-waves via generation of harmonics by oscillating electrons in a periodic medium / International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion. Alushta (Crimea), Ukraine, September 16–21, 2002, Book of Abstracts. – P. 133.
25. Антонов А. Н., Буц В. А., Ковпик О. Ф., Корнилов Е. А., Свищенский В. Г. Возбуждение высоких номеров гармоник нерелятивистскими осцилляторами // Электромагнитные волны и электронные системы. 2005, т. 10, № 4, – С. 39–44.
26. Antonov A. N., Buts V. A., Egorov A. M., Kovpik O. F., Kornilov E. A., Svichenskiy V. G., Tolstoluzhsky A. P. Excitation of short-wave radiation by nonrelativistic oscillators / The sixth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter waves and workshop on Terahertz Technologies. Kharkov, Ukraine, June 25–30, 2007, Book of Abstracts, V. 1, – P. 568–570.
27. Буц В. А., Егоров А. М., Толстолужский А. П. Лазеры на свободных электронах с медленными волнами // XX Международный семинар по ускорителям заряженных частиц. 9–15.09. 2007, Алушта, Крым, Тезисы докладов. – С. 48–49.
28. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. – М.: Высшая школа, 1978. – 407 с.
29. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М.: «Мир», 1984. – 528 с.
30. Буц В. А. Динамика систем при вторичных резонансах с низкочастотным возмущением // Электромагнитные волны и электронные системы, 2004, N 1, Т. 9, – С. 59–68.
31. Buts V. A., Tolstoluzhsky A. P. Using secondary resonances of linear systems for transforming energy of the low frequency oscillations to the energy of high frequency // Problems of atomik science and technology, 2010, N 4(68), – С. 254–258.
32. Буц В. А., Егоров А. М., Чурюмов Г. И. Повышение плотности излучения при повышении частоты и при фокусировке в неоднородных средах // Прикладная радиоэлектроника, 2012, Том 11, № 4, – С. 506–519.

33. Буц В. А. Параметрическое усиление рентгеновского излучения в кристаллах // Успехи современной радиоэлектроники, № 1, 2002, – С. 39–43.
34. Buts V.A., Chatskaya V. A. Stochastic instability of the high-frequency eigen waves in ferrite // Telecommunications and Radio Engineering, 2002, V. 58 (7&8), – P. 12–17.
35. Buts V. A., Vavriv D. M., Nechayev O. G., and Tarasov D. V. A Simple Method for Generating Electromagnetic Oscillations // arXiv: 1310. 1024 v1 [physics. Gen-ph] 23 Aug. 2013. – P. 1–5.
36. Buts V. A., Vavriv D. M., Tarasov D.V. The influence of the dynamics features of the trapped particles on a spectrum of their oscillations // VANT, 2013, N 4 (86), – P. 289–292.
37. Буц В. О., Чацька В. О. Збудження власних височастотних хвиль в феритах стохастичною параметричною нестійкістю // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. 2002, № 544, – С.121–125.
38. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: «Наука», 1981, – 640 с.
39. Зайцева Е. В., Фаддеев М. А., Чупрунов Е. В. Динамическая теория рассеяния рентгеновских лучей в кристаллах. – Н.Новгород.: Изд-во ННГУ, 1999. – 132 с.
40. Joshi C. Plasma Accelerators // Scientific American, 2006, February, V. 294. – P. 40–47
41. Katsouleas Th. Accelerator physics: Electrons hang ten on laser wake // Nature. 2004, V. 431. – P. 515–516, doi:10.1038/431515a.
42. Joshi, C., Katsouleas T. Plasma accelerators at the energy frontier and on tabletops // Physics Today. 2003. V.56. No. 6. – P. 47–51, doi:10.1063/1.1595054.
43. Joshi C. and Malka V. Focus on Laser- and Beam-Driven Plasma Accelerators // New Journal of Physics. 2010. V.12, 045003 (5pp)..
44. Гуревич А. Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. – М.: Физматгиз, 1960. – 407 с.
45. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. – М.: Наука, 1975. – 239 с.
46. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. – М.: «Наука», 1984. – 360 с.
47. Файнберг Я.Б., Хижняк Н.А. Потери энергии заряженной частицей при прохождении через слоистый диэлектрик // ЖЭТФ, 1957, Т.32, – С. 883–895.
48. Буц В.А.. Излучение заряженных частиц, равномерно движущихся в средах с пространственно-периодической неоднородностью //Известия ВУЗов. Радиофизика 1983, Т. 26, № 8. – С. 996–1003.
49. Sudarshan E.C.G., Misra B. The Zeno's paradox in quantum theory // Journal of Mathematical Physics 1977, V. 18 (4), – С. 756–763.
50. Teuscher C. & Hofstadter D. Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker. Springer. 2004. – 54 p.
51. von Neumann J. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. – Princeton: Princeton University Press., 1955. – 366 p.
52. Degasperis L., Fonda & Ghirardi G.C.. Does the lifetime of an unstable system depend on the measuring apparatus? // Nuovo Cimento 1974, V.A 21 (3), - Pp. 471–484.
53. Itano W.M., Heinsen D.J., Bokinger J.J., Wineland D.J. . Quantum Zeno effect // PRA, 1990, V. 41, – pp. 2295–2300.
54. Fischer M. C., Gutiérrez-Medina B., and Raizen M. G. Observation of the Quantum Zeno and Anti-Zeno Effects in an Unstable System. Phys. Rev. Lett. V. 87, 2001, 040402 .
55. Eric W. Streed, Jongchul Mun, Micah Boyd, Gretchen K. Cambell, Patrick Medley, Wolfgang Ketterle, and David E. Pritchard Continuous and Pulsed Quantum Zeno Effect. Phys. Rev. Lett. V. 97, 260402-4, 31 dec. 2006.
56. Буц В. А. Модификация квантового эффекта Зенона – квантовая юла // Электромагнитные волны и электронные системы 2010, т.15, № 1, – С. 58–65.
57. Buts V. A. Stabilization of the excited states //ВАНТ, 2010, № 3(67), – С. 90–93.
58. Buts V.A. The mechanism of suppression of quantum transitions (quantum whirligig) // Problems of atomik science and technology. 2010, N 4(68), – С. 259–263.
59. Антонов А. Н., Буц В. А., Корнилов Е. А., Щербина А. Н. Подавление фототока ФЭУ внешним ВЧ-полем // ВАНТ. Серия: Ядерно-физические исследования. 2012, № 4(80), – С. 100–103.
60. Buts V. A. Stabilization of classic and quantum systems // Problems of atomik science and technology, 2012, N 6(82), – P. 146–148.
61. Buts V. A. Stabilisation of unstable states (a whirligig principle) // VANT (in print); Buts V. A. Stabilisation of unstable states // MIKON 2014, 20th International Conference, Poland, P. 681-685.
62. Крылов Н. С., Фок В. А. О двух основных толкованиях соотношения неопределенности для энергии и времени // ЖЭТФ, 1947, т. 17, в. 2, – С. 93–107.
63. Халфин Л. А. Квантовый эффект Зенона // УФН. 1990, N.160, в. 10, – С. 185–188.
64. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. – М.: Изд. «Наука» 1974. – 391 с.
65. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. – М.: Изд. «Наука» 1976. – 240 с.
66. Довбня А. Н., Кандыбей С. С., Киришук В. И., Ранюк Ю. Н., Ажажа В. М., Ковтун К. В., Старолат М. П.. Триггеринг долгоживущих изомеров  $^{178\text{m}}\text{2Hf}$  by 50 KeV. // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Серія фізична «Ядра, частинки, поля», 2009, 880, № 4(44), – С. 56–62.

67. Буц В. А. Рассеяние и фокусировка волн периодически неоднородными средами // Изв. Вузов. Радиофизика, 1975, т. 18, № 10, – С. 1488–1498.
68. Буц В. А., Мачехин Ю. П. Дифракционная фокусировка волн в периодически неоднородных средах // Изв. Вузов. Радиофизика, 1977, т. 20, № 7, – С. 1054–1062.
69. Чжан Ш. Многоволновая дифракция рентгеновских лучей в кристаллах. – М.: «Мир», 1987. – 334 с.
70. Ляхов Г. А., Макаров В. А. Формирование пространственной когерентности и поляризационных свойств электромагнитного излучения в средах с пространственной дисперсией // Изв. Вузов. Радиофизика, 1979, т. 22, – С. 1453–1460.
71. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: «Наука», 1981. – 640 с.
72. Буц А. В., Буц В. А., Ковальчук И. К. Повышение уровня когерентности рентгеновского излучения при его рассеянии идеальным кристаллом / 6-ой Межгосударственный семинар «Плазменная электроника и новые методы ускорения» // ВАНТ. 2000, № 1 (2), – С. 212–216.
73. Буц А. В., Буц В. А. Повышение плотности энергии и уровня когерентности рентгеновского излучения при рассеянии идеальным кристаллом // Электромагнитные волны & электронные системы, 2001, № 1; Буц В. А., Клепиков В. Ф., Литвиненко В. В. Механизм получения интенсивного когерентного излучения для радиационных методов диагностики // физические основы приборостроения. 2013, т.2, № 4. – С. 57–69.
74. Буц В. А., Буц А. В., Ковальчук И. К. Повышение уровня когерентности рентгеновского излучения при его рассеянии идеальным кристаллом. Электромагнитные волны и электронные системы, 2002, т. 7, № 6, – С. 41–49.
75. <http://glavniy zakon.novomnemenie.ru/articles1/8.html>; <http://savukov.net>
76. Zaslavsky G. M. and Abdulaev S. S. Scaling properties and anomalous transport of particles inside the stochastic layer // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. N 5. – P. 3901–3910.
77. Zaslavsky G. M. and Edelman M. Maxwell's demon as dynamical model // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. N 5. – P. 5310–5320.
78. Zaslavsky G. M. Chaotic dynamics and the origin of statistical laws // Physics Today. August 1999. V. 52. – P. 39–45.
79. Leoncini X. and Zaslavsky G. M. Jets, stickiness, and anomalous transport // Phys. Rev. E. April 2002. V. 65. 046216. – P. 1–16.
80. Zaslavsky G. M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports. 2002. V. 371. – P. 461–580.
81. Буц В. А., Толстолужский А. П. Особенности прохождения заряженных частиц через сепаратрису // Препринт. ХФТИ 87-8, М. – ЦНИИ Атоминформ, 1987. – 5 с.
82. Buts V. A., Tolstoluzhsky A. P. Peculiarities of particles motion at passing through splitting separatrix // Problems of atomic science and technology. 2005, N 2. Series: Plasma Physics (11). – P. 134–136.
83. Буц В. А., Толстолужский А. П. Особенности движения частиц при прохождении через стохастический слой // Успехи современной радиоэлектроники. 2005, № 11, – С. 21–27.
84. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. – М.: «Мир», 1991. – 239 с.
85. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. – М.: «Наука», 1976. – 567 с.
86. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. – М.: «Наука», 1988. – 368 с.
87. Вильгельмссон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. – М.: Энергоиздат, 1981. – 223 с.
88. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. – М.: «Наука», 1968. – 660 с.
89. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. – Современные проблемы физики. М.: Изд-во «Наука», 1975. – 239 с.
90. Лоренц Г. А. Лекции по теоретической физике. Т. I. Теория излучения, М., ОНТИ. 1935.
91. В. А. Буц. Некоторые особенности второго начала термодинамики // Успехи современной радиоэлектроники. 2008, № 7. – С. 42–53.
92. Buts V., Kovalchuk I., Tarasov D., Tolstoluzhsky A. Peculiarity of chaotic and regular dynamics of waves // 2012, <http://arxiv.org/abs/1210.6788>.
93. Bakaj A. S. Interaction of high frequency and low frequency waves in a plasma // Nuclea fusion. 1970. V. 10. – P. 53–67.
94. Буц В. А., Мануйленко О. В., Толстолужский А. П. Хаотическая динамика заряженных частиц при взаимодействии типа волна-частица и хаотическая динамика волн при слабонелинейном взаимодействии типа волна-волна / 9-я зимняя школа-семинар по СВЧ-электронике и радиофизике. Саратов, 1993, Тезисы докладов – С. 89–101.
95. Буц В. А., Ковальчук И. К., Тарасов Д. В., Толстолужский А. П. Регулярная и хаотическая динамика слабонелинейного взаимодействия волн // Электромагнитные волны и электронные системы. 2011, т. 16, в. 1, – С. 51–62.

УДК 533.9

PACS numbers: 47.11.+j, 47.27.-i, 47.27.Eq, 92.10.Hm

## Ч А С Т Ь ІІІ

---

Н Е Р А В Н О В Е С Н Ы Е  
К О Л М О Г О Р О В С К О Г О Т И П А  
Р А С П Р Е Д Е Л Е Н И Я Ч А С Т И Ц  
И И Х П Р И Л О Ж Е Н И Я <sup>1</sup>

---

**В. Е. Захаров**

*Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН, Ленинский проспект, д. 53,  
Москва, 119991, Российская Федерация. Тел.: +7-499-1326751,  
эл. почта: zakharov@itp.ac.ru; zakharov@math.arizona.edu*

**В. И. Карась**

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт» НАН  
Украины, ул. Академическая 1, Харьков, 61108, Украина. Тел. +38-057-7001146,  
Факс: +38-057-3353564, эл. почта: karas@kpt.kharkov.ua  
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы 4,  
Харьков, 61022, Украина*

**П**редставлено современное состояние исследований неравно-  
весных (колмогоровского типа) стационарных и нестационар-  
ных распределений частиц, взаимодействующих по закону  
Кулона с учетом статической экранировки и являющихся точными  
решениями интегралов столкновений Больцмана или в форме Ландау  
с источником и стоком, обеспечивающими поток энергии  $I_1$  по спектру  
в импульсном пространстве.

---

<sup>1</sup> Материал является расширенным вариантом статьи [1]. Захаров В. Е., Карась В. И. Неравно-  
весные колмогоровского типа распределения частиц и их приложения // Успехи физи-  
ческих наук. – 2013. – Т. 131, вып. 1. – С. 55-85.

Термодинамически равновесной функцией распределения электронов в вырожденной или классической плазме в изотропном, пространственно однородном случае является соответственно функция распределения Ферми-Дирака или Максвелла, которая является точным решением соответственно квантового или классического интеграла столкновений Больцмана. Стационарные неравновесные распределения (С. н. р.) частиц или волн по импульсам (волновым числам) – распределения, обращающие в нуль интеграл столкновений в кинетическом уравнении и полностью определяющиеся постоянным в пространстве импульсов (волновых чисел) потоком сохраняющихся величин, например, энергии, импульса, числа частиц (или волнового действия для квазичастиц). С. н. р. называются также колмогоровскими спектрами (КС). Впервые А. Н. Колмогоровым и А. М. Обуковым [2] в теории турбулентности несжимаемой жидкости было построено в интервале масштабов, промежуточных между масштабами возбуждаемых и эффективно затухающих движений, универсальное С. н. р. энергии по волновым числам  $W(k)$  – известный КС гидродинамической турбулентности. В обзоре для квантового интеграла столкновений Больцмана приведено явное выражение его как функции импульса  $p$ , показателя степени  $S$ , импульса  $p'$ , который отвечает стоку энергии, импульса  $p''$ , который отвечает источнику энергии. Показано, что при отсутствии частиц вне энергетического интервала, который находится между источником и стоком, в границах инерционного интервала показатель степени  $S$  отличается от универсального не более чем на 10 %.

Также рассмотрена более реальная ситуация, когда в инерционном интервале функция распределения электронов степенная, а за его пределами – термодинамически равновесная функция Ферми-Дирака. Показано, что стационарное неравновесное распределение электронов близкое к универсальному ( $s = -5/4$  в случае безграничного инерционного интервала), если расположение источника и стока, а также их интенсивности удовлетворяют определенным условиям, т. е. неравновесное универсальное распределение электронов возможно даже при числах заполнения значительно (на один – два порядка) меньших равновесных.

Проанализированы преимущества нового (основанного на неравновесных распределениях) способа преобразования энергии и неравновесной нестационарной кинетики электрон-фононной системы кристалла в сильном электрическом поле (электропластический эффект).

## ВВЕДЕНИЕ

В связи с разработкой и широким использованием мощных источников частиц и энергии в наше время неуклонно возрастает интерес к неравновесным состояниям разнообразных физических систем [1].

Стационарные неравновесные распределения (С. н. р.) частиц или волн по импульсам (волновым числам) – распределения, обращающие в нуль *интеграл столкновений* в *кинетическом уравнении* и полностью определяющиеся постоянным в пространстве импульсов (волновых чисел) потоком сохраняющихся величин, например, энергии, импульса, числа частиц (или волнового действия для квазичастиц). С. н. р. называются также колмогоровскими спектрами (КС).

Впервые А. Н. Колмогоровым и А. М. Обуковым [2] в теории *турбулентности* несжимаемой жидкости было построено в интервале масштабов, промежуточных между масштабами возбуждаемых и эффективно затухающих движений, универсальное С. н. р. энергии по волновым числам  $W(k)$  – известный КС гидродинамической турбулентности:

$$W(k) = AP_1^{1/3}k^{-11/3}, \quad (B.1)$$

где  $A$  – константа,  $P_1$  – интегральный поток энергии по спектру волновых чисел  $k$ .

При выводе формулы (B.1) использована гипотеза о локальности турбулентности, т. е. о том, что существенно взаимодействуют между собой только волновые движения с размерами одного порядка. Эта гипотеза для турбулентности в несжимаемой жидкости (сильная турбулентность) строго не доказана.

В физических средах, в которых взаимодействие волн или частиц можно описать кинетическими уравнениями для квазичастиц или частиц, нахождение С. н. р. сводится к решению кинетических уравнений. В этом случае локальность С. н. р. соответствует сходимости интеграла столкновений.

Подобно термодинамически равновесным распределениям, С. н. р. обращают в нуль интеграл столкновений, однако они существуют только при наличии потока какой-либо сохраняющейся величины в импульсном пространстве, поддерживаемом источником и стоком. Начиная со слабо-турбулентных С. н. р. (КС) волн, полученных В. Е. Захаровым [3], идея об эстафетной передаче по масштабам интегралов движения (сохраняющихся величин) была широко использована при рассмотрении турбулентности в плазме, твердом теле, жидкости; были получены изотропные и анизотропные С. н. р. (КС), соответствующие переносу постоянных в импульсном пространстве (или пространстве волновых чисел) потоков энергии, импульса, числа частиц, волнового действия.

Стационарные неравновесные распределения (колмогоровские спектры) волн с распадным законом дисперсии. Если дисперсия волн какого-либо одного типа описывается распадными условиями  $\omega(\vec{k}) = \omega(\vec{k}_1) + \omega(\vec{k}_2)$ , то интеграл столкновений  $I_{st}$ , получаемый усреднением динамических уравнений, может быть записан следующим образом:

$$I_{st}[n(k)] = \int [R(kk_1k_2) - R(k_1kk_2) - R(k_2kk_1)] dk_1 dk_2,$$

$$R(kk_1k_2) = 2\pi |V(kk_1k_2)|^2 \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega(k) - \omega(k_1) - \omega(k_2)) [n(k_1)n(k_2) - n(k)n(k_1) - n(k)n(k_2)], \quad (\text{B.2})$$

где  $n(k)$  – плотность числа квазичастиц,  $V(kk_1k_2)$  – матричный элемент трехволнового взаимодействия,  $\delta(x)$  – дельта-функция. В однородной и изотропной среде при *масштабной инвариантности* закона дисперсии и матричного элемента относительно своих аргументов, а именно

$$\omega(\varepsilon k) = \varepsilon^\alpha \omega(k), \quad V(\varepsilon k, \varepsilon k_1, \varepsilon k_2) = \varepsilon^\beta V(k, k_1, k_2), \quad (\text{B.3})$$

С. н. р. числа квазичастиц по волновым числам  $n(k)$ , обращающее в нуль интеграл столкновений (B.2) и соответствующее постоянному потоку энергии  $P_1$ , имеет вид:

$$n(k) = AP^{1/2} k^{-s(d, \alpha, \beta)}. \quad (\text{B.4})$$

В уравнениях (B.3) и (B.4)  $A$  и  $\varepsilon$  – const,  $\alpha$  и  $\beta$  – const, характеризующие степень однородности закона дисперсии и матричного элемента,  $d$  – размерность волновых векторов.

Так, например, для капиллярных волн на поверхности жидкости  $d = 2$ ,  $\beta = 9/4$  локальное изотропное С. н. р. числа квазичастиц, соответствующее постоянному потоку энергии  $P_1$ , имеет вид:

$$n(k) = AP_1^{1/2} k^{-27/4}. \quad (\text{B.5})$$

В среде, обладающей аксиальной симметрией относительно выделенного направления  $\xi$ , при определенной масштабной инвариантности закона дисперсии и матричного элемента трёхволнового взаимодействия, а именно

$$\begin{aligned} \omega(k_{||}, k_{\perp}) &= k_{||}^\alpha k_{\perp}^\beta, \quad V(\varepsilon k_{||}, \varepsilon k_{||_1}, \varepsilon k_{||_2}, \mu k_{\perp}, \mu k_{\perp_1}, \mu k_{\perp_2}) = \\ &= \varepsilon^\alpha \mu^\beta V(k_{||}, k_{||_1}, k_{||_2}, k_{\perp}, k_{\perp_1}, k_{\perp_2}), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

анизотропное С. н. р. числа квазичастиц по волновым векторам, соответствующее постоянному потоку импульса  $\mathfrak{P}$  в направлении  $\xi$ , имеет вид:

$$n(k) = AR^{1/2} |k_{\parallel}|^{-(3-\alpha-2u)/2} |k_{\perp}|^{(4-\beta+2v)/2}, \quad (\text{B.7})$$

где  $k_{\parallel}$ ,  $k_{\perp}$  – компоненты волнового вектора, соответственно параллельная и перпендикулярная  $\xi$ . В частности, для *ионно-звуковых колебаний* в плазме, помещенной в направленное по оси  $x$  сильное магнитное поле ( $\alpha=1$ ,  $\beta = 2$ ,  $u = 3/2$ ,  $v = 0$ ), локальное анизотропное С. н. р. числа квазичастиц

$$n(k) = AR^{1/2} |k_{\parallel}|^{-5/2} |k_{\perp}|^{-2}, \quad (\text{B.8})$$

где  $\mathfrak{R}$  – поток импульса, направленный по оси  $x$ . Локальные анизотропные С. н. р. получены для бездивергентных волн Россби, косых электронно-дрейфовых, ионно-дрейфовых, электронно-звуковых, магнитозвуковых, альфвеновских волн в плазме, волн плотности в гравитирующих астрофизических объектах.

Стационарные неравновесные распределения волн с нераспадным законом дисперсии. В случае дисперсии волн, не описываемой распадными условиями, интеграл столкновений  $I_{st}$  может быть записан следующим образом:

$$I_{st}[n(k)] = 4\pi \int |V(kk_1, k_2k_3)|^2 \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) \delta(\omega(k) + \omega(k_1) - \omega(k_2) - \omega(k_3)) [n(k_1)n(k_2)n(k_3) + n(k)n(k_2)n(k_3) - n(k)n(k_1)n(k_2) - n(k)n(k_1)n(k_3))] dk_1 dk_2 dk_3, \quad (\text{B.9})$$

где  $T(k, k_1, k_2, k_3)$  – матричный элемент взаимодействия.

В однородной и изотропной среде при аналогичной выражению (B.3) масштабной инвариантности закона дисперсии и матричного элемента относительно своих аргументов С. н. р. числа квазичастиц по волновым числам, соответствующее постоянному потоку энергии  $P_1$  (или волнового действия  $P_0$ ), имеет вид:

$$n(k) = A_i P_i^{1/3} k^{-v_i}, \quad (\text{B.10})$$

где  $v_i = [3d + 2\beta + \alpha(i-1)]/3$ ,  $A_i$  – константы,  $i = 0, 1$  соответствует постоянному потоку волнового действия, энергии. Так, например, для гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости ( $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 3$ ) имеются локальные С. н. р. числа квазичастиц, соответствующие постоянному потоку энергии в область больших волновых чисел ( $v_1 = 4$ ),

т. е. передаче энергии от больших масштабов к малым, и постоянному потоку волнового действия в область малых волновых чисел ( $\nu_0 = 23/6$ ), т. е. от малых масштабов к большим.

## РАЗДЕЛ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ С ПОТОКОМ ПО СПЕКТРУ

Термодинамически равновесной функцией распределения электронов в вырожденной или классической плазме в изотропном пространственно однородном случае является соответственно функция распределения Ферми-Дирака или Максвелла, которая является точным решением соответственно квантового или классического интеграла столкновений Больцмана [4, 5]. Для классического (невыврожденного) газа кинетическое уравнение Больцмана имеет вид:

$$\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial t} = \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p}_3 W(\vec{p}, \vec{p}_1 | \vec{p}_2, \vec{p}_3) \cdot [f(\vec{p}_2) f(\vec{p}_3) - f(\vec{p}) f(\vec{p}_1)] \times \quad (1.1)$$

$$\times \delta(E + E_1 - E_2 - E_3) \cdot \delta(\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3),$$

где  $W(\vec{p}, \vec{p}_1 | \vec{p}_2, \vec{p}_3)$  – вероятность перехода вследствие столкновений,  $f(\vec{p})$  – функция распределения электронов,  $\vec{p}_i$ ,  $E_i$  – импульс и энергия  $i$ -го электрона,  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака.

Функция распределения, которая удовлетворяет условию

$$f(\vec{p}_2) f(\vec{p}_3) - f(\vec{p}) f(\vec{p}_1) = 0, \quad (1.2)$$

является стационарным решением уравнения (1.1).

Легко увидеть, что функциональное уравнение (1.2) с учетом законов сохранения энергии и импульса при столкновениях частиц приводит к термодинамически равновесной функции распределения Максвелла.

Вопрос о неравновесной функции распределения малой части электронов, которые релаксируют на основном «фоне» (в этом случае интеграл столкновений можно линеаризовать) с учетом постоянного в импульсном

пространстве потока энергии  $I_1$ , возникающего вследствие процессов ионизации и рекомбинации, рассматривался ранее (см., например, [6]). Близкие вопросы о функции распределения нейтронов в кристаллах рассматривались А. И. Ахиезером и И. Я. Померанчуком [7]. В этих случаях функция распределения может заметно отличаться от термодинамически равновесной, но при этом ее вид зависит от структуры источника и стока.

Универсальные неравновесные стационарные степенные распределения частиц ( $f = Ap^{2s}$ ), которые являются точными решениями интеграла столкновений Больцмана, были впервые методом групповой симметрии получены А. В. Кацем, В. М. Конторовичем, В. Е. Новиковым, С. С. Моисеевым [8]. Для формирования таких распределений необходимо иметь в импульсном пространстве источник и сток частиц или энергии, которые обеспечивают постоянный по спектру поток частиц или энергии.

Для определения показателя степени  $s$  в случае вероятности перехода, которая является однородной функцией импульсов степени  $n$ , естественно под интегралом использовать переменные  $\vec{p}_i / p$ . Тогда (1.1) сводится к интегралу, не зависящему от  $p$ , и множителю  $p^{4s+n+4}$ . Найдем поток частиц  $I_0$  и энергии  $I_1$  в импульсном пространстве. При этом потоки определяются через интеграл столкновений следующим образом:

$$\operatorname{div} \left( j_i(p) \frac{\vec{p}}{p} \right) = -E^i \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{St}, \quad (1.3)$$

где  $I_i = 4\pi p^2 j_i$ , а  $E$  – энергия частиц. Решая (1.3), получаем

$$I_i = A^2 \alpha^{1-i} \frac{R(s, n)}{4s + n + 9 + 2(i-1)} p^{4s+n+9+2(i-1)}, \quad (1.4)$$

где  $\alpha = \text{const}$ .

Из (1.4) для  $S_i$ , которые удовлетворяют условию

$$\gamma_s = 4s_i + n + 9 + 2(i-1) = 0, \quad i = 0, 1, \quad (1.5)$$

поток  $I_i$  либо постоянен в импульсном пространстве, либо нулевой, если  $R(s, n)$  имеет нуль первого порядка при  $s = S_i$  (при этом интеграл столк-

новений равняется нулю). Функция распределения  $Ap^{2s}$  отвечает неравновесной стационарной ситуации с постоянным потоком энергии или частиц. При этом направление потока определяется знаком производной  $dR/d\gamma_s$  при  $\gamma_s = 0$ , а величина  $A$  определяется выражением

$$A^2 = I_i \alpha^{i-1} \lim_{\gamma_s \rightarrow 0} \left| \frac{dR}{d\gamma_s} \right|^{-1} \quad (1.6)$$

Покажем непосредственным вычислением [9, 12], что для интегралов столкновений Больцмана и Ландау в случае неравновесных степенных распределений функция  $R(s, n)$  удовлетворяет выше приведенным условиям.

### 1.1. Точные решения для интеграла столкновений Ландау

Хорошо известно, что в случае плазмы интеграл столкновений, описывающий взаимодействие заряженных частиц, может быть записан в форме Ландау (см., например, [3])

$$\left( \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial t} \right)_{st} = -\text{div} \vec{j}_0, \quad j_{0i} = \pi e^4 \Lambda \int d\vec{p}' \cdot \frac{u^2 \delta_{ik} - u_i u_k}{u^3} \left[ f(\vec{p}) \frac{\partial f(\vec{p}')}{\partial p'_k} - f(\vec{p}') \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_k} \right], \quad (1.7)$$

где  $\vec{u} = (\vec{p} - \vec{p}')/m$ ,  $\Lambda$  – кулоновский логарифм,  $e, m$  – заряд, масса электрона. Подстановкой в (1.7) изотропной степенной функции распределения  $Ap^{2s}$  после довольно несложных вычислений можно получить такое выражение:

$$\left( \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial t} \right)_{st} = 16\pi^2 m e^4 \Lambda^2 p^{4s} \frac{(4s+3) \cdot (4s+5)}{(s+1) \cdot (2s+3) \cdot (2s+5)} + \frac{16\pi^2 m e^4 \Lambda^2 p^{4s}}{3} \times \\ \times \lim_{\substack{p_1 \rightarrow 0 \\ p_2 \rightarrow \infty}} \left\{ \frac{2s^2}{2s+3} \left( \frac{p_1}{p} \right)^{2s+3} + \frac{(2s+1)s}{2s+2} \left( \frac{p_2}{p} \right)^{2s+2} - \frac{(2s+3)}{2} \left( \frac{p_2}{p} \right)^{2s} - \frac{(2s-2)s}{(2s+5)} \left( \frac{p_1}{p} \right)^{2s+5} \right\} \quad (1.8)$$

Из (1.8) видно, что первое слагаемое интеграла столкновений, т. е. функция  $R(s, n)$  действительно содержит множители  $(4s + 5)$  и  $(4s + 3)$ , причем в первой степени, что обеспечивает, с одной стороны, постоянство потока энергии, а, с другой стороны, обращение в нуль интеграла столкновений для показателя степени  $s_1 = -5/4$ , что же касается показателя степени  $s_0 = -3/4$ , то он соответствует нелокальной функции распределения, для которой интеграл столкновений расходится (второй член под знаком предела из-за второго слагаемого неограничен).

## 1.2. Точные решения для интеграла столкновений Больцмана

Используя выражение для интеграла столкновений Больцмана (1.1) и подставив степенную функцию распределения частиц в виде  $Ap^{2s}$ , с помощью  $\delta$ -функции, выражающей закон сохранения импульса, проинтегрируем (1.1) по  $\vec{p}_2$ , введя затем вместо  $\vec{p}_1, \vec{p}_3$  новые переменные  $\vec{p}_1, \vec{q}$ , приводим интеграл столкновений к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial t} = & -mA^2 \int d\vec{p}_1 d\vec{q} W(\vec{p}, \vec{p}_1 | \vec{p} + \vec{q}, \vec{p}_1 - \vec{q}) \cdot \left[ |\vec{p} + \vec{q}|^{2s} |\vec{p}_1 - \vec{q}|^{2s} - |\vec{p}|^{2s} |\vec{p}_1|^{2s} \right] \times \\ & \times \delta(\vec{q}(\vec{p}_1 - \vec{p} - \vec{q})), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_3$ . Аргумент  $\delta$ -функции может обратиться в нуль при  $\vec{p}_1 - \vec{p} - \vec{q} = 0$  или  $\vec{q}(\vec{p}_1 - \vec{p} - \vec{q}) = 0$ . Первый случай неинтересен, так как соответствует просто перестановке частиц местами в результате столкновения, что обращает в нуль квадратную скобку (т. е. отвечает условию (1.2)), а значит и  $(\partial f / \partial t)_{st} = 0$ .

Введя углы  $\theta, \theta_1$  между вектором  $\vec{q}$  и соответственно векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{p}_1$ , после перехода к сферическим координатам в (1.9) для  $\vec{p}_1$  и  $\vec{q}$ , интегрирования при помощи  $\delta$ -функции по  $p_1$  и перехода к безразмерной переменной  $\tilde{q}$  ( $\tilde{q} = q/p$ ), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial t} = & -mA^2 p^{4s+r+4} \int_0^\infty \tilde{q} d\tilde{q} \int dO \int dO_1 \tilde{W} \cdot \frac{1}{\cos \theta_1} \cdot \left( \frac{\cos \theta + \tilde{q}}{\cos \theta_1} \right)^2 \left\{ \left[ 1 + 2\tilde{q} \cos \theta + q^2 \right]^s \right\} \times \\ & \times \left| \left( \frac{\cos \theta + \tilde{q}}{\cos \theta_1} \right)^2 - 2\tilde{q}(\cos \theta + \tilde{q}) + \tilde{q}^2 \right|^s - \left| \frac{\cos \theta + \tilde{q}}{\cos \theta_1} \right|^{2s} \}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $r$  — размерность вероятности перехода  $W$ ,  $dO_i = \sin \theta_i d\theta_i d\phi_i$ .

Найдем поток частиц  $I_0$  и энергии  $I_1$  в импульсном пространстве, учитывая, что в рассматриваемом случае потоки выражаются через интеграл столкновений согласно (1.3). Для  $W$ , являющейся однородной функцией импульсов степени  $n$ ,  $W = C_1 q^n$ , где  $C_1$  — постоянная величина,  $n$  — любое вещественное число (при этом  $n = r$ ), тогда интеграл столкновений (1.10) легко интегрируется по  $\theta_1, \phi, \phi_1$  и приводится к виду

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} &= \frac{2\pi^2 m C_1 A^2}{s+1} p^{4s+n+4} \left[ J^{(1)} - J^{(2)} \right] \\ J^{(1)} &= \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty d\tilde{q} \tilde{q}^{n+1} \left| 1 + 2\tilde{q}x + \tilde{q}^2 \right|^s |x|^{2s+2}, \\ J^{(2)} &= \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty d\tilde{q} \tilde{q}^{n+1} |x + \tilde{q}|^{2s+2}, \quad x = \cos \theta. \end{aligned}$$

Интеграл  $J^{(2)}$  выражается через бета-функции  $B(x, y)$

$$J^{(2)} = (2s+3)^{-1} \left[ B(2s+4, n+2) - B(-2s-n-5, 2s+4) + B(n+2, -2s-n-5) \right]$$

При вычислении  $J^{(1)}$  удобно вначале проинтегрировать по  $\tilde{q}$  (см., например, [13]), тогда

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= 2^{-(2s+1)/2} \Gamma\left(\frac{1-2s}{2}\right) B(n+2, -n-2s-2) \int_0^1 dx x^{2s+2} (1-x^2)^{(2s+1)/4} \times \\ &\quad \times \left[ P_{n+s+3/2}^{s+1/2}(-x) + P_{n+s+3/2}^{s+1/2}(x) \right], \end{aligned}$$

где  $P_\nu^\mu(x)$  – шаровая функция. Воспользовавшись свойством шаровых функций

$$P_\nu^\mu(-x) = -\frac{\sin(\pi\nu)}{\sin(\pi\mu)} P_\nu^\mu(x) + \frac{\sin(\pi(\nu+\mu))\Gamma(\nu+\mu+1)}{\sin(\pi\mu)\Gamma(\nu-\mu+1)} P_\nu^{-\mu}(x),$$

и вычисляя интегралы по  $\mathcal{X}$ , получаем

$$J^{(1)} = \frac{B(n+2, -n-2s-2)}{2s+3} \left[ \left( 1 - \frac{\sin(\pi(s+n+3/2))}{\sin(\pi(s+1/2))} \right) {}_3F_2\left(\frac{n+2}{2}, -\frac{n+2s+2}{2}, 1; \frac{1-2s}{2}, \frac{2s+5}{2}; 1\right) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(2s+n+3)\Gamma(1/2-s)\Gamma(s+5/2)\Gamma(s+2)\sin(\pi(2s+n+2))}{2^{2s+1}\Gamma(n+2)\Gamma\left(\frac{4s+n+7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2s-n+3}{2}\right)\sin(\pi(s+1/2))} \right],$$

где  ${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z)$  – гипергеометрическая функция. Таким образом, выражение для  $R(s, n)$ , входящее в частное решение для потока  $I_i$  (см. (1.4)), с учетом конкретных формул для  $J^{(1)}$  и  $J^{(2)}$ , имеет вид:

$$R(s, n) = \frac{-4\pi^3 C_1}{(s+1)(2s+3)} \{ [B(2s+4, n+2) - B(-2s-n-5, 2s+4) + B(n+2, -2s-n-5)] - \\ - [B(n+2, -n-2s-2) \left( 1 - \frac{\sin(\pi(s+n+3/2))}{\sin(\pi(s+1/2))} \right) {}_3F_2\left(\frac{n+2}{2}, -\frac{n+2s+2}{2}, 1; \frac{1-2s}{2}, \frac{2s+5}{2}; 1\right) + \\ + \frac{(4s+n+7)(4s+n+9)\pi^2(2s+1)(2s+3)\Gamma(s+2)}{2^{2s+5}\Gamma(-2s)\Gamma\left(\frac{4s+n+11}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2s-n+3}{2}\right)\sin^2(\pi(s+1/2))}] \}.$$

Выше мы рассматривали квадратичный закон дисперсии для частиц, обобщение на произвольный закон дисперсии  $E = p^{\zeta_1} / \alpha_1$  ( $\alpha_1, \zeta_1$  – некоторые константы) не приводит ни к каким принципиальным сложностям, хотя и может привести к более громоздкому выражению для  $R(s, n, \zeta_1)$ . Что же касается показателя степени  $S_i$  у функции распределения частиц, то он для произвольного закона дисперсии определяется выражением

$$S_i = -(n+9+\zeta_1(i-1))/2\zeta_1. \quad (1.11)$$

Получено, что локальным неравновесным функциям распределения частиц (интеграл столкновений для них сходится) отвечают показатели степени  $S$ , которые находятся в интервалах:

$$-\frac{3}{2} < s_0 < -1; -\frac{3}{2} < s_1 < -\frac{5}{4}, \quad (1.12)$$

Индексы  $0(1)$  отвечают  $I_0(I_1) = \text{const}$ .

В соответствии с (1.5) показателям степени из диапазона (1.12) отвечают такие показатели однородности вероятности перехода:

$$-3 < n < -1, \quad I_0 = \text{const}, \quad (1.13)$$

$$-4 < n < -3, \quad I_1 = \text{const}.$$

### 1.3. У с л о в и я ф о р м и р о в а н и я с т а ц и о н а р н ы х н е р а в н о в е с н ы х ф у н к ц и й р а с п р е д е л е н и я ч а с т и ц в к о н е ч н ы х э н е р г е т и ч е с к и х и н т е р в а л а х

В случае кулоновского взаимодействия ( $n = -4$ ), как видно из приведенных неравенств (1.13), интеграл столкновений расходится (известная особенность в  $W$  для малых переданных импульсов). В [8, 11] предположено, а в [9, 12] показано, что эта расходимость устраняется дебаевской экранировкой. Рассмотрим интеграл столкновений (1.10), для вероятности перехода, которая отвечает экранированному кулоновскому потенциалу  $W = 2e^4 / (q^2 + a_1^2)^2$  ( $q$  – переданный импульс,  $a_1$  – дебаевский импульс)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial t} = & -mA^2 p^{4s} \int_0^\infty \tilde{q} d\tilde{q} \int dO \int dO_1 \frac{2e^4}{(\tilde{q}^2 + a^2)^2} \frac{1}{\cos\theta_1} \left( \frac{\cos\theta + \tilde{q}}{\cos\theta_1} \right)^2 \left\{ \left[ |1 + 2\tilde{q}\cos\theta + q^2|^s \right] \times \right. \\ & \left. \times \left| \left( \frac{\cos\theta + \tilde{q}}{\cos\theta_1} \right)^2 - 2\tilde{q}(\cos\theta + \tilde{q}) + \tilde{q}^2 \right|^s - \left| \frac{\cos\theta + \tilde{q}}{\cos\theta_1} \right|^{2s} \right\}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где  $\tilde{q} = q / p$ ,  $a = a_1 / p$ .

Проводя интегрирование по углам  $\theta_1, \varphi, \varphi_1, \theta$ , используя стандартные интегралы [13], преобразуем (1.14) к сумме двух интегралов

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial t} = & \frac{-8\pi^2 m A^2 e^4 p^{4s}}{(s+1) \cdot (2s+3)} \left\{ \int_0^1 \frac{\tilde{q} d\tilde{q}}{(\tilde{q}^2 + a^2)^2} \cdot \right. \\
& \cdot \left[ {}_2F_1\left(-s, 2s+3, 2s+4; -\frac{2\tilde{q}}{1+\tilde{q}^2}\right) + {}_2F_1\left(-s, 2s+3, 2s+4; \frac{2\tilde{q}}{1+\tilde{q}^2}\right) \right] \times \\
& \times (1+\tilde{q}^2)^s - (1+\tilde{q})^{2s+3} - (1-\tilde{q})^{2s+3} \Big] + \\
& + \int_0^1 \frac{\tilde{q}^{-2s-2} d\tilde{q}}{(\tilde{q}^2 a^2 + 1)^2} \left[ \tilde{q}^3 (1+\tilde{q}^2)^s \cdot \right. \\
& \cdot \left[ {}_2F_1\left(-s, 2s+3, 2s+4; -\frac{2\tilde{q}}{1+\tilde{q}^2}\right) + {}_2F_1\left(-s, 2s+3, 2s+4; \frac{2\tilde{q}}{1+\tilde{q}^2}\right) \right] - \\
& \left. \left. - (1+\tilde{q})^{2s+3} + (1-\tilde{q})^{2s+3} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Для получения областей существования степенных функций распределения, соответствующих двум различным асимптотикам вероятности перехода  $\tilde{W}$ , следует рассмотреть интеграл столкновений для двух предельных случаев ( $a \ll 1$ ,  $a \gg 1$ ). Вначале для малых значений  $a$  ( $a \ll 1$ ) найдем зависимость интеграла столкновений (1.15) от  $a$ . Легко увидеть, что основной вклад при этом дает первый интеграл в выражении (1.15), производя разложение подынтегральной функции по степеням  $\tilde{q}$  и почленно интегрируя получившийся ряд, находим выражение для интеграла столкновений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial t} = & \frac{8\pi^2 m e^4 A^2}{(s+1) \cdot (2s+3)} p^{4s} \cdot \\
& \cdot \left\{ \frac{(4s+3) \cdot (4s+5)}{(2s+5)} \left[ \ln a^2 + \frac{(2s+1)(2s+3)(2s+5)\pi^2 \Gamma(s+2)}{2^{2s+5} \Gamma(-2s) \Gamma\left(\frac{2s+7}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4s+7}{2}\right) \sin^2\left(\pi \frac{2s+1}{2}\right)} \right] + K_1(s) a^2 \ln a^2 + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

Вычисляя поток энергии, согласно (1.4), найдем, что поток энергии будет отрицательным и определяться логарифмическим слагаемым только при  $a^2 < 0.005$ . В интервале же  $0.1 > a^2 > 0.005$  направление потока энергии противоположное (положительное) его направлению при больших импульсах.

Таким образом, показано [9, 12], что на участке импульсного пространства  $p \gg a_1$  дебаевская экранировка, во-первых, устраняет кулоновскую расходимость, а, во-вторых, не влияет на показатель степени неравновесной стационарной функции распределения частиц с постоянным

потоком энергии в импульсном пространстве. Показатель степени отвечает асимптотике  $W$  с показателем степени  $n = -4$ . Кроме того, установлено, что на некотором участке импульсного пространства направление потока энергии противоположно (положительно) его направлению для больших импульсов. Причем существует локальное степенное распределение, плотность частиц в котором определяется интенсивностью потока. Консервативность же потока обеспечивается источником и стоком, расположение которых должно быть согласовано с найденным его направлением.

Во многих конкретных физических задачах возникает вопрос о формировании в результате действия в импульсном пространстве источника и стока, степенных распределений частиц в ограниченных энергетических интервалах, которые окружены участками с термодинамически равновесными распределениями частиц. Интеграл электрон-электронных столкновений для твердотельной плазмы вычисляется в приближении квадратичного закона дисперсии. Расходимость, обусловленная кулоновским взаимодействием, устраняется введением, как и выше, матричного элемента, описывающего экранированное кулоновское взаимодействие. Интеграл столкновений Больцмана в случае квантовой статистики (см., например, [3]), можно представить в виде

$$\frac{\partial \eta(\vec{p})}{\partial t} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^6} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p}_3 W(\vec{p}, \vec{p}_1 | \vec{p}_2, \vec{p}_3) \cdot [\eta(\vec{p}_2) \eta(\vec{p}_3) (1 - \eta(\vec{p})) (1 - \eta(\vec{p}_1)) - \\ - \eta(\vec{p}) \eta(\vec{p}_1) (1 - \eta(\vec{p}_2)) (1 - \eta(\vec{p}_3))] \delta(E + E_1 - E_2 - E_3) \cdot \delta(\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3), \quad (1.16)$$

где  $W = (2\pi\hbar)^3 2e^4 / (|\vec{p}_1 - \vec{p}_3|^2 + \alpha_1^2)^2$  – матричный элемент, описывающий экранированное кулоновское взаимодействие;  $\eta(\vec{p}_i)$  – числа заполнения.

Пусть в инерционном интервале (между источником и стоком) функция распределения электронов степенная, а вне его – термодинамически равновесная (фермиевская), т. е.

$$\eta_i = \eta_s(\vec{p}_i), \text{ если } p' \leq |\vec{p}_i| \leq p'' \quad \left( \eta_s = \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} \alpha |I_1|^{1/2} p_i^{2s} \right), \\ \eta_i = \eta_F(\vec{p}_i), \text{ если } p' > |\vec{p}_i|, |\vec{p}_i| > p'' \quad \left( \eta_F = \left[ 1 + \exp \left( \frac{p_i^2 - p_F^2}{2mk_B T} \right) \right]^{-1} \right),$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности,  $I_1$  – поток энергии,  $p_F$  – фермиевский импульс,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура равновесного газа электронов. Интеграл столкновений вычисляется с целью определения ширины инерционного интервала для степенных распределений  $\eta_s$ , поэтому импульс  $p$ , по которому в (1.16) не прово-

дится интегрирование, должен находиться в этом интервале, т. е.  $\eta = \eta_s(p)$ . Ранее было показано, что неравновесная функция распределения может иметь вид  $\eta_s = A_1 p^{2s}$  для металла в той области импульсного пространства, где  $a_1 < p$ , т. е. источник и сток должны быть расположены так, чтобы  $p', p'' > p_F$ . При вычислении (2.16) не будем учитывать тепловое размытие функции распределения Ферми, так как его учет приводит к температурным поправкам, которые в силу условия  $T \ll E_F$  ( $E_F$  – энергия Ферми), несущественны. Поэтому в качестве  $\eta_F$  можно взять единичные функции (ступеньки)

$$\eta_F = \theta(p_F^2 - p_i^2),$$

где единичная функция здесь и далее определяется следующим образом:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Предположим, что во всем инерционном интервале  $\eta_s \ll 1$ . Выражение (2.16) будем вычислять с точностью до логарифмических по  $a_1$  членов, как и в интеграле столкновений Ландау. Это значит, что будет учтено взаимодействие с передачей малого импульса при соударениях. Выше было показано, что для степенных функций распределения в определенном диапазоне изменения импульса, характерном для твердотельной плазмы проводников, существенными оказываются нелогарифмические члены в интеграле столкновений Больцмана, связанные с передачей большого импульса при соударении. Вычисление нелогарифмических членов в данной задаче связано с большими трудностями, поэтому условия, приведенные ниже и полученные при учете только малых передаваемых импульсов будут справедливы для плазмы полупроводников, а для плазмы проводников их можно отнести к более жестким, чем это может быть в действительности. С учетом сделанных замечаний и пояснений интеграл столкновений можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(\vec{p})}{\partial t} = & \frac{2}{(2\pi\hbar)^6} \int_{0 \leq |p_1| \leq p'} d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p}_3 W [\eta_2 \eta_3 \theta(p_1^2 - p_F^2) - \eta_s \eta_1 (1 - \eta_2)(1 - \eta_3)] \times \\ & \times \delta(E + E_1 - E_2 - E_3) \cdot \delta(\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3)^+ \\ & + \frac{2}{(2\pi\hbar)^6} \int_{p' \leq |p_1| \leq p''} d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p}_3 W [\eta_2 \eta_3 - \eta_s \eta_{s1} (1 - \eta_2)(1 - \eta_3)] \times \\ & \times \delta(E + E_1 - E_2 - E_3) \cdot \delta(\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Вначале вычислим второй интеграл в выражении (1.17), проводя преобразования такие же как и при получении (1.10), интегрируя по  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  и подставляя  $W$ , соответствующее экранированному кулоновскому взаимодействию, получим

$$\left(\frac{\partial \eta(p)}{\partial t}\right)_{p'}^{p''} = \int_{0 \leq (x+q)y \leq p''} \frac{q dq}{(q^2 + a^2)^2} \int dx \int dy F(y, x, q) - \int_{0 \leq (x+q)y \leq p'} \frac{q dq}{(q^2 + a^2)^2} \int dx \int dy F(y, x, q), \quad (1.18)$$

где 
$$F(y, x, q) = \frac{16\pi^2 e^4 m A^2 p^{4s}}{(2\pi\hbar)^3} |y| (x+q)^2.$$

$$\cdot \left\{ (1 + 2qx + q^2)^s \left[ y^2 (x+q)^2 - 2qx + q^2 \right]^s - |y|^{2s} |x+q|^{2s} \right\}$$

$$q = \frac{|\vec{p}_1 - \vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|}, \quad x = \cos \theta, \quad y = (\cos \theta_1)^{-1}, \quad \cos \theta = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|}, \quad \cos \theta_1 = \frac{|\vec{p}_1 \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{q}|},$$

$$A = \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} \alpha |I_1|^{1/2}.$$

Чтобы записать пределы интегрирования в (1.18), необходимо найти области существования неравенств  $0 \leq (x+q)y \leq p''$ ,  $0 \leq (x+q)y \leq p'$ , учитывая, что  $p'' > 1$ ,  $p' < 1$ ,  $|x| < 1$ ,  $1 \leq |y| < \infty$ .

Воспользовавшись четностью функции  $F(y, x, q)$  по  $y$  и выполнив замену переменной  $z = y^2(x+q)^2$ , (1.18) можно привести к виду

$$\int_{p'^{-1}}^{p''+1} dq \int_{-1}^{p''-q} dx \int_{(x+q)^2}^{p'^2} dz F_1(z, x, q) - \left(\frac{\partial \eta(p)}{\partial t}\right)_{p'}^{p''} = \int_0^{p''-1} dq \int_{-1}^1 dx \int_{(x+q)^2}^{p'^2} dz F_1(z, x, q) + \int_0^{1-p'} dq \int_{-p'-q}^{p'-q} dx \int_{(x+q)^2}^{p'^2} dz F_1(z, x, q) - \int_{1-p'}^{1+p'} dq \int_{-1}^{p'-q} dx \int_{(x+q)^2}^{p'^2} dz F_1(z, x, q), \quad (1.19)$$

$$\text{где } F_1(z, x, q) = \frac{8\pi^2 e^4 m A^2 p^{4s}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{q}{(q^2 + a^2)^2} \left\{ (1 + 2qx + q^2)^s [z - 2qx + q^2]^s - z^s \right\}.$$

Мы не будем учитывать поведение степенной функции распределения вблизи источника и стока энергии, т. е. при  $p' \approx 1$  и  $p'' \approx 1$ . Поэтому для вычислений с точностью до членов, логарифмических по  $a$ , достаточно взять первый и третий интегралы в (1.19). После интегрирования по  $z$  и  $x$  подынтегральное выражение необходимо разложить по степеням  $q$  и, так как основной вклад вносит  $q \leq a$ , учесть члены вплоть до пропорциональных  $q^3$ .

Интегрирование первого и третьего слагаемых в (1.19) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \eta(p)}{\partial t} \right)_{p'}^{p''} &= \frac{16\pi^2 e^4 m A^2 p^{4s}}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \frac{(4s+5)(4s+3)}{(2s+3)(2s+5)(s+1)} + \frac{s(2s+1)}{3(s+1)} (p''+1)^{s+1} \right. \\ &\cdot {}_3F_2 \left( -s-1, s+\frac{3}{2}, s+1; s+\frac{1}{2}, s; \frac{1}{p''^2+1} \right) \cdot \int_0^{\min(1, p''-1)} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2} + \\ &+ p'^{2s+1} - \frac{2s(-s+1)}{(2s+5)(s+1)} p'^{2s+5} - \frac{s(4s+5)}{(2s+3)(s+1)} p'^{2s+3} - \frac{2s+3}{3} p'^{2s+1} \cdot \\ &\cdot (1+p'^2)^s \cdot {}_3F_2 \left( -s, s+\frac{5}{2}, s+2; s+\frac{3}{2}, s+1; \frac{p'^2}{p''^2+1} \right) \cdot \left. \int_0^{\min(p', 1-p')} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Вычислим первый интеграл в (1.17), используя такие же как и выше преобразования, с последующим интегрированием по формуле

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \prod_{k=1}^n \theta(\phi_k(x)) dx &= F(\beta) \prod_{k=1}^n \theta(\phi_k(\beta)) - F(\alpha) \prod_{k=1}^n \theta(\phi_k(\alpha)) - \\ &- \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{m_l} F(a_i^l) \frac{\phi'_l(a_i^l)}{|\phi'_l(a_i^l)|} \times \\ &\times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^n \theta(\phi_k(a_i^l)) \left[ \theta(\beta - a_i^l) \theta(a_i^l - \alpha) - \theta(a_i^l - \beta) \theta(\alpha - a_i^l) \right] \end{aligned}$$

Выражение для первого интеграла в (1.17) будет

$$\left( \frac{\partial \eta(p)}{\partial t} \right)_0^{p'} = \frac{32\pi^2 e^4 m A p^{2s}}{(2\pi\hbar)^3} p_F^3 \frac{s}{3} \cdot \int_0^{p'} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2}$$

Окончательное выражение для потока энергии в импульсном пространстве, определяющегося через интеграл столкновений согласно (1.3), имеет вид:

$$I_1 = -\frac{32\pi^3 e^4 A^2 p^{4s+5}}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \left\{ \frac{4s+3}{(2s+5)(2s+3)(s+1)} \int_0^{\min(1, p'^{-1})} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2} - \frac{s}{3(s+2)} p'^{2s+1} \times \right. \quad (1.20)$$

$$\left. \times \int_0^{p'} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2} \right\} - \frac{32\pi^3 e^4 A p^{2s+5}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{s}{3(2s+5)} p_F^3 \int_0^{p'} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2}.$$

Из выражения (1.20) можно получить условие, налагаемое на плотность электронов вблизи стока (плотность, определяющая интенсивность источника), при которой поток  $I_1$  постоянный и, следовательно, в инерционном интервале (между источником и стоком) распределение  $\eta_s$  близко к универсальному. Это будет выполнено, если первое слагаемое в (2.20) значительно превышает два других

$$\eta_s(p) \gg p_F^3 \left| \frac{s(2s+3)(s+1)}{3(4s+3)} \right| \int_0^{p''} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2} \left( \int_0^1 \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2} \right)^{-1}.$$

Таким образом, для квантового интеграла столкновений Больцмана найдено явное выражение его как функции импульса  $p$ , показателя степени  $s$ , импульса  $p'$ , который отвечает стоку энергии, импульса  $p''$ , который отвечает источнику энергии. Показано, что при отсутствии частиц вне энергетического интервала, который находится между источником и стоком, в границах инерционного интервала

$$|p'' - p'| \approx (5 \div 6) p_{ch}, \quad p' \approx p_{ch} = 2a_1, \quad (1.21^*)$$

показатель степени  $s$  отличается от универсального не более чем на 10 %.

В [14, 15] рассмотрен более распространенный в твердотельной плазме случай, когда в интервале между источником и стоком энергии в импульсном пространстве функция распределения электронов степенная, а за его пределами – термодинамически равновесная функция Ферми-Дирака. Показано, что стационарное неравновесное распределение электронов близкое к универсальному ( $s = -5/4$  в случае безграничного инерционного интервала), если расположение источника и стока, а также их интенсивности удовлетворяют ниже определенным условиям.

Так, показатель степени  $S$  в распределении  $\eta_s$  ( $\eta_s$  – числа заполнения) будет отличаться от  $-5/4$  меньше, чем на 10 %, если будут соблюдены условия:

$$|p'' - p'| \approx (5 \div 6)p_{ch}, \quad \eta_s(p) \gg 10^{-3}, \quad p' \approx p_{ch} = (2 \div 3)a_1. \quad (1.21^{**})$$

Таким образом, неравновесное универсальное распределение электронов возможно даже при числах заполнения значительно (на один-два порядка) меньших равновесных.

## РАЗДЕЛ 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ С ПОТОКОМ ПО СПЕКТРУ

### 2.1. Численное моделирование формирования функций распределения частиц для уравнений типа Ландау–Фоккера–Планка

Нелинейное кинетическое уравнение Больцмана [3–6] описывает систему многих частиц, взаимодействующих по законам классической механики и является основным уравнением в моделях динамики разреженного газа. В общем виде уравнение для функции распределения частиц  $f_\alpha$ , зависящей от пространственных координат  $\vec{r}$ , скоростей  $\vec{v}$  и времени  $t$  может быть представлено следующим образом:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st} + S_\alpha, \quad (2.1)$$

где  $m_\alpha$  – масса частиц сорта  $\alpha$ ,  $F_\alpha$  – сила, действующая на частицу сорта  $\alpha$ ,  $S_\alpha$  – источники (стоки) частиц и энергии (открытые системы),  $(\partial f_\alpha / \partial t)_{st}$  – интеграл столкновений. Оно является важнейшим уравнением в приложениях для математического описания динамики разреженного газа.

Модели кинетических процессов, обусловленных кулоновскими столкновениями, занимают значительное место в приложениях, связанных с высокотемпературной плазмой как лабораторной, так и магнитосферной, плазмохимией и полупроводниковой плазмой. Быстрые процессы и самосогласованные поля – уравнение Власова. Важность столкновений – уравнение со столкновительным интегралом.

В плазме кулоновские столкновения с рассеянием на малые углы (малый переданный импульс) – более важны, чем столкновения с изменением скорости (импульса) на большие величины. Интеграл столкновений для заряженных частиц впервые был получен Ландау (см., например, [3]) из интеграла столкновений Больцмана с учетом эффекта малости передаваемого при кулоновских столкновениях импульса и эффекта экранирования заряда частицы вне сферы дебаевского радиуса другими частицами. Столкновительный член в уравнении Ландау имеет интегро-дифференциальный характер и симметричную форму, сходную с формой интеграла столкновений Больцмана: вид «приход-уход частиц». Через 20 лет [4] было получено уравнение в форме Фоккера–Планка – это другая форма записи, при этом более употребительная в численных расчетах, связанных с физикой горячей плазмы. Симметричное ядро, содержащееся в интеграле столкновений, требует много компьютерной памяти, или при методах типа Бёрда затрачивается много времени для розыгрыша столкновений.

Еще через 20 лет получена модель уравнения Больцмана – уравнение типа Ландау. Уравнение типа Ландау получено также с учетом рассеяния на малые углы, но для произвольных потенциалов межчастичного взаимодействия [16–21]. Наиболее подходящим объектом для моделирования с помощью интеграла типа Ландау являются газы со степенными потенциалами межчастичного с бесконечным радиусом взаимодействия. Уравнение Ландау–Фоккера–Планка также является базой в моделях, связанных с взаимодействием «волна-частица», которые используют квазилинейную теорию.

### ***2.1.1. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений типа Ландау–Фоккера–Планка***

Наиболее распространенный метод для численного моделирования это (регулярный) метод конечных разностей (методы типа Монте-Карло обладают определенными недостатками для дальнедействующих сил), однако, следует использовать объединенный подход, когда аппроксимируются уравнения, являющиеся описанием реальной динамики и отра-

жаются адекватно физические законы, являющиеся базой физической модели.

Этот путь, основанный на использовании консервативных и полностью консервативных разностных схем, связан с работами А. Н. Тихонова, А. А. Самарского, Ю. П. Попова, А. В. Бобылева, И. Ф. Потапенко, В. А. Чуянова и многих их последователей [16–21].

Этот подход в сочетании с высокой точностью дал возможность получить в ряде случаев асимптотические решения и проверить аналитические подходы и другие методы моделирования.

В пространственно однородном случае интеграл столкновений Больцмана для функции распределения  $f(\vec{v}, t)$  был ранее записан в виде (2.1), где вероятность перехода вследствие столкновения  $W$  определяется дифференциальным сечением рассеяния  $\sigma(u, \mu)$ , являющимся функцией относительной скорости  $u > 0$  и параметра  $\mu = \cos \theta$  (где  $0 \leq \theta \leq \pi$  – угол рассеяния). Построение сечения рассеяния  $\sigma(u, \mu)$  для данного потенциала взаимодействия  $U(r)$  – известная задача классической механики (см., например, [18–21]).

Интеграл столкновений в форме Ландау для частиц одного сорта с зарядом  $e$  в пространственно однородном случае был приведен ранее (см. (1.7.)) и имеет вид:

$$\frac{1}{\Gamma} \left( \frac{\partial f(\vec{v})}{\partial t} \right)_{st,L} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ \int d\vec{w} U_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial v_j} - \frac{\partial}{\partial w_j} \right) f(\vec{v}) f(\vec{w}) \right\}, \quad (2.2)$$

$$U_{ij} = \frac{u^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{u^3},$$

где  $\Gamma = 2\pi e^4 \Lambda / m^2$ , симметричное ядро  $U_{ij}$  является функцией относительной скорости частиц  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$  и  $\Lambda$  – так называемый, кулоновский логарифм.

Грубым условием применимости уравнения (2.2) служит неравенство  $e^2 n^{1/3} \ll T$ , означающее, что средняя энергия кулоновского взаимодействия мала по сравнению со средней кинетической энергией ( $n$  – плотность частиц,  $T$  – температура, выраженная в энергетических единицах). Через 20 лет такой же интеграл столкновений был получен в работе [4] из несколько других стартовых предположений о случайном блуждании пробной частицы. Этот оператор имеет форму записи в виде уравнения Фоккера-Планка и получил более широкое применение в приложениях, относящихся к численным расчетам [16–21]. Для многокомпонентной плазмы он имеет вид:

$$\frac{1}{\Gamma_\alpha} \left( \frac{\partial f_\alpha(v)}{\partial t} \right)_{st} = - \frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ f_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial v_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_j} \left[ f_\alpha \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial v_i \partial v_j} \right] \right\}, \quad (2.3)$$

где функции

$$h_\alpha = \sum_\beta K_{\alpha\beta} \left( 1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta} \right) \int d\bar{w} f_\beta(\bar{w}, t) |\vec{v} - \vec{w}|^{-1}, \quad g_\alpha = \sum_\beta K_{\alpha\beta} \int d\bar{w} f_\beta(\bar{w}, t) |\vec{v} - \vec{w}|,$$

– потенциалы Розенблюта – Трубникова [4]. Здесь  $\Gamma_\alpha = 4\pi e_\alpha^4 / m_\alpha^2$ ,  $K_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta} e_\beta^2 / e_\alpha^2$ .

Симметричная форма уравнения, полученная Ландау ближе по характеру к оператору столкновений Больцмана. Яснее физический инвариантный смысл законов сохранения. Однако она содержит симметричное ядро  $U_{ij}$ , требующее при численной реализации большой объем компьютерной памяти, даже для двумерного случая. В частности, поэтому форма Фоккера–Планка более употребительна в численных расчетах, она имеет свои преимущества – явное выделение трения и диффузии, что облегчает иногда аналитический анализ и расстановку приоритетов – какой из процессов в рассматриваемой ситуации более важен.

Вообще это уравнение (2.3) можно использовать и для других потенциалов взаимодействия частиц  $U(r)$ , если только выполнено неравенство  $U \ll T$ , где  $U$  – характерное значение потенциала взаимодействия. В общем случае постоянная  $\Gamma$  определяется формулой

$$\Gamma = \frac{8\pi^5}{m^2} \int dk k^3 U_k^2, \quad U_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r} U(r) e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

откуда видно, что эта постоянная конечна лишь для достаточно хороших функций  $U(r)$ . В частности, для кулоновского поля  $U(r) = e^2 / r$  первый интеграл расходится логарифмически и его приходится искусственно обрезать, заменяя интегралом от  $k_{\min} > 0$  до  $k_{\max} < \infty$ . Тогда  $\Lambda = \ln(k_{\max} / k_{\min})$ . Обычно в качестве  $k_{\min}$  выбирается величина, обратная дебаевскому радиусу  $r_D$ , где  $r_D^2 = T / 4\pi e^2 n$ , а в качестве  $k_{\max}$  – величина, обратная минимальному расстоянию  $r_{\min} = e^2 / T$ , на которое могут сблизиться две частицы, имеющие в системе центра масс энергию  $T$ . Отсюда получаем формулу для кулоновского логарифма  $\Lambda = \ln \frac{T^{3/2}}{\sqrt{4\pi n e^3}}$ . Сравнивая с условием применимости уравнения,

заключаем, что для кулоновских систем, к описанию которых применимо уравнение Ландау, аргумент логарифма должен быть достаточно большим. В практически интересных случаях горячей газовой и полупроводниковой плазмы  $\Lambda = 6-20$ , то есть условием применимости уравнения Ландау может служить более сильное неравенство  $\Lambda \gg 1$ . При моделировании и в расчетах будет использоваться модельное уравнение Больцмана – для произвольных потенциалов взаимодействия, введенное в [17–21] – уравнение типа Ландау.

Физическая идея, лежащая в основе конструирования модельного оператора заключается в следующем. Дифференциальное сечение рассеяния  $\sigma(u, \cos \theta)$ , определяющееся законом взаимодействия частиц, заменяется модельным  $\sigma(u, \cos \theta) = 0$  для  $\theta > \theta_0$ , где  $\theta_0 \ll 1$  означает рассеяние на малые углы. Так как наиболее важными макроскопическими характеристиками газа являются первые моменты функции распределения, то задача состоит в том, чтобы подогнать новое сечение рассеяния  $\sigma(u, \cos \theta)$  для получения совпадения основных макроскопических характеристик реального и модельного газов. Решение этой задачи позволяет использовать вместо интеграла столкновений Больцмана упрощенный столкновительный интеграл типа Ландау–Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \bar{I}[f, f] = \frac{1}{8} \left\{ \int d\vec{w} u \sigma(u) \cdot (u^2 \delta_{ij} - u_i u_j) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial v_j} - \frac{\partial}{\partial v_i} \right) f(\vec{v}) f(\vec{w}) \right\}, \quad (2.4)$$

$$\text{где } \sigma(u) = \int d\mu d\varphi \tilde{\sigma}(u, \mu) \cdot (1 - \mu) = \frac{1}{2} \int d\mu d\varphi \sigma(u, \mu) \cdot (1 - \mu^2).$$

Моменты точного интеграла (2.1) с таковыми для модельного (2.4) совпадают как до третьего тензорного момента, так и вплоть до четвертого скалярного момента безотносительно к форме потенциала взаимодействия, то есть равенство для моментов справедливо для функций

$$\phi(\vec{v}) = \{v_i v_k, v_i v_k v_l, i, k, l = 1, 2, 3; v^4\}.$$

Выполняются законы сохранения числа частиц, энергии и Н-теорема Больцмана. Модельный интеграл столкновений даёт корректное описание уравнений для двадцатимоментного приближения Грэда. Наконец, точное решение уравнения типа Ландау для максвелловских молекул есть точное решение для уравнения Больцмана [17, 19, 21]. Вставляя «обрезанное» Резерфордское сечение рассеяния  $\sigma(u, \theta) = (e^2 / mu^2)^2 \sin^{-4}(\theta/2) \Theta[\theta - \theta_{\min}]$ , проинтегрированное по угловым переменным  $\varphi, \mu$ , а именно  $\sigma(u) \approx 8\pi (2e^2 / mu^2)^2 \Lambda$  (где  $\Lambda = \ln \theta_{\min}^{-1}$  при  $\theta_{\min} \rightarrow 0$ ) в (2.4), легко

получить хорошо известное классическое уравнение Ландау–Фоккера–Планка для плазмы [19 – 21]. Однако уравнение типа Ландау–Фоккера–Планка содержит оператор диффузионного типа, который ведет к непрерывному сглаживанию разрывов начальных условий, а для оператора Больцмана с межмолекулярными потенциалами с коротким радиусом действия такие разрывы сохраняются, поскольку в течение любого конечного интервала времени существует некоторое количество частиц, не испытавших столкновений. Это различие указывает, что естественной сферой применения модельного уравнения (2.4) являются газы с потенциалами бесконечного радиуса действия, поскольку для таких потенциалов само уравнение Больцмана обладает некоторыми сглаживающими свойствами. Поэтому основным объектом исследования являются газы с дальнедействующими потенциалами взаимодействия степенного вида  $U \sim \alpha/r^\beta$ ,  $1 < \beta < 4$ . Для рассматриваемой пространственно-однородной задачи справедливы в отсутствие источников и стоков частиц и энергии три закона сохранения: плотности частиц, энергии и импульса

$$n = \int d\vec{v} f(\vec{v}, t) = 1, \quad E = \frac{m}{2n} \int d\vec{v} v^2 f(\vec{v}, t) = \frac{3}{2} k_B T = 1, \quad \vec{V} = \int d\vec{v} \vec{v} f(\vec{v}, t). \quad (2.5)$$

Употребительное и часто используемое упрощение – автоматическое выполнение закона сохранения импульса в силу соответствующих условий физической задачи и соответствующей им симметрии функции распределения. Тогда только два закона сохранения должны выполняться – плотности частиц и энергии.

В отсутствие источников и стоков уравнение (2.4) описывает процесс релаксации начального распределения  $f^0$  к равновесному Максвелловскому распределению, на основе этого же уравнения доказана в [17–19] справедливость Н-теоремы Больцмана, т. е. что функция

$$H_B(t) = \sum_{\alpha} \int d\vec{v} f_{\alpha}(\vec{v}, t) \ln f(\vec{v}, t),$$

всегда удовлетворяет свойству невозрастания во времени, причем минимум функции достигается на Максвелловском распределении. Там же предложены формы записи уравнения, которые позволяют сконструировать полностью консервативную конечно-разностную схему для уравнения Ландау–Фоккера–Планка. Для простоты рассмотрено изотропное уравнение и для  $f(v, t)$ . Обобщение на пространственно неоднородный случай не представляет труда, так как особенности конструирования затрагивают только пространство скоростей. Кинетическое уравнение записывается сразу в дивергентном (отражающем локальный баланс числа частиц) виде, из которого интегрально следует закон сохранения (2.5)

$$\left( \frac{\partial f(v, t)}{\partial t} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \{ U(f(v, t), t) \} \quad (2.6)$$

где оператор  $U(f; t)$  содержит функции, интегралы и производные от функции распределения. Не раскрывая пока конкретный вид оператора, видим, что закон сохранения плотности частиц приводит к

$$\frac{dn}{dt} = 4\pi \frac{d}{dt} \int_0^\infty f v^2 dv = 4\pi U|_0^\infty = 0, \quad (2.7)$$

а закон сохранения энергии в виде

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi \frac{m}{2n} \int_0^\infty f v^4 dv = 4\pi \frac{m}{2n} v^2 U|_0^\infty - 8 \frac{m}{2n} \pi \int_0^\infty U v dv = 0; \quad \int_0^\infty U v dv = 0. \quad (2.8)$$

Удовлетворение подстановок обеспечивается соответствующими граничными условиями. Первое слагаемое в соотношении (2.8) подобно (2.7), а равенство нулю второго слагаемого обеспечивается свойствами симметричной структуры (и граничными условиями) точного уравнения.

Для построения разностной схемы дискретизируются дифференциальные уравнения (2.2)–(2.4) по времени и аппроксимируются производные конечными разностями. Чтобы построить разностную схему, бесконечный интервал по скорости  $(0, \infty)$  заменяется конечным отрезком  $[0, L]$ , который должен быть выбран так, чтобы учесть частицы на хвосте распределения. В расчетной области вводится пространственно-временная сетка

$$\{v_{i+1} = v_i + h_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad v_1 = 0, v_{M+1} = L\}; \\ \{t^{k+1} = t^k + \tau, \quad k = 0, 1, \dots, \quad t^0 = 0\};$$

и определяются сеточные функции  $f_i^k, U_i^k[f]$ . Используются следующие обозначения:  $f_{i+1/2} = 0.5(f_{i+1} + f_i)$ . Интегралы аппроксимированы по формуле трапеции, а производные центральными разностями. Функция в последней точке равна нулю  $f_{M+1} = 0$ . Применяя интегро-интерполяционный метод к уравнению (2.6), получают неявную (или явную) разностную схему

$$\frac{f_i^k - f_i^{k-1}}{\tau} = \frac{1}{v_i^2 h_{i+1/2}} \left[ U_{i+1/2}^k - U_{i-1/2}^k \right]. \quad (2.9)$$

Разностная схема построена на симметричном шаблоне, имеет второй порядок аппроксимации по пространству и первый по времени. Численные аналоги законов сохранения принимают вид

$$n = 4\pi \sum_{i=2}^M h_{i+1/2} v_i^2 f_i, \quad E = \frac{2\pi m}{n} \sum_{i=2}^M h_{i+1/2} v_i^4 f_i. \quad (2.10)$$

Конечно-разностная схема, сконструированная для уравнения в форме (2.7), удовлетворяет численному аналогу закона сохранения плотности частиц. Действительно, умножая обе части уравнения (2.9) на  $v_i^2 h_{i+1/2}$  после суммирования по всем  $i = 2 \dots M + 1$ , ( $v_1 = 0$ ), получается

$$\frac{\Delta n}{4\pi\tau} = \sum_{i=2}^M \frac{f_i^k - f_i^{k-1}}{\tau} v_i^2 h_{i+1/2} = [U_{M+1/2}^k - U_{3/2}^k]. \quad (2.11)$$

Предполагая, что граничные условия таковы, что обеспечивают равенство нулю  $U_{M+1/2}^k$  и  $U_{3/2}^k$ , получается численный аналог закона сохранения (2.7). Аналогично обеспечивается выполнение численных законов сохранения для второго члена в уравнении (2.8), т. е. численный закон сохранения энергии (2.5). В результате алгебраических преобразований из разностного уравнения (2.9) получается следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{n\Delta E}{2\pi m\tau} &= \sum_{i=2}^M \frac{f_i^k - f_i^{k-1}}{\tau} v_i^4 h_{i+1/2} = \\ &= \left[ v_{M+1}^2 U_{M+1/2}^k - v_2^2 U_{3/2}^k - 2 \sum_{i=2}^M U_{i+1/2}^k v_{i+1/2} h_{i+1} \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

При этом было использовано равенство  $v_{k+1}^2 - v_k^2 = 2v_{k+1/2} h_{k+1}$ . Полученное выражение является дискретным аналогом интеграла в точной формуле (2.5). Два первых члена исчезают, благодаря вышеупомянутым граничным условиям. Главная проблема заключается в том, чтобы «занулить» последнее слагаемое:

$$\sum_{i=2}^M U_{i+1/2}^k v_{i+1/2} h_{i+1} = 0. \quad (2.13)$$

Это может быть сделано естественным образом для специальных случаев, описанных ниже. Стоит заметить, что в кинетической теории, в основном, форма локальных законов сохранения не является характеристической формой уравнений. И дискретизация не всегда позволяет те же манипуляции, что и в непрерывном случае. Свойство полной

консервативности для уравнения Ландау–Фоккера–Планка состоит, в частности, в том, что разностное уравнение, записанное в форме закона сохранения плотности, может быть преобразованиями приведено к форме, выражающей закон сохранения энергии. Форма записи используемых уравнений очень важна для конструирования разностных схем, особенно с точки зрения выполнения интегральных законов. Одна из форм кинетического уравнения типа Ландау–Фоккера–Планка, которая обеспечивают выполнение законов сохранения в дискретном случае, условно называемая дважды дивергентной [18–20]

$$U[f] = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} [W(f, t)], \quad (2.14)$$

которая имеет следующую дискретную аппроксимацию:

$$\frac{f_i^k - f_i^{k-1}}{\tau} = \frac{1}{v_i^2 h_{i+1/2}} \left[ \frac{1}{v_{i+1/2}} \frac{W_{i+1} - W_i}{h_{i+1}} - \frac{1}{v_{i-1/2}} \frac{W_i - W_{i-1}}{h_i} \right], \quad i = 2, \dots, M. \quad (2.15)$$

Первый член в (2.12)  $U_{M+1/2}$  пропорционален  $Const \cdot f_{M+1}$ . Если рассматриваемый интервал  $v_{M+1}$  достаточно велик и  $f_{M+1} = 0$ , тогда  $U_{M+1/2} = 0$ . Из самой структуры уравнения (2.4) можно увидеть, что  $W_1 = 0$  по определению и  $W_2 = 0$  из-за симметричной формы уравнения (2.4). Наконец, равенство (2.13) следует:

$$\sum_{i=2}^M U_i [f_{i+1/2}] v_{i+1/2} h_{i+1} = W_{M+1} - W_1 = 0.$$

Эта форма интеграла Ландау–Фоккера–Планка успешно используется для численного моделирования как в одномерном, так и двумерном случаях [18–21]. Если упор нужно сделать на точном сохранении энтропии, то вводятся не сами функции, а их логарифмы и строится нужная конечно-разностная схема [16, 19]. Численное моделирование релаксации функций распределения для интеграла столкновений Ландау–Фоккера–Планка. Рассматривается релаксация начального распределения для газов частиц со степенными потенциалами взаимодействия в случае изотропной функции распределения  $f(\vec{v}, t) = f(|\vec{v}|, t)$ , описываемая уравнением Ландау–Фоккера–Планка в симметричной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{v} \int_0^\infty dw Q(v, w) \left[ w f(w) \frac{\partial f(v)}{\partial v} - v f(v) \frac{\partial f(w)}{\partial w} \right] \right\}, \quad (2.16)$$

где симметричное ядро  $Q(v, w)$

$$Q(v, w) = \frac{\pi}{8} v^3 w^3 \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2) u \sigma(u), \quad u^2 = v^2 + w^2 - 2vw\mu.$$

Можно убедиться, что в отсутствие источников и стоков из (2.16) следуют законы сохранения плотности частиц и энергии

$$n = 4\pi \int_0^\infty dv v^2 f(v, t) = \text{const}, \quad T = \frac{4\pi m}{3n} \int_0^\infty dv v^4 f(v, t) = \text{const}, \quad t \geq 0.$$

Единственным равновесным решением является распределение Максвелла. Исследование формирования хвостов функции распределения частиц, кроме академического интереса, может быть полезно в задачах, связанных с взаимодействием «волна–частица», ускорением электронов полем и образованием хвостов убегающих электронов, термоядерного синтеза (электрон-циклотронный нагрев, нижнегибридный резонанс, ядерные реакции на хвостах и так далее), для кулоновского потенциала было изучено в [17–21]. Равновесное решение имеет вид:

$$f_M = \frac{4}{\pi^{1/2}} \left( \frac{3}{2} \right)^{3/2} \cdot \exp \left( -\frac{3}{2} v^2 \right), \quad v_{th} = 1.$$

Законы сохранения получим из уравнения (2.16) интегрированием обеих частей уравнения по скорости с соответствующим весом

$$\frac{dn}{dt} = \frac{J}{v} \Big|_0^\infty = 0, \quad \frac{dE}{dt} = (vJ) \Big|_0^\infty - 2 \int_0^\infty J dv = 0.$$

Применяя интегро-дифференциальный метод к уравнению (2.16), получим (неявную) разностную схему:

$$\frac{f_i^k - f_i^{k-1}}{\tau} = \frac{1}{v_i^2 h_{i+1/2}} \left[ \frac{J_{i+1/2}^k}{v_{i+1/2}} - \frac{J_{i-1/2}^k}{v_{i-1/2}} \right], \quad (2.17)$$

причем  $i = 2, \dots, M$ . Схема записана в виде локального закона сохранения числа частиц, а аппроксимация функции  $J_i$  должна обеспечить выполнение закона сохранения энергии. Заменяем верхний предел интегрирования в (2.16) значением скорости в последней точке.

Интегралы аппроксимируем по формуле трапеции, а производные – центральными разностями, получим

$$J_{i+1/2}^k = \sum_{m=1}^M Q_{i+1/2, m+1/2} h_{m+1} \left( \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{h_{i+1}} \frac{f_m^\kappa v_m + f_{m+1}^\kappa v_{m+1}}{2} - \frac{f_{m+1}^\kappa - f_m^\kappa}{h_{m+1}} \frac{f_i^k v_i + f_{i+1}^k v_{i+1}}{2} \right),$$

где  $Q_{i+1/2, m+1/2} = Q_{m+1/2, i+1/2}$ . Плотность частиц записывается как

$$n = \sum_{i=1}^{M-1} \frac{f_i v_i^2 + f_{i+1} v_{i+1}^2}{2} h_{i+1} = \sum_{i=1}^{M-1} \frac{f_i v_i^2}{2} h_{i+1} + \sum_{i=2}^M \frac{f_i v_i^2}{2} h_i = \sum_{i=2}^{M-1} \frac{f_i v_i^2}{2} (h_{i+1} + h_i),$$

где  $\bar{h}_i = (h_{i+1} + h_i) / 2$ , поскольку считаем, что  $f_{M+1} = 0$  и  $v_1 = 0$ . Таким образом, первая точка не входит в разностное уравнение. Вычислим с помощью разностного уравнения (2.17) изменение числа частиц на шаге по времени, суммируя обе части уравнения с соответствующим весом

$$\Delta n = \sum_{i=2}^{M-1} \bar{h}_i v_i^2 (f_i^k - f_i^{k-1}) = \tau \left[ \frac{J_{M+1/2}^k}{v_{M+1/2}} - \frac{J_{3/2}^k}{v_{3/2}} \right].$$

Будем считать, что  $J_{M+1/2} = 0$ , так как на хвосте  $f_M = 0$  и формально положим  $J_{3/2} = 0$  (ниже разберемся, что это означает), тогда  $\Delta n = 0$ . Изменение энергии равно

$$\Delta E = \sum_{i=2}^{M-1} \bar{h}_i v_i^4 (f_i^k - f_i^{k-1}) = \tau \left[ \frac{v_{M+1}^2}{v_{M+1/2}} J_{M+1/2} - \frac{v_2^2}{v_{3/2}} J_{3/2} - 2 \sum_{i=2}^{M-1} h_{i+1} J_{i+1/2} \right].$$

Если учесть, что закон сохранения числа частиц выполнен и справедливо следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^{M-1} h_{i+1} J_{i+1/2} = 0,$$

то  $\Delta E \approx 0$ . Разностное уравнение (2.17) в точке  $i = 2$  записывается следующим образом:

$$\frac{f_i^k - f_i^{k-1}}{\tau} = \frac{1}{v_i^2 h_{i+1/2}} \left[ \frac{J_{i+1/2}^k}{v_{i+1/2}} \right], \quad (2.17^*)$$

где  $i = 2$ .

Необходимо знать граничное условие для функции распределения в граничной точке  $i = 1$ , которое мы получим из условия  $J_{3/2} = 0$ . Для численного решения схема преобразуется в систему нелинейных разностных уравнений, которые решаются на каждом шаге по времени и, соответственно, на каждой итерации методом прогонки. Приведем схему к форме удобной для численных расчетов. Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Sigma_{i+1} &= \sum_{m=1}^{M-1} h_{m+1} Q_{i+1/2, m+1/2} (v_m f_m + v_{m+1} f_{m+1}), \quad \Xi_{i+1} = \sum_{m=1}^{M-1} Q_{i+1/2, m+1/2} (f_{m+1} - f_m), \\ A_i &= \frac{1}{v_{i-1/2} h_i} (\Sigma_i - v_i h_i \Xi_i), \quad B_i = \frac{1}{v_{i-1/2} h_i} (\Sigma_i + v_i h_i \Xi_i), \\ \alpha_i &= \frac{\tau}{v_i^2 h_i} A_{i+1}, \quad \beta_i = \frac{\tau}{v_i^2 h_i} (A_i + B_{i+1}), \quad \gamma_i = \frac{\tau}{v_i^2 h_i} B_i, \quad \psi_i = -f_i^{k-1},\end{aligned}$$

где  $i = 2, \dots, M-1$ .

Тогда система разностных уравнений записывается как

$$\alpha_i f_{i+1} - (1 + \beta_i) f_i + \gamma_i f_{i-1} = \psi_i, \quad (2.18)$$

причем  $i = 2, \dots, M-1$ , а в первом разностном уравнении

$$\alpha_2 = \frac{\tau}{v_2^2 h_i} A_3, \quad \beta_2 = \frac{\tau}{v_2^2 h_i} (B_3), \quad \gamma_2 = 0.$$

Из равенства  $J_{3/2} = 0$  следует, что функции в начальных точках связаны между собой следующим соотношением:

$$f_1 = f_2 \left( 1 - v_2^2 \frac{\Xi_2}{\Sigma_2} \right) \quad (2.19)$$

в любой момент времени. Если аппроксимировать граничное условие второго рода (равенство нулю производной), исходя из постановки точной задачи с первым или со вторым порядком аппроксимации можно не получить закон сохранения. Что означает аппроксимация, полученная формально из требования выполнения разностного аналога закона сохранения? Такое граничное условие, возникшее формально, оказывается вполне разумным. Рассмотрим, например, заряженные

частицы, и ядро  $Q(v, w)$ , соответствующее кулоновскому взаимодействию, для определенности. Предположим, что имеем функцию квазимаксвелловского вида

$$f_i^M = C \exp(-v_i^2 / v_{th}^2),$$

когда, оценивая выражение (2.17\*) и пренебрегая членами порядка  $O(h^3)$ , получим  $f_1^M = f_2^M (1 + v_2^2 / v_{th}^2)$ . Заметим лишь, что изначально, казалось бы формальное требование полной консервативности, приводит к более естественной аппроксимации точных условий при последующем анализе исходных точных данных. Ниже возвратимся еще к обсуждению этого вопроса при построении схемы для уравнения Ландау–Фоккера–Планка. Поскольку схемы выбраны неявными, то шаг по времени  $\tau$  определяется требуемой точностью расчета и характером распределения. Схема немонотонна и может быть сделана монотонной, но тогда придется пожертвовать вторым порядком аппроксимации по пространству.

Поскольку для устойчивости и физической осмысленности функция распределения должна быть неотрицательной, то коэффициенты разностного уравнения (2.18) должны удовлетворять условиям  $\alpha, \gamma > 0$ ,  $(1 + \beta) > 0$ , для чего  $h_i = v_i - v_{i-1}$ ,  $h_i < \Sigma_i / n_i v_i$ . Поскольку уравнение Ландау–Фоккера–Планка параболического типа, а на хвосте  $v \rightarrow \infty$  вырождается в почти гиперболический тип, то для учета экспоненциально быстрого спада функций для обеспечения точности шаг следует даже уменьшать. Грубая оценка для шага по скорости, которая в конкретных задачах может быть завышена или занижена, следующая  $h < v_{th}^2 / v_L$ .

### **2.1.2. Релаксация функции распределения, сравнение результатов численного моделирования с аналитическими выражениями для уравнения Ландау–Фоккера–Планка**

Для степенных потенциалов взаимодействия  $U = a / r^\beta$ , где  $1 < \beta < 4$ , а симметричное ядро  $Q(v, w)$  представляется в виде [19]

$$Q(v, w) = \frac{a(v, w)(v + w)^{n_1+4} + b(v, w)|v - w|^{n_1+4}}{(n_1 + 2)(n_1 + 4)(n_1 + 6)} \quad (2.20)$$

$$\text{где } a(v, w) = \left[ (n_1 + 4)vw - (v^2 + w^2) \right],$$

$$b(v, w) = \left[ (n_1 + 4)vw + (v^2 + w^2) \right], \quad n_1 = (\beta - 4) / \beta.$$

Отрицательные значения  $n_1$  соответствуют мягким потенциалам ( $1 \leq \beta \leq 4$ ). Для заряженных частиц  $\beta = 1$ , ( $n_1 = -3$ ). Для иллюстрации

работы разностной схемы начальное распределение выбирается типа дельта-функции, которая аппроксимируется следующим образом:

$$f(v_i, 0) = \begin{cases} 2/(v_{i+1} - v_{i-1}), & v_i = 1 \\ 0, & v_i \neq 1 \end{cases}$$

Подобная аппроксимация моделирует разностную дельта-функцию и дает равенство единице как плотности, так и энергии частиц. Ограничимся представлением результатов расчетов с этим типом начального распределения. Релаксация начального распределения к равновесному состоянию является классической задачей физики плазмы и является тестовой задачей для любых моделей столкновительной плазмы.

Забегая вперед, скажем, что плотность сохраняется с машинной точностью (случайная ошибка), а энергия зависит от точности итераций  $\delta$ , из-за нелинейности уравнения. Для  $\delta = 10^{-3}$  относительная ошибка в сохранении энергии  $\Delta\mathcal{E}$  равна  $10^{-2}\%$ , а для  $\delta = 10^{-7}$  ошибка равна  $\Delta\mathcal{E} = 10^{-5}\%$ , то есть, несохранение появляется в седьмом знаке после запятой. Такая точность важна, как правило, при исследовании асимптотических задач.

**Численный расчет.** Задача Коши для газов частиц со степенными потенциалами взаимодействия. Рассматриваются финитные начальные условия  $i = 2$ . для  $t = 0$ , начальная функция  $f_0(v) = f(v, 0)$  сосредоточена в тепловой области  $v \approx v_{th}$ . Для больших времен, когда в тепловой области релаксация закончена, уравнение в горячей области  $v \gg v_{th}$  можно рассматривать как линейное

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{n}{8} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v^3 \sigma(v) \left( \frac{T}{m} \frac{\partial f}{\partial v} + vf \right) \right].$$

Учтено, что в горячей области ядро  $Q(v, w)$  сводится к  $Q(v, w) \rightarrow \pi w^3 v^4 \sigma(v) / 6$  при  $v \rightarrow \infty$  и для степенного потенциала взаимодействия используется сечение рассеяния  $\sigma(u, \mu) = g_\beta(\mu) u^{-4/\beta}$  [18, 19]. Подставляя выражение для  $Q(v, w)$  в (2.16), при  $v \gg v_{th}$  получается окончательный вид последнего уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{ng_\beta}{8} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v^{3-4/\beta} \left( \frac{T}{m} \frac{\partial f}{\partial v} + vf \right) \right], \quad (2.21)$$

где использовано обозначение

$$g_\beta = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_\beta(\mu)(1-\mu^2). \quad (2.22)$$

Например, для кулоновского потенциала,  $\beta=1$  формула (2.22) дает  $g_1 = 32\pi e^4 L / m$ . В этом случае из (2.21) следует известное линейное уравнение Ландау-Фоккера-Планка для плазмы. Далее рассматривается уравнение (2.21) для произвольных потенциалов  $U = \alpha / r^\beta$ ,  $1 < \beta < 4$ . Схема уже была представлена выше. Для выбранных переменных законы сохранения плотности частиц и энергии выглядят следующим образом:

$$n = 4\pi \int_0^\infty v^2 dv f(v, t) = 1, \quad E = \frac{2\pi m}{n} \int_0^\infty v^4 dv f(v, t) = 1, \quad t \geq 0 \quad (2.23)$$

Тепловая скорость  $v_{th} = 1$ , и равновесное решение есть

$$f_M(v) = \frac{4}{\pi^{1/2}} \left( \frac{3}{2} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{3}{2} v^2 \right).$$

В начальный момент функция, сосредоточенная в тепловой области, имеет вид дельта-функции  $f(v, 0) = \delta(v-1) / v^2$ . При выборе граничного значения интервала по скоростям горячие частицы оцениваются по распределению Максвелла, что дает  $v_L \approx (7-8)v_{th}$ . Используется построенная в (2.18) разностная схема. Начальная функция аппроксимируется, как было показано выше. При этой аппроксимации число частиц равно единице и кинетическая энергия  $\sim E$ , причем  $E=1$ .

**Результаты моделирования.** Для лучшего (наглядного) представления результатов вводится функция, нормированная на Максвелловское распределение  $g(v, t) = f(v, t) / f_M(v)$ . Рис. 2.1, 2.2, 2.3 демонстрируют графики функции  $g(v, t)$  в области скоростей  $2 < v < 5$  для различных моментов времени и различных параметров  $\beta$ .

Как будет видно из дальнейшего, все фигуры демонстрируют волновой характер распространения  $g(v, t)$  в область высоких скоростей. Для кулоновского взаимодействия ( $\beta=1$ ,  $n_1=-3$ ,  $U = \alpha / r$ ), функция  $g(v, t)$  показана на рис. 2.1. Решение имеет характер волны, распространяющейся со стабильным (жестким) фронтом. Для потенциалов с  $1 < \beta < 2$  релаксация «хвоста» идет медленнее, чем релаксация ядра

распределения. Начиная с  $2 < \beta < 3$  эволюция «хвоста» все менее имеет волновой характер. На рис. 2.2 показано, что фронт волны растет медленно со временем для  $\beta = 2$ ,  $n_1 = -1$ ,  $U = \alpha / r^2$ .

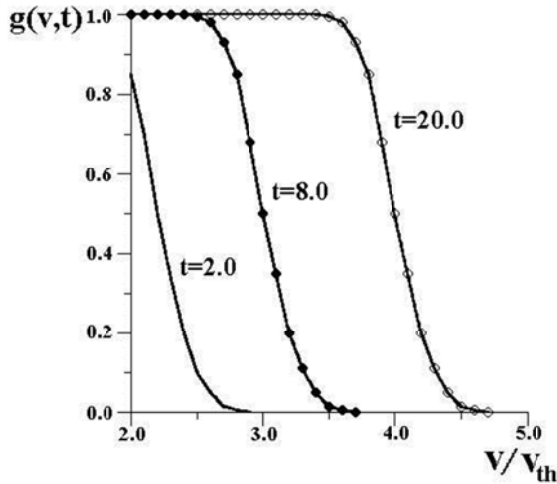


Рис. 2.1. График функции распределения, нормализованной на распределение Максвелла  $g(v, t) = f(v, t) / f_M(v)$  в области скоростей  $2 < v / v_{th} < 5$  для различных моментов времени  $t$  (произвольные единицы).  
Время нормировано на время электрон-электронных столкновений

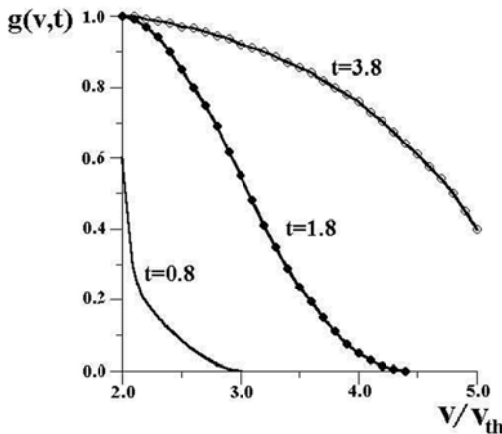


Рис. 2.2. График функции распределения, нормализованной на распределение Максвелла  $g(v, t) = f(v, t) / f_M(v)$  в области скоростей  $2 < v / v_{th} < 5$  для различных моментов времени  $t$  (произвольные единицы).  
Время нормировано на время электрон-электронных столкновений.  
Случай соответствует дипольному взаимодействию  $n_1 = -1, \beta = 2, U = \alpha / r^2$

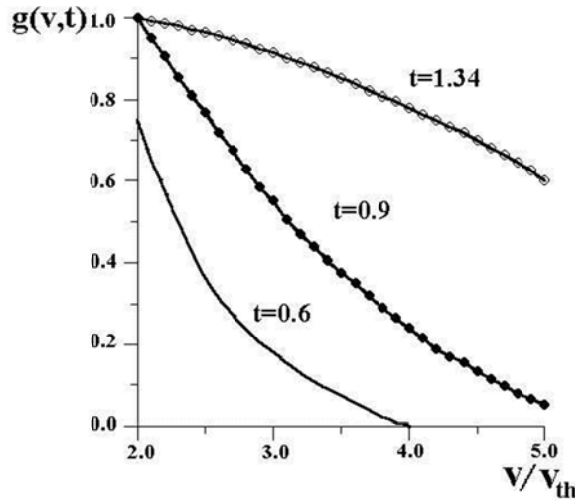


Рис. 2.3. График функции распределения, нормализованной на распределение Максвелла  $g(v,t) = f(v,t) / f_M(v)$  в области скоростей  $2 < v / v_{th} < 5$  для различных моментов времени  $t$  (произвольные единицы). Время нормировано на время электрон-электронных столкновений. Случай соответствует взаимодействию максвелловских молекул  $n_1 = 0, \beta = 4, U = \alpha / r^4$

Для жестких потенциалов ( $\beta > 4$ ) характерное время релаксации хвоста распределения и хвоста практически не различается (времена 1–2). То есть скорость распространения и размытия слабо различимы (рис. 2.3) и релаксация в тепловой и надтепловой области одновременна. Как можно видеть, ширина фронта  $\Delta_f(t)$  существенно зависит от показателя  $\beta$  потенциала взаимодействия. Так,  $\Delta_f(t)$  постоянная величина для  $1 < \beta < 2$ , т.е. в этом случае распространение  $g(v,t)$  имеет характер волны со стабильным профилем, который не размывается во времени  $t > 0$ . Этот факт для  $\beta = 1$  был обнаружен при численном решении в [18, 19] и соответствующее аналитическое решение было построено. Начиная с показателя  $\beta = 2$ , фронт начинает слегка размываться в соответствии со слабой логарифмической зависимостью:  $\Delta_f(t) \propto \sqrt{\ln t}$ . Поведение решения должно сохранять волновой характер. Скорость распространения фронта  $v_f(t)$  больше скорости его размывания.

**Асимптотика и сравнение.** Для удобства анализа (2.21) преобразуется к удобному виду, введением безразмерных переменных для скорости, времени и функции распределения:

$$x = \left[ \frac{v}{v_{th}} \right]^{(4+\beta)/2\beta} X^{(4+\beta)/2\beta}, \quad \tau = t \frac{\rho g_\beta}{8} \frac{4-\beta}{\beta} \left[ \frac{X}{v_{th}} \right]^{(4-\beta)/2\beta}, \quad (2.24)$$

$$f(v, t) = f_M(v) u(x, \tau),$$

где  $X = 2\beta(4-\beta)/(4+\beta)^2$  и  $f_M(v)$  распределение Максвелла. Вставляя (2.24) в (2.21), получим уравнение в безразмерных переменных для функции распределения  $u(x, \tau)$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{x^{1-p}}{p} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad p = 2 \frac{4-\beta}{4+\beta}. \quad (2.25)$$

Тип последнего уравнения дает представление о волновом характере решения. Действительно, стоит заметить, что нам интересна горячая область  $x \gg 1$  и времена  $u(x, \tau) \approx 1$ , когда происходит медленное установление равновесного решения  $u_M(x) = 1$  на хвостах, а  $u(x, \tau) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Условие  $x \gg 1$  учтем новыми переменными  $\tilde{x} = x/x_0$  и  $\tilde{\tau} = \tau/x_0^p$  где  $x_0 \gg 1$  – некоторый характеристический масштаб. Тогда появляется перед старшей производной малый параметр  $x_0^{p-2} \ll 1$  в уравнении (2.25). Отсюда видно, что на хвостах  $x \rightarrow \infty$  уравнение Ландау меняет свой тип и работает как оператор переноса. Имея это в виду, введем формальный параметр  $\varepsilon$  перед второй производной. В результате получим

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{x^{1-p}}{p} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.26)$$

Теперь положим  $\varepsilon \approx 0$ , уравнение (2.26) сворачивается в уравнение первого порядка, и равновесное решение,  $u_M(x)$  просто переносится по характеристикам этого уравнения. Типичное решение имеет форму ступенчатой функции:

$$u(x, \tau) \approx \theta \left[ \tau^{1/p} - x \right], \quad p = 2 \frac{4-\beta}{4+\beta}. \quad (2.27)$$

Приближенное решение (2.27) отражает правильно асимптотический закон, по которому движется фронт волны

$$x_f(\tau) \propto \tau^{1/p},$$

но не описывает структуру фронта.

Чтобы проанализировать структуру фронта, уравнение (2.26) преобразуется с учетом, полученной ранее информации о поведении фронта волны. Вводя новые переменные

$$z = \frac{x - \tau^{1/p}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad u(x, \tau) = \phi(z, \tau),$$

переписывается (3.26) для новой функции  $\phi(z, \tau)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{2}{p} \frac{\tau^{1/p} - 1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[ \left( 1 + \sqrt{\varepsilon} \frac{z}{\tau^{1/p}} \right)^{1-p} - 1 \right] \frac{\partial \phi}{\partial z} \right). \quad (2.28)$$

Полагая  $\varepsilon$  малым, но  $z$  оставляя конечным, при этом условном пределе (3.28) приводится к виду

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \gamma \frac{z}{\tau} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right), \quad \gamma = 2 \frac{1-p}{p}. \quad (2.29)$$

Граничные условия для функции  $\phi(z, \tau)$  следующие:  $\phi \rightarrow 1$ , при  $z \rightarrow -\infty$  (за фронтом) и  $\phi \rightarrow 0$ , при  $z \rightarrow \infty$  (перед фронтом). Функция  $\phi(z, \tau)$  строится как решение начальной задачи для времени  $T > 1$  с соответствующим начальным условием  $\phi(z, 1) = \theta(-z)$  (сравни с функцией (2.27)). Соответствующим изменением переменных уравнение (2.29) приводится к уравнению теплопроводности [19]. После всего получается решение уравнения (2.29) в автомодельной форме:

$$\phi(z, \tau) = \Phi \left[ z \sqrt{\frac{(1-\gamma)}{2(\tau-\tau^\gamma)}} \right], \quad \tau > 1, \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty dy \exp(-y^2). \quad (2.30)$$

Возвращаясь к переменной  $x$  и вспоминая, что  $\varepsilon$  равно 1, находится квазистационарное решение уравнения (2.30)

$$u(x, \tau) \approx \Phi \left[ \frac{(x - \tau^{1/p})}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(1-\gamma)}{(\tau - \tau^\gamma)}} \right], \quad \tau > 1, \quad \gamma = 2 \frac{1-p}{p}. \quad (2.31)$$

Чтобы понять, где решение (2.31) справедливо, сформулируем все предположенное ранее. Кинетическое уравнение рассматривается в  $x \gg 1$  для больших времен (больших, чем время кулоновских столкно-

вений)  $\tau \gg 1$  вблизи от фронта волны  $x_f(\tau) \propto \tau^{1/p}$ ,  $(x - \tau^{1/p}) \ll \tau^{1/p}$ . Последнее неравенство оправдывает переход от уравнения (2.28) к (2.29) при условии  $\varepsilon = 1$  и дает следующие ограничения. Полученное решение (2.31) не применимо, во-первых, в интервале  $0 < x \ll x_f$  и, во-вторых, для частиц вне области  $x > x_f$ . Эти оба случая не интересны с практической точки зрения, поскольку с хорошей точностью можно предположить, что  $u(x, \tau) \approx 1$  в первой области  $x \ll x_f(t)$  и  $u(x, \tau) \approx 0$  во второй области  $x \geq 2x_f$ . Мы можем упростить формулу (2.31), утя условие  $\tau \gg 1$ . Поскольку конечный результат зависит от  $\gamma$ , рассматриваются три случая для выражения под корнем в формуле (2.31). Для  $\gamma < 1$  выражение  $((1-\gamma)(\tau - \tau^\gamma) - 1)$  стремится к  $(1-\gamma)\tau^{-1}$ , для  $\gamma > 1$  стремится к  $(\gamma-1)\tau^{-\gamma}$ . Случай  $\gamma = 1$  пограничен, отличен от других. Заметим, что  $\gamma = 1$  соответствует  $\beta = 2$  – дипольному взаимодействию. Чтобы получить формулу для этого предельного случая, выражение переписывается следующим образом:

$$(1-\gamma) \cdot (\tau - \tau^\gamma)^{-1} = (1-\gamma) \cdot \left( \tau^\gamma \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[(1-\gamma) \ln \tau]^i}{i!} \right)^{-1}.$$

Для  $\gamma = 1$  только первый член остается в последнем выражении, поскольку коэффициенты в сумме исчезают для всех  $m > 2$ . Итак, предполагая условие  $\tau \gg 1$ , получено упрощенное выражение для асимптотического решения  $u(x, \tau)$ , которое является функцией показателя  $\gamma$

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \Phi \left\{ \frac{(x - \tau^{1/p})}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-\gamma}{\tau}} \right\}, & \gamma < 1; \\ u(x, \tau) &= \Phi \left\{ \frac{(x - \tau^{1/p})}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\tau \ln \tau}} \right\}, & \gamma = 1; \\ u(x, \tau) &= \Phi \left\{ \frac{(x - \tau^{1/p})}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\tau}} \right\}, & \gamma > 1. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Наконец, сформулируем результаты, полученные выше для исходных переменных  $v, t$  и для функции распределения  $f_\beta(v, t)$ :

$$f_{\beta}(v, t) \approx n \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{mv^2}{2T} \right] \cdot u \left[ v \sqrt{\frac{m}{T}}, t \frac{\rho g_{\beta}}{8} \left( \frac{m}{T} \right)^{(4-\beta)/2\beta} \right]. \quad (2.33)$$

Постоянная величина  $g_{\beta}$  определена в (2.22). Функция  $u(v, t)$  имеет форму распространяющейся волны, чей фронт движется по закону:

$$v_f(t) = \left( \frac{4-\beta}{\beta} \right)^{\beta/(4-\beta)}.$$

Функция  $u(v, t)$  описывается тремя формулами, зависящими от показателя  $\beta$ :

$$\begin{aligned} u(v, t) &= \Phi \left\{ 2 \frac{\sqrt{\beta(2-\beta)}}{4+\beta} v_f V^{(4+\beta)/2\beta} \right\}, & 1 \leq \beta < 2 \\ u(v, t) &= \Phi \left\{ \frac{1}{3} (\ln v_f)^{-1/2} v_f V^{3/2} \right\}, & \beta = 2 \\ u(v, t) &= \Phi \left\{ \sqrt{\frac{2(\beta-2)}{4-\beta}} \left[ \frac{2\beta(4-\beta)}{4+\beta} \right]^{(4-\beta)/2\beta} v_f^{(4+\beta)/\beta} V^{(4+\beta)/2\beta} \right\}, & 2 < \beta < 4 \end{aligned} \quad (2.34)$$

где  $V = [v - v_f(t)] / v_f(t)$ .

Условия применимости для решения (2.34) имеют форму сильных неравенств:

$$v \gg 1, \quad v_f(t) \gg 1, \quad |v - v_f(t)| \ll v_f(t).$$

Заметим, что  $u(v_f(t), t) = 1/2$ , мы, как обычно, определим ширину фронта

$$\Delta_f(t) = 2 \left| \frac{u(v, t)}{\partial u(v, t) / \partial v} \right|_{v=v_f} = \left| \frac{\partial u(v, t)}{\partial v} \right|_{v=v_f}^{-1}.$$

Следовательно, для случаев, рассмотренных выше, получается

$$\begin{aligned} \Delta_f(t) &= \sqrt{\frac{\pi\beta}{2-\beta}}, & 1 \leq \beta < 2 \\ \Delta_f(t) &= \sqrt{\pi \ln v_f(t)}, & \beta = 2 \\ \Delta_f(t) &= \sqrt{\frac{\pi\beta}{2-\beta} \left[ \frac{2\beta(4-\beta)}{(4+\beta)^2} \right] [v_f(t)]^{2(\beta-2)/\beta}}, & 2 < \beta < 4 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Как можно видеть, ширина фронта  $\Delta_f(t)$  существенно зависит от показателя  $\beta$  потенциала взаимодействия. Таким образом,  $\Delta_f(t)$  постоянная величина для  $1 < \beta < 2$ . Поэтому в этом случае распространение  $u(v, t)$  имеет характер волны со стабильным профилем, который не размывается во времени  $t > 1$ . Этот факт для  $\beta = 1$ , был открыт при численном решении в [19, 20] и соответствующее аналитическое решение построено. Начиная с показателя  $\beta = 2$  фронт начинает потихоньку размываться со слабой логарифмической зависимостью:  $\Delta_f \propto \sqrt{\ln t}$ . Поведение решения должно сохранять волновой характер. Скорость распространения фронта  $v_f(t)$  больше скорости его размывания:

$$\frac{\partial \Delta_f / \partial t}{\partial v_f / \partial t} = \frac{d \Delta_f}{d v_f} = \frac{1}{2 \ln t}.$$

## 2.2. Численное моделирование формирования неравновесных функций распределения частиц для стационарных согласованных источников и стоков

В данном подразделе анализируется формирование квазистационарных неравновесных функций распределения для пространственно однородной и изотропной плазмы, состоящей из одного сорта частиц при наличии локализованных источников (стоков) частиц (энергии) в пространстве скоростей. Существование неравновесных функций распределений предполагает наличие в импульсном пространстве источника и стока частиц или энергии. Источник и сток энергии (частиц) может обеспечиваться ионными пучками, мощным лазерным излучением, током эмиссии, потоками заряженных частиц, выделяемых при реакциях синтеза или деления, и т. п. Исследование основано на уравнении типа Ландау–Фоккера–Планка, которое является моделью уравнения Больцмана для произвольных потенциалов взаимодействия [17–20]. Аналитическое рассмотрение асимптотического поведения решения уравнения типа Ландау–Фоккера–Планка при наличии слабых источников (стоков), локализованных в области высоких энергий, на основе линейного интеграла столкновений проведено И. Ф. Потапенко в [22].

Здесь же сосредоточимся на численном изучении эволюции неравновесных функций распределения и их зависимости от различных входных параметров – интенсивности источников, степени их локализации в пространстве скоростей и т. д. В отдельном подразделе 2.3. приведено сравнение результатов численного моделирования с конкретным экспериментом по облучению полупроводника быстрыми ионами [22, 23]. Для численного моделирования используются полностью консервативные разностные схемы [18–21], о которых шла речь в предыдущем подразделе.

Решаемая здесь задача имеет принципиальную трудность при численной реализации, а именно, нелинейность интеграла столкновений. Как было отмечено, в отсутствии внешних источников должны выполняться два закона сохранения, иначе диссипативные свойства схемы могут исказить результат, внося влияние фиктивных стоков или источников. Поэтому используются разностные схемы, должным образом учитывающие нелинейность моделируемого уравнения [20].

Для численного моделирования используется нелинейный оператор (2.16) с симметричным ядром  $Q(v, w)$  для степенных потенциалов взаимодействия (2.20). Для заряженных частиц  $\beta = 1$ ,  $n_1 = -3$ , и тогда

$$Q(v, w) = (2/3) \cdot w^3, \quad w < v, \quad Q(v, w) = (2/3) \cdot v^3, \quad w > v.$$

Используя обычную процедуру введения безразмерных величин, перейдем к следующим переменным:

$$v' = \frac{v}{v_{th}}; \quad t' = \frac{\tilde{t}}{t_\beta}, \quad t_\beta = \frac{32\pi v_{th}^3}{ng_\beta} v_{th}^{\frac{4\beta-1}{\beta}}; \quad f' = \frac{4\pi v_{th}^3}{n} f; \quad S' = \frac{4\pi v_{th}^3 t_S S}{n_S}. \quad (2.36)$$

Для построения разностной схемы бесконечный интервал в пространстве скоростей заменяется конечным отрезком  $[0, v_{\max}]$ , который выбирается так, чтобы учесть высокоэнергетичные частицы и граничное условие для функции распределения будет  $f(v_{\max}, t) = 0$ . Источники и стоки берутся, главным образом, в виде  $\delta$ -функции:

$$S_{\pm} = I_{\pm} \delta(v - v_{\pm}) / v^2. \quad (2.37)$$

Если интенсивности источника и стока удовлетворяют соотношению  $I_+ = I_- \cdot v_-^2 / v_+^2$ , тогда энергия, которая приходит в систему извне, равна нулю, но плотность частиц в системе убывает (если источник находится при больших скоростях, чем сток), т. е. реализуется в данной

ситуации аналог постоянного потока энергии в импульсном пространстве, но с не сохранением плотности частиц в системе. Так как мы имеем дело с заряженными частицами, то при уменьшении плотности электронов в некоторой области из-за возникшего электрического поля туда начнут поступать тепловые электроны из соседней области. В рамках рассматриваемой однородной по пространству модели это можно учесть введением еще одного источника с такой интенсивностью  $I_{th}$ , чтобы не происходило уменьшение числа частиц, а значит не возникало электрическое поле. Таким образом, можно сформулировать согласованную модель с двумя источниками с интенсивностями  $I_+$ ,  $I_{th}$  и одним стоком с интенсивностью  $I_-$ , в рамках которой не будет происходить изменения энергии и плотности частиц. Для этого интенсивности источников и стоков должны удовлетворять двум соотношениям:

$$I_{th} - I_- + I_+ = 0, \quad I_{th}v_{th}^2 - I_-v_-^2 + I_+v_+^2 = 0, \quad (2.38)$$

откуда получаются интенсивности источников, выраженные через интенсивность стока  $I_-$

$$I_+ = I_- \cdot \left( \frac{v_-^2 - v_{th}^2}{v_+^2 - v_{th}^2} \right), \quad I_{th} = I_- \cdot \left( \frac{v_+^2 - v_-^2}{v_+^2 - v_{th}^2} \right). \quad (2.39)$$

Кроме того, в численных расчетах иногда рассматриваются источники (стоки), распределенные по скоростям экспоненциально

$$S_{\pm} \propto I_{\pm} \exp \left[ -b(v - v_{\pm})^2 \right] \quad (2.40)$$

Такое выражение для источника-стока удобно для исследования зависимости неравновесных функций распределения от формы источника. Следует заметить, что, строго говоря, введение стоков, не зависящих от функции распределения, может быть весьма проблематично. В такой постановке можно создать такие начальные условия, что решение станет отрицательным в области стока после некоторого промежутка времени. Поэтому часто источники (стоки) моделируются слагаемыми, пропорциональными искомой функции распределения, а именно:

$$S_{\pm} = I_{\pm} \frac{\delta(v - v_{\pm})}{v^2} f(v_{\pm}, t). \quad (2.41)$$

Как уже отмечалось выше, в дискретном случае функция  $\delta(v - v_1)$  отлична от нуля лишь при  $v = v_1$ . Начальное распределение выбирается Максвелловским или типа  $\delta$ -функции.

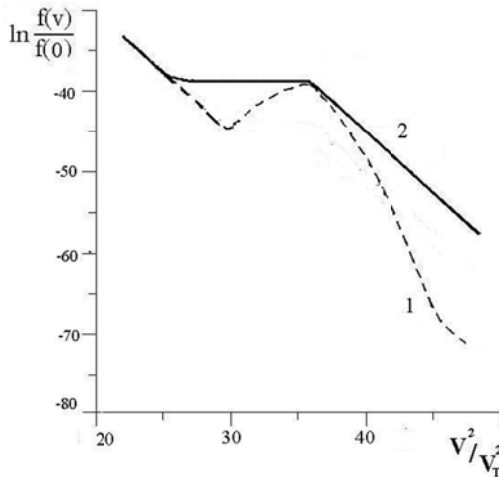
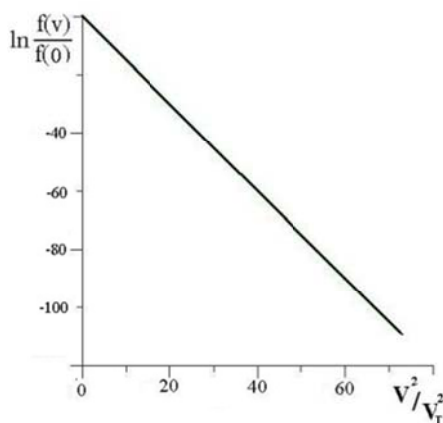


Рис. 2.4. Зависимость логарифма стационарной неравновесной функции распределения, нормированной на значение функции при  $v = 0$ , от квадрата скорости. Расчет сделан для максвелловской начальной функции распределения и функции источника с  $I = 10^{-16}$ ,  $v_- = 5$ ,  $v_+ = 6$ . Сплошная линия дана для решения уравнения Фоккера–Планка в момент  $t_2 = 100$ , пунктиром для момента  $t_1 = 25$

Следует отметить, что результаты практически не зависят от вида начальной функции распределения, за исключением самой начальной стадии. На каждом шаге по времени функция итерируется, число частиц сохраняется с машинной точностью, а энергия сохраняется с точностью до 7–8 знака. Далее обсуждаются основные результаты численных расчетов при наличии в импульсном пространстве потоков энергии либо частиц [22]. В правой части кинетических уравнений (2.16) или (2.3) имеются источник  $S_+$  и сток  $S_-$  для обеспечения потока в импульсном пространстве. Вначале рассмотрим результаты решения, когда источник и сток согласованы с направлением потока в импульсном пространстве, переносимом в результате столкновений. Заметим, что аналитическое рассмотрение уравнений для локализованных источника и стока дает правильное направление потока – от больших скоростей к малым. На рис. 2.4 можно видеть, что в интервале между источником и стоком со временем устанавливается стационарное неравновесное распределение (колмогоровского типа) частиц, соответствующее наличию потока энер-

гии в импульсном пространстве, в то время как вне этого интервала функция распределения является термодинамически равновесной.

Чтобы еще раз убедиться в важности необходимости согласования расположения источника и стока с направлением потока в импульсном пространстве были проведены расчеты с противоположным расположением в пространстве энергий источника и стока. На рис. 2.5 приведен логарифм функции распределения в зависимости от квадрата (обезразмеренной) скорости при неправильном расположении источника и стока.



*Рис. 2.5. Стационарная (равновесная) функция распределения при неправильном расположении источника и стока  $v_+ = 5; v_- = 7$ , полученная при расчете по уравнению Фоккера – Планка, а также по уравнению Ландау для  $\beta = 1; 2; 3$*

Видно, что функция распределения частиц остается термодинамически равновесной при изменении интенсивности потока на несколько порядков – это подтверждает важность согласованного расположения источника и стока.

Функциональная зависимость источника и стока от скорости для варианта, представленного на рис. 2.6 – экспоненциальная.

Источник  $S_+$  расположен в «узкой» области вблизи энергий, соответствующих 7 тепловым скоростям, а сток  $S_-$  – тоже достаточно локализован в области 4 тепловых скоростей. Область локализации источника и стока регулируется значением коэффициента  $\alpha_1$  в экспоненте. В данном случае коэффициент очень велик (100), что обеспечивает их сильную локализацию. Исследуем зависимость функции распределения электронов от степени локализации источника и стока в пространстве энергий. Для этого в следующем расчете (см. рис. 2.7) была уменьшена величина коэффициента в экспоненте на порядок – со 100 на 10.

Из сравнения результатов на рис. 2.6 и рис. 2.7 видно, что характер стационарного неравновесного распределения в основной области между

источником и стоком не зависит от степени локализации источника (стока), что свидетельствует действительно о локальности функции распределения.

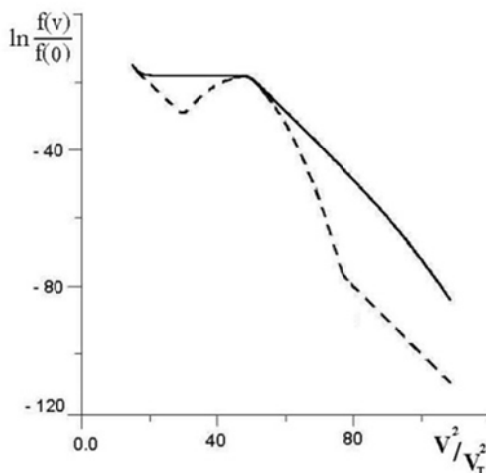


Рис. 2.6. Функция распределения, рассчитанная по уравнению Фоккера – Планка для источника (стока)

$$S_{\pm} \sim I_{\pm} \exp\{-\alpha_1(v - v_{\pm})^2\}, \quad \alpha_1 = 100, \quad v_- = 4, v_+ = 7.$$

Пунктиром обозначен момент  $t = 25$ , сплошной линией – момент  $t = 100$

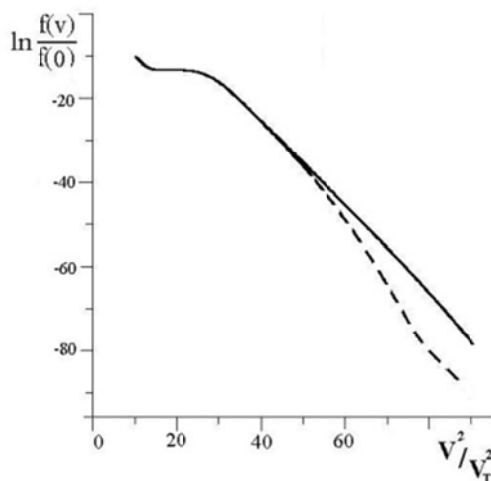


Рис. 2.7. Функция распределения, рассчитанная по уравнению Фоккера – Планка для источника (стока)

$$S_{\pm} \sim I_{\pm} \exp\{-\alpha_1(v - v_{\pm})^2\}, \quad \alpha_1 = 10, \quad v_- = 3, v_+ = 5.$$

Пунктиром обозначен момент  $t = 25$ , сплошной линией – момент  $t = 100$

На рис. 2.8 показана зависимость функций распределения от скорости при различных интенсивностях потока.

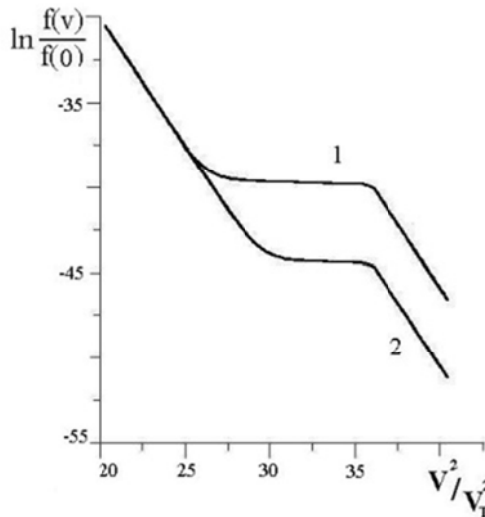


Рис. 2.8. Стационарная функция распределения, полученная из уравнения Ландау для  $\beta = 2$  и для источника (стока) в виде  $\delta$ -функции (2.37) при различных интенсивностях потока  $I_1 = 0.01, I_2 = 0.001$  ( $v_- = 4; v_+ = 6$ )

Установлено, что при малых интенсивностях источника  $I_+$  (стока  $I_-$ ) универсальное неравновесное распределение формируется в окрестности скоростей  $v \leq v_+$ , что обусловлено, во-первых, уменьшением кулоновского сечения рассеяния с ростом скорости ( $\sim v^{-3}$ ), а, во-вторых, с имеющимся всегда потоком энергии и частиц (за счет кулоновской диффузии) в область основной, «фоновой» равновесной функции распределения. Поэтому с ростом интенсивности универсальное неравновесное распределение частиц формируется, занимая все большую область между источником и стоком, что связано со снижением относительной доли потока уходящего (передаваемого) в «фоновую» плазму. Следует отметить, что с повышением интенсивности растет и величина неравновесной функции распределения в соответствии с ее пропорциональностью величине потока (1.6). Некоторые численные значения неравновесной стационарной функции распределения, полученной из решений уравнения Ландау, приведены в табл. 2.1 и табл. 2.2, соответственно. Результаты представляют собой подробное исследование зависимости решения, от меняющейся в широких пределах интенсивности потоков в импульсном пространстве. В качестве функции источника (стока) частиц выбрана функция (2.37), сток находится в точке  $v_- = 4$ , а источник —

в  $v_+ = 8$ ,  $dE = 0$ . Последнее равенство означает, что поток энергии в импульсном пространстве остается постоянным, однако поскольку не использовался дополнительный источник в тепловой области, то плотность частиц не оставалась постоянной.

Таблица 2.1

**Значения неравновесной стационарной функции распределения для различной интенсивности источников (стоков)**

I	f(3.95)	f(7.95)	f(8)
10	0.393E-09	0.417E-10	0.417E-10
1	0.475E-09	0.144E-10	0.144E-10
0.1	0.508E-09	0.189E-11	0.189E-11
0.01	0.517E-09	0.197E-12	0.197E-12
0.001	0.518E-09	0.198E-13	0.198E-13
0.0001	0.519E-09	0.196E-14	0.196E-14

Из табл. 2.1. видно, что значения функции распределения возрастают с увеличением интенсивности потока  $I$ , создаваемого источником и стоком, при низкой интенсивности (до 0.1) значения функции распределения возрастают пропорционально  $I$ , потому что большой вклад дает взаимодействие неравновесных частиц (т. е. частиц из интервала между источником и стоком) с «фоновыми» частицами, которые имеют термодинамически равновесную функцию распределения; при средних интенсивностях (от 0.1 до 20) функция распределения является универсальной во всем интервале между источником и стоком и пропорциональна корню квадратному из интенсивности потока, в соответствии с выражением (1.6); а при больших интенсивностях, функция распределения не является пропорциональной корню квадратному из интенсивности потока, потому что интенсивность стока сама является зависящей от функции распределения в соответствии с выбранным видом стока (2.41).

Рассмотрим формирование неравновесной функции распределения частиц, соответствующей постоянному потоку энергии ( $dE = 0$ ,  $I_+ = I_- v_-^2 / v_+^2$ ) или частиц ( $dN = 0$ ,  $I_+ = I_-$ ). Для сравнения результатов удобно представить на графиках (рис. 2.9) функцию распределения нормированную на значение функции в нуле. Видно, что как для потока частиц, так и для потока энергии формируются медленно спадающие распределения с близкими показателями  $s$ .

Интересным является исследование вида функции распределения при различных законах взаимодействия частиц между собой. Рассматриваются значения показателя степени  $1 \leq \beta \leq 4$ . Напомним, что  $\beta = 1$  соответствует кулоновскому потенциалу взаимодействия,  $\beta = 2$  отвечает дипольному взаимодействию, а  $\beta = 4$  описывает взаимодействие так называемых «максвелловских» молекул.

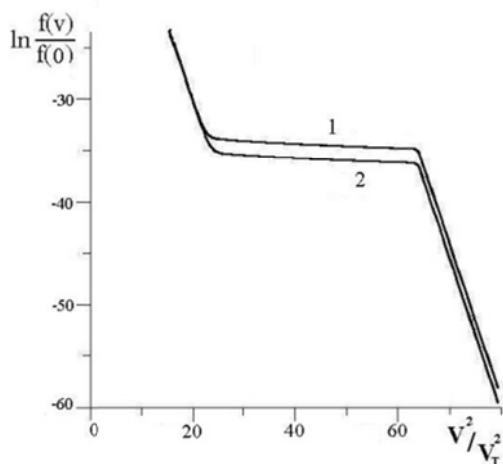


Рис. 2.9. Стационарная функция распределения, полученная из уравнения Ландау для  $\beta = 1$  и для источника (стока) в виде  $\delta$  – функции (2.37);

$I_{+} = 0.01$ ,  $v_{-} = 4$ ;  $v_{+} = 8$ . Кривая 1 соответствует постоянному потоку энергии ( $dE = 0$ ), а нижняя кривая 2 – постоянному потоку частиц ( $dN = 0$ )

Таблица 2.2

**Значения неравновесной стационарной функции распределения для различных законов межчастичного взаимодействия  $\beta$  при  $I = 0.01$**

$\beta$	1	1.5	2	3	4
$f(8)$	$0.197 \cdot 10^{-12}$	$0.123 \cdot 10^{-13}$	$0.266 \cdot 10^{-14}$	$0.771 \cdot 10^{-15}$ Е	$0.384 \cdot 10^{-15}$

В табл. 2.2 представлена зависимость функции распределения  $f(v_{+})$  от показателя межчастичного взаимодействия  $\beta$  при  $I = 0.01$ . Видно, что при одной и той же интенсивности источника и стока значения функции распределения при одном и том же значении скорости уменьшаются по мере увеличения показателя  $\beta$  почти на три порядка. На рис. 2.10 представлены неравновесные функции распределения для постоянного потока энергии интенсивностью  $I = 0.001$  (сток и источник в виде (2.41) в точках  $v_{-} = 4, v_{+} = 8$  соответственно) и показателей  $\beta = 1, 2, 4$ . Кривая 1 соответствует  $\beta = 1$ , кривая 2 –  $\beta = 2$ , кривая 3 –  $\beta = 4$ .

Видно, что для всех этих показателей формируются неравновесные функции распределения с близкими показателями степени  $s$ , что находится в соответствии с [3]. С ростом показателя  $\beta$  абсолютная величина неравновесного участка функции распределения падает. Эти результаты находятся в качественном согласии с вышеприведенными аналитическими результатами.

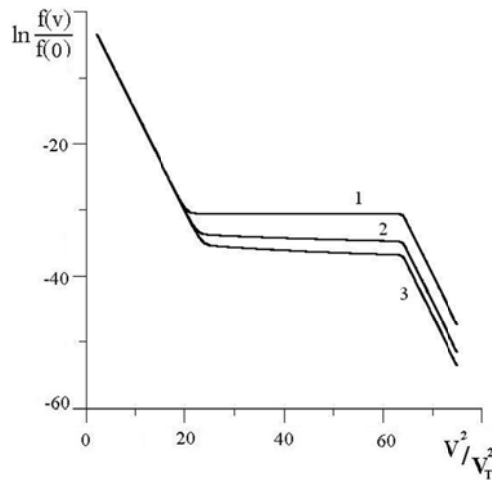


Рис. 2.10. Зависимость стационарных неравновесных функций распределения от квадрата скорости для постоянного потока энергии интенсивностью  $I = 0.01$ , для источника (стока) в виде (2.41) и  $v_- = 4, v_+ = 8$ . Кривые 1, 2, 3 получены при расчете по уравнению Ландау для показателей  $\beta = 1; 2; 4$ , соответственно

Рассмотрим эволюцию функции распределения в рамках изложенной выше самосогласованной, однородной по пространству модели с двумя источниками с интенсивностями  $I_+$ ,  $I_{th}$  и одним стоком с интенсивностью  $I_-$ , в рамках которой не происходит изменение энергии и плотности частиц со временем. При этом интенсивности источников, выраженные через интенсивность стока  $I_-$ , удовлетворяют соотношениям (2.39)

$$I_+ = I_- \cdot \left( \frac{v_-^2 - v_{th}^2}{v_+^2 - v_{th}^2} \right), \quad I_{th} = I_- \cdot \left( \frac{v_+^2 - v_-^2}{v_+^2 - v_{th}^2} \right)$$

На рис. 2.11 приведена временная эволюция в рамках самосогласованной модели неравновесной функции распределения.

Рассмотрение основано на уравнении Ландау для  $\beta = 1$  и для источников, и стока в виде  $\delta$ -функции (2.37), при интенсивности стока  $I_- = -0.001$ , расположенного в точке  $v_- = 2$ , и двух источников – в точках  $v_{1+} = 1$ ,  $v_{2+} = 7$  с соответствующими (приведенными выше) интенсивностями. Видно, что функция распределения вне инерционного интервала является термодинамически равновесной. Причем температура совпадает с первоначальной.

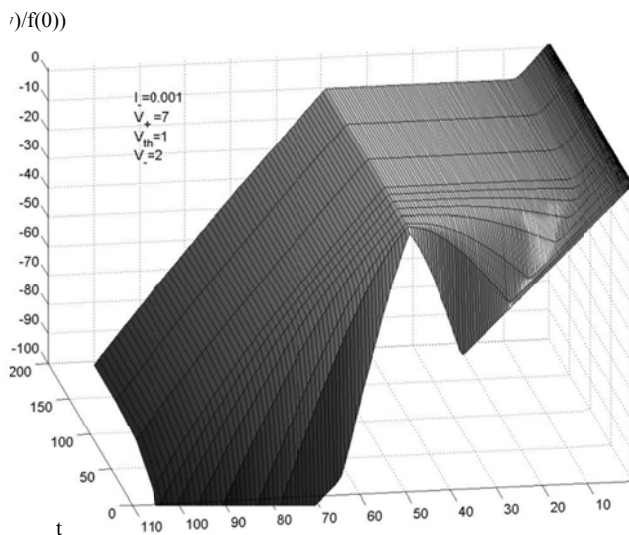


Рис. 2.11. Временная эволюция неравновесной функции распределения, полученной из уравнения Ландау для  $\beta = 1$  и для источников и стока в виде  $\delta$ -функции (2.37);  $I_- = 0.001$ ,  $v_- = 2$ ;  $v_{1+} = 1$ ;  $v_{2+} = 7$

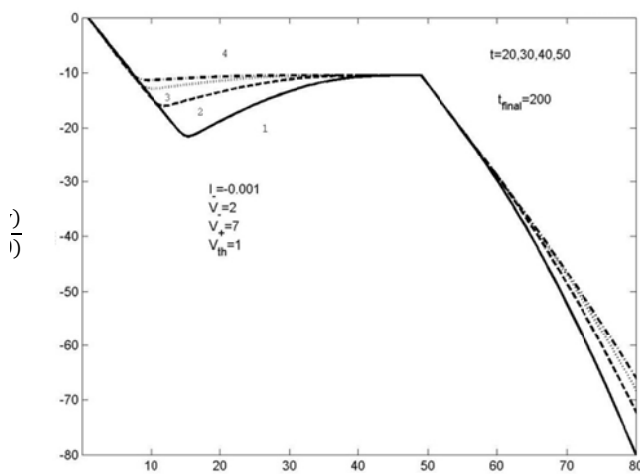


Рис. 2.12. Логарифм неравновесной функции распределения, полученной из уравнения Ландау для  $\beta = 1$  и для источников и стока в виде  $\delta$ -функции (2.37);

$I_- = -0.001$ ,  $v_- = 2$ ;  $v_{1+} = 1$ ;  $v_{2+} = 7$  в различные моменты времени:

$t = 20$  – кривая 1,  $t = 30$  – кривая 2,  $t = 40$  – кривая 3,  $t = 200$  – кривая 4

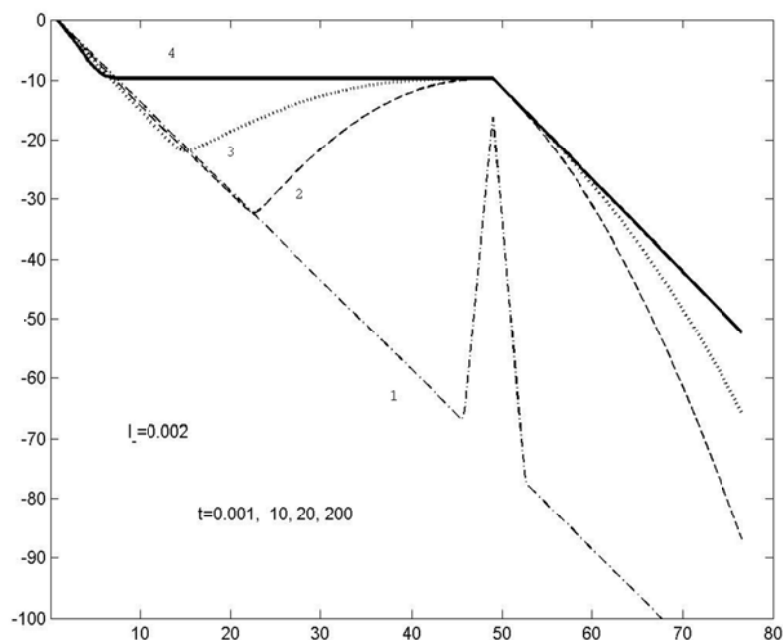


Рис. 2.13. Логарифм неравновесной функции распределения, полученной из уравнения Ландау для  $\beta = 1$  и для источников и стока в виде  $\delta$ -функции (2.37);  $I_- = -0.002$ ,  $v_- = 2$ ;  $v_{1+} = 1$ ;  $v_{2+} = 7$ , в различные моменты времени:  $t = 0.001$  — кривая 1,  $t = 10$  — кривая 2,  $t = 20$  — кривая 3,  $t = 200$  — кривая 4

В инерционном (соответствующем постоянному потоку энергии между источником и стоком) же интервале устанавливается практически неизменяющаяся со скоростью («плато») функция распределения. Наиболее быстро устанавливается функция распределения вблизи источника, формирование же функции распределения в области стока составляет сотни безразмерных времен (см., рис. 2.12 и рис. 2.13). Увеличение интенсивности потока (см., рис. 2.13) приводит к увеличению функции распределения, совершенно не влияя на температуру равновесной функции распределения.

### 2.3. Численное моделирование формирования неравновесных функций распределения частиц для нестационарных несогласованных источников и стоков

В приведенном в предыдущем подразделе численном моделировании рассматривались либо невысокие интенсивности источника – стока, либо самосогласованная модель, в которой источники и стоки, во-первых, локализованы в импульсном пространстве, а, во-вторых, согласованы по интенсивности, т. е. имела место в чистом виде ситуация постоянного потока энергии (частиц) в импульсном пространстве. В этом случае с течением времени в инерционном интервале формировались стационарные неравновесные функции распределения.

Как будет показано ниже, в разделе 3, в реальной экспериментальной (например, облучение твердотельной плазмы потоком быстрых ионов) ситуации мы имеем дело не только с несогласованными по интенсивности источниками и стоками, но даже нестационарными, т. е. источниками, действующими в течение конечного промежутка времени, заметно меньшего, чем время действия стоков. Кроме того, стоки, а иногда и источники, могут быть распределенными почти по всей рассматриваемой области импульсного пространства. Как будет видно из дальнейшего [22], в этом случае функции распределения будут квазистационарными или нестационарными.

Проанализируем эволюцию функции распределения для  $\beta_{1,2,3} = 1; 2; 4$  под действием лишь источников небольшой интенсивности. Формирование неравновесного распределения может быть разделено на три стадии. В течение первого короткого периода система «помнит» начальные условия. Длительность этого периода не очень отличается для разных показателей  $\beta$  и равна приблизительно  $t \sim 1$ . В течение второй стадии происходит формирование основной части распределения. Продолжительность этой стадии существенным образом зависит от местоположения источника  $V_+$  и при небольших интенсивностях не зависит от его интенсивности. Функция распределения принимает форму плато или имеет слабо спадающую зависимость между источником и холодной областью, в зависимости от величины интенсивности источника. Установление квазистационарного распределения заканчивается формированием хвоста распределения. Длительность этой стадии существенно зависит от показателя  $\beta$ . Эволюция основной части распределения в безразмерных единицах заканчивается при  $t \sim 50$ , для  $\beta = 1$ , при  $t \sim 2$ , для  $\beta = 2$ , и  $t \approx 1$ , для  $\beta = 4$ . На рис. 2.14 в логарифмическом

масштабе представлены квазистационарные неравновесные функции в зависимости от квадрата скорости. Вычисления сделаны для  $v_+ = 6$ ,  $\beta = 1$  для интенсивности  $I_+ = 0.001$  источника, задаваемого согласно выражению (2.37), в отсутствие стока. Уплотненная часть квазистационарного неравновесного распределения сформировалась к моменту времени  $t \approx 50$ , при этом плотность частиц  $n = 1.05n_0$  и энергия  $E = 3E_0$  (индексом «0» отмечены начальные значения, т. е. как плотность частиц, так и особенно энергия существенно изменились, потому что нет стока. Кроме того, в отличие от рассмотренной выше согласованной модели, наблюдается нагрев «хвостовой» части функции распределения. В момент времени  $t = 100$  функция распределения перед источником еще более отличается от «плато» и продолжается нагрев «хвостовой» части. Для меньших интенсивностей и источников, расположенных при больших значениях скорости, «плато» на функции распределения наблюдается, т. е. в таких условиях результаты численного расчета иллюстрируют функциональную зависимость, полученную И. Ф. Потапенко аналитически в [22], что хорошо согласуется с асимптотическим решением.

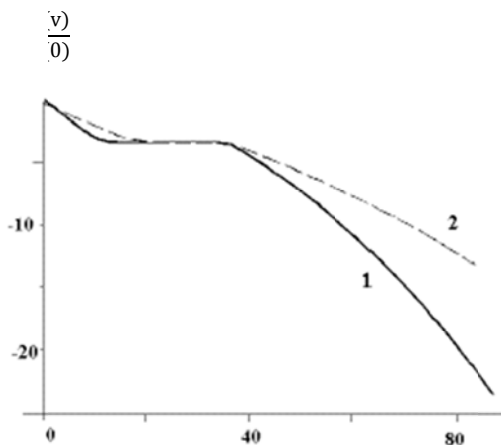


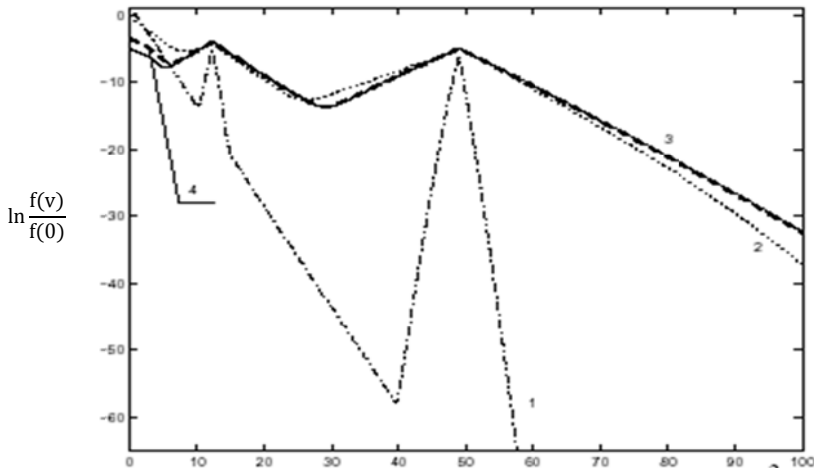
Рис. 2.14. Логарифм нестационарной неравновесной функции распределения, полученной из уравнения Ландау ( $\beta = 1$ ) для источника в виде  $\delta$ -функции

(2.37) с интенсивностью  $I_+ = 0.001$ , помещенного в точку  $v_+ = 6$ , в различные моменты времени:  $t = 50$  – кривая 1,  $t = 100$  – кривая 2

Следует отметить, что даже относительно слабые источники приводят к разительному (на несколько порядков величины) увеличению неравновесной части функции распределения. Естественно, при заметном увеличении интенсивности источников, увеличивается и нагрев плазмы (растет «температура») в ходе эволюции и неравновесные решения

перестают быть «стационарными» и становятся все более и более «квазистационарными».

На рис. 2.15 и рис. 2.16 показана эволюция функции распределения при действии источников (стационарных – рис. 2.15 и действующих в течение ограниченного временного интервала  $\Delta t = 12$  – рис. 2.16), а также стационарного распределенного стока для различных моментов времени.



*Рис. 2.15. Эволюция функции распределения при действии постоянных источников и распределенного стока для различных моментов времени: штрих-пунктирная кривая 1 –  $t = 0.1$ ; штриховая кривая 2 –  $t = 20$ ; точечная кривая 3 –  $t = 75$ ; сплошная кривая 4 –  $t = 100$ . Источники с равными интенсивностями  $I_{1,2} = 0.05$  локализованы при скоростях  $v_{1+} = 3.5$  и  $v_{2+} = 7.0$ , сток пропорционален функции распределения и действует в области  $v_- \geq 2$*

Источники с равными интенсивностями  $I_{1,2} = 0.05$  локализованы при скоростях  $v_{1+} = 3.5$  и  $v_{2+} = 7.0$ , сток пропорционален функции распределения и действует в области  $v_- \geq 2$ . Функция распределения формируется за промежуток времени  $t \approx 10-15$ . На рис. 2.15 функция распределения остается практически стационарной, однако, ее функциональная зависимость отличается от универсальной степенной функции распределения, обсужденной выше при аналитическом рассмотрении. Причина здесь заключается в том, что рассматриваются несогласованные, а что еще более важно распределенные в импульсном пространстве источники и стоки.

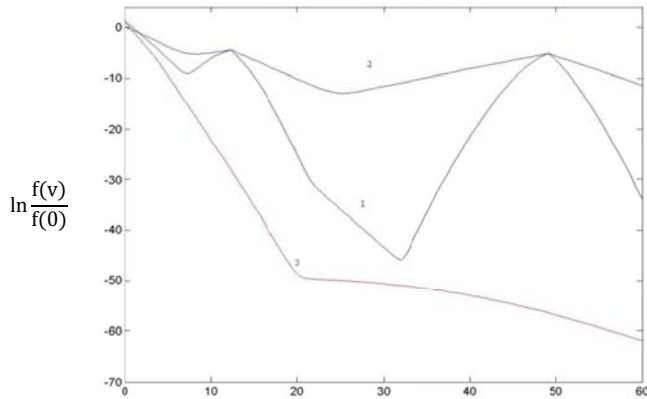


Рис. 2.16. Эволюция функции распределения при действии нестационарных источников и распределенного стока для различных моментов времени: кривая 1 –  $t = 1$ ; кривая 2 –  $t = 12$  соответствует времени выключения источников; кривая 3 –  $t = 100$ . Источники с равными интенсивностями  $I_{1,2} = 0.05$  локализованы при скоростях  $v_{1+} = 3.5$  и  $v_{2+} = 7.0$ , сток пропорционален функции распределения и действует в области  $v_- \geq 2$

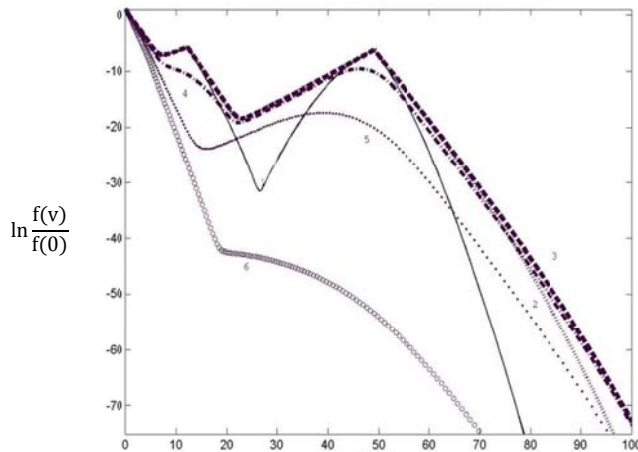


Рис. 2.17. Эволюция функции распределения при действии нестационарных источников и стационарного распределенного стока для различных моментов времени: кривая 1 –  $t = 5$ ; точечная кривая 2 –  $t = 20$ ; штрих-пунктирная кривая 3 –  $t = 30$  соответствует времени выключения источников; штриховая кривая 4 –  $t = 35$ ; точечная кривая 5 –  $t = 50$ ; кривая 6 с полыми кружками –  $t = 100$ . Источники с равными интенсивностями  $I_{1,2} = 0.01$  локализованы при скоростях  $v_{1+} = 3.5$  и  $v_{2+} = 7.0$ , сток пропорционален функции распределения и действует в области  $v_- \geq 2$

Как видно из рис. 2.16 и рис. 2.17, выключение источника приводит к достаточно быстрому спадаанию функции распределения. При малых скоростях функция распределения, несмотря на наличие стока стремится к термодинамически равновесной, а при больших скоростях спад функции распределения достаточно плавный, т. е. «хвостовая» часть неравновесной в течение более продолжительного временного промежутка.

## 2.4. Механизм формирования электронной функции распределения при взаимодействии потоков электромагнитного излучения и быстрых заряженных частиц с твердотельной плазмой

В данном подразделе мы хотим обратить внимание на особенности в проводящих и эмиссионных свойствах, возникающие при действии на полупроводниковую плазму интенсивных потоков частиц или лазерного излучения.

1) Сравним времена релаксации энергии электронов за счет электрон-электронных и электрон-фоонных столкновений. При взаимодействии потоков интенсивного электромагнитного излучения вследствие ионизации образуются электроны с энергиями  $E \geq \hbar\omega$ , где  $\omega$  – частота излучения. При облучении потоками частиц спектр энергии образовавшихся электронов простирается от десятков электрон-вольт до десятков килоэлектрон-вольт. Согласно [24], для электронов, обладающих достаточно большими энергиями  $E$  ( $E \gg k_B T$ ) при высоких температурах  $T > \Theta_D$  ( $\Theta_D$  – температура Дебая) частота электрон-электронных соударений определяется выражением

$$\gamma^{ee}(E, T) = \gamma_0^{ee}(T) \left[ 1 + \left( \frac{E}{k_B T} \right)^2 \right], \quad (2.42)$$

где  $\gamma_0^{ee}(T)$  – классическая высокотемпературная частота межэлектронных соударений, пропорциональная  $T^2$ . Частота же электрон-фоонных столкновений в тех же условиях записывается в виде [25]

$$\gamma^{ef} = \frac{f(\Theta_D)T}{\Theta_D}, \quad (2.43)$$

где  $f(\Theta_D)$  – классическая высокотемпературная частота соударений электрона с фононами при  $T = \Theta_D$ . Для обсуждаемых процессов, выполнены условия необходимые для справедливости формул (2.42) и (2.43), так как  $E > 10$  эВ,  $T = 300$  К,  $\Theta_D = 200 \div 300$  К. Отметим, что величины, обратные частотам соударений, определенным согласно (2.42) и (2.43), в общем случае не совпадают со временами релаксации энергии электронов, так как следует еще учесть число столкновений, необходимых для потери частицей своей энергии  $E$ , т. е. фактор  $\xi = E / E_1$  ( $E_1$  – энергия, теряемая электроном при одном соударении). Согласно данным [25], в рассматриваемом случае

$$\gamma^{ef} \approx \gamma_0^{ee}, \gamma^{ee} \gg \gamma_0^{ee}, \quad (2.44)$$

тогда как фактор  $\xi$  для электрон-электронных соударений может быть порядка единицы, а для электрон-фоонных  $E / k_B \Theta_D > 3 \cdot 10^2$ . Таким образом, в данном случае время релаксации энергии электрона за счет электрон-электронных соударений значительно меньше времени релаксации благодаря электрон-фоонным процессам.

Сравнение характерного времени ионизации и времен релаксации показывает, что электронная функция распределения в нашем случае будет квазистационарной, определяющейся в основном электрон-электронными соударениями. Следовательно, она может быть найдена из условия обращения в нуль интеграла столкновений Больцмана (Ландау–Фоккера–Планка). Из вышеприведенного анализа следует, что для полупроводниковой плазмы в областях энергий  $(E - E_F) > E_F$  может существовать степенное распределение, отвечающее постоянному потоку энергии или частиц в импульсном пространстве. Причем распределение будет формироваться как за счет соударений с электронами, принадлежащими интервалу  $(E - E_F) > E_F$ , так и за счет соударений с электронами основного фона (равновесными).

Выше было показано, что неравновесная функция распределения электронов близка к универсальному распределению, если интенсивность потока в импульсном пространстве, создаваемого источником и стоком достаточно велика.

2) Рассмотрим для примера облучение твердотельной плазмы потоком быстрых ионов (со скоростями большими скоростей атомных электронов). Тогда типичная ситуация на одном треке иона следующая. Пусть энергия иона гелия  $\varepsilon_i \approx 5$  МэВ, потенциал возбуждения  $\Phi_{ex} \approx 100$  эВ, длина пробега иона в веществе  $R_{tr} \approx 10^{-3}$  см. Тогда на длине пробега ион гелия за счет ионизации создает  $10^4 - 10^5$  частиц, радиус трека ионизации

соизмерим с длиной свободного пробега образовавшихся электронов ( $R_e \approx 10^{-6}$  см), созданная одним ионом гелия в треке плотность электронов  $n_{en} \approx 10^{19} - 10^{20}$  см<sup>-3</sup> при равновесной плотности  $n_e \approx 10^{22}$  см<sup>-3</sup>. При таком соотношении плотностей интенсивность источника (стока), как видно из предыдущего рассмотрения, достаточна для формирования неравновесной функции распределения.

Остановимся подробнее на каналах потерь энергии быстрым ионом в твердотельной плазме. Заметим, что даже при параметрах, характерных для инерциального термоядерного синтеза на ионных пучках, во взаимодействии ионных пучков с твердотельной плазмой отсутствует «эффект плотности пучка» (ср. с [32]), то есть зависимость потерь энергии иона от плотности частиц в пучке. Принимая во внимание это обстоятельство, вычисляем потери энергии отдельного иона по формуле Бете–Блоха. Согласно [33] энергия, потерянная быстрой нерелятивистской частицей, передается веществу двумя путями. Часть энергии расходуется на возбуждение коллективных колебаний кильватерной плотности заряда, другая часть передается отдельным электронам, приводя к их ионизации. Первая часть соответствует макроскопическим потерям энергии при дальних столкновениях и малых передачах импульса. Вторая часть соответствует столкновениям с большими переданными импульсами. На возбуждение коллективных колебаний расходуется относительно большая часть потерянной частицей энергии. Энергию  $\Delta\epsilon_k$ , приходящуюся на колебания кильватерной плотности заряда, можно представить в виде [33]

$$\frac{\Delta\epsilon_k}{\Delta\epsilon} = \frac{\ln\left(\frac{v}{10v_0}\right)}{2\ln\left(\frac{v}{v_0}\right)}, \quad (2.45)$$

где  $\Delta\epsilon$  — полная потеря энергии частицей,  $v_0$  — скорость электрона в основном состоянии атома водорода. Из (2.45) видно, что энергия колебаний кильватерной плотности заряда  $\Delta\epsilon_k$  по порядку величины сравнима с полной энергией, передаваемой частицей веществу.

При прохождении быстрой частицы через вещество имеется два равноправных механизма образования медленных электронов — лавинная ионизация и ионизация через плазменные колебания. Основные особенности, вносимые механизмом образования электронов ионизации через плазменные колебания, связаны как со значительным временем жизни колебаний кильватерного заряда, так и с заметной его пространственной протяженностью. Большое время жизни кильватерного заряда приводит к тому, что вторичная ионизация внутри пучка происходит в течение длительного периода после прохождения частицы. Значительное число медленных электронов при каскадной ионизации получается при начале

каскада со вторичного электрона большой энергии. Из-за большого полного пробега в веществе такого электрона при каскадной ионизации основное число медленных электронов образуется на расстояниях порядка пробега электрона. Поэтому ионизация кильватерным потенциалом является основным процессом, определяющим распределение электронов ионизации вблизи оси трека частицы, а каскадная ионизация обуславливает распределение электронов ионизации на расстояниях от оси трека порядка пробега электрона. Так как ионизация полем самой частицы имеет место только в моменты времени, соответствующие пролету частицы, а кильватерные колебания плотности заряда играют роль линейного источника вторичных электронов, существующего долгое время после прохождения заряженной частицы, то последние в полной мере определяют временное поведение картины ионизации.

Как отмечалось выше, несмотря на малость времени пролета ионом трека, характерное время ионизации из-за лавинной ионизации кильватерной плотностью заряда достаточно велико  $\approx 10^{-13}$  с.

При взаимодействии интенсивного электромагнитного излучения с твердотельной плазмой при частоте излучения, удовлетворяющей условию  $\hbar\omega \gg k_B T$ , образуется большое число высокоэнергетичных электронов, которые и формируют в соответствии с вышеприведенным рассмотрением неравновесную стационарную функцию распределения электронов. Следовательно, как при облучении потоками интенсивного электромагнитного излучения, так и потоками быстрых частиц, мы имеем дело с неравновесной функцией распределения электронов, которая формируется в инерционном интервале в результате электрон-электронных столкновений, описываемых интегралами столкновений Больцмана или Ландау–Фоккера–Планка, и существенно отличается от равновесной наличием большого числа высокоэнергетичных электронов.

## РАЗДЕЛ 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ

В предыдущем разделе была показана возможность существования локальных неравновесных изотропных стационарных распределений частиц в столкновительной плазме. Существование таких функций распределения предполагает наличие в импульсном пространстве источника и стока частиц или энергии. Это имеет место при взаимодействии с плотной плазмой потоков заряженных частиц, лазерного или СВЧ – излучения,

протекания в плазме ядерных или термоядерных реакций и т.п. Уже ранее [9–12] обращалось внимание на ряд важных следствий, которые, с одной стороны, вытекают из такого радикального изменения характера распределения частиц по энергиям, а, с другой, имеют большое прикладное значение (влияние на затухание Ландау, критерий Лоусона в задачах управляемого термоядерного синтеза (УТС), астрофизические приложения и др.). Однако газовая плазма – среда крайне неустойчивая, в которой коллективные процессы играют особо важную роль и могут затушевывать действие соударений между частицами. С этой точки зрения более привлекательной представляется твердотельная плазма, в которой можно управлять неравновесностью системы в устойчивом режиме. Здесь источник и сток энергии (частиц) может обеспечиваться ионными пучками, мощным лазерным излучением, током эмиссии, потоками заряженных частиц, выделяемых при реакциях синтеза или деления, и т. п.

В данном подразделе мы хотим обратить внимание на особенности в проводящих и эмиссионных свойствах, возникающие при действии на металлы, полупроводники интенсивных потоков частиц или лазерного излучения. В связи с этим в разделах 4, 5 рассматриваются аномалии в эмиссионных свойствах металлов, которые позволяют создать новые источники тока и преобразователи энергии излучения в электрическую, имеющие существенные преимущества перед термоэмиссионными (см., например, [26]) по коэффициенту полезного действия и по величине тока эмиссии [14].

### **3.1. Экспериментальные исследования неравновесных функций распределения электронов эмиссии, индуцируемой лазерным излучением**

В работе [9] было обращено внимание на возможность аномального увеличения фотопроводимости полупроводника при облучении его светом с частотой  $\omega$ , недостаточной для межзонного перехода  $\hbar\omega < V_g$ , где  $V_g$  – ширина запрещенной зоны, за счет формирования неравновесного распределения электронов и дырок. На основании экспериментальных исследований авторы работы [27] указывают на сильное изменение проводящих свойств полупроводников при облучении их  $\alpha$  – частицами.

Известно [28–29], что при облучении металлических фольг наносекундным импульсом мощного лазерного излучения  $Q = 10^{14}$  эрг/см<sup>2</sup>·с наблюдаются два пика тока эмиссии. Первый, почти синхронный с лазерным импульсом, содержит большое количество «быстрых электронов» (для вольфрама максимальная энергия 14,5 эВ). Второй пик, следующий с задержкой  $\tau \sim 10^{-7} - 10^{-8}$  с относительно первого, содержит электроны

с энергиями, не превышающими 2 эВ. Удовлетворительное объяснение появления быстрых электронов максвелловской функцией распределения невозможно [30], так как экспериментальные результаты [28, 29] соответствовали бы температуре  $T_e = 30000^\circ K$ , на порядок превышающей температуру плавления вольфрама. Что же касается величины тока эмиссии, то хорошо известны два механизма его возникновения: многоквантовый фотоэффект и термоэлектронная эмиссия, которые дают на много порядков меньшие токи эмиссии.

При использовании механизма, основанного на формирующейся в этих условиях неравновесной функции распределения электронов [10, 12] получается приемлемое значение тока эмиссии и его зависимости (быстрый пик) от задерживающего потенциала. Что же касается медленного пика, то, по-видимому, на его начальном участке в ток эмиссии дает вклад не только равновесное распределение (термоэлектронная эмиссия), но и нестационарная неравновесная добавка, связанная с «развалом» степенного распределения.

При очень больших интенсивностях лазерного излучения, когда у поверхности твердого тела образуется плазменный слой, появление высокоэнергетичных электронов может быть объяснено образованием солитона при резонансной накачке [31]. Однако, такой механизм имеет ограниченную область применимости и непригоден для объяснения экспериментальных данных, полученных в экспериментальных работах Нехта [28, 29].

Таким образом, показано, что ряд экспериментальных данных по величине тока эмиссии из металла, индуцированной лазером, и зависимости его от задерживающего потенциала [28, 29] не могут быть объяснены в рамках равновесной функции распределения [30], однако получают удовлетворительное объяснение с помощью механизма [10, 12], опирающегося на наличие неравновесной ситуации.

### **3.2. Экспериментальные исследования неравновесных функций распределения электронов эмиссии, индуцируемой потоками быстрых ионов**

Для описания кинетической электронной эмиссии, индуцированной ионами, используются теории, предложенные в [34] для низких энергий ионов и в [35] для диапазона высоких скоростей. Согласно механизму вторичной эмиссии, предложенному в [35], вторичные электроны образуются вследствие ионизации быстрыми ионами, описываемой теорией Бора-Бете, затем диффундируют к поверхности и выходят в вакуум. Коэффициент вторичной эмиссии  $\Delta_e$  для этого механизма пропорцио-

нален удельным ионизационным потерям и не зависит от работы выхода  $\varphi$ , проводимости и других основных свойств вещества. Заметим, что для термического механизма эмиссии коэффициент  $\Delta_e$  пропорционален квадрату удельных ионизационных потерь и существенным образом (экспоненциально) зависит от работы выхода.

В обзорах и экспериментальных исследованиях [36–64] и цитированной в них литературе доказано, что коэффициент вторичной эмиссии  $\Delta_e$  пропорционален потерям энергии быстрой частицы, т. е. подтвержден механизм, описанный в [35]. Следует отметить, что коэффициент пропорциональности  $k$  в этой зависимости, практически не являясь функцией энергии падающего иона, существенно определяется материалом мишени, изменяясь в несколько раз при переходе от одного материала к другому. До исследований, основанных на неравновесных распределениях частиц, отсутствовало как теоретическое, так и эмпирическое выражение, связывающее значение коэффициента пропорциональности  $k$  с параметрами мишени и энергией бомбардирующего иона.

Проведенное в [54, 64, 65] теоретическое рассмотрение вторичной электронной эмиссии из алюминия, индуцированной протонами и  $\alpha$  – частицами, не позволяет предсказать наблюдающееся в экспериментах значение коэффициента  $k$  и объяснить широкий (особенно на прострел) энергетический спектр вторичных электронов. Отметим, что большинство имеющихся экспериментальных результатов касается эмиссии на отражение. Однако, как показано в [43], энергетический спектр вторичных (на отражение) электронов не универсален при изменении энергии бомбардирующей частицы. При этом изменяется (см. [43, 59]) даже такая грубая характеристика, как отношение коэффициента вторичной эмиссии на прострел к коэффициенту вторичной эмиссии на отражение.

Как нам представляется, выражением для коэффициента вторичной электронной эмиссии  $\Delta_e$ , имеющим наиболее наглядный физический смысл, является формула, предложенная в соответствии с [35] и [48] и использованная в [44]:

$$\Delta_e = k \frac{d\varepsilon}{dx}, \quad k = \frac{PL_e}{\varepsilon_e}, \quad (3.1)$$

где  $d\varepsilon/dx$  – потеря энергии бомбардирующей частицей,  $P$  – вероятность преодоления поверхностного барьера внутренним вторичным электроном,  $L_e$  – глубина слоя, из которого выходят электроны эмиссии,  $\varepsilon_e$  – энергия, затрачиваемая на образование одного внутреннего вторичного электрона, в [48] предлагается брать  $\varepsilon_e$  такой же, как для соответствующего вещества в газовой фазе при нормальных условиях.

Мы полагаем, что коэффициент вторичной эмиссии  $\Delta_e$  должен быть пропорционален потерям энергии на один атом, т. е. зависеть от плотности атомов  $N$  как  $N^{-1/3}$ , и обратно пропорционален потенциалу возбуждения  $\Phi_{ex}$ , учитывающему коллективный характер взаимодействия заряженной частицы с электронной подсистемой вещества. В соответствие с [66–68] формула Штернгласса (3.1) модифицируется следующим образом:

$$\Delta_e = \frac{\zeta Z_{1eff}^2}{\Phi_{ex} N^{1/3}} \left( -\frac{d\varepsilon}{dx} \right)_p \quad (3.2)$$

где  $(-d\varepsilon/dx)_p$  – потери энергии протоном, имеющим скорость, равную скорости бомбардирующего иона;  $Z_{1eff}$  – эффективный заряд иона в мишени;  $\zeta$  – некоторая константа. При этом для  $(-d\varepsilon/dx)_p$  целесообразно использовать выражение, справедливое в диапазоне от нескольких килоэлектрон-вольт до 50 МэВ, приведенное в [69]:

$$\left( -\frac{d\varepsilon}{dx} \right)_p = \frac{ay + by^2}{0,01y^{2,55} + c_1}, \quad (3.3)$$

где  $y$  – скорость ( $\times 10^8$  см/с),  $a$ ,  $b$ ,  $c_1$  – коэффициенты, характеризующие вещество мишени и имеющие довольно четкую периодическую зависимость от  $Z_2$  мишени. Так, коэффициент  $a$  повторяется с периодом, близким к  $Z_2 = 18$ . Коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c_1$  для алюминия, бериллия, графита и никеля [69], которые будут использованы ниже, имеют значения, приведенные в табл. 3.1

Таблица 3.1

**Коэффициенты, характеризующие вещество мишени**

Вещество	$a$	$b$	$c_1$
Al	2,4	0,018	0,36
Be	2,42	0,001	0,37
C	2,92	0,018	0,4
Ni	6,8	0,01	0,77

Энергетическая зависимость коэффициента вторичной эмиссии  $\Delta_e$  исследована достаточно подробно, описание же энергетического распределения эмитируемых электронов представляет достаточно сложную проблему. Результаты экспериментальных исследований энергетического спектра вторичных электронов, возникающих при прохождении протонов

и  $\alpha$ -частиц через тонкие пленки, представлены в работах [36–68, 70–71]. Однако в [70] спектр изучен в узком интервале энергий ( $0 \div 10$  эВ) и лишь указано, что спектр имеет нетермическую природу, а в [43, 44, 68], хотя и проведены измерения в широком интервале энергий вторичных электронов (0–100 эВ), из-за несовершенства методики, заключающейся в использовании несферического анализатора, о виде функции распределения электронов можно судить только по интегральной характеристике, что не вполне удовлетворительно. В [43] доказано, что в широком интервале изменения энергии протонов (20–250 кэВ) энергетический спектр вторичных электронов на прострел является универсальной степенной функцией, тогда как для эмиссии на отражение такая универсальная зависимость отсутствует. Кроме того, показано, что коэффициент вторичной эмиссии на прострел почти вдвое превышает таковой на отражение. Легко видеть, что, изучая энергетический спектр вторичных электронов эмиссии (ВЭЭ) сферическим анализатором для точечного источника ВЭЭ, можно получить вид функции распределения электронов в металле. Так как ток эмиссии определяется выражением

$$I_{em} = B_1 \int_{\varphi + E_F + q_e U}^{E_{max}} E f(E) dE, \quad (3.4)$$

где  $U$  – задерживающий потенциал,  $B_1$  – константа, то производная тока по задерживающему потенциалу пропорциональна функции распределения электронов.

$$\frac{dI_{em}}{dU} = B_2 (\varphi + E_F + q_e U) f(\varphi + E_F + q_e U). \quad (3.5)$$

В случае, когда функция распределения электронов степенная, построение графика зависимости  $dI/dU$  от  $\varphi + E_F + q_e U$  в логарифмических координатах позволяет легко найти значение показателя степени по наклону кривой.

Для проверки теоретических представлений о механизме формирования электронной функции распределения при взаимодействии ионных потоков с твердотельной плазмой, сформулированных в разделах 1 и 2 был проведен анализ экспериментальных исследований энергетического спектра вторичных электронов и зависимости коэффициента вторичной эмиссии на прострел  $\Delta_e$  не только от потерь энергии  $\alpha$ -частиц, протонов в веществе, но и потенциала возбуждения  $\Phi_{ex}$ . Сравнение вольтамперных характеристик для различных мишеней с учетом термоэлектронов позволяет сделать вывод, что механизм вторичной эмиссии не является

термическим, и что вторичные электроны, выбитые из мишени  $\alpha$ -частицами, распределены по закону, отличному от экспоненциального.

### 3.2.1. Исследования кинетической электронной эмиссии из металлов

Перейдем к изложению экспериментальных результатов по исследованию энергетического спектра вторичных электронов с помощью сферического трехсеточного анализатора. Такие измерения позволяют найти показатель степени  $s$  функции распределения электронов по энергии с помощью однократного дифференцирования вольтамперной характеристики, так как в данном случае для области, где функция распределения степенная, имеем

$$\frac{dI}{dU} = B_3 (\varphi + E_F + q_e U)^{s+1}. \quad (3.5^*)$$

где  $B_3$  – константа.

Следовательно, в логарифмическом масштабе зависимость (3.5\*) представляет собой прямую с тангенсом угла наклона, равным  $s+1$ . Экспериментальные точки зависимостей  $\lg(dI/dU)$  от  $\lg(\varphi + E_F + q_e U)$  для алюминиевой и бериллиевой мишеней хорошо укладываются на три прямые, что соответствует различным показателям степени в интервалах  $0 \div 10$  эВ,  $10 \div 40$  эВ,  $40 \div 100$  эВ. При этом показатели степени  $s$  для алюминия и бериллия отличаются лишь в области малых энергий.

С целью дополнительной проверки правильности найденных функциональных зависимостей распределения вторичных электронов по энергиям, для найденных экспериментальным путем функций распределения была рассчитана соответствующая плоскому случаю зависимость тока вторичных электронов от анализирующего напряжения

$$I(U) = \frac{\pi}{2} \sum_{i=k}^3 A_i \left( \frac{2E_i}{m} \right)^{s_i+2} \frac{1}{(s_i+1)(s_i+2)} \cdot \left\{ (s_i+1) \left[ 1 - \Theta(i-k) \left( \frac{E_{i-1}}{E_i} \right)^{s_i+2} \right] + \left( \frac{E_0 + q_e U}{E_i} \right)^{s_i+2} [1 - \Theta(i-k)] - \right. \quad (3.6^*)$$

$$\left. - (s_i+2) \frac{E_0 + q_e U}{E_i} \left[ 1 - \Theta(i-k) \left( \frac{E_{i-1}}{E_i} \right)^{s_i+1} \right] \right\},$$

$$A_i \left( \frac{2E_i}{m} \right)^{s_i} = A_{i+1} \left( \frac{2E_i}{m} \right)^{s_i+1}, \quad (3.6^{**})$$

где  $E_0 = E_F + \phi$  – начальная энергия в распределении,  $E_i$  – граница энергетического интервала с показателем степени  $s_i$ ,  $\Theta(x)$  – тета-функция,  $A_i$  определяется из рекуррентной формулы,  $k$  из неравенства  $E_{k-1} \leq E_0 + q_e U < E_k$ . Сравнение этой зависимости, построенной для алюминиевой мишени, с экспериментальными результатами для плоского анализатора показывает хорошее совпадение расчетной и экспериментальной зависимости в области  $U > 10$  эВ.

Исходя из выражения (3.3) для потерь энергии частицы с учетом значений коэффициентов  $a$ ,  $b$ , и  $c_1$ , можно объяснить отмечавшуюся в [53, 54] для алюминия и никеля зависимость коэффициента вторичной эмиссии  $\Delta_e$  от энергии бомбардирующей частицы  $\mathcal{E}$  вида  $\Delta_e \sim \mathcal{E}^{-0,73}$  в широком энергетическом интервале. Учитывая, что  $\Phi_{ex}(eV) \approx 13.5Z_2$  [74], а в интервале от 1 до 10 МэВ пробег  $\alpha$ -частицы в веществе определяется эмпирической формулой [74, 75]:

$$R_{tr} = 0.174 \cdot 10^{-3} A_m^{1/3} \rho_m^{-1} \mathcal{E}^{3/2}, \quad (3.7)$$

где  $A_m$ ,  $\rho_m$  – атомный вес и плотность вещества соответственно. Для оценок можно приближенно считать

$$\Delta_e \sim Z_{1eff}^2 \frac{\rho_m^{2/3}}{Z_2} V_b^{-1}, \quad (3.8)$$

где  $V_b$  – скорость бомбардирующей частицы. Формулы (3.7) и (3.8) дают правильное соотношение между коэффициентами вторичной эмиссии  $\Delta_e$  для алюминия, бериллия и графита. Высокие же абсолютные значения  $\Delta_e$ , полученные в [66, 68], объясняются существенным вкладом в эмиссию  $\alpha$ -частиц, летящих под углом к нормали пленки, так как для них потери энергии больше, чем для частиц, летящих по нормали.

Для устранения недостатка, имевшего место в работе [68] и заключающегося в усреднении энергетического спектра вторичных электронов по энергии бомбардирующих частиц и углу вылета вторичных электронов, были проведены экспериментальные исследования энергетического спектра вторичных электронов эмиссии, вызываемых бомбардировкой мишени пучком протонов при различных углах вылета электронов для Al, Cu, Be [67, 76]. Изучалась также зависимость коэффициента вторичной эмиссии на прострел не только от потерь энергии протонов с энергией 1 МэВ в веществе, но и от других макроскопических характеристик мишени. Вторичные электроны, выбитые из мишени, анализировались по

энергиям методом задерживающего потенциала с использованием малоапертурного ( $4 \cdot 10^{-4}$  стерадиан) трехсеточного анализатора, устанавливаемого под различными углами ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $75^\circ$ ) к направлению пучка. Коэффициент вторичной эмиссии определялся по отношению полного тока вторичных электронов к току протонов. Эксперименты проводились на мишенях из алюминия толщиной 5,6 мкм, бериллия – 9,7 мкм, меди – 1,2 мкм. Полученные экспериментальные зависимости для  $I_e/I_p$  от  $U$  позволяют найти показатель степени  $S$  функции распределения электронов по энергиям с помощью однократного дифференцирования этих зависимостей, так как в данном случае для области, где функция распределения степенная, имеем:

$$\frac{d}{dU} \left( \frac{I_e}{I_p} \right) = B_4 (\varphi + E_F + q_e U)^{s+1}. \quad (3.9)$$

где  $B_4$  – константа.

Следовательно, в логарифмическом масштабе (3.9) представляет собой прямую с тангенсом угла наклона, равным  $s+1$ . Показано, что экспериментальные точки для этих углов хорошо укладываются на три прямые, соответствующие различным показателям степени в интервалах  $0 \div 10$  эВ,  $10 \div 40$  эВ,  $40 \div 100$  эВ, причем эти показатели степени с хорошей точностью ( $\sim 10\%$ ) совпадают с показателями степени, полученными с помощью сферического анализатора при облучении  $\alpha$ -частицами тех же мишеней (см. выше [66]). Установлено, что показатели степени  $S$  для разных мишеней различаются лишь в области малых энергий  $0 \div 10$  эВ. Наряду с изучением энергетического спектра были получены значения интегральной характеристики – коэффициента вторичной эмиссии  $\Delta_e$  для мишеней из алюминия, меди и бериллия, которые составили, соответственно, 2,5; 1,6; 4,6. Как уже отмечалось выше,  $\Delta_e$  пропорционально потерям энергии быстрой частицы

$$\Delta_e = K \frac{d\varepsilon}{dx}, \quad (3.10)$$

где  $K$  – коэффициент пропорциональности, изменяющийся в несколько раз при переходе от одного материала к другому.

Рассмотренные экспериментальные результаты для трех мишеней находятся в соответствии с полученными ранее (см. выше) данными для алюминия и бериллия и данными [59] для графита. Коэффициенты  $\Delta_e$  для различных мишеней соотносятся как обратные величины потенциала

возбуждения  $\Phi_{ex}$ , умноженного на  $N^{1/3}$ . Отметим, что данные для меди [76] несколько хуже, но, возможно, это обусловлено несовершенством поверхностного слоя используемой медной пленки.

Таким образом, экспериментальные исследования энергетического спектра вторичных электронов показали, что функция распределения электронов по энергии – существенно неравновесная и спадает с ростом энергии по степенному закону с показателями степени, одинаковыми в области энергий выше 10 эВ для различных материалов мишеней. Подтверждается предложенная теоретическая зависимость коэффициента вторичной эмиссии от потенциала возбуждения  $\Phi_{ex}$  и плотности атомов  $N$ .

Изучались распределения электронов по энергиям при ионно-электронной эмиссии, индуцированной пучками ионов  $H^+$  с энергиями от 0,75 до 3,0 МэВ и  $H_2^+$  с энергиями от 1 до 2,5 МэВ. Ток пучка ионов во всех экспериментах составлял 0,1–0,4 мкА, а диаметр пучка на мишени – 3 мм. В качестве мишеней выбирались тонкие фольги из серебра, меди, никеля и титана с толщиной меньшей, чем длина пробега ионов  $H^+$  и  $H_2^+$  с данной энергией в веществе мишени. В вакуумной камере давление остаточных газов составляло  $10^{-6}$  Тор. Энергетические распределения вторичных электронов измерялись в сферическом анализаторе с тормозящим полем. Тормозящее поле создавалось между мишенью и двумя полусферами. Для предотвращения электронной эмиссии под действием потока налетающих частиц цилиндр Фарадея находился под антидинаatronным потенциалом ( $\sim 20$  В), создаваемым батареей Б. Ток цилиндра Фарадея усиливался электрометрическим усилителем. Сигнал с усилителя подавался на ПЭВМ типа ДЗ-28. Ток электронов, преодолевших тормозящее поле анализатора, собирался передней полусферой и после усиления сигнала также подавался на ДЗ-28. Экспериментально измерялся ток эмиссии вторичных электронов  $I_e$  для двух интервалов энергии электронов:  $5 \div 50$  эВ с шагом 1 эВ,  $35 \div 200$  эВ с шагом 5 эВ. Специально разработанные программы позволили автоматизировать операции предварительной обработки. При этом выражение (3.9) преобразовывалось к виду

$$y = (s + 1)x + a, \quad (3.11)$$

где  $y = \lg(dI_e / dU)$ ,  $x = \lg(q_e U + E_F + \phi)$ ,  $a = \lg(B_4)$ ,

после чего находились показатель  $S$  и параметр  $a$ . Качество фиттирования характеризовал параметр

$$q = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} \left( 1 - \frac{y_{\text{экс}}}{y_{\text{теор}}} \right)^2, \quad (3.12)$$

где  $N_y$  – число значений  $y$ , использованных при определении показателя  $S$

$$y_{\text{экс}} = \lg \left( \frac{U}{I} \frac{dI}{dU} \right), \quad y_{\text{теор}} = \lg \left( \frac{U}{I} \frac{dI_{\text{теор}}}{dU} \right), \quad (3.14)$$

где  $dI_{\text{теор}}/dU$  рассчитана по формуле (3.6) с использованием найденных значений параметров  $S$  и  $B_4$ .

Типичные графики спектра вторичных электронов аппроксимируются двумя прямыми в интервале от 5 до 30 эВ и от 30 до 200 эВ с разными значениями показателя степени.

В табл. 3.2. представлены значения показателя степени  $S$  (верхнее и нижнее значения) для двух участков в зависимости от энергии падающего пучка ионов  $H^+$  для различных материалов мишени. В табл. 3.3. представлены эти же данные для пучка ионов  $H_2^+$ .

Таблица 3.2

**Значения показателей степени (по модулю) в зависимости от энергии протона**

$E_p$ (МэВ)	Титан	Никель	Медь	Серебро
0,75	5,4 2,28	5,6 1,88	7,74 1,81	6,54 2,7
1,0	5,15 2,0	4,66 1,45	6,36 1,64	6,52 2,54
1,5	5,95 2,64	5,38 2,32	5,8 0,86	6,42 1,98
2,0	7,16 2,93	5,53 2,78	5,77 2,85	4,38 2,08
2,5	6,06 2,12	4,58 1,64	5,01 2,11	5,25 1,96
3,0	5,66 1,88	4,32 1,66	5,73 2,67	6,34 2,7

Таблица 3.3

**Значения показателей степени (по модулю) в зависимости  
от энергии иона  $H_2^+$**

$E_{H_2^+}$ (МэВ)	Титан	Никель	Медь	Серебро
1,0	6,04	5,34	2,81	
	1,98	1,87	2,43	
1,5	4,66	3,40	5,36	6,73
	1,82	1,18	2,36	2,0
2,0	4,56	4,09	3,66	6,11
	1,49	1,57	2,16	2,54
2,5	4,31	8,73	5,73	5,48
	1,28	2,62	2,67	2,7

Как видно из таблиц, в большинстве экспериментов показатель степени на первом участке (верхние значения) увеличивается с ростом энергетических потерь иона в веществе. На втором участке (нижние значения) столь строгой зависимости установить не удалось.

### **3.2.2. Исследования кинетической электронной эмиссии из полупроводников [23]**

Имеющаяся в литературе информация о возникающих при облучении пучками быстрых ионов эмиссионных свойствах материалов касается в основном металлов. Обращает на себя внимание отсутствие данных о широко используемых в фотоэмиссионной и электронной технике эффективных эмиттерах электронов. Одними из наиболее распространенных эффективных эмиттеров вторичных электронов являются эмиттеры на основе сурьмяно-цезиевых соединений. Благодаря своим высоким вторичным фотоэмиссионным и электронно-эмиссионным коэффициентам, которые обычно связывают с малым значением высоты потенциального барьера на границе поверхности образца с вакуумом, соединения такого типа активно используются в качестве фотокатодов и динодов в фотоэлектронных умножителях и других приборах [72]. Так, значение коэффициента вторичной электронной эмиссии (ВЭЭ) составляет для сурьмяно-цезиевого соединения  $\Delta_e = 3 \div 4$  при малых энергиях первичных электронов  $E_e = 100$  эВ, а максимальное значение коэффициент ВЭЭ  $\Delta_{e\max} = 8 \div 10$  достигает при энергиях  $E_e = 500 \div 600$  эВ [72]. Наличие значительных коэффициентов вторичной эмиссии является следствием не только низкой работы выхода из этого материала, но и, по-видимому, формирования неравновесных функций распределения степенного типа.

Исследование функций распределения электронов, формируемых в твердотельной плазме сурьмяно-цезиевого катода при бомбардировке их пучками быстрых легких ионов, проводились на установке, схематически изображенной на рис. 3.1 и подробно описанной в работе [23].

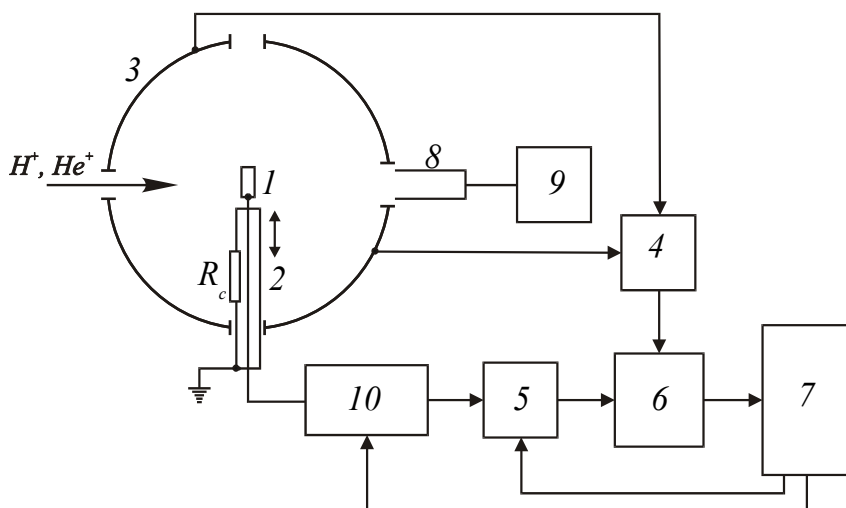


Рис. 3.1. Схема экспериментальной установки: 1 – мишень, 2 – держатель мишени, 3 – полусферы, 4, 5 – электрометрические усилители, 6 – аналого-цифровой преобразователь, 7 – ЭВМ типа IBM PC, 8 – цилиндр Фарадея, 9 – токовый прибор Ф303, 10 – источник пилообразного напряжения

Электростатический ускоритель ионов Ван де Графа, используемый в качестве источника первичных частиц, позволял получать пучки ионов водорода  $H^+$  и гелия  $He^+$ . Измерения энергетических спектров электронов вторичной ионно-электронной эмиссии (ВИЭЭ) было проведено для пучков ионов  $H^+$  с энергиями от 1,00 до 2,25 МэВ и  $He^+$  с энергиями от 1,75 до 2,25 МэВ с шагом 0,25 МэВ. Исследуемый катод, используемый в качестве мишени, представлял собой сурьмяно-цезиевый слой, с толщиной, превышающей длину пробега бомбардирующих ионов в данном веществе, нанесенный на массивную никелевую подложку. Мишень 1 диаметром 10 мм фиксировалась в медной оправке, которая крепилась на подвижном держателе 2. Пучок ионов, коллимированный с помощью системы диафрагм, падал на мишень и вызывал с ее поверхности ВИЭЭ на отражение. Плоскость мишени была перпендикулярна оси пучка. Диаметр пучка на мишени составлял 3 мм. Плотность ионного тока на мишени была не выше, чем  $30 \text{ мкА/см}^2$ . Откачка камеры осуществлялась магниторазрядным насосом НМД-0,4-1 и форвакуумным насосом НВПР-16Д с азотной ловушкой. Во всех проведенных экспериментах давление остаточных газов в вакуумной камере составляло не более  $10^{-6}$  Торр. Электроны, эмитированные с поверхности мишени, собирались на сферическом коллекторе, состоящем из двух полусфер 3 с радиусом 100 мм. Мишень на держателе помещалась внутри коллектора. Зазор между полусферами составлял 15 мм. Входное окно полусферы было диаметром 10 мм. Одновременно с измерением тока коллектора  $I_c$  регистрировался ток мишени  $I_t$ . Ток мишени представляет собой сумму тока ионов пучка  $I_v$  и тока достигших

коллектора вторичных электронов:  $I_T = |I_C| + I_B$ . Измеряемые токи коллектора  $I_C$  и мишени  $I_T$ , усиленные электрометрическими усилителями 4 и 5, соответственно, подавались через аналого-цифровой преобразователь 6 в ЭВМ 7 типа IBM PC. Для калибровки измерительной системы за задней полусферой располагался цилиндр Фарадея 8, позволяющий непосредственно регистрировать ток пучка ионов  $I_{FC}$  при выведенной из-под пучка мишени. Цилиндр Фарадея имел размеры  $\varnothing = 20$  мм и  $l = 130$  мм. Ток цилиндра Фарадея  $I_{FC}$  измерялся при помощи токового прибора Ф303 9. Коэффициент ВИЭЭ определялся по формуле:

$$\Delta_e = |I_C| / (|I_C| - I_T). \quad (3.14)$$

Изучая энергетический спектр электронов ВИЭЭ сферическим анализатором для точечного источника эмиссии, можно восстановить явный вид функции распределения электронов внутри твердого тела [14, 23, 67]. В случае, когда функция распределения степенная, производная тока эмиссии по энергии электронов  $dI/dU$  может быть представлена, как:

$$dI/dU = B \cdot (E_F + \phi + eU)^{s+1}, \quad (3.15)$$

где  $B$  – константа. Следовательно, в логарифмическом масштабе зависимость (3.15) представляет собой прямую с тангенсом угла наклона, равным  $s+1$ .

На рис. 3.2. представлена типичная функция распределения неравновесных электронов для исследуемого образца в случае бомбардировки его ионами  $He^+$  с энергией 1,75 МэВ.

Энергетические распределения вторичных электронов эмиссии на отражение измерялись при помощи сферического коллектора в режиме энергоанализатора с тормозящим полем в интервале от 0 до 100 В с шагом в 1 В. Тормозящее электрическое поле создавалось между мишенью 1 и двумя полусферами 3. Поскольку радиус энергоанализатора значительно превышал размер мишени, то распределение поля было близко к сферически симметричному. Держателем мишени 2 служила керамическая трубка  $\varnothing = 5$  мм с нанесенным на ее внешнюю поверхность резистивным слоем. Удельное сопротивление слоя  $R$  менялось по длине трубки нелинейным образом так, чтобы потенциал держателя не искажал поля внутри энергоанализатора. Мишень имела гальванический контакт с одним концом резистивного слоя, а другой конец его заземлялся. Тормозящий потенциал подводился к мишени внутри керамической трубки от источника пилообразного напряжения 10, управляемого ЭВМ 7. Таким образом, ток, протекающий вдоль резистивного слоя, создавал необходимое распределение потенциала вдоль длины держателя. В процессе эксперимента вторичные электроны, двигаясь по радиальным траекториям,

достигали коллектора. При подаче на мишень тормозящего напряжения на коллектор попадали только те электроны, энергия которых достаточна для преодоления тормозящего поля. Программа, которая осуществляла управление экспериментом, позволяла для каждого значения тормозящего поля в течение 7 секунд набирать статистику из 100 измерений тока электронов эмиссии. Затем программа производила усреднение по 100 экспериментальным точкам, и полученное в результате этой процедуры значение электронного тока записывалось в память ЭВМ. Дифференцируя полученные таким образом зависимости тока коллектора от задерживающего напряжения (кривые задержки), можно получить энергетический спектр электронов ВИЭЭ, а затем восстановить функцию распределения.

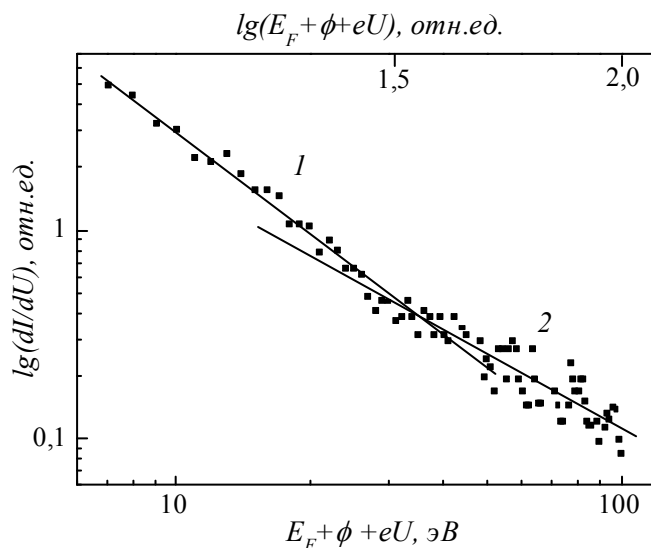


Рис. 3.2. Типичная зависимость  $\lg(dI/dU)$  от  $\lg(E_F + \phi + eU)$  для сурьмяно-цезиевого катода в случае бомбардировки его ионами  $He^+$  с энергией 1,75 МэВ. Участку 1 функции распределения (интервал энергий 5÷30 эВ) соответствует показатель степени  $s_1 = -2,9$ , а участку 2 (30÷100 эВ) —  $s_2 = -2,5$

Проведенные экспериментальные исследования энергетического спектра электронов ВИЭЭ показывают, что для всех энергий используемых ионов электронная функция распределения, формируемая в неравновесных условиях в плазме сурьмяно-цезиевого катода, имеет степенную зависимость.

Экспериментальные точки хорошо укладываются на две прямые, соответствующие различным показателям степени в энергетических интервалах 5÷30 эВ и 30÷100 эВ. В результате обработки экспериментальных данных были получены соответствующие показатели степени.

В табл. 3.4. представлены значения показателей степени  $-s_1$  и  $-s_2$  для двух участков функции распределения, соответствующих вышеуказанным энергетическим интервалам, в зависимости от энергии бомбардирующих ионов  $H^+$  и  $He^+$ .

Таблица 3.4

**Значения показателей степени в зависимости от энергии ионов**

Ион	Энергия, МэВ	$-s_1$	$-s_2$
$H^+$	1,25	2,9	2,5
	1,5	3,0	2,5
	1,75	2,9	2,5
	2,0	3,0	2,4
	2,26	3,0	2,6
$He^{**}$	1,75	2,9	2,5
	2,0	2,8	2,2
	2,26	2,8	2,3

На рис. 3.3 приведена функция распределения неравновесных электронов для арсенида галлия, облучаемого ионами  $He^+$  с энергией 1,25 МэВ.

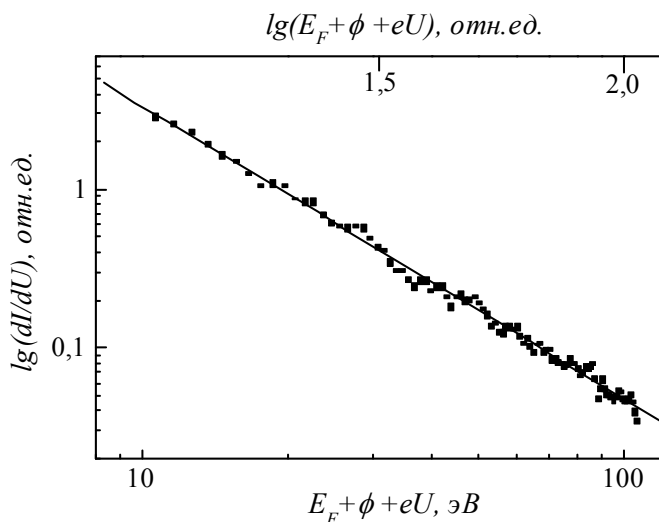


Рис. 3.3. Функция распределения неравновесных электронов для арсенида галлия в случае бомбардировки его ионами  $He^+$  с энергией 1,25 МэВ

Экспериментальные точки на рис. 3.3. хорошо укладываются на одну прямую в энергетическом интервале 10÷100 эВ, полученный в результате обработки экспериментальных данных показатель степени оказался

$s = -2,7$ , т. е. близким к показателю степени, полученному при бомбардировке сурьмяно-цезиевого катода ионами  $He^+$  с энергией 1,25 МэВ.

Как нам представляется, в общем случае показатель степени функции распределения вторичных электронов может иметь зависимость от энергии (удельных ионизационных потерь) быстрых ионов, так как интенсивность источника дополнительных частиц в импульсном пространстве определяется именно удельными ионизационными потерями иона. Как было указано в [12, 14, 15], только при некоторых определенных условиях показатель степени не зависит от структуры источника и стока. В этом случае говорят об универсальной функции распределения с показателем степени  $-5/4$  [14]. В ранее проведенных экспериментах с пучком ионов  $He^+$  и тонкими металлическими пленками были измерены показатели степени  $s$  и показано, что абсолютная величина показателя степени  $s$  функции распределения на первом энергетическом интервале, который соответствует области медленных электронов ( $E < 35$  эВ), уменьшается с ростом удельных ионизационных потерь иона в веществе [77]. Авторы работы [46] указывают, что с ростом энергии налетающих ионов возрастает доля быстрых электронов. Как видно из вышеприведенной таблицы, показатели степени  $s$  для различных энергий бомбардирующих ионов, и, следовательно, различных удельных ионизационных потерь иона в сурьмяно-цезиевом образце различаются незначительно, хотя для протонов абсолютная величина показателя степени возрастает (падает) с ростом (удельных ионизационных потерь) энергии. Для ионов гелия такой зависимости не наблюдается. Следует заметить, что изменение показателя степени не превышает 10 %, и для установления его точной зависимости от потерь энергии требуются дополнительные исследования.

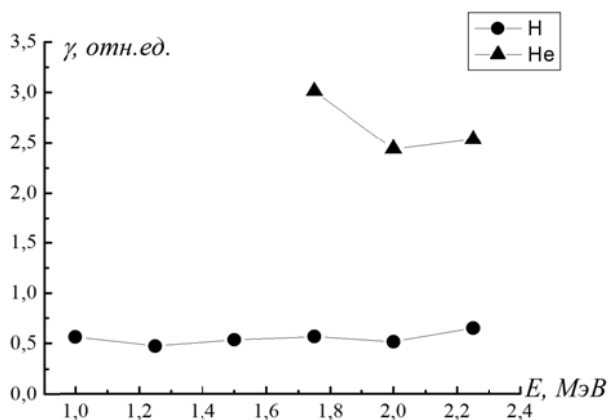


Рис. 3.4. Зависимость электронного выхода  $\gamma$  от энергии падающих ионов  $H^+$  и  $He^+$  для сурьмяно-цезиевого катода

На рис. 3.4 представлена зависимость электронного выхода  $\Delta_e$  от энергии падающих ионов  $H^+$  и  $He^+$  для сурьмяно-цезиевого катода. Как видно из графика, значения электронного выхода  $\Delta_e$  для исследуемого сурьмяно-цезиевого соединения превышают таковые для ряда металлических образцов [48]. Причина этого может заключаться в следующем. Как уже было сказано выше, часть образовавшихся при бомбардировке пучками быстрых заряженных частиц в твердотельной плазме неравновесных электронов диффундирует к поверхности и выходит в вакуум. Эмиссия электронов происходит с приповерхностного слоя, толщина которого значительно меньше глубины проникновения ионов и определяется закономерностями движения этих электронов к поверхности.

Как было указано выше, основной интегральной характеристикой ВИЭЭ является электронный выход. В приведенных результатах экспериментальных исследований [23] измерен электронный выход  $\Delta_e$  эмиссии, индуцированной ионами  $He^+$ . Экспериментальные точки зависимости электронного выхода  $\Delta_e$  из германиевого образца от удельных ионизационных потерь  $dE/dx$  ионов  $He^+$  хорошо аппроксимируются прямой, что является подтверждением пропорциональности между этими величинами.

### 3.3. Сравнение экспериментальных данных с результатами численного моделирования формирования неравновесных функций распределения частиц

Проводимость среды определяется плотностью носителей, поэтому можно убедиться, что полупроводниковая плазма с подобными неравновесными функциями распределения должна обладать аномальными свойствами проводимости и эмиссией, превышающей на порядки термоэмиссию. Проведем сравнение численного расчета с экспериментальными результатами по облучению полупроводниковой тонкой пленки GaAs потоком быстрых ионов  $H^+$  с энергией 1,25 МэВ [23]. Поскольку длина свободного пробега протона равна  $\approx 3 \cdot 10^{-6}$  м и скорость иона равна  $v_m = 7,5 \cdot 10^6$  м/с, можно вычислить временной промежуток, за который протон теряет основную энергию  $t_p = 4 \cdot 10^{-13}$  с. Для данного образца арсенида галлия с плотностью электронов  $n_e = 5 \cdot 10^{24}$  м<sup>-3</sup> характерная скорость равна  $v_{th} = 6 \cdot 10^5$  м/с. Тогда соответствующее время электрон-электронной релаксации по порядку равно  $\tau_{ee} = 3 \cdot 10^{-14}$  с. Отсюда можно сделать вывод, что благодаря наличию потока в пространстве

скоростей успевает сформироваться неравновесная функция распределения. Интенсивность источников, возникающих из-за ионизации прямым электронным столкновением и за счет возбуждения плазменных волн равна приблизительно  $I_+ \approx 3,3 \cdot 10^{37} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$ . Тогда для расчетов мы должны взять нормализованную (безразмерную) интенсивность источника порядка 0,01 – 0,1 и время действия источника – порядка 10. Точка действия источника при  $v_{+,1} \approx 3,5$  соответствует возбуждению плазмона, а  $v_{+,2} \approx 7$  коррелирует с ионизацией за счет электронного столкновения.

Основные потери из образца происходят за счет ион-электронной эмиссии с поверхности пленки. Электроны с энергией большей работы выхода  $\varphi$  и приложенного задерживающего потенциала  $U$  покидают образец в течение времени  $\tau_{ex}$ , поскольку глубина эмитирующего слоя  $d_{em} = v_{th} \tau_{ee}$  превышает длину свободного пробега электрона  $\lambda$  в полупроводнике.

Функция стока равна нулю для энергий меньших  $E = E_F + \varphi \approx 5,65$  эВ и распределена в пространстве скоростей следующим образом:

$$S_- = \frac{\tau_{ee}}{\tau_{ex}} f\left(\frac{v}{v_{th}}\right) = \frac{\lambda v \tau_{ee}}{d_{em}^2} f\left(\frac{v}{v_{th}}\right) \approx 0,05 \frac{v}{v_{th}} f\left(\frac{v}{v_{th}}\right). \quad (3.16)$$

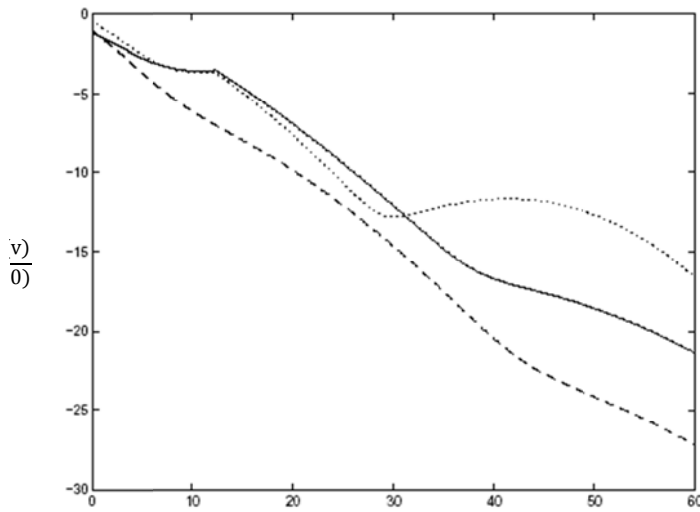


Рис. 3.5. Эволюция функции распределения для нестационарных источников и стационарного стока, определяемого выражением (3.16).

Точками обозначен момент времени  $t = 15$ ;

сплошной линией - момент  $t = 20$  и пунктиром  $t = 30$

Эволюция функции распределения в зависимости от квадрата скорости показана на рис. 3.5. Точками обозначен момент времени  $t = 15$ ; сплошной линией – момент  $t = 20$  и пунктиром  $t = 30$ . Источник с интенсивностью  $I_{+,1} = 0,1$  в точке  $v_{+,1} = 3,5$  выключен, начиная с  $t = 20$ ; источник с интенсивностью  $I = 0,075$  в точке  $v_{+,2} = 7$  выключен, начиная с  $t = 2$ , сток с интенсивностью (3.16) действует в области  $v > 2$ .

Как уже выше отмечалось, зависимость тока эмиссии от задерживающего потенциала для стационарной функции распределения можно определить по формуле (3.4). В рассматриваемой же ситуации нестационарных несогласованных источников и стоков из-за нестационарности функции распределения электронов ток эмиссии будет функцией времени

$$J(t) = \text{const} \int_{E_F + eU + \varphi}^{\infty} dE f(E, t) E. \quad (3.4^*)$$

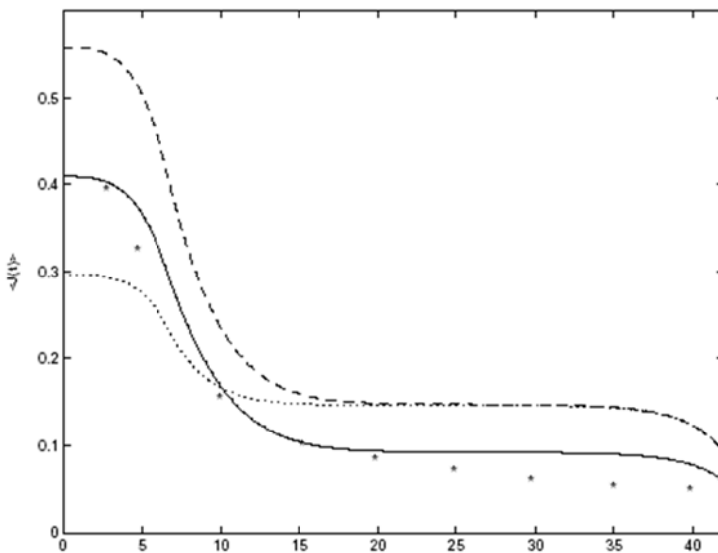


Рис. 3.6. Зависимость тока ион-электронной эмиссии от задерживающего потенциала  $U$  для арсенида галлия (GaAs), бомбардируемого ионами  $H^+$  с энергией 1,25 МэВ, точками обозначен ток, усредненный за время  $t = 10$ ; тире – для  $t = 20$ ; сплошная линия – для  $t = 100$  и звездочками обозначены экспериментальные результаты [230]

Для изучаемой экспериментальной ситуации [230] токи ионного пучка не превышают 10 мкА. В этом случае ток эмиссии отражает

нестационарность источников, поскольку на каждом ионном треке электронная функция имеет достаточно времени, чтобы пройти все стадии своего формирования. Поэтому зависимость эмиссионного тока от задерживающего потенциала, наблюдаемая в эксперименте, является суперпозицией токов, существующих на всех временных стадиях существования нестационарной функции распределения электронов. На рис. 3.6. представлена зависимость тока эмиссии от задерживающего потенциала: точками обозначен ток, усредненный за время  $t = 10$ ; тире – для  $t = 20$ ; сплошная линия – для  $t = 100$ , и звездочками обозначены экспериментальные результаты [230].

Главный вывод, установленный из сравнения результатов численного моделирования с экспериментальными данными, заключается в том, что необходимо учитывать нестационарности источников и стоков для объяснения зависимости тока от задерживающего потенциала при использовании экспериментальной методики сбора заряда электронов, вылетающих со всей поверхности пленки, за достаточно длительный (несколько секунд) промежуток времени.

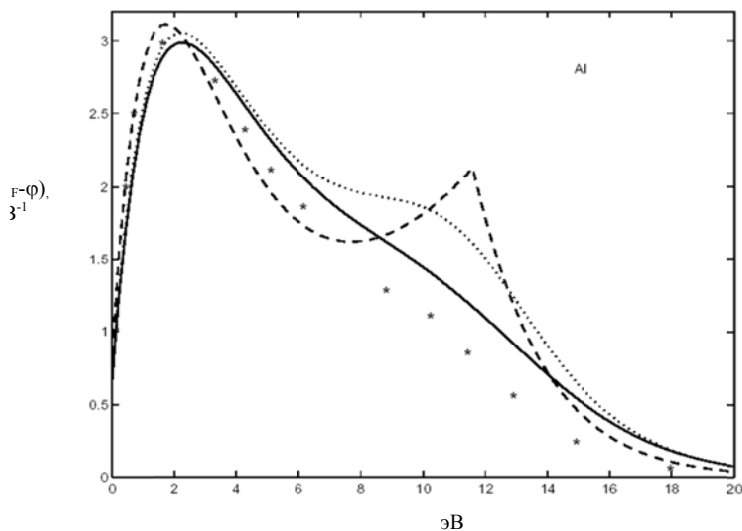


Рис. 3.7. Зависимость количества электронов с энергией  $N(E - E_F - \phi)$  от их энергии  $E - E_F - \phi$  для электронов эмиссии, индуцированной 1 кэВ электронами из поликристаллического алюминия (Al). Сплошная и пунктирная кривая – результаты численного моделирования, а звездочками отмечены экспериментальные данные [71]

Мы сравнили также полученные численным путем функции распределения с экспериментальными распределениями по энергиям вторичных электронов (взяты из работы [71]). В экспериментах изучался энергетический спектр частиц при вторичной электрон-электронной

эмиссии, индуцированной 1 кэВ электронами из поликристаллических алюминия и магния. Эти материалы не полупроводники и для их описания, строго говоря, необходимо использовать интеграл столкновений Больцмана. Однако, как это показано, например, в [8], имеется некоторое подобие между спектрами электронов, эмиттированных из металлов и полупроводников. Энергия объемного плазмона 10,5 эВ и работа выхода 4,64 эВ для *Mg* и для *Al* энергия объемного плазмона 15,5 эВ и работа выхода 5,25 эВ [17, 18]. Рис. 3.7 и рис. 3.8 демонстрируют функции распределения электронов, найденные в результате численного интегрирования интеграла столкновений в форме Ландау–Фоккера–Планка для различных моментов времени, экспериментальные данные из [71] отмечены звездочками для алюминия (рис. 3.7) и для магния (рис. 3.8). Несмотря на определенную произвольность в сравниваемых данных, характерные свойства функции распределения, как можно видеть, находятся в хорошем качественном согласии.

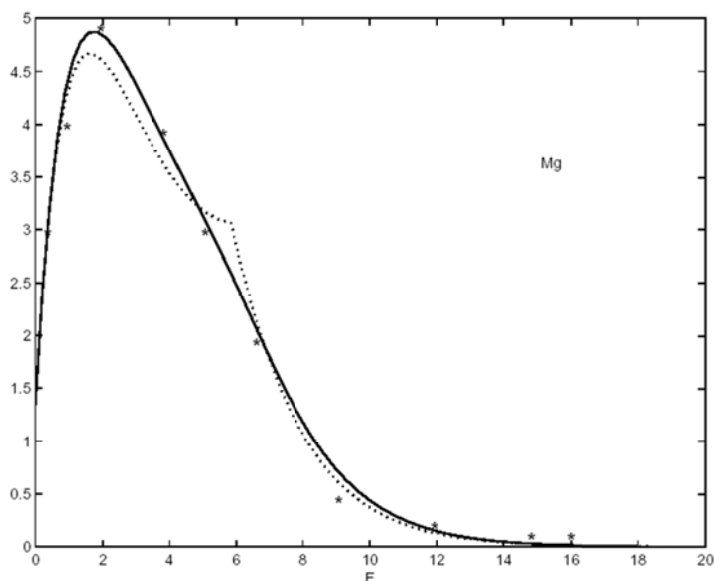


Рис. 3.7. Зависимость количества электронов с энергией  $N(E - E_F - \varphi)$  от их энергии  $E - E_F - \varphi$  для электронов эмиссии, индуцированной 1 кэВ электронами из поликристаллического магния (*Mg*). Сплошная и пунктирная кривая — результаты численного моделирования, а звездочками отмечены экспериментальные данные [71]

# РАЗДЕЛ 4. ПРЯМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ НА ОСНОВЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЧАСТИЦ

## 4.1. Непосредственное преобразование ядерной энергии в электрическую

В данном подразделе показано, что ситуация аналогичная, с физической точки зрения, рассмотренной в подразделе 3.2, имеет место при действии на металл потоков частиц, выделяемых при реакциях синтеза или деления [79]. Исследование этого случая показывает [79–81], что можно предложить способ непосредственного преобразования ядерной энергии в электрическую, основанный на преобразовании энергии ядерных частиц, падающих на металлическую пластинку в энергию электронного потока эмиссии.

При облучении металлической пластинки заряженными частицами ( $\alpha$ -частицами,  $\beta$ -частицами, протонами и т.д.) происходит интенсивная ионизация атомов металла (см., например, [74]) на длине их пробега. Длина практического пробега  $R_{tr}$  легких частиц ( $\beta^+$ -частицы,  $\beta^-$ -частицы) в интервале энергий  $\varepsilon < 12$  МэВ [74, 75]

$$R_{tr} = \frac{0,526\varepsilon - 0,094}{\rho_m}, \quad (4.1)$$

где  $\rho_m$  – плотность металла,  $\varepsilon$  – энергия заряженной частицы.

Для практического пробега тяжелых частиц ( $\alpha$ -частицы, протоны, дейтроны и т. п.) в интервале энергий  $1 \text{ МэВ} < m_\alpha \varepsilon / m_b < 10 \text{ МэВ}$  имеем [74, 75]<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> Все величины измеряются в системе СГС, за исключением энергии  $\varepsilon$ , измеряемой в МэВ.

$$R_{tr} = 0,174 \frac{m_b q_\alpha^2}{m_\alpha q_b^2} \frac{A_m^{1/3}}{\rho_m} \left( \varepsilon \frac{m_\alpha}{m_b} \right)^{3/2}, \quad (4.2)$$

где  $m_b$ ,  $q_b$  – соответственно масса, заряд заряженной частицы,  $m_\alpha$ ,  $q_\alpha$  – соответственно масса, заряд  $\alpha$  – частицы;  $A_m$  – атомный номер металла, из которого изготовлена пластинка.

Пусть на пластинку толщиной  $d \leq R_{np}$  падает поток заряженных частиц интенсивностью  $\chi$ , измеренной в Ки/см<sup>2</sup>, тогда за счет ионизации в 1 см<sup>3</sup> за секунду образуется  $\dot{n}_e$  электронов:

$$\dot{n}_e = 3,7 \cdot 10^{10} \chi \cdot \varepsilon / \Phi R_{np}, \quad (4.3)$$

где  $\dot{n}_e$  – производная по времени от плотности электронов,  $\Phi$  – потенциал возбуждения.

В рассматриваемом случае имеется поток в импульсном пространстве, создаваемый источником (ионизация) и стоком (эмиссия электронов), тем самым, в соответствии со всем предыдущим изложением, созданы условия для образования неравновесного распределения электронов с квазистепенной зависимостью от энергии. Плотность электронов при такой скорости ионизации (4.3) может быть приближенно найдена из уравнения, имеющего наглядный физический смысл.

$$\dot{n}_e = \frac{n_{eH} - n_e \exp(-E_H / k_b T)}{\tau_E}, \quad (4.4)$$

где  $E_{in}$  – начальная энергия образовавшихся электронов,  $\tau_E$  – время релаксации по энергии электронов на основном фермиевском "фоне". Для квазистепенной функции распределения спад по энергии в широком ее интервале очень плавный, в отличие от равновесной ситуации. Это приводит к большим значениям токов и существенному повышению коэффициента преобразования ядерной энергии в энергии потока электронов эмиссии. Сравним коэффициенты полезного действия (КПД) и плотности токов эмиссии  $j_e$  для обсуждаемого способа [80] и термоэмиссионного (см., например, [26]). КПД  $\eta$  можно записать так:

$$\eta = \frac{j_e E_e}{3,7 \cdot 10^{10} q_e \chi \varepsilon_0}, \quad (4.5)$$

где  $E_e$  – средняя энергия электронов эмиссии.

Для термоэмиссионного способа плотность тока  $j_T$  определяется термоэлектронным механизмом эмиссии (см., например, [26]) и может быть записана в виде

$$j_T = n_{xb} q_b V, \quad n_{xb} = n_e \exp(-\phi / k_B T), \quad (4.6)$$

где  $n_e$  – плотность той части электронов, которая может покинуть металл;  $V = k_2 T^2 / n_e$  – средняя скорость,  $k_2$  – некоторая характеристика металла (значения  $k_2$  для многих металлов приведены в [77]),  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $\phi$  – работа выхода. Тогда

$$E = \frac{m k_2^2 T^4}{2 n_e^2}. \quad (4.7)$$

При нахождении стационарной температуры металла, которая определяет как среднюю энергию электронов, так и термоэлектронный ток, рассмотрим наиболее благоприятную ситуацию: вся энергия ядерных частиц идет на нагрев, а отвод тепла происходит только за счет излучения нагретого металла (то есть другие механизмы теплоотвода, которые могли бы снизить значение стационарной температуры, не учитываются). В этом случае

$$T = \left( \frac{3,7 \cdot 10^{10} \chi \varepsilon}{R_1 \sigma_1} \right)^{1/4}, \quad (4.8)$$

где  $\sigma_1 = 5,67 \cdot 10^5$  эрг/(с см<sup>2</sup> град<sup>4</sup>) – постоянная Стефана-Больцмана,  $R_1$  – коэффициент серости. Подставляя формулы для  $\gamma_T$ ,  $E_e$ ,  $T$  в (4.5) получаем

$$\eta_T = \frac{m k_2^3}{2 n_e^2} \left( \frac{3,7 \cdot 10^{10} \chi \varepsilon}{(R_1 \sigma_1)^3} \right)^{1/2} \cdot \exp \left\{ -\phi / k_b \left( \frac{3,7 \cdot 10^{10} \chi \varepsilon}{R_1 \sigma_1} \right)^{-1/4} \right\}. \quad (4.9)$$

Из выражения для КПД видно, что он растет с увеличением интенсивности  $\chi$ . Однако здесь следует заметить, что даже при интенсивностях  $\chi$ , достаточных для нагрева металла до температуры плавления, из-за всегда имеющей место малости отношения  $k_B T_n / \phi$ , КПД не может превышать 0,01 %.

Вычислим КПД для предлагаемого способа прямого преобразования ядерной энергии в электрическую. Как уже отмечалось, в случае неравновесной ситуации формируются функции распределения электронов квазистепенного вида. Поскольку как степенные, так и квазистепенные распределения дают сравнимые плотности тока эмиссии, существенно превышающие таковые при равновесном распределении, для оценок используем формулу, определяющую плотность тока эмиссии для чисто степенной функции распределения, записанную в виде

$$j_s = n_t^{(s)} q_e V^{(s)}, \quad (4.10)$$

причем

$$n_{xb}^{(s)} = \bar{n}_{eH} \cdot \left\{ 1 - \left( \frac{E_F + \phi}{E_{\max}} \right)^{(2s+3)/2} \right\} / \left\{ 1 - \left( \frac{E_H}{E_{\max}} \right)^{(2s+3)} \right\} \approx \bar{n}_{eH}, \quad (4.11)$$

$$V^{(s)} = \frac{(E_{\max} / 2m)^{1/2}}{4(s+1)(s+2)} \cdot \left[ (s+1) - (s+2) \frac{E_F + \phi}{E_{\max}} + \left( \frac{E_F + \phi}{E_{\max}} \right)^{s+2} \right] / \left\{ 1 - \left( \frac{E_F + \phi}{E_{\max}} \right)^{(2s+3)/2} \right\}, \quad (4.12)$$

где  $\tilde{n}_e$  – неравновесная плотность электронов, определяемая согласно (4.6). Таким образом,

$$\eta_s = \frac{\tau_E (E_{\max}^3 / 2m)^{1/2}}{R_p \varepsilon} \cdot \frac{\left[ (s+1) - (s+2) \frac{E_F + \phi}{E_{\max}} + \left( \frac{E_F + \phi}{E_{\max}} \right)^{s+2} \right]}{\left\{ 256(s+1)^3 (s+2)^3 \left[ 1 - \left( \frac{E_H}{E_{\max}} \right)^{(2s+3)/2} \right] \left[ 1 - \left( \frac{E_F + \phi}{E_{\max}} \right)^{(2s+3)/2} \right] \right\}}. \quad (4.13)$$

Как видно из выражения (4.13),  $\eta_s$  не зависит от интенсивности  $\chi$  и содержит слабую, в отличие от (4.9), зависимость от работы выхода  $\phi$ .

Для наглядности сравнения предложенного способа и термоэмиссионного по плотности тока эмиссии и к.п.д. рассмотрим конкретные параметры. Предположим, что вся энергия  $\alpha$ -частиц идет на нагрев металла, отвод тепла связан только с излучением, интенсивность  $\chi$

достаточна для нагрева металла до температуры плавления  $T_m$ . Энергия  $\alpha$ -частиц  $\varepsilon = 5,4$  эВ, металлическая пластинка толщиной  $d = 2,4 \cdot 10^{-3}$  см изготовлена из бериллия,  $\chi = 3,8 \cdot 10^3$  Ки/см,  $s = -5/4$ ,  $E_{in} = 3$  эВ,  $E_{max} = 20$  эВ, температура окружающей среды  $T_c = 300$  К.

Для термоэмиссионного способа

$$j_T \approx 0,05 \text{ А/см}^2, \quad \eta_T \approx 10^{-2} \% \quad (4.14)$$

Для предлагаемого способа

$$j_s \approx 7 \text{ А/см}^2, \quad \eta_s \approx 1 \% \quad (4.15)$$

Из приведенных результатов видно, что способ прямого преобразования ядерной энергии в электрическую, основанный на переходе энергии ядерных частиц, падающих на металлическую пластинку, в энергию электронного потока эмиссии, дает выигрыш по току более чем на 2 порядка, а по коэффициенту полезного действия – на 2-3 порядка по сравнению с существующими способами того же назначения.

Таким образом, на основе неравновесных распределений, формирующихся с помощью внешних воздействий, можно создавать принципиально новые экономичные источники тока с высокими техническими параметрами, которые рассмотрены ниже.

## 4.2. Вторично-эмиссионный радиоизотопный источник тока

В настоящее время известны два типа радиоизотопных источников тока: тепловые радиоизотопные преобразователи и нетепловые радиоизотопные преобразователи.

У тепловых радиоизотопных преобразователей ядерная энергия превращается в тепловую, а затем – в электрическую энергию. В свою очередь тепловые радиоизотопные преобразователи разделяются на термоэлектрические и термоэмиссионные. Для любого теплового преобразователя наибольшее возможное значение коэффициента полезного действия определяется из выражения  $(T_1 - T_2)/T_1$ , где  $T_1$  и  $T_2$  – наибольшая и наименьшая, соответственно, температура в преобразователе. Поэтому для достижения наивысшего коэффициента полезного действия преобразователя стремятся повысить его температуру.

В конструкциях термоэлектрических преобразователей, имеющих несколько слоев из полупроводниковых материалов, разделенных изолирующими материалами, высокая температура (более  $1000^\circ\text{C}$ ) является

основным ограничением для выбора полупроводниковых материалов преобразователя. В условиях высоких температур и жесткого излучения изолирующие материалы между слоями полупроводниковых материалов будут быстро разрушаться, приводя к пробоям и утечкам электрического тока. Кроме того, радиационно стимулированные дефекты в полупроводниковых материалах будут изменять их основные характеристики, укорачивая время жизни преобразователя и уменьшая его коэффициент полезного действия.

В термоэмиссионных преобразователях электронная эмиссия вызывается, как известно, нагревом катода с помощью частиц, испускаемых радиоизотопом. При этом термоэмиссионный ток экспоненциально зависит от отношения  $\phi_m / k_b T$  ( $\phi_m$  – работа выхода материала катода), и по данной причине коэффициент полезного действия преобразователя увеличивается при использовании высоких температур и материалов с малой работой выхода  $\phi_m$ . Основная трудность в термоэмиссионных источниках тока заключается в использовании материалов при температурах выше  $2000^\circ \text{C}$ . Для обеспечения низкой работы выхода иногда пространство между катодом и анодом заполняют газом, чаще всего цезием, что приводит к образованию пленки на катоде и к снижению работы выхода до значения 1.81 эВ. Постоянное присутствие цезия существенно сокращает срок работы таких источников и создает проблемы с обеспечением защиты обслуживающего персонала.

В нетепловых радиоизотопных преобразователях электрическая энергия образуется без теплового цикла. Среди таких источников тока – наиболее распространены источники с непосредственным сбором электрических зарядов, так называемые атомные батареи. В этих батареях электрическая энергия индуцируется за счет сбора на коллекторе электронов или  $\alpha$ -частиц, излучаемых изотопом. Коллектор и эмиттер в подобных источниках тока электрически изолированы один от другого вакуумным промежутком или диэлектриком. Разность потенциала между анодом и катодом может быть равна энергии частиц, но большое внутреннее электрическое сопротивление источника при подключении нагрузки часто приводит к заметному уменьшению этого напряжения и, следовательно, к увеличению части энергии заряженных частиц, которая идет на нагрев коллектора. В результате коэффициент полезного действия источника (батарей) существенно снижается. В этих источниках предполагается использование радиоизотопных излучателей  $\beta$ -или  $\alpha$ -частиц, причем для подавления вторичной электронной эмиссии из коллектора имеется дополнительный источник. Кроме отмеченных ранее недостатков, уменьшающих срок службы источников такого типа, можно добавить еще специфические: присутствие  $\delta$ -электронов в потоке  $\alpha$ -частиц существенно снижает переносимый ток; очень высокое рабочее напряжение (несколько сотен киловольт) атомных батарей требует соблюдения очень жестких условий по надежной изоляции и / или

вакуума очень высокого уровня. В источнике тока с многослойными структурами, в которых коллекторы отделены от эмиттера диэлектрическими слоями, возникает проблема надежности электрической изоляции и отвода тепла от указанных диэлектрических слоев.

Таким образом, практическое использование атомных батарей с прямым сбором электрических зарядов затруднено в связи с необходимостью как преобразования высокого напряжения до приемлемых значений, так и использования весьма массивных изоляторов.

При использовании источников электрического тока с контактной разностью потенциалов в атомных батареях в объеме газа, ионизируемого радиоизотопом, образуются заряженные частицы, которые аккумулируются на катоде и аноде, имеющих различную работу выхода. Разность потенциалов в данном случае зависит от работы выхода применяемых материалов электродов и не может превышать одного вольта. По этой причине коэффициент полезного действия источника тока оказывается достаточно низким. Кроме того, малое значение коэффициента полезного действия обусловлено малым сечением взаимодействия ионизирующих частиц с атомами газа. Несколько повысить коэффициент полезного действия источника тока можно, используя смесь радиоактивного и благородного газов при давлении в несколько атмосфер. Низкая эффективность источника тока определяется также и тем, что процесс ионизации протекает в газовой среде, когда только часть заряженных частиц достигает катода и анода. Кроме того, повышение давления в атомной батарее, наполненной высокотоксичным газом, создает угрозу для обслуживающего персонала и оборудования. Известно также применение фотоэлектрического эффекта для преобразования одного вида энергии в другой, например, при использовании  $\gamma$ -активных изотопов как основы в источниках электрического тока. В них применяют слои материалов с высоким и низким атомными номерами ( $Z$ ), т. е. материалы, обладающие различными коэффициентами фотоэффекта. Слои таких материалов образуют два полюса источника тока. Коэффициент полезного действия этого источника тока объясняется низким коэффициентом поглощения  $\gamma$ -излучения, а также малой (1% – 4%) эффективностью на один поглощенный  $\gamma$ -квант.

Основой для источников тока с  $\beta$ -излучением является генерация электрического тока в полупроводниковой ячейке благодаря образованию электронно-дырочных пар и их разделению в области  $p-n$ -перехода. Характерное значение тока  $I_s$  в этом процессе определяется выражением

$$I_s = mI_b, \quad (4.16)$$

где  $m$  – фактор умножения тока;  $I_b$  – ток  $\beta$ -излучения.

Максимальное значение напряжения можно получить из следующего выражения

$$V_{\max} = \frac{k_b T}{e} \ln \left( \frac{I_s}{I_0} + 1 \right), \quad (4.17)$$

где  $I_0$  – обратный ток насыщения.

Из указанных выражений видно, что характерное значение напряжения на одной полупроводниковой ячейке сравнимо с  $k_b T/e$ , т. е. представляет достаточно маленькую величину (менее одного вольта). Для увеличения напряжения используют многослойные структуры, а для повышения коэффициента полезного действия преобразования ядерной энергии в электрическую применяется также внешнее магнитное поле, воздействующее на образовавшиеся частицы (электроны, дырки). Понятно, что создание внешнего магнитного поля приводит к усложнению конструкции источника тока и к увеличению его массы. Как альтернативу атомным батареям с двумя электродами для гамма- и рентгеновского излучения используют полупроводниковый кристалл с трехмерной электронно-дырочной структурой. Слабым местом таких источников тока является разрушение  $p-n$ -перехода излучением. При значительном облучении  $\beta$ -частицами в каждом  $p-n$ -переходе возникают дефекты, приводящие далее к его повреждению и разрушению, что резко снижает коэффициент полезного действия источника. Если полезное время жизни  $p-n$ -перехода в обычных элементах (транзисторах, микросхемах и т.д.), проводящих электрический ток, составляет десятки тысяч часов, то полезное время жизни  $p-n$ -перехода в условиях жесткого облучения  $\beta$ -частицами будет намного меньше.

Атомная батарея с электронной эмиссией, вызываемой  $\beta$ -частицами, поглощаемыми в абсорбере, имеет относительно невысокий коэффициент полезного действия батареи в результате того, что большая часть энергии  $\beta$ -частиц расходуется в абсорбере. Другая модификация термоэмиссионного радиоизотопного источника тока содержит заполняемую радиоизотопным материалом емкость, покрытую снаружи слоем металла, выполняющего роль электронного эмиттера, и расположенную концентрически вокруг емкости металлическую оболочку, принимающую электроны, перетекающие с поверхности эмиттера. При излучении радиоизотопного материала выделяется тепло, которое вызывает термоэлектронную эмиссию электронов в направлении от расположенной внутри емкости к внешней металлической оболочке, а возникающий при этом электрический ток течет в обратном направлении. Привлекательность такого источника тока заключается в его простоте и значительных сроках работы. Однако его использование связано с рядом определенных

трудностей из-за низкого значения коэффициента полезного действия, необходимости поддержания в источнике высоких температур (свыше  $2000^{\circ}\text{C}$ ) и одновременного охлаждения его наружной оболочки.

На основе исследований, результаты которых представлены в первых трех подразделах, был предложен вторично эмиссионный радиоизотопный источник тока [авторское свидетельство СССР № 1737559 от 19.12.89 по классу H01J45/00], содержащий расположенный в герметичном вакуумированном корпусе слой радиоизотопа, по обеим сторонам от которого помещены металлические эмиттеры. Их толщина не превышает длины пробега в металле эмиттера заряженной частицы, излучаемой радиоизотопом. При этом каждый эмиттер выполнен в виде электрически изолированных вакуумными промежутками последовательно чередующихся слоев двух различных металлов, коэффициенты вторичной электронной эмиссии которых отличаются один от другого. Эффективность радиоизотопного источника тока такого типа определяется тем, что вторичные электроны образуются вдоль всего пути движения заряженной частицы в металле, т. е. энергия заряженной частицы непосредственно преобразуется в энергию электронов, количество и средняя энергия которых несоизмеримо выше, чем при термоэлектронной эмиссии. Ранее было установлено, что использование тяжелых частиц в источниках электрического тока приводит к высокому коэффициенту образования вторичных электронов из-за пренебрежимо малого рассеяния этих частиц, так как их движение практически прямолинейно. Функция распределения вторичных электронов — неравновесная, причем средняя энергия эмиттируемых вторичных электронов превышает 10 эВ. Коэффициент полезного действия источника увеличивается в результате повышения вторичной эмиссии под влиянием  $\delta$ -электронов (см. [81, 82]). Поэтому данный источник тока имеет высокие энергетические показатели, которые прямо пропорциональны количеству слоев эмиттера.

Так как общая толщина эмиттера не превышает длины пробега излучаемой радиоизотопом заряженной частицы, увеличить количество слоев, а значит, и коэффициент полезного действия эмиттера возможно только за счет уменьшения толщины каждого слоя. Однако, при уменьшении толщины слоев эмиттера они теряют свою конструкционную жесткость, в связи с чем может нарушиться их электрическая изоляция, например, при прогибе, когда сокращается вакуумный промежуток между ними. Позже был предложен вторично эмиссионный источник тока с достаточной конструкционной жесткостью эмиттера при одновременном уменьшении толщины его слоев [83–85]. Эмиттер состоит из последовательно чередующихся электрически изолированных слоев двух различных веществ (материалов) с неравными коэффициентами вторичной электронной эмиссии. Между слоями эмиттера расположены решетки из диэлектрического материала, предназначенные для электрической изоляции слоев и повышения жесткости конструкции эмиттера. При этом толщина диэлектрической решетки больше толщины слоя вещества

эмиттера. Для наилучших результатов при реализации изобретения решетка из диэлектрического материала (керамики или пластмассы) должна быть нанесена непосредственно на один из слоев эмиттера. Для повышения энергетической эффективности предложенного источника тока желательно один из чередующихся слоев эмиттера изготовить из металла, а другой слой – из полупроводникового материала с коэффициентом вторичной электронной эмиссии, превышающим коэффициент для металла первого слоя.

## РАЗДЕЛ 5. КИНЕТИКА ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОЙ СИСТЕМЫ КРИСТАЛЛА, НАХОДЯЩЕГОСЯ В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В шестидесятые годы XX века было обнаружено явление резкого уменьшения сопротивления металлов пластической деформации в случае возбуждения в них подсистемы электронов проводимости облучением быстрыми заряженными частицами или пропусканием электрического тока высокой плотности  $j=10^8 - 10^9$  А/м<sup>2</sup>. Оно не могло быть сведено к тривиальному термическому действию (в макроскопическом проявлении) тока, поэтому возникло предположение о существовании электрон-дислокационного взаимодействия, влияющего на механические свойства кристалла [86, 87].

Явление было предложено называть электропластическим эффектом. Механизм этого эффекта связывался с повышением подвижности дислокации в области источников, а поэтому с интенсификацией работы источников. В наиболее чистом виде электропластический эффект исследовался на металлических монокристаллах Zn, Cd, Sn, Pb [86]. Если в процессе деформации образцов этих материалов через них пропускать импульсы тока величиной  $10^2-10^3$  А/мм<sup>2</sup> при длительности последних  $10^{-4}$  с или облучать их ускоренными электронами в направлении скольжения, то обнаруживается уменьшение прочности, проявляющееся в виде спадов деформирующего напряжения, представляющих собой скачки этого напряжения. Осцилляции напряжения связаны со скачками пластической деформации объектов. Установлено, что синхронно с прохождением импульсов тока и спадом деформирующего усилия появляются группы полос скольжения, а также, то, что скачки деформирующего усилия намного меньше на участке квазупругой деформации,

чем за границей текучести. Эти осцилляции аномально высоки в районе границы текучести материала. Скачки деформирующего усилия на диаграммах уменьшаются при испытаниях в режиме релаксации напряжений. Характерной особенностью электропластического эффекта в монокристаллах является отсутствие температурной зависимости в широком интервале от 77 до 300 К.

Показано, что с увеличением энергии электронов за порогом выбивания атомов (в случае цинка  $E_{tr} \approx 0,7$  МэВ) на радиационную пластификацию металла накладывается эффект радиационного упрочнения благодаря созданию дополнительных стопоров для дислокаций в виде точечных дефектов и их ансамблей. При увеличении плотности электронов в одной посылке эффект радиационной пластификации сначала усиливается, а потом уменьшается. Спад эффекта объясняется влиянием возможного частичного вырождения электронного газа в металле на движение и взаимодействие дислокаций [87]. Показано, что активационный объем вследствие облучения металла электронами существенно не изменяется и увеличение скорости ползучести объясняется уменьшением времени (возрастанием частоты) процесса термоактивированного преодоления дислокациями препятствий [87].

### 5.1. Кинетическое описание эффекта электропластической деформации

Пластическая деформация (ПД) кристаллов, находящихся под внешней нагрузкой, в большинстве случаев осуществляется путем скольжения дислокаций [88]. При этом основное уравнение (соотношение Орована), определяющее кинетику ПД в плоскости скольжения имеет вид:

$$\dot{\epsilon} = b\rho_d V_d(\sigma^*, T), \quad (5.1)$$

где  $\dot{\epsilon}$  – скорость пластической деформации (ПД);  $\rho_d$  – плотность подвижных дислокаций;  $b$  – величина их вектора Бюргерса;  $V_d(\sigma^*, T)$  – средняя скорость перемещения дислокации на большие расстояния, зависящая от эффективного сдвигового деформирующего напряжения  $\sigma^* = \sigma - \sigma_i$  и температуры  $T$ ;  $\sigma_i$  – сдвиговые внутренние напряжения в плоскости скольжения (аналог сухого трения). В области достаточно низких  $\sigma^*$  движущаяся дислокация, сталкиваясь с локальными стопорами (примесными атомами или другими дефектами кристаллической структуры), может надолго зависать на них. Считается, что при не очень низких температурах механизм их преодоления дислокационными сегментами, термофлуктуационный. Тогда

$$V_d(\sigma^*, T) = l\nu(\sigma^*, T) = l\nu_0 \exp\left(-\frac{H(\sigma^*)}{k_b T}\right), \quad (5.2)$$

где  $l$  – среднее расстояние между стопорами;  $\nu(\sigma^*, T)$  – частота их преодоления. Явный вид  $H(\sigma^*)$  зависит от модели потенциального барьера, тормозящего скольжение дислокации (его высоты и формы), а также от распределения этих барьеров вдоль линии дислокации, но для обработки экспериментальных данных, как правило, принимают вид:

$$H(\sigma^*) = H_0 \left(1 - (\sigma^* / \sigma_{кр})^p\right)^q. \quad (5.3)$$

Если роль стопоров играют примесные атомы, то  $H_0$  – это энергетический параметр дислокационно-примесного взаимодействия;  $\sigma_{кр}$  – критическое напряжение безактивационного движения дислокации сквозь сетку примесных барьеров в плоскости скольжения;  $p, q$  – некоторые показатели степени, которые определяются при анализе экспериментальных кривых.

## 5.2. М а т е м а т и ч е с к а я м о д е л ь

Для количественного описания динамики электрон-фононной системы металлической пленки в работе [89] использовано важное упрощающее предположением о фермиевском виде изотропной части электронной функции распределения с зависящей от времени электронной температурой. Хотя авторы [89] и отмечают, что введение электронной температуры, будучи эквивалентно часто используемому предположению о мгновенной термализации электронной подсистемы, не всегда может быть строго обосновано. Так, в области очень низких температур  $T_e < T^*$  (характерная температура  $T^* \approx k_B \Theta_D^2 / E_F$ ,  $\Theta_D$  – температура Дебая), где электрон-электронные столкновения доминируют над электрон-фононными, электронная функция распределения термализуется за характерные времена электрон-электронного взаимодействия  $\tau_{ee}$ . В обычных сравнительно чистых металлах  $T^* \approx 1$  K, а в специально загрязненных пленках, где электрон-электронное взаимодействие усиливается из-за эффектов слабой локализации,  $T^*$  может быть порядка  $10^0$  K. При температурах  $T_e > T^*$  (но  $T_e < T^* < \Theta_D$ ) релаксация электронов в относительно толстых пленках происходит вследствие не прямого электрон-электронного взаимодействия, а косвенного, осуществляющегося через

обмен фононами. Ранее одним из авторов [89] было показано, что электронная функция распределения, близкая по виду к фермиевской, формируется и в относительно тонких пленках (из которых неравновесные фононы уходят в подложку без перепоглощения электронами) в результате лишь процесса излучения фононов «горячими» электронами. При рассмотрении использовалось достаточно сильное предположение о преобразовании всей полученной от электрического поля энергии в температуру электронов, что является необоснованным и, как будет видно из нашего дальнейшего рассмотрения при не малых напряженностях электрического поля, не соответствующим реальному решению задачи. В обоих случаях характерным временем термализации электронов является время электрон-фононных столкновений  $\tau_{ep}$ . Заметим также, что

в оптически толстых пленках однородность электронной температуры по толщине пленки обеспечивается быстрым уходом электронов из области скин-слоя и высокой электронной теплопроводностью по сравнению с фононной [88]. Вследствие дополнительного диффузионного уменьшения плотности «горячих» электронов скорость термализации электронной подсистемы существенно возрастает, и поэтому в оптически толстых пленках приближение мгновенной термализации дает хорошее согласие теории с экспериментом. В работе [89] рассматривался случай малых «нагревов», мы же при рассмотрении электропластического эффекта имеем дело с очень большими «нагревами», поэтому нам необходимо провести последовательное кинетическое рассмотрение как электронной, так и фононной подсистем, что и составляет основное содержание работ [90–92].

При кинетическом описании поведение электронов подчиняется уравнению Больцмана для функции распределения электронов  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  с соответствующими интегралами столкновений

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = I_{ee} + I_{ep} + I_{ed}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = e \left\{ \vec{\mathcal{R}}(\vec{r}, t) + [\vec{v}, \vec{B}(\vec{r}, t)] \right\},$$

где  $I_{ee}$  – интеграл столкновений электронов с электронами,  $I_{ep}$  – интеграл столкновений электронов с фононами,  $I_{ed}$  – интеграл столкновений электронов с примесями и дефектами решетки,  $\vec{v}$  – скорость,  $\vec{r}$  – радиус-вектор,  $\vec{p}$  – импульс электрона,  $t$  – время,  $\vec{\mathcal{R}}$  – напряженность электрического поля,  $\vec{B}$  – магнитная индукция,  $\vec{q}_p$  – импульс фонона.

В дальнейшем магнитное поле будем считать отсутствующим.

Функция распределения фононов также подчиняется кинетическому уравнению с интегралами столкновений:

$$\frac{\partial N_p(\vec{q})}{\partial t} + \vec{v}_q \frac{\partial N_p(\vec{q})}{\partial \vec{r}} = I_{pe} + I_{pp} + I_{pd}, \quad (5.4)$$

где  $I_{pe}$  – интеграл столкновений фононов с электронами,  $I_{pp}$  – интеграл столкновений фононов с фононами,  $I_{pd}$  – интеграл столкновений фононов с примесями и дефектами решетки,  $\vec{v}_q = \hbar \partial \Omega / \partial \vec{q}_p$  – скорость. Учитывая, что соударения электронов с примесями, фононами и дефектами приводят к изотропизации функции распределения электронов. Будем ее искать в виде

$$f(\vec{p}, t) = f[\varepsilon(p)] + \vec{f}_1(\varepsilon(p)) \frac{\vec{p}}{p}. \quad (5.5)$$

Учитывая, что при столкновениях электронов с фононами передача энергии очень мала, упростим интегралы столкновений электронов с фононами, а именно разложим изотропную часть функции распределения электронов по малой передаче энергии вплоть до квадратичных членов

$$\begin{aligned} f(\vec{p} \pm q_p) &\equiv f(E(\vec{p}) \pm \hbar \Omega(q_p)) = \\ &= f(E(p)) \pm \frac{\partial f(E(p))}{\partial E} \hbar \Omega + \frac{\partial^2 f(E(p))}{\partial E^2} \left( \frac{(\hbar \Omega)^2}{2} \right) \end{aligned}$$

и подставим это разложение в интегралы столкновений, что позволит их существенно упростить. Учитывая конкретный вид зависимости вероятности перехода  $w(q_p)$ , а также частот соударений фононов с фононами

$$\nu_{pp}(q_p), \quad w(q_p) = w_0 q_p, \quad w_0 = \frac{4\pi^2 m^2 \varepsilon_{1A}^2}{2(2\pi\hbar)^3 \rho} \quad \text{и} \quad \nu_{pp}(q_p) = \nu_{pp0} q_p^2,$$

где  $\nu_{pp0} = T^3 s / a_{gr} T_D M_c$ ,  $\hbar \Omega(q_p) = c_s q_p$ ,  $\varepsilon_{1A}$  – константа деформационного потенциала,  $T_{gr}$  – температура решетки,  $M_c$  – суммарная масса двух атомов.

Функции распределения как электронов  $f(\varepsilon)$ , так и фононов  $N(q_p)$  безразмерные величины, которые удовлетворяют таким условиям нормировки:

$$\frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty E^{1/2} f(E) dE = n, \quad (5.6)$$

где  $n$  – плотность электронов в валентной (она же у металлов является и зоной проводимости, так как она заполнена лишь частично).

$$\frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{1}{\hbar^3} \right) \int_0^{q_D} q_p^2 N(q_p) dq_p < \infty, \quad (5.7)$$

где  $q_D$  – дебаевский импульс фонона, который определяется из равенства  $k_B \Theta_D = c_s q_D$ . Конкретно далее все величины приведены для никеля (для которого можно сравнить расчеты с экспериментальными результатами [93])  $C_s = 5 \cdot 10^5$  см/с,  $\Theta_D = 375$  К, откуда максимальный импульс фонона будет  $103 \cdot 10^{-19}$  г см/с, плотность электронов в валентной зоне  $n = 2.5 \cdot 10^{22}$  см<sup>-3</sup>, плотность никеля  $\rho = 8.9$  г·см<sup>-3</sup>, постоянная решетки (расстояние между соседними атомами)  $a = 3.5 \cdot 10^{-8}$  см.

В состоянии термодинамического равновесия функция распределения электронов  $f(E)$  является функцией Ферми–Дирака:

$$f(E) = \left[ \exp \left( \frac{E - E_F}{k_B T_e} \right) + 1 \right]^{-1}, \quad (5.8)$$

где  $E_F = 5 \cdot 10^{-12}$  эрг,  $T_e$  – температура электронной компоненты (в экспериментах она составляла 20 К и 80 К) и совпадала с решеточной (фононной температурой) первоначально (до включения электрического поля  $\mathfrak{R} = 0.31$  CGSE (94 В/см)). По остаточному сопротивлению никеля  $\rho_{cur} = 3 \cdot 10^{-6}$  Ом см, находим частоту столкновений электронов с примесями и дефектами решетки  $\nu_{ed} = 3 \cdot 10^{13}$  с<sup>-1</sup>. Частота электрон-фоонных соударений зависит от величины импульса фонона следующим образом  $\nu_{ep} = \nu_{ep0} \cdot q_p / q_D$ ,

$\nu_{ep0} = 2 \cdot 10^{10}$  с<sup>-1</sup>. Так как численное интегрирование электрон-электронного интеграла соударений представляет большие трудности ввиду его нелинейности, а его роль состоит в перераспределении энергии, полученной от внешнего электрического поля, между электронами (квазитермализация), при интегрировании связанной системы для изотропных электронной и фононной функций распределения мы ограничились учетом только электрон-фоонного и фонон-электронного

интегралов соударений, но на временном промежутке  $t_{ee}$ , в течение которого вкладом интеграла электрон-электронных соударений можно пренебречь. При этом для времени  $t_{ee}$  взята оценка снизу из условия, чтобы энергия, выделяющаяся в проводнике при прохождении электрического тока, нагревала (предполагается, что электроны релаксировали за это время к термодинамически равновесному состоянию) электронную подсистему до температуры, соизмеримой с первоначальной, т. е.

$$\frac{\Re^2}{\rho_{cur}} t_{ee} = c_p \rho T_e, \quad (5.9)$$

где  $c_p = 25 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$  – удельная теплоемкость никеля. Из (5.9) получаем выражение для промежутка времени  $t_{ee}$

$$t_{ee} = c_p \rho T_e \frac{\rho_{cur}}{\Re^2}. \quad (5.10)$$

Для напряженности электрического поля  $\Re = 0.31 \text{ CGSE}$  ( $94 \text{ В/см}$ )  $t_{ee} = 45 \tau_{ep0}$ . В обратных частотах электрон-фононных соударений и предполагается измерять время в уравнениях для электронной и фононной функций распределения. Энергию электронов  $\varepsilon$  и фононов  $c_s q_p$  обезразмериваем на  $k_B T_e$ . Тогда система уравнений принимает вид:

$$\frac{\partial f(\tilde{p})}{\partial \tilde{t}} - \Delta \tilde{\varepsilon} \frac{1}{\tilde{p}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \left[ \tilde{p}^2 \frac{\partial f(\tilde{p})}{\partial \tilde{p}} \right] = \frac{1}{\tilde{p}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \times \quad (5.11)$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\tilde{p}} \frac{\partial f(\tilde{p})}{\partial \tilde{p}} \int_0^{2\tilde{p}} d\tilde{q}_p \tilde{q}_p^4 \left[ N(q_p) + \frac{1}{2} \right] + f(\tilde{p})(1 - f(\tilde{p})) \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \times \int_0^{2\tilde{p}} d\tilde{q}_p \tilde{q}_p^3 \right\} \\ \frac{\partial N_p(\tilde{q}_p)}{\partial \tilde{t}} = \int_{\tilde{q}_p/2}^{\infty} d\tilde{p} \tilde{p} \left\{ \frac{1}{\alpha} [f(\tilde{p})(1 - f(\tilde{p}))] + [N_p(\tilde{q}_p) + 1 - f(\tilde{p})] \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tilde{q}_p \frac{\partial f(\tilde{p})}{\tilde{p} \partial \tilde{p}} + \tilde{q}_p^2 \frac{\partial}{2 \tilde{p} \partial \tilde{p}} \frac{\partial f(\tilde{p})}{\tilde{p} \partial \tilde{p}} \right] \right\}, \quad (5.12)$$

$$\text{где } \tilde{t} = t v_{ep0}, \quad \Delta \tilde{\varepsilon} = \frac{e^2 \Re^2}{6 m v_{ep0} v_{ed} k_B T}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{2 m k_B T_e}}, \quad \tilde{q}_p = \frac{q_p}{\sqrt{2 m k_B T_e}},$$

$$\alpha = \frac{mc_s^2}{2k_B T}, \quad 0 \leq \tilde{q}_p \leq 42,5, \quad \Delta\tilde{\varepsilon} = 0.01, \quad 0 < \tilde{\varepsilon} \leq 1800, \quad 0 < \tilde{\varepsilon}_{ph} \leq 18,$$

$$0 < \tilde{q} \leq \tilde{q}_d = 42.5, \quad \alpha = \frac{8ms^2}{k_B T_e} = 0.7.$$

Интегрирование приведенной системы уравнений (5.11)–(5.12) проводилось с помощью полностью консервативных разностных схем. Консервативность схемы является обязательным требованием, так как она обеспечивает отсутствие накопления ошибок при расчетах на больших временах (см., например, [93]). Суть состоит в удовлетворении несколькими законам сохранения, в данном случае речь идет об удовлетворении законов сохранения энергии и частиц.

### 5.3. Результаты численного моделирования и их обсуждение

В результате проведенных численных расчетов были найдены нестационарные функции распределения электронов  $f(p)$  и фононов  $N_p(q_p)$  по импульсам. На рис. 5.1 представлена зависимость функции распределения электронов от безразмерного импульса в различные моменты времени.

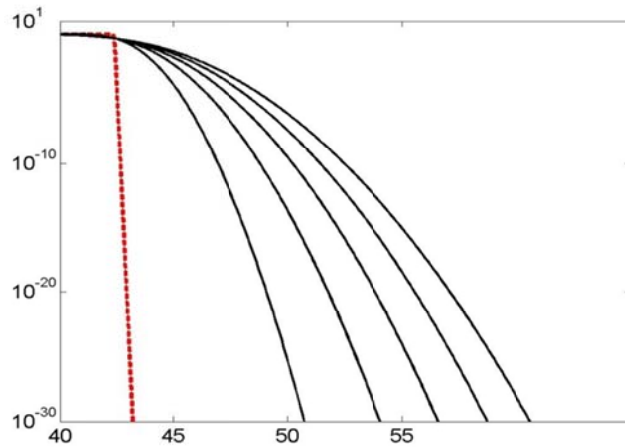


Рис. 5.1. Зависимость функции распределения электронов  $f(\tilde{p})$  в различные моменты времени ( $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ ) от безразмерного импульса  $\tilde{p}$ , кривые расположены слева – направо соответственно

Крайняя левая кривая соответствует термодинамически равновесной функции, которая взята в качестве начальной при решении системы уравнений (5.11)–(5.12).

Из рис. 5.1 видно (кривые с увеличением промежутка времени смещаются слева – направо), что со временем функция распределения электронов все более отличается от термодинамически равновесной.

Таким образом, установлено, что энергия, получаемая электронной подсистемой от внешнего электрического поля в результате электрон-фононных столкновений, частично (малая часть из-за квазиупругости электрон-фононных столкновений) передается фононной подсистеме, а большая часть идет не на установление термодинамически равновесной функции распределения электронов (как это часто предполагается (см., например, [89])), а на формирование интенсивных высокоэнергетичных «хвостов» у электронной функции распределения. Такое кардинальное изменение функции распределения электронов приводит к формированию фононной функции распределения с очень сильно обогащенной фононами с энергией, близкой к дебаевской (см., ниже рис. 5.2).

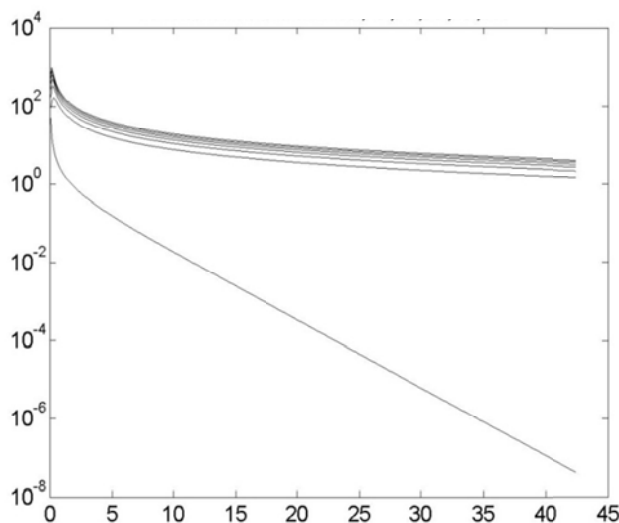


Рис. 5.2. Зависимость функции распределения фононов  $N(\tilde{q}_p)$  (в логарифмическом масштабе по оси ординат) в различные моменты времени ( $\tilde{q}_p = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ ) от безразмерного импульса  $\tilde{q}_p$ , кривые расположены снизу – вверх соответственно

Мы получили существенное отличие от результатов работы [93], в которой фононная функция распределения в этой области импульсов

практически соответствует функции Бозе–Эйнштейна, но с температурой, соответствующей температуре электронной подсистемы. Как показало наше численное моделирование, «температура» (точнее говорить, средняя энергия электронов, так как электронная функция распределения сильно отличается от термодинамически равновесной) электронной функции распределения изменяется незначительно, т. е. не происходит термализация полученной от электрического поля энергии, а формируются высокоэнергетические «хвосты», которые и приводят к такому кардинальному изменению фононной функции распределения. Как видно из рис. 5.2, у функций распределения фононов со временем формируются все более мощные высокоэнергетичные «хвосты», так как при электрон-фононных соударениях передается импульс при достаточно малой передаче энергии; рождается много фононов при дебаевской энергии, т.е. функция распределения фононов обогащается дебаевскими фононами. Далее мы проведем сравнение зависимостей произведения функции распределения фононов на куб безразмерного импульса для термодинамически равновесной ситуации (функция Бозе–Эйнштейна на рис. 5.3) и фононной функции в различные моменты времени после начала действия электрического поля (см. рис. 5.4).

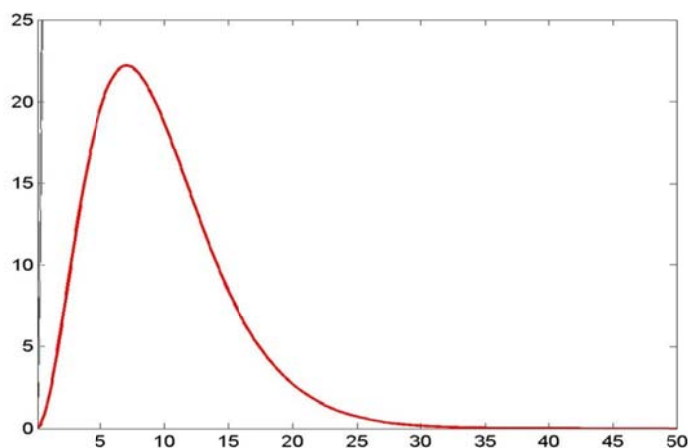


Рис. 5.3. Зависимость произведения термодинамически равновесной функции распределения фононов (функции Бозе–Эйнштейна (в момент времени  $t=0$ )) на куб импульса от безразмерного импульса  $\tilde{q}_p$

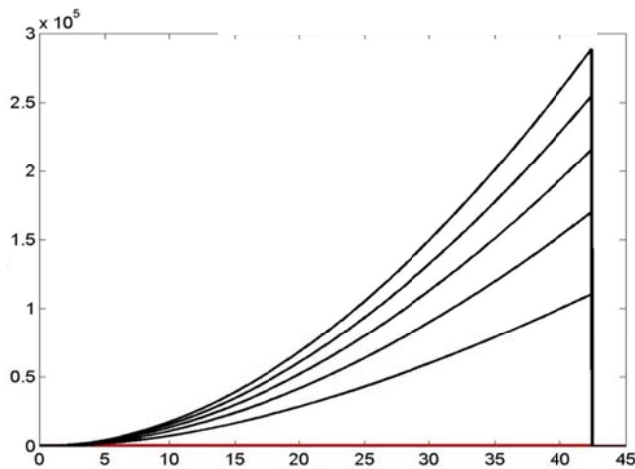


Рис. 5.4. Зависимость произведения функции распределения фононов  $N(\tilde{q}_p) \cdot \tilde{q}_p^3$  (в моменты времени  $\tilde{q}_p = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ ) на куб импульса от безразмерного импульса  $\tilde{q}_p$ , кривые расположены снизу-вверх соответственно

Таким образом, с помощью численного моделирования электрон-фононной системы, находящейся в сильном импульсном электрическом поле, используя полностью консервативные схемы, найдены неравновесные функции распределения электронов и фононов и показано:

- изотропизация электронной функции распределения происходит вследствие столкновений с дефектами решетки;

- функция распределения электронов не становится термодинамически равновесной, потому что электрон-электронные столкновения в данной ситуации дают существенно меньший вклад, чем электрон-фононные столкновения, а столкновения с «чужой» подсистемой не приводят к термализации;

- функции распределения электронов и фононов имеют высокоэнергетические «хвосты», потому что при электрон-фононных столкновениях передается импульс при достаточно

малой передаче энергии;

- рождается много фононов около дебаевской энергии, т. е. функция распределения фононов обогащается дебаевскими фононами.

Так на рис. 5.5 для иллюстрации приведена зависимость произведения функции распределения фононов на куб безразмерного импульса (в логарифмическом масштабе вдоль оси ординат) для термодинамически равновесной функции Бозе–Эйнштейна с температурой подложки (нижняя пунктирная кривая), стационарной фононной функции распре-

деления из работы [93] (сплошная кривая) и неравновесной фононной функции распределения из работы [91] (точечная кривая соответствует моменту времени  $t_{ee} = 50\tau_{ep0}$ , соответствующему характерному времени энергетической релаксации в результате межэлектронных столкновений) от безразмерного импульса (кривые расположены снизу–вверх соответственно) при действии электрического поля  $\mathfrak{R} = 96$  В/см для таких параметров: температура подложки  $T_b = 4.2$  К, толщина никелевой пленки  $d = 10^{-4}$  см, электронная температура, которая устанавливается согласно результатам работы [93], составляет  $T_e = 41.68$  К.

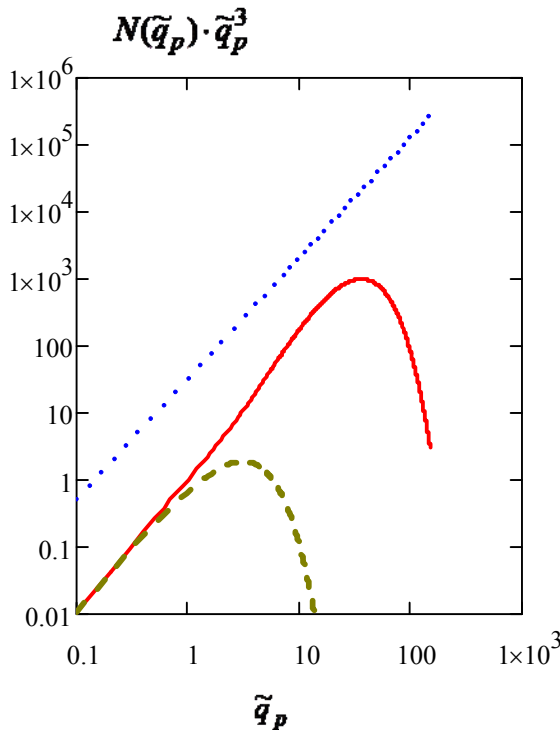


Рис. 5.5. Зависимость произведения функции распределения фононов на куб безразмерного импульса  $N(\tilde{q}_p) \cdot \tilde{q}_p^3$  (в логарифмическом масштабе вдоль оси абсцисс) для термодинамически равновесной функции Бозе–Эйнштейна с температурой подложки (нижняя пунктирная кривая), стационарной фононной функции распределения из работы [92] (сплошная кривая) и неравновесной фононной функции распределения из работы [91] (точечная кривая) от безразмерного импульса  $\tilde{q}_p$  (кривые расположены снизу – вверх соответственно) при действии электрического поля  $\mathfrak{R} = 96$  В/см

Из рис. 5.5 видно, что при действии электрического поля  $E = 96$  В/см кривая зависимости произведения функции распределения фононов на куб безразмерного импульса для термодинамически равновесной функции Бозе-Эйнштейна с температурой подложки практически совпадают с результатом для стационарной (частично неравновесного приближения) фононной функции распределения из работы [93] для фононов с малыми импульсами и достаточно сильно (почти на 2 порядка) отличается для фононов с большими импульсами, но как видно из рис. 5.5 это не приводит к существенному возрастанию эффективной температуры, которая и определяет эффекты электропластической деформации. Неравновесная фононная функция распределения из работы [91] дает произведение функции распределения фононов на куб безразмерного импульса во всей области импульсов фононов, что более чем на 2 порядка превышает произведение для частично неравновесной ситуации. Рассчитанный для неравновесной ситуации эффект снижения напряжения нагрузки находится в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

Проведем сравнение зависимости уменьшения напряжения нагрузки от плотности электрического тока, что пропускают через тонкий металлический образец при обеспечении стационарной скорости деформации (экспериментальная зависимость получена В. П. Лебедевым) с теоретической. Согласно рассмотрению модели Ландау–Гофмана [94] и формул (5.1)–(5.3) было получено для скорости пластической деформации такое выражение:

$$\dot{\varepsilon} = b\rho_d l\nu_0(T) \exp \left[ -\frac{bL^2\sigma_c^2}{4S\mu k_b T_{eff}(T)} \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_c} \right)^2 \right], \quad (5.13)$$

поскольку в экспериментах скорость деформации была стационарной, получаем соотношение между скачками нагрузки и эффективной температурой, выражение для которой приведено в [91].

$$\begin{aligned} \delta\sigma &= \sigma(j=0) - \sigma(j) = 10^{-8} \sigma_c \left[ \sqrt{a(j)T_{eff}(j)} - \sqrt{a(0)T_{eff}(0)} \right]; \\ a(0) &= a(T_{нач}); \\ T_{eff}(0) &= T_{eff}(T_{нач}), \quad \sigma_c = \frac{2}{bL} \frac{U_0}{x_c}; \quad a(T) = \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}_0(T)}{\dot{\varepsilon}} \right) \frac{4\mu S k_b}{bL^2 \sigma_c^2}; \\ \dot{\varepsilon}_0(T) &= b\rho_d l\nu_0(T), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где  $T(j)$  определяется через джоулев нагрев в равновесном случае, или через соответствующую эффективную температуру, которая определяется неравновесной фононной функцией распределения. Подставляя в

это соотношение параметры, отвечающие эксперименту, получаем теоретическую зависимость, которая вместе с экспериментальными данными приведена на рис. 5.5.

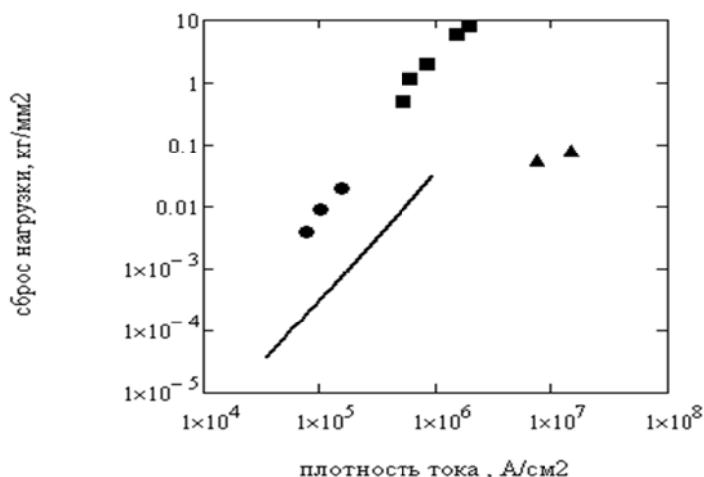


Рис. 5.6. Зависимость уменьшения нагрузки при постоянной скорости деформации от плотности тока. Сплошная кривая (джоулев нагрев), треугольники (неравновесное рассмотрение) – теоретические зависимости, звездочки (данные [871] при  $T_{\text{нач}} = 78\text{ K}$ ), а прямоугольники (данные, полученные Лебедевым при  $T_{\text{нач}} = 293\text{ K}$ ) – экспериментальные зависимости для

постоянной скорости деформации  $\dot{\epsilon} = 2.7 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  и таких параметров:

$$\rho_d = 10^8 \text{ см}^{-2}; l = 10^3 b; b = 3.52 \cdot 10^{-8} \text{ см}; \chi_c = 2b; U_0 = 8 \cdot 10^{-13} \text{ эрг};$$

$$L = 10^{-4} \text{ см}; \mu = 1.2 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2$$

Из проведенного анализа и рис. 5.5 и 5.6 видно, что зависимость уменьшения напряжения нагрузки при постоянной скорости деформации от плотности тока, которая удовлетворительно может описать экспериментальную зависимость, невозможно (разница составляет 2–3 порядка) получить ни из термодинамически равновесного подхода, ни из частично неравновесного, предложенного в работе [93].

Поэтому для пояснения аномальных электропластических свойств металлов и полупроводников, наблюдающихся в экспериментальных исследованиях, более перспективным является нахождение неравновесной функции распределения фононов, которая является решением рассмотренной двухкомпонентной электрон-фононной системы уравнений (5.11)–(5.12) [91, 92].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном обзоре представлено современное состояние исследований неравновесных стационарных и нестационарных распределений электронов с потоком по спектру в твердотельной плазме и их использования для разработки принципиально новых радиоизотопных источников тока.

На основе исследования интеграла столкновений Больцмана показано, что в однородной и изотропной среде для нерелятивистских заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона с учетом статической экранировки, для локализованных в импульсном пространстве источника и стока существует локальное стационарное неравновесное распределение частиц, отвечающее постоянному потоку энергии:  $f^{(i)}(p) = A_i I_i p^{2s_i}$ ,  $s_i = -(3D - 4/\beta + 2(i-1))/4$ , где  $D$  – размерность пространства,  $\beta$  – показатель степени в законе взаимодействия частиц ( $\beta=1$  для кулоновского взаимодействия), ( $s_{i=1} = -5/4$ ). Это стационарное неравновесное распределение является точным решением также для интеграла столкновений в форме Ландау. Для электронов в твердотельной плазме, взаимодействие между которыми описывается экранированным кулоновским потенциалом, может быть сформирована локальная неравновесная функция распределения, которая соответствует постоянному потоку энергии в импульсном пространстве. Аналитическое рассмотрение проведено для стационарных локализованных в импульсном пространстве источника и стока. Численное моделирование в рамках интеграла столкновений Ландау-Фоккера-Планка с помощью полностью консервативных разностных схем позволяет находить неравновесные функции распределения частиц для нелокализованных, нестационарных и несогласованных в импульсном пространстве источника и стока (как это имеет место, например, при ионизации прямыми столкновениями и кильватерными волнами). Определены условия существования и интенсивность потока энергии в импульсном пространстве, позволяющие сформировать неравновесную функцию распределения при энергиях электронов, превышающих энергию Ферми. Показано, как полученные результаты могут быть использованы для предсказания поведения полупроводников как с собственной, так и с примесной проводимостью при облучении их пучками быстрых ионов или лазерным излучением. Имеющиеся и приведенные результаты экспериментальных исследований энергетических и угловых распределений электронов вторичной эмиссии, индуцированной ионами, в том числе молекулярными ионами свидетельствует о важности ионизации кильватерными полями, возбужденными ионами. Экспериментальные результаты находятся в хорошем соответствии с теоретическими предсказаниями. На основе теоретических исследований неравновесных распределений электронов, индуцированных потоками ионов, в твердотельной плазме предложен новый способ преобразования

энергии радиоактивного распада в электрическую. Проведено подробное сравнение источника тока, базирующегося на этом способе, с существующими. Рассмотрены достоинства и недостатки каждого типа существующих радиоизотопных источников тока. Показаны преимущества предложенного источника тока и конкретный пример его реализации.

Исследован и установлен механизм электропластический эффект в рамках модели дислокационной струны, преодолевающей стопоры в результате возбуждения ее колебаний фононами. С помощью численного моделирования электрон-фононной системы, находящейся в сильном импульсном электрическом поле, используя полностью консервативные схемы, найдены неравновесные функции распределения электронов и фононов и показано, что функция распределения электронов и фононов имеют высокоэнергетичные «хвосты», т.е. рождается много фононов около дебаевской энергии, функция распределения фононов обогащается дебаевскими фононами.

На основе модели случайных толчков (в рамках метода Ланжевена), которые в нашей задаче совершают фононы, показано:

– термодинамический подход эффекта электропластической деформации описать не может;

– на основе найденной реальной функции распределения фононов, которая является решением двухкомпонентной электрон-фононной системы уравнений при действии на металл сильного импульсного электрического поля можно объяснить аномальные электропластические свойства металлов и полупроводников, наблюдающиеся в экспериментальных исследованиях, т.е. электропластический эффект.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В. Е., Карась В. И. Неравновесные колмогоровского типа распределения частиц и их приложения. // УФН, 2013, т. 131, в. 1, – С. 55–85.
2. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *ДАН СССР*, 1941, т. 30, N 4, – С. 299–303.
3. Захаров В. Е. Слабая турбулентность в средах с нераспадным спектром. // *ПМТФ*, 1965, N 4, – С. 35–43.
4. Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов. – М.: Наука, 1971. – 331 с; Rosenbluth M N, McDonald M, and Judd D. Fokker-Planck Equation for an Inverse-Square Force // *Phys. Review*. 1957. V. 107. – P. 1–6; Трубников Б. А. Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме / В кн. Вопросы теории плазмы (под ред. М.А. Леонтовича) – М.: Госатомиздат, 1963, N.1, – С. 98–182
5. Гуров К. П. Основы кинетической теории. – М.: Наука. 1966. – 351 с; Неравновесные явления. Уравнение Больцмана // Сб. статей /под редакцией Дж. Л. Лейбовица, Е. У. Монролла. – М.: Мир, 1968. – 269 с.
6. Чепмен С., Каулинг Е. Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960. – 295 с.
7. Ахизер А. И., Померанчук И. Я. *Некоторые вопросы теории атомного ядра*. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 328 с.
8. Кац А. В., Конторович В. М., Моисеев С. С., Новиков В. Е. Точные степенные решения кинетических уравнений для частиц // Препринт ИРЭ АН УССР. Харьков, ИРЭ N 42. – 1974. – 14 с.; Кац А. В., Конторович В. М., Моисеев С. С., Новиков В. Е. Степенные решения

кинетического уравнения Больцмана, описывающие распределения частиц с потоками по спектру // Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 21, N 1, – С. 13–15.

9. Карась В. И. Свойства и некоторые применения стационарных степенных распределений частиц в твердых телах // Письма в ЖТФ, 1975, в. 1(22), – С. 1020–1023.

10. Карась В. И., Моисеев С. С., Новиков В. Е. Механизм образования "быстрых электронов" эмиссии из металла, индуцированной лазером // Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 21, в. 9. – С. 525–528.

11. Кац А. В., Конторович В. М., Моисеев С. С., Новиков В. Е. Точные степенные решения кинетических уравнений для частиц // ЖЭТФ, 1976, т. 71, в. 1(7), – С. 177–193.

12. Карась В. И., Моисеев С. С., Новиков В. Е. Неравновесные стационарные распределения частиц в твердотельной плазме. //ЖЭТФ, 1976, т. 71, в. 4. – С. 1421–1433.

13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и преобразований – М.: Наука, 1971. – 1070 с.

14. Карась В. И. Неравновесные состояния и неустойчивости при взаимодействии ионных пучков с плотной столкновительной плазмой. Коллективные процессы при ускорении сильноточных ионных пучков в линейном индукционном ускорителе. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Харьков, 1988. – 32 с.

15. Карась В. И., Моисеев С. С., Шуклин А. П. Универсальные неравновесные распределения частиц в конечных энергетических интервалах. // УФЖ, 1980, т. 25, N 5. – с. 820–825; Karas' V. I., Moiseev S. S., Novikov V. E. Nonequilibrium power distribution functions of particles and their application. // Proc. XV Int. Conf. on phenomena in ionized Gases, 14–18 July 1981, Minsk. V. 1. – P. 73–74.

16. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656с.; Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука, 1975. – 352с.; Bobylev A.V. The theory of the nonlinear spatially uniform Boltzmann equation for Maxwell molecules. Mathematical physics reviews, 1988, vol. 7, p. 111-233, Soviet Sci. Rev. Sect. C Math. Phys. Rev., 7, Harwood Academic Publ., Chur, 1988.

17. Potapenko I. F., Bobylev A.V., Azevedo C.A., Sakanaka P.H., Assis A.S. On the relaxation of cold electrons and hot ions //Phys. Of Plasmas. 1998. V. 5. – P. 36–44; Потапенко И. Ф., Чуянов В. А. О полностью консервативных разностных схемах для системы уравнений Ландау // Ж. выч. матем. и мат. физ. 1979, т. 19, – с. 458–463; Потапенко И. Ф., Чуянов В. А. Полностью консервативная разностная схема для двумерного уравнения Ландау // Ж. вычисл. матем. и мат. физ. 1980, т. 20, – С. 513–526.

18. Потапенко И.Ф. Численное моделирование столкновительных процессов на основе нелинейного уравнения Фоккера-Планка в задачах физики плазмы. Дискретное моделирование плазмы //Сборник трудов под ред. Ю. С. Сигова ИПМ АН СССР, Москва, 1990 – С. 197–223; Potapenko I. F., Bobylev A. V., Azevedo C. A., Assis A. S. Temperature relaxation in collisional nonequilibrium plasmas //Physica. A. 1998. V. 257. – P. 483–487.

19. Потапенко И. Ф., Чуянов В. А. Полностью консервативная схема для двумерного уравнения Ландау (анизотропные потенциалы Розенблута) // Ж. выч. мат. и мат. физ. 1982, т. 22, – С. 751–756.

20. Бобылев А. В., Потапенко И. Ф., Чуянов В. А. Кинетические уравнения типа Ландау как модель уравнения Больцмана и полностью консервативные разностные схемы // ЖВМ МФ, 1980, т. 20, с. 993–1004; Бобылев А. В., Потапенко И. Ф., Чуянов В. А. Кинетические уравнения типа Ландау и полностью консервативные разностные схемы // ДАН СССР, 1980, т. 255, – С. 1348–1352.

21. Potapenko I. F., Bobylev A. V., Azevedo C. A., Assis A. S. Relaxation of the distribution function tails for gases with power-law interaction potentials //Phys. Rev. E. 1997, vol. 56, P. 7159–7166; Potapenko I. F., de Azevedo C. A. The completely conservative difference schemes for the nonlinear Landau-Fokker-Planck equation //J. of Comput. and Appl. Mathem. 1999, vol. 103, P. 115–123.

22. Карась В.И., Потапенко И.Ф. Численное моделирование формирования стационарных неравновесных распределений частиц, взаимодействующих по степенному закону // Физика плазмы. 2002, т. 28 (10), с. 908-918; Potapenko I. F., Bornatici M., Karas' V. I. Quasi steady-state distributions for particles with power-law interaction potentials // J. Plasma Physics. 2005, vol. 71. – P. 859–875.

23. Кононенко С. И., Балебанов В. М., Журенко В. П. и др. Неравновесные функции распределения электронов в плазме полупроводника, облучаемого быстрыми ионами. // Физика плазмы 2004. т. 30(8), – С. 722–738.

24. Гуржи Р. Н. Об учете взаимной корреляции электронов в металлооптике. // ЖЭТФ, 1958, т. 35, – С. 965–969.

25. Займан Дж. Электроны и фононы. – М.: ИЛ., 1962. – 607 с.

26. Термоэмиссионные преобразователи и низкотемпературная плазма. Сб. статей под редакцией Б. Я.Мойжеса и Г. Е.Пикуса. – М.: Наука, 1973. – 269 с.

27. Асеевская А. С., Ивкин Е. Б., Коломиец Б. Г. Проводимость халькогенидных стеклообразных полупроводников, обусловленная действием альфа-частиц // Письма в ЖТФ, 1976, т. 2, № 5. – С. 305–310.

28. Knecht W. L. Initial energies of laser-induced electron emission from W // *Appl. Phys. Lett.* 1965. V. 6. N 2. – P. 96–101.
29. Knecht W. L. Laser-induced spontaneous electron emission rear side of metal foils // *Appl. Phys. Lett.* 1966, vol. 8, N 10, – P. 254–256.
30. Анисимов С. И., Имас Я. А., Романов Г. С., Ходыко Ю. В. Действие излучения большой мощности на металлы. – М.: Наука, 1970. – 272 с.
31. Анисимов С. И., Иванов М. Ф. О численном моделировании динамики плазмы в переменном электрическом поле // *ДАН СССР.* 1975, т. 225 (2), – С. 280–283.
32. Баско М. М., Соколовский М. В. Нагрев плазмы пучком тяжелых ионов // *Препринт ИТЭФ*, 1980, ИТЭФ № 177. – 11 с.
33. Калашников Н. П., Ремизович В. С., Рязанов М. И. Столкновения быстрых заряженных частиц в твердых телах – М.: Атомиздат, 1980. – 286 с.; Оцуки Е. Х. Взаимодействие заряженных частиц с твердыми телами. – М.: Мир, 1985. – 277 с.
34. Парилис Э. С., Кишеневский Л. М. К теории ионно-электронной эмиссии // *ФТТ*, 1961, т. 3, № 4. – С. 1219–1235.
35. Sternglass E. J. Theory of secondary electron emission by high speed ions // *Phys. Rev.* 1957. V. 108. № 1. – P. 1–12.
36. Каминский М. А. Атомные и ионные столкновения на поверхности металла. – М.: Мир, 1967. – 501 с.
37. Арифов У. А. Взаимодействие атомных частиц с поверхностью твердого тела. – М.: Наука, 1968. – 122 с.
38. Медвед Д., Штрассер Й. Кинетическая эмиссия электронов из твердых тел // *УФН*, 1967, т. 91, № 3. – С. 485–526.
39. Frischkorn H. J., Groeneveld K. O., Hoffman D., Koshar P., Latz A., Achader J. Ion induced electron ejection from solids // *Nucl. Instr. and Meth.* 1983. V. 214. N 1. – P. 123–128.
40. Петров Н. Н., Аброян И. А. Диагностика поверхности с помощью ионных пучков. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 237 с.
41. Аброян И. А., Еремеев М. А., Петров Н. Н. Возмущение электронов в твердых телах сравнительно медленными частицами // *УФН*, 1967, т. 92, № 1. – С. 105–152.
42. Дорожкин А. А., Петров Н. Н., Петров А. А. Энергетические спектры ионно-электронной эмиссии в малом и большом телесных углах // *Изв. АН СССР. Сер. Физическая*, 1976, т. 40, N 8, – С. 1687–1690.
43. Meckbach W., Braunstein G., Arista A. Secondary electron emission in the backward and forward direction from thin carbon transversed by 25–250 keV proton beams // *J. Phys. B.* 1975. Vol. 8. N 14. – P. L344–L348.
44. Hasselcamp D., Scharmann A. The ion-induced low energy electron spectrum from aluminium // *Surface Science.* 1982. Vol. 119, N 2–3. – P. L388–L392.
45. Hasselcamp D., Scharmann A. Molecular effects in ion-induced secondary electron spectra // *Phys. Lett.* 1983. Vol. 96A. N 5. – P. 259–262.
46. Hasselcamp D., Scharmann A., Hippler S. Molecular effects in energy spectra of ion-induced secondary electron from gold // *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res.* 1984. Vol. 82. N 2–3. – P. 475–478.
47. Krebs K. H. Recent advances in the field of ion-induced kinetic electron emission from solids. // *Vacuum.* 1983. Vol. 33. N 9. – P. 555–563.
48. Hasselcamp D., Lang K. G., Scharmann A., Stiller N. Ion induced electron emission from metal surfaces // *Nucl. Instr. And Meth.* 1981. Vol. 180. N 2–3. – P. 349–356.
49. Baragiola R. A., Alonso E. V., Oliva-Floria A. Electron emission from clean metal surfaces by low-energy light ions // *Phys. Rev. B.* 1979. Vol. 19. N 1. – P. 121–129.
50. Alonso E. V., Baragiola R. A., Ferron J., Jakas M. M., Oliva-Floria A. Z-dependence of ion induced electron emission from aluminium // *Phys. Rev. B.* 1980. Vol. 22. N 1. – P. 80–87.
51. Hasselcamp D., Scharmann A. Ion induced electron emission from carbon. // *Phys. St. Sol. (a).* 1983. Vol. 79. N 2. – P. K197–K200.
52. Holmen G., Svenson B., Buren A. Ion induced electron emission from polycrystalline copper // *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res.* 1981. Vol. 135. N 2–3. – P. 523–532.
53. Koyama A., Yagi E., Sakairi H. Secondary electron emission from Ni and Al by high-energy proton and alpha - particles bombardment // *Jap. J. Appl. Phys.* 1976. Vol. 15. N 9. – P. 1811–1812.
54. Koyama A., Schikata V., Sakairi H. Secondary electron emission from Al, Cu, Ag and Au metal targets under protons bombardment // *Jap. J. Appl. Phys.* 1981. Vol. 20. N 1. – P. 63–70.
55. Миронов Е. С., Неменов Л. М. Исследование эмиссии медленных электронов под действием протонов больших энергий. // *ЖЭТФ*, 1957, т. 32, в. 2. – С. 269–273.
56. Svenson B., Holmen G. Electron emission from aluminium and copper under molecular hydrogen ion bombardment // *Phys. Rev. B.* 1982. Vol. 25. N 5. – P. 3056–3062.

57. Frishkorn H. J., Groenveld K. O., Koshar P., Latz R., Schader J. Observation of heavy-ion-induced wake potential interference effects // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49, N 22. – P. 1671–1674.
58. Sternglass E. J. Backscattering of kilovolt electrons from solids // *Phys. Rev.* 1954. Vol. 95. N 2. – P. 345–358.
59. Garnir H. P., Dumont P. D., Baudinet-Robinet Y. Secondary electron emission from thin foils under fast ion bombardment // *Nucl. Instr. and Meth.* 1982. Vol. 202. N 1. – P. 187–192.
60. Бронштейн И. М., Фрайман Б. С. Функция распределения. Вторичная электронная эмиссия. – М.: Наука, 1969. – 407 с.
61. Mischler J., Benazeth N., Negre M., Benazeth C. Angular distributions of secondary electron emitted on Ar-polycrystalline Al collisions // *Surface Science.* 1984. Vol. 136. N 3. – P. 532–544.
62. Anno J. N. Secondary electron production from alpha-particles emerging from gold // *J. Appl. Phys.* 1963. Vol. 34. N 12. – P. 3495–3504.
63. Koyama A., Shikata V., Sakairi H., Yagi E. Dependence of secondary electron emission coefficient on Z1 in metal targets under bombardment with rare projections // *Jap. J. Appl. Phys.* 1982. Vol. 21. N 8. – P. 1216–1221.
64. Svenson B., Holmen G. Electron emission from ion bombarded aluminium // *J. Appl. Phys.* 1981. Vol. 52. N 11. – P. 6928–6933.
65. Schou J. Transport theory for kinetic emission of secondary electrons from solids // *Phys. Rev. B.* 1983. V. 27. N 5. – P. 2141–2173.
66. Батракин Е. Н., Залюбовский И. И., Карась В. И., Кононенко С. И., Мельник В. Н., Моисеев С. С., Муратов В. И. Экспериментальные исследования вторичной электронной эмиссии из тонких пленок, индуцированной alpha-частицами // *Поверхность.* 1986, N 12 – С. 82–86.
67. Батракин Е. Н., Залюбовский И. И., Карась В. И., Кононенко С. И., Мельник В. Н., Моисеев С. С., Муратов В. И. Исследования вторичной электронной эмиссии из тонких пленок Al, Cu, Be, индуцированной пучком протонов 1 МэВ // *ЖЭТФ*, 1985, т. 89, в. 3(9), – С. 1098–1101.
68. Бабенко В. А., Галушко Н. П., Залюбовский И. И., Карась В. И., Кононенко С. И., Моисеев С. С., Муратов В. И. Об экспериментальной проверке осуществимости неравновесных степенных распределений электронов в металлах // *ЖТФ*, 1980, т. 50, в. 4. – С. 848–850.
69. Готт Ю. В. Взаимодействие частиц с веществом в плазменных исследованиях. – М.: Атомиздат, 1978. – 271 с.
70. Агранович В. М., Даукеев Д. К., Конобеев Ю. В., Лебедев С. Я. Изучение энергетического спектра электронов, возникающих при прохождении alpha-частиц и осколков деления через тонкие пленки // *ЖЭТФ*, 1969, т. 57, в. 2(8), – С. 401–410; Агранович В. М., Даукеев Д. К., Лебедев С. Я., Михлин Э. Я. Энергетические спектры электронов, выбитых из тонких металлических мишеней при прохождении через них осколков деления // *ЖЭТФ*, 1971, т. 61, в. 4(10), – С. 1511–1521; Даукеев Д. К., Лебедев С. Я. Вторичная электронная эмиссия на отражение от осколков деления и alpha-частиц // *ФТТ*, 1970, т. 12, – С. 655–656.
71. Baragiola R. A., Dukes C. A., Riccardi P. Plasmon excitation in ion-solid interactions // *Nucl. Instr. and Meth.* 2001. Vol. B 182. – P. 73–87.
72. Соболева Н. А., Меламид А. Е. Фотоэлектронные приборы. – М.: Высшая школа, 1974. – 376 с.
73. Фоменко В. С., Подчерняева И. А. Эмиссионные и адсорбционные свойства веществ и материалов. – М.: Атомиздат, 1975. – 320 с.
74. Альфа, бета и гамма спектроскопия. /Сб. статей под ред. К. Зигбана. – М.: Атомиздат, 1969. Т. 1. – 546 с.
75. Прайс В. Регистрация ядерного излучения. – М.: ИЛ, 1960. – 437 с.
76. Кононенко С. И. Формирование неравновесных функций распределения электронов высокоэнергетичными ионами в твердотельной плазме. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Харьков, 1986. – 16 с.
77. Розбери Ф. Справочник по вакуумной технике и технологии. – М.: Энергия, 1972. – 456 с.
78. Журенко В. П., Кононенко С. И., Карась В. И., Муратов В. И. Диссипация энергии заряженной частицы в твердотельной плазме. // *Физика плазмы*, 2003, т. 29(2), – С. 150–156.
79. Карась В. И., Моисеев С. С. О возможности использования неравновесных распределений для создания радиационных катодов // *Препринт ХФТИ АН УССР, Харьков.* 1977, ХФТИ 77–24. – 11 с.
80. Карась В. И., Моисеев С. С. О преобразовании ядерной энергии в электрическую на основе неравновесных распределений. // *УФЖ*, 1979, т. 24, N 11, – С. 1724–1728.
81. Балебанов В. М., Карась В. И., Карась И. В., Кононенко С. И., Моисеев С. С., Муратов В. И., Нагучев О. Ю. Неравновесные стационарные распределения электронов с потоком по спектру в твердотельной плазме и их использование // *Препринт ИКИ РАН.* 1997, Пр. – 1974, – 39 с; Балебанов В. М., Карась В. И., Карась И. В., Кононенко С. И., Моисеев С. С., Муратов В. И.,

Нагучев О. Ю. Неравновесные стационарные распределения электронов с потоком по спектру в твердотельной плазме и их использование // *Физика плазмы*, 1998, Т. 24, в. 9, – С. 789–807; Балебанов В. М., Карась В. И., Кононенко С. И., Моисеев С. С., Муратов В. И., Нагучев О. Ю. Вторичноэмиссионный радиоизотопный источник тока // *Атомная энергия*, 1998, т. 84, в. 5. – С. 398–403; Balebanov V. M., Zhurenko V. P., Karas' V. I., Karas' I. V., Kononenko S. I., Moiseev S. S., Muratov V. I. The Research of Kinetic Electron Emission for Creation of New-Type Current Source // *Problems of Atomic Science and Technology. Issue: Plasma Electronics and New Acceleration Methods*. 2000. V. 1 (2). – P. 193–196.

82. Балебанов В. М., Карась В. И., Кононенко С. И., Моисеев С. С., Муратов В. И., Покровский В. Н., Сторижко В. Е. Вторично-эмиссионный радиоизотопный источник тока. – Авторское свидетельство N 1737559, 1992. Б.И. N 20/92.

83. Балебанов В. М., Карась В. И., Кононенко С. И., Моисеев С. С., Муратов В. И. Многослойный эмиттер для вторично-эмиссионного радиоизотопного источника тока. – Патент Российской Федерации N 2050626, 1995. Б.И. N 35/95.

84. Балебанов В. М., Карась В. И., Кононенко С. И., Моисеев С. С., Муратов В. И. Многослойный эмиттер для вторично-эмиссионного радиоизотопного источника тока. – Патент Российской Федерации N 2054742, 1995. Б.И. N 5/96.

85. Балебанов В. М., Карась В. И., Кононенко С. И., Моисеев С. С., Муратов В. И. Вторично-эмиссионный радиоизотопный источник тока. – Патент Российской Федерации №2050625 Б.И. N 35/95 (1995).

86. Троицкий О.А., Баранов Ю.В., Аврамов Ю.С. Шляпин А.Д. Физические основы и технологии обработки современных материалов. – Москва-Ижевск, 2004. – 590 с; В.Е. Громов, В.Я. Целлермайер, В.И. Базайкин. Электростимулированное волочение: анализ процесса и микроструктура. – М.: Недра, 1996. – 166 с.

87. Спицын В.И., Троицкий О.А. Электропластическая деформация металлов. – М.: Наука, 1985. – 160 с.

88. Косевич А. М. Теория кристаллической решетки (физическая механика кристаллов). – Харьков: Изд-во при ХГУ „Вища школа”, 1988. – 304 с.

89. Безуглый А. И., Шкловский В. А. Кинетика низкотемпературной электрон-фононной релаксации в металлической пленке после мгновенного нагрева электронов // *ЖЭТФ*, 1997, т. 111(6), – С. 2106–2133.

90. Карась В. И., Потапенко И. Ф. Квазистационарные функции распределения частиц для уравнения Ландау-Фоккера-Планка при наличии источников // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2006, т.46, №2– с. 307–317.

91. Карась В.И., Потапенко И.Ф. Динамика неравновесной электрон-фононной подсистемы для полупроводников и металлов в сильном электрическом поле // *ВАНТ Сер. Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение*, 2009, т. 4-2, – С. 150–157; Дубинко В. И., Карась В. И., Клепиков В. Ф., Остапчук П. Н., Потапенко И. Ф. Моделирование повышения пластичности материалов под действием импульсов электрического тока // *ВАНТ Сер. Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение*, 2009, т. 4-2, – С.158–166.

92. Захаров В. Е., Карась В. И. Неравновесные колмогоровского типа распределения частиц и их приложения // *ВАНТ. Сер. Ядерно-физические исследования* 2010, т. 2 (66), – С. 204–210.

93. Perrin N, Budd H. Phonon Generation by Joule Heating in Metal Films // *Phys Rev Lett*. 1972. Vol. 28(26). – P. 1701–1703.

94. Ландау А. И., Гофман Ю. И. Анализ процесса выхода дислокации из параболической потенциальной ямы на основе стохастического метода Ланжевена // *ФТТ*, 1974, т.16 (11), – С. 3427–3433.

95. Zakharov V., Dias F., Pushkarev A. Nonlinear Waves and Weak Turbulence // *Physics Reports*. 2004. V. 398 (1) – P. 1–65

96. Zakharov V. E. Nonlinear Waves and Weak Turbulence // *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 1998. V.182. – 197 P.

97. Musher S. L., Rubenchik A. M., Zakharov V. E. Kolmogorov spectra of turbulence. // *Physics Reports*. 1995. V. 252 (4). V. E. P. 178–274.

98. Zakharov V. E., L'vov V. S., Falkovich G. Kolmogorov spectra of turbulence I. Wave turbulence. – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 264 p.

99. Захаров В.Е. Колмогоровские спектры в задачах слабой турбулентности В сб.: Основы физики плазмы. Т. 2 с. 48-79 (М: Энергоатомиздат, 1984) [Zakharov V E *Kolmogorov spectra in weak turbulence problems*, Handbook of plasma physics. Vol.2. Basic plasma physics II, pp. 3-36 (1984). Ed. by A.A. Galeev, R.N. Sudan, North-Holland, 1984]

100. Конторович В.М. Линейные и нелинейные волны // *Радиофизика и радиоастрономия*, 2006, т. 11, – С. 5–75

УДК 532.5.01;

PACS numbers: 47.32.C, 47.20.Ky, 47.27.De, 52.30.-q.

## ЧАСТЬ IV

---

# ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ В ДВУМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

**А. В. Тур**

*Institut de Recherche en Astrophysique et Planetologie C.N.R.S.-U.P.S.,  
9, avenue Colonel-Roche 31028 Toulouse Cedex 4, France*

**В. В. Яновский**

*Институт монокристаллов, Национальная Академия Наук Украины,  
пр. Ленина 60, 61001 Харьков, Украина;  
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы 4, г. Харьков, 61022, Украина*

**В** обзоре обсуждаются глубокие проблемы вихревых состояний в гидродинамических средах. Большое внимание уделено новому типу точечных вихрей дипольного типа в двумерной гидродинамике несжимаемой жидкости. Получены уравнения движения произвольного количества точечных дипольных вихрей, взаимодействующих как друг с другом, так и с заданным количеством обычных точечных вихрей. Показано, что эти уравнения имеют гамильтонову природу и получен гамильтониан такой системы точечных вихрей. Предложена обобщенная скобка Пуассона, позволяющая придать этим уравнениям движения универсальный вид в формализме скобок Пуассона. Получены законы сохранения системы точечных вихрей и обсуждается вопрос об интегрируемости частных случаев небольшого числа вихрей. Показано, что система двух точечных вихрей, один из которых точечный дипольный вихрь, является точно интегрируемой. Детально исследованы все режимы движения такой системы вихрей. Большое внимание уделено обсуждению влияния границ, ограничивающих жидкость, на движение одиночного точечного дипольного вихря. Точные гамильтоновы уравнения движения получены для вихря вблизи плоской границы и для области внутри прямого угла. Показано, что такие вихри «отталкиваются» от границ. Этот эффект делает их

исключительно важными для ключевой проблемы переноса завихренности от границ в среду.

Кроме нестационарных движений точечных вихрей получены новые классы стационарных решений двумерных уравнений Эйлера. Обнаружен широкий класс нетривиальных решений, которые имеют вид вихревых ожерелий с рациональной завихренностью. Эти вихревые конфигурации имеют симметрию  $N$ -го порядка. При этом  $N$  не сингулярных вихрей располагаются симметрично вокруг точечного центрального вихря. Найдены параметры вихрей и характеристики особых точек. В явном виде представлены решения с симметрией до восьмого порядка включительно. Интересно подчеркнуть, что такие конфигурации, имея исключительно сложную структуру, при удалении от нее вписываются в простое вращение жидкости. Точечные дипольные вихри также приводят к новым стационарным течениям. Так были обнаружены стационарные вихревые решения, которые имеют сложные особые точки. Сложными особыми точками называются особые точки векторного поля, индекс которых больше единицы. Например, для точечного диполя индекс векторного поля равен двум. Для нахождения точных решений используется теория обобщённых функций. Построены решения с индексом особой точки равным трём. Такие решения возникают из-за слияния дипольной особенности и полюса  $n$ -ого порядка. Построены явные решения для полюсов шестого порядка включительно. Большое внимание уделено процессам генерации квазидвумерных крупномасштабных вихревых структур в стратифицированной жидкости под действием спиральной мелкомасштабной силы. Методом многомасштабного асимптотического разложения по малому числу Рейнольдса получены замкнутые усреднённые нелинейные уравнения Рейнольдса для крупномасштабных вихревых возмущений. Линейный анализ этих уравнений показал наличие крупномасштабной неустойчивости. В нелинейном режиме эта неустойчивость насыщается и порождает большое количество периодических вихревых структур. Среди этих структур присутствуют локализованные решения. К ним относятся решения в виде вращающегося солитона нового типа и кинка. Такие вихри должны играть важную роль в атмосферных процессах различных планет. В заключение доказано, что точечные вихри должны появляться и в других гидродинамических системах. Так, точечные вихри впервые были введены в двумерную электронную и ионную гидродинамику плазмы. Основой этого обобщения является представление уравнений двужидкостной гидродинамики плазмы в форме обобщённых интегралов в замороженности. Выражение обобщённой завихренности в виде суммы  $\delta$ -функций позволяет получить уравнения движения точечных вихрей в плазме. Показано, что эти уравнения имеют квазигамильтонов вид. Найдено, что имеется два типа точечных плазменных вихрей: ионный вихрь и электронный вихрь. Структура ионного точечного вихря близка к гидродинамической. В нем за пределами локализованного плазменного ядра присутствует дальное действие. Электронный точечный вихрь имеет

*локализованное плазменное ядро, за пределами которого поля экспоненциально убывают. В результате течения двумерной двужидкостной гидродинамики плазмы могут быть представлены как ансамбль ионных и электронных точечных вихрей. Это обстоятельство порождает большое число новых нелинейных задач в физике плазмы.*

## РАЗДЕЛ 1. ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ПРИРОДЕ

В современной гидродинамике огромную роль играют такие важные объекты, как вихри. Поэтому в этом разделе уместно упомянуть и о некоторых физических эффектах и явлениях в природе и технике, неразрывно связанных с вихревыми движениями. Если начать с описания наиболее известной окружающей нас среды, такой как атмосфера или океан, то следует начать с простого вопроса: откуда в этой среде вообще возникает движение? Ясно, что основным источником энергии является Солнце. Атмосфера служит специфической тепловой машиной, преобразующей тепловую энергию Солнца в движение среды. Механизм этой тепловой машины основан на возникновении конвективных вихрей при наличии вертикального градиента тепла в атмосфере. На этом принципе и работает самая мощная тепловая машина на Земле по превращению солнечной энергии в движения среды.

Другие крупномасштабные атмосферные вихри, имеющие характерные горизонтальные масштабы  $10^2 \div 10^3$  км называются циклонами и антициклонами. В циклоне давление воздуха понижено, а в антициклоне повышено. Циклоны и антициклоны в значительной степени определяют то, что принято называть погодой. Уже этого достаточно для понимания важности этих вихрей. Учитывая, что характерные размеры таких вихрей значительно превышают толщину атмосферы, их можно рассматривать в рамках двумерной гидродинамики. В атмосфере наблюдаются и более мелкомасштабные вихри. Перечисление их имен сразу наводит на мысль о катастрофических явлениях. Это ураганы, тайфуны и смерчи. Описание последствий эволюции этих вихрей можно найти на многих страницах книг, журналов и газет. Надо отметить, что под терминами «ураганы», «тропические циклоны» и «тайфуны», как правило, понимают одно и то же природное явление, которое сопровождается ливневыми дождями и устойчивыми ветрами с максимальной скоростью, превышающей 119 километров в час. Тропические циклоны Атлантического океана обычно называются ураганами, а в западной части Тихого океана – тайфунами. В центральной части таких вихрей наиболее низкое давление и малая скорость движения. Она называется «глаз тайфуна». «Глаз» окружен областью, состоящей из плотных облаков с большими, ураганскими скоростями вращения. Каждый

год эти вихри уносят тысячи жизней. Еще один катастрофический вихрь трагически известен под названием смерч, или торнадо, в Америке. Он отличается от урагана только небольшими горизонтальными размерами от нескольких метров до 3 км. Характерная максимальная скорость вращения в них может превышать скорость звука. Последствия этого широко известны. В Соединенных Штатах Арканзас, Канзас, Оклахома, Техас, Миссисипи, мощные торнадо производят ужасающие разрушения с огромным материальным ущербом, сопровождающимся человеческими жертвами. Говоря о менее известных вихрях, можно упомянуть огненные смерчи, возникающие при грандиозных пожарах. Так, при большом локальном выделении тепла мощные восходящие потоки раскаленного воздуха закручиваются сходящимися радиальными и азимутальными струями и поднимаются на большую высоту. Такие огненные смерчи наблюдались во время пожаров в Токио, при извержении вулкана Фудзияма, при лесных пожарах в Австралии. Другие, уже безобидные вихри, возникающие при локальном нагреве земли, получили название термики. Эти вихри поднимаются на большую высоту. Термики широко используются планеристами и парящими птицами для набора высоты без затрат энергии. Разумеется, если говорить об одном из наиболее знакомых вихрей, то нельзя упустить дымовые кольца, которые легко генерируют опытные курильщики. Однако, менее известно, что более искусны в генерации вихревых колец некоторые дельфины. Правда, возбуждают они уже вихревые кольца жидкости.

В океане также существуют крупномасштабные вихри с горизонтальными масштабами порядка  $10 \div 10^2$  км, которые можно назвать циклонами и антициклонами океана. Следует заметить, что Мировой океан усеян вихрями самых разнообразных масштабов. В частности, такими как относительно недавно обнаруженные в океане синоптические вихри с горизонтальными размерами от 100 до 400 метров. Кинетическая энергия, содержащаяся в этих вихрях, в сотни раз превышает энергию, которая содержится в крупномасштабных вихрях. Относительно недавно выяснилось, что вклад в перенос тепла океанических циклонов превышает его перенос атмосферой. Ранее предполагалось обратное. Интересные вихри рождает Гольфстрим. Наблюдение за ним показало, что течение постоянно образует меандры, которые увеличиваются в размерах и отделяются от течения в виде кольцевых вихрей. Эти вихри получили название «рингов». Ринги представляют собой конусообразную массу воды с характерным размером порядка 100 км, которая вращается со скоростью порядка 1 м/с. Иногда их скорость вращения может достигать и 20 м/с. Такой теплый вихрь долго мигрирует по Атлантическому океану, проходя за сутки несколько километров. Время жизни рингов, рожденных Гольфстримом, от 1 до 3 лет. За время своей жизни он успевает заплывать далеко на север. Интересно заметить, что подводная биологическая фауна в ринге путешествует вместе с ним, заплывает в такие области, где подобная фауна не встречается. Подобные ринги порождаются и другими океаническими течениями.

Если от океана перейти к Земным глубинам, то можно обнаружить вихревые движения, заставляющие работать еще одну тепловую машину. Ее «механизм» состоит из четырех крупных конвективных ячеек в верхней мантии, в основном в слое, который называется астеносферой. Движение материков связано с работой этой тепловой машины.

Разумеется, наличие вихрей не является прерогативой нашей планеты. Один из известных примеров был открыт еще 1665 году – это большое красное пятно Юпитера. Красное пятно Юпитера – самый большой планетарный вихрь в Солнечной системе. Он представляет собой антициклон с характерными размерами порядка 10000 км и скоростью «ветра», достигающей 500 км/ч. Период вращения вихря против часовой стрелки составляет 6 земных суток. Вихревая природа красного пятна Юпитера была надежно установлена космическими аппаратами «Вояджер», запущенными в 1977 году. Другой интересный пример планетарного вихря можно обнаружить у Венеры. Собственно, вся ее атмосфера увлечена в единый вихрь, вращаясь относительно планеты, со скоростью порядка 100 м/с. Это явление суперротации, обнаруженное и на некоторых других планетах и их спутниках, еще предстоит объяснить. Более понятными являются плазменные вихри, возникающие на Солнце, известные многим под названием солнечных пятен. Кроме них относительно недавно, в 2010 году на поверхности Солнца были обнаружены гигантские спиральные конвекционные вихри. Диаметр гигантских спиралей составляет около 100 тысяч километров, при этом они уходят почти на всю глубину конвекционного слоя звезды, то есть на треть ее радиуса. Эти вихревые потоки плазмы способны стабильно существовать на протяжении нескольких месяцев. Во Вселенной, разумеется, можно обнаружить и еще более крупные вихри. Самыми наглядными примерами, благодаря космическим телескопам типа Хаббла, могут служить спиральные галактики. Структура таких галактик определяется вихрями Россби, возбуждающими спиральные волны в галактическом диске.

Может показаться, что вихри появляются только на больших масштабах. Разумеется, это не так. Даже в маленьком газовом пузырьке, всплывающем в стакане газированной воды, скрывается вихрь, напоминающий вихрь Хилла. Этот вихрь влияет на скорость всплывания такого пузырька. В гидродинамике сверхтекучей квантовой жидкости огромное число явлений определяется квантовыми вихрями. Такие вихри очень напоминают обычные точечные вихри или вихревые нити с квантованной циркуляцией скорости. Подобные квантовые вихри также появляются и в сверхпроводящих средах. Их часто называют вихрями Абрикосова. Эти вихри индуцируют магнитное поле с квантующимся магнитным потоком.

Столь же разнообразна роль вихрей и в технике. При изложении хотя бы минимального числа примеров следует начать с авиации. Здесь мы сталкиваемся с двумя тесно связанными явлениями. Прежде всего, подъемная сила крыла самолета определяется наличием вихревых структур и при их отсутствии исчезает. Столь же очевидной является роль вихрей при создании тяги винтом самолета или корабля. Движение

рыб в жидкости возможно также благодаря генерации вихрей своеобразным двигателем. Роль механизма, создающего тягу, выполняет хвост. Его эффективность демонстрируют множество рыб, достигая скоростей движения в жидкости невозможной даже для большинства наземных животных, не говоря уже о технических средствах, созданных инженерами. Для демонстрации этих способностей можно привести меч-рыбу, которая плывёт со скоростью 130 км/ч, а тунец — 90 км/ч. Разумеется, вихри иногда приводят и к нежелательным явлениям. Например, известно, что за колесом турбины формируются вихревые структуры. Прецессия их может привести к катастрофическим последствиям для турбины. Еще одно досадное явление — это трение тел о среду. Величина трения при обтекании тел в определенных условиях определяется вихревыми движениями среды. Еще один пример широко используемого применения вихрей можно обнаружить в значительном увеличении передачи тепла через жидкость, возникающей при образовании конвективных вихрей в слоях жидкости. Также очевидны применения вихрей при разделении фракций в центробежных сепараторах и центрифугах. Столь же очевидны функции вихрей в вихревых горелках, центробежных форсунках. Можно упомянуть и процесс перемешивания жидкости, который интенсифицируется при возникновении вихревых движений. Это явление широко используется не только в технике, но и в быту. Наконец, трудно удержаться от упоминания генератора вихрей в виде простой игрушки, пистолета-генератора дымовых колец Zero Blaster компании Zero Toys.

Вихри — это нелинейные формирования, которые переносят не только энергию и импульс, но, в отличие от волн, и саму среду. Сложность этих объектов в определенной степени связана с отсутствием одномерного приближения и невозможностью линеаризации вихрей. Вихри — это существенно нелинейные многомерные объекты. Возможность одномеризации и линеаризации волн — это те два обстоятельства, которые позволили существенно продвинуться в создании теории волн и их взаимодействия. По этим причинам теория вихрей и их взаимодействия развиты еще не достаточно. Разумеется, существует определенный набор точных вихревых решений гидродинамических уравнений, однако сложность нелинейных уравнений в частных производных является существенным препятствием на пути создания теории вихрей и их взаимодействия. Приятным исключением является двумерная гидродинамика, в которой были достаточно давно обнаружены определенные вихри, названные впоследствии точечными вихрями. Роль таких вихрей оказалась исключительно важной. Прежде всего, такие вихри приводят к специфической дискретизации гидродинамики. Действительно, гидродинамика — это полевая наука, в которой основную роль играет поле скорости. Другими словами, это означает, что число степеней свободы гидродинамических объектов бесконечно.

Обнаруженные точечные вихри обладали удивительным свойством. Движение произвольного числа взаимодействующих точечных вихрей под-

чинялось конечномерной гамильтоновой системе уравнений. Гидродинамическое течение, порожденное такой конечномерной системой вихрей, однозначно восстанавливалось по определенным формулам и определялось характером движения точечных вихрей. Это означало существование перехода от бесконечномерной полевой системы к конечномерной гамильтоновой системе. Преимущества, возникающие при этом, огромны. Возникло огромное число исследований по изучению взаимодействий точечных вихрей, по поиску определенных стационарных устойчивых конфигураций таких вихрей. Были достигнуты обобщения на точечные вихри, движущиеся в ограниченных областях, занятых жидкостью, построена теория движения вихрей на сфере. Последнее имеет отношение к гидродинамике атмосферы, которую в определенном смысле можно рассматривать как двумерную. Предприняты исследования по изучению влияния волн на характер движения таких вихрей. Исследованы процессы переноса течениями, индуцированными конечным числом точечных вихрей. Обнаружены такие вихри в квантовых жидкостях и, соответственно, начат поиск других гидродинамических сред, в которых могут существовать обобщения точечных вихрей. Относительно недавно достигнут прогресс в обнаружении нового типа точечных вихрей в гидродинамике.

Всем этим современным достижениям и посвящается предлагаемый ниже обзор. Разумеется, в написании его играли роль научные интересы авторов и определенная ограниченность объема обзора. Предлагаемая ниже попытка – это компромисс между этими двумя факторами. В частности, поэтому некоторые важные вопросы изложены не достаточно полно и впоследствии им будет уделено более существенное внимание. Так, в обзоре полностью отсутствует обсуждение турбулентности двумерной гидродинамики. Столь важная и обширная тема заслуживает отдельного детального изложения.

В двумерной идеальной гидродинамике несжимаемой жидкости исключительно важную роль играют точечные вихри. Причина этого хорошо известна. Прежде всего точечные вихри претендуют на роль хорошо определенных квазичастиц. Это означает, что разнообразные течения двумерной идеальной жидкости могут быть представлены как движения, индуцированные системой взаимодействующих точечных вихрей [1]. Определенные ограничения этой идеологии обсуждаются, например, в [2]. Точечные вихри порождают интересные конечномерные динамические системы, тесно связанные с бесконечномерными полевыми системами гидродинамического типа. При этом даже небольшое число точечных вихрей обладает нетривиальными, а в некоторых случаях и экзотическими динамическими свойствами. Интересно отметить, что задача трех вихрей точно интегрируема [3], [4], в отличие от известной проблемы трех тел. Причина этого в том, что в гамильтоновой формулировке система вихрей имеет дополнительный закон сохранения [5]. Кроме этого, известен ряд специальных конфигураций и большего числа вихрей, для которых найдены точные решения (см. например [6]). Однако в случае общего положения доказано возникновение хаотического

поведения у четырех и более точечных вихрей [7], [8]. Следует отметить, что системы даже небольшого числа вихрей порождают довольно сложные течения, которые важны для описания переноса пассивной примеси [9].

## РАЗДЕЛ 2. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ В ДВУМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

### 2.1. Уравнения движения 2D сингулярностей

Точечные вихри можно рассматривать как частный случай сингулярных решений уравнений Эйлера. Поэтому в этом подразделе получим уравнения движения различного типа сингулярностей двумерных уравнений Эйлера. Начнем с уравнений движения несжимаемой идеальной жидкости в двумерном случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i}, \\ \operatorname{div} \vec{V} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Далее используем функцию тока  $\varphi$  бездивергентного поля скорости  $\vec{V}$ , которая определяется соотношением

$$V_i = \varepsilon_{ik} \partial \varphi / \partial x_k, \quad (2.2)$$

здесь  $i = 1, 2$ , а  $\varepsilon_{ik}$  – единичный антисимметричный тензор. Для поля скорости (2.2) условие бездивергентности автоматически выполняется. Исключая давление из уравнений (2.1), перейдем к хорошо известному уравнению [10]

$$\partial \Delta \varphi / \partial t + \{\Delta \varphi, \varphi\} = 0, \quad (2.3)$$

где  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа, а  $\{A, B\} = \varepsilon_{ik} \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial x_k}$  – скобка Пуассона. Физический смысл этого уравнения соответствует враще-

ности поля завихрённости  $\omega$  в среду и в двумерном случае оно принимает форму лагранжевого инварианта. Другими словами, величина  $\Delta\omega$  переносится движениями среды. В терминах функции тока  $\varphi$ , завихрённость  $\omega$  определяется известным образом, как

$$\omega = -\Delta\varphi. \quad (2.4)$$

Таким образом, согласно уравнению (2.3), заданная начальная завихрённость эволюционирует исключительно просто. Она просто переносится движениями среды, которые «индуцированы» этой завихрённостью. Далее основное внимание уделим локализованным состояниям завихрённости. Согласно теории обобщенных функций, самые общие локализованные в точке состояния описываются функциями, совпадающими с суммой  $\delta$ -функций и ее производных [11], [12]. Собственно, если вспомнить историю открытия обобщенных функций Дираком, то их основное предназначение и состояло в описании плотности заряда точечной частицы. В нашем случае используем их для описания распределения завихрённости точечного вихря. В соответствии с этим определим поле завихрённости, локализованное в конечном числе точек, используя обобщённые функции

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = & \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\nu}^{\alpha}(t)) + \sum_{\beta=1}^M D_m^{\beta}(t) \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_d^{\beta}(t))}{\partial x_m} + \\ & + \sum_{\gamma=1}^K \mu_{i_1 i_2}^{\gamma}(t) \frac{\partial^2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\mu}^{\gamma}(t))}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Другими словами, поле завихрённости представлено в виде суммы по точечным мультиполям. Греческие индексы в правой части нумеруют соответствующие объекты. Первая сумма соответствует обычным точечным вихрям;  $\Gamma_{\alpha}$  – интенсивность и  $\vec{x}_{\nu}^{\alpha}(t)$  – координата  $\alpha$ -го вихря. Вторая сумма соответствует точечным вихревым диполям;  $D_m^{\beta}(t)$  – дипольный момент и  $\vec{x}_d^{\beta}(t)$  – координата  $\beta$ -го точечного диполя. Последующие вклады соответствуют мультиполям более высокого порядка, например,  $\mu_{i_1 i_2}^{\gamma}(t)$  – квадрупольный момент. Квадрупольный момент это симметричный тензор с нулевым шпуром. Смысл обозначений, входящих в эти вклады, совершенно аналогичен описанным выше.

Из уравнения (2.5) легко получить явный вид функции тока

$$\begin{aligned} \varphi = & \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} \ln |\vec{x} - \vec{x}_v^{\alpha}(t)| + \sum_{\beta=1}^M D_{\beta}^{\beta}(t) \frac{(x_l - x_{ld}^{\beta}(t))}{|\vec{x} - \vec{x}_d^{\beta}(t)|^2} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{\gamma=1}^N \mu_{i_1, i_2}^{\gamma}(t) \frac{\partial^2 \ln |\vec{x} - \vec{x}_{\mu}^{\gamma}(t)|}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Естественно, введение завихренности в виде (2.5), как и в последующей функции тока (2.6), ещё не означает, что такие сингулярности существуют как решения гидродинамических уравнений. В этом следует убедиться непосредственной подстановкой функции тока в уравнение (2.3). Разумеется, входящие в правую часть функции относятся к обобщенным функциям. Дифференцирование таких функций осуществляется с учетом правил дифференцирования обобщенных функций [11], [12]. Подстановка соотношений (2.5) и (2.6) в уравнение (2.3) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} \left( \frac{dx_{vi}^{\alpha}(t)}{dt} - V_i \right) \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_v^{\alpha}(t))}{\partial x_i} - \\ & - \sum_{\beta=1}^M \frac{dD_{\beta}^{\beta}(t)}{dt} \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_d^{\beta}(t))}{\partial x_i} - \sum_{\beta=1}^M D_{\beta}^{\beta}(t) \left( \frac{dx_{di}^{\beta}(t)}{dt} - V_i \right) \frac{\partial^2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_d^{\beta}(t))}{\partial x_m \partial x_i} + \\ & + \sum_{\gamma=1}^N \mu_{i_1, i_2}^{\gamma}(t) \frac{\partial^2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\mu}^{\gamma}(t))}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} - \sum_{\gamma=1}^N \mu_{i_1, i_2}^{\gamma}(t) (\dot{x}_{\mu i}^{\gamma}(t) - V_i) \frac{\partial^3 \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\mu}^{\gamma}(t))}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_i} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь для краткости  $V_i = \varepsilon_{ik} \partial \varphi / \partial x_k$  — обозначает компоненты поля скорости, вычисленные с использованием потенциала (2.6), согласно уравнению (2.2). Разумеется, производная в этой сокращенной записи вычисляется в классическом смысле и не содержит обобщенных функций. Все обобщенные функции выписаны явно в уравнении (2.7). Кроме этого, для уменьшения громоздкости уравнений ограничимся выписыванием дипольных и квадрупольных вкладов. Учёт вкладов мультиполей более высокого порядка не содержит никаких дополнительных осложнений. Обратим внимание, что коэффициенты при производных от  $\delta$ -функций Дирака, входящих в уравнение, являются функциями как  $t$ , так и  $\vec{x}$ . Поэтому обращение их в соответствии с этим в нуль становится содержательным после преобразования коэффициентов с учетом свойств обобщенных функций. В качестве таких известных свойств (см. например [11], [12]) далее будем использовать

$$\alpha(\vec{x}) \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{A})}{\partial x_i} = \alpha(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{A}} \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{A})}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha(\vec{x})}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}=\vec{A}} \delta(\vec{x} - \vec{A}) \quad (2.8)$$

$$\alpha(\vec{x}) \frac{\partial^2 \delta(\vec{x} - \vec{A})}{\partial x_i \partial x_j} = \alpha(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{A}} \frac{\partial^2 \delta(\vec{x} - \vec{A})}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \alpha(\vec{x})}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}=\vec{A}} \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{A})}{\partial x_j} -$$

$$- \frac{\partial \alpha(\vec{x})}{\partial x_j} \Big|_{\vec{x}=\vec{A}} \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{A})}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \alpha(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\vec{x}=\vec{A}} \delta(\vec{x} - \vec{A}) \quad (2.9)$$

Использование этих соотношений позволяет получить коэффициенты при производных  $\delta$ -функций, зависящие уже только от времени. Преобразуем коэффициенты в уравнении (2.7), используя предыдущие соотношения, к удобному виду:

$$\sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} \left( \frac{dx_{vi}^{\alpha}(t)}{dt} - V_i \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_v^{\alpha}(t)} \right) \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_v^{\alpha}(t))}{\partial x_i} -$$

$$- \sum_{\beta=1}^M \left( \frac{dD_i^{\beta}(t)}{dt} - D_m^{\beta}(t) \frac{\partial V_i}{\partial x_m} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_d^{\beta}(t)} \right) \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_d^{\beta}(t))}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^M D_m^{\beta}(t) \left( \frac{dx_{di}^{\beta}(t)}{dt} - V_i \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_d^{\beta}(t)} \right) \frac{\partial^2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_d^{\beta}(t))}{\partial x_m \partial x_i} +$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^N \left( \dot{\mu}_{i_1, i_2}^{\gamma}(t) - \mu_{i_3, i_2}^{\gamma}(t) \left( \frac{\partial V_{i_1}(\vec{x})}{\partial x_{i_3}} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}^{\gamma}(t)} \right) - \right. \quad (2.10)$$

$$\left. - \mu_{i_1, i_3}^{\gamma}(t) \left( \frac{\partial V_{i_2}(\vec{x})}{\partial x_{i_3}} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}^{\gamma}(t)} \right) \right) \cdot \frac{\partial^2 \delta(\vec{x} - \vec{x}^{\gamma}(t))}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} -$$

$$- \sum_{\gamma=1}^N \mu_{i_1, i_2}^{\gamma}(t) \left( \dot{x}_{i_3}^{\gamma}(t) - \left( V_{i_3}(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}^{\gamma}(t)} \right) \right) \cdot \frac{\partial^3 \delta(\vec{x} - \vec{x}^{\gamma}(t))}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}} +$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^N \mu_{i_1, i_2}^{\gamma}(t) \left( \frac{\partial^2 V_{i_3}(\vec{x})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}^{\gamma}(t)} \right) \cdot \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}^{\gamma}(t))}{\partial x_{i_3}} + \dots = 0$$

Теперь коэффициенты зависят только от положений локализованных объектов и производной по времени от одной из их характеристик. Таким образом, обращение в нуль коэффициентов при соответствующих

производных  $\delta$ -функций по сути дают уравнения движения, взаимодействующих сингулярностей и уравнения эволюции их характеристик. При этом, если координаты и мультипольные моменты эволюционируют согласно этим уравнениям, то поле скорости, порождаемое функцией тока (2.6), является точным обобщенным решением уравнений несжимаемой, идеальной двумерной гидродинамики. Следует подчеркнуть, что вклады самовоздействия зануляются с учетом свойств обобщенных функций. Однако легко заметить, что зануление коэффициентов при обобщенных функциях, связанных с вихрями и диполями, порождает только уравнения движения вихрей и диполей и закон эволюции дипольного момента. Уже для квадрупольных вихрей ситуация принципиально меняется. Легко заметить, что кроме этого возникает большое число уравнений, требующих сильных ограничений на квадрупольные и более высокие мультипольные моменты (см. например последние приведенные вклады в уравнении (2.10)). Выполнение этих условий в случае общего положения возможно при обращении мультипольных моментов в нуль. Это означает, по сути, отсутствие точечных мультиполей. Таким образом, в двумерной гидродинамике только множество точечных вихрей и точечных дипольных вихрей являются точными обобщенными решениями.

Обратим внимание, что уравнения движения этих сингулярностей являются естественным физическим следствием вмерзновенности завихренности в движения среды. Так, скорость движения выбранной сингулярности совпадает со скоростью среды в точке её расположения, индуцированной всеми остальными сингулярностями. Менее очевидные уравнения получаются для изменения дипольных моментов сингулярностей со временем. Таким образом, приведем полную систему уравнений, описывающую эволюцию взаимодействующих точечных вихрей и точечных вихревых диполей:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_{vi}^{\alpha}(t)}{dt} = \varepsilon_{ik} \left\{ \sum_{\gamma \neq \alpha}^N \Gamma_{\gamma} \frac{(x_{vk}^{\alpha} - x_{vk}^{\gamma})}{|\bar{x}_v^{\alpha} - \bar{x}_v^{\gamma}|^2} + \right. \\ \left. + \sum_{\beta}^M D_l^{\beta}(t) \left( \frac{\delta_{lk}}{|\bar{x}_v^{\alpha} - \bar{x}_d^{\beta}|^2} - \frac{2(x_{vl}^{\alpha} - x_{dl}^{\beta})(x_{vk}^{\alpha} - x_{dk}^{\beta})}{|\bar{x}_v^{\alpha} - \bar{x}_d^{\beta}|^4} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_{di}^{\beta}(t)}{dt} = \varepsilon_{ik} \left\{ \sum_{\alpha}^N \Gamma_{\alpha} \frac{(x_{dk}^{\beta} - x_{vk}^{\alpha})}{|\bar{x}_v^{\alpha} - \bar{x}_d^{\beta}|^2} + \right. \\ \left. + \sum_{\gamma \neq \beta}^M D_l^{\gamma}(t) \left( \frac{\delta_{lk}}{|\bar{x}_d^{\beta} - \bar{x}_d^{\gamma}|^2} - \frac{2(x_{dl}^{\beta} - x_{dl}^{\gamma})(x_{dk}^{\beta} - x_{dk}^{\gamma})}{|\bar{x}_d^{\beta} - \bar{x}_d^{\gamma}|^4} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dD_i^\beta(t)}{dt} = D_m^\beta(t) \varepsilon_{ik} \left\{ \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \left( \frac{\delta_{km}}{|\vec{x}_d^\beta - \vec{x}_v^\alpha|^2} - \frac{2(x_{dk}^\beta - x_{vk}^\alpha)(x_{dm}^\beta - x_{vm}^\alpha)}{|\vec{x}_d^\beta - \vec{x}_v^\alpha|^4} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{\gamma \neq \beta}^M D_l^\gamma(t) \left( -\frac{\delta_{lk} 2(x_{dm}^\beta - x_{dm}^\gamma)}{|\vec{x}_d^\beta - \vec{x}_d^\gamma|^4} - \frac{\delta_{ml} 2(x_{dk}^\beta - x_{dk}^\gamma)}{|\vec{x}_d^\beta - \vec{x}_d^\gamma|^4} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\delta_{mk} 2(x_{dl}^\beta - x_{dl}^\gamma)}{|\vec{x}_d^\beta - \vec{x}_d^\gamma|^4} + \frac{8(x_{dl}^\beta - x_{dl}^\gamma)(x_{dk}^\beta - x_{dk}^\gamma)(x_{dm}^\beta - x_{dm}^\gamma)}{|\vec{x}_d^\beta - \vec{x}_d^\gamma|^6} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Система уравнений (2.11) – (2.13) дает систему уравнений, описывающих эволюцию взаимодействующих  $N$ -точечных вихрей и  $M$ -точечных дипольных вихрей [13]. Уравнение (2.11) при нулевых значениях дипольных моментов в точности переходит в систему уравнений, полученную для точечных вихрей (см. например, [1]). Система уравнений (2.12) – (2.13) при  $\Gamma_{\alpha} \equiv 0$  описывает эволюцию  $M$ -точечных дипольных вихрей.

## 2.2. Свойства системы, взаимодействующих вихрей

Обсудим некоторые общие свойства системы, взаимодействующих точечных вихрей и точечных вихрей дипольного типа. Система уравнений, определяющая их движение, сводится к уравнениям (2.11–2.13). Легко, убедившись, следуя [13], что система этих уравнений гамильтонова с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H = \sum_{\alpha \neq \beta}^N \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \ln |\vec{x}_v^{\alpha} - \vec{x}_v^{\beta}| + \sum_{\alpha, \beta}^{N, M} \frac{\Gamma_{\alpha} D_{\beta l} (x_{vl}^{\alpha} - x_{dl}^{\beta})}{|\vec{x}_v^{\alpha} - \vec{x}_d^{\beta}|^2} + \\ + \sum_{\substack{\beta < \gamma=1 \\ \beta \neq \gamma}}^M - \frac{2D_{\beta m} (x_{dm}^{\beta} - x_{dm}^{\gamma}) D_{\gamma l} (x_{dl}^{\beta} - x_{dl}^{\gamma}) - D_{\beta m} D_{\gamma m} (\vec{x}_d^{\beta} - \vec{x}_d^{\gamma})^2}{|\vec{x}_d^{\beta} - \vec{x}_d^{\gamma}|^4} \end{aligned} \quad (2.14)$$

где первая группа слагаемых соответствует энергии взаимодействия точечных вихрей, вторая группа – взаимодействию точечных вихрей и точечных дипольных вихрей, а третья группа – взаимодействию дипольных вихрей друг с другом. Уравнения движения (2.11–2.13), принимают следующий гамильтонов вид:

$$\Gamma_{\alpha} \dot{x}_{vi}^{\alpha} = \varepsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial x_{vk}^{\alpha}}, \quad (2.15)$$

$$\dot{x}_{di}^{\beta} = -\varepsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial D_k^{\beta}}, \quad (2.16)$$

$$\dot{D}_i^{\beta} = -\varepsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial x_{dk}^{\beta}}. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.15) является очевидным обобщением гамильтоновой структуры точечных вихрей. Канонически сопряжёнными переменными у вихрей являются их координаты. Для точечных дипольных вихрей канонически сопряжёнными переменными являются дипольные моменты и координаты вихря. Система уравнений (2.15–2.17) обладает законами сохранения [13], которые легко проверить непосредственной подстановкой

$$I_1 = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} x_{v1}^{\alpha} - \sum_{\beta=1}^M D_1^{\beta} = \text{const}, \quad (2.18)$$

$$I_2 = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} x_{v2}^{\alpha} - \sum_{\beta=1}^M D_2^{\beta} = \text{const}, \quad (2.19)$$

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} (\vec{x}_v^{\alpha})^2 - 2 \sum_{\beta=1}^M (\vec{D}^{\beta} \cdot \vec{x}_d^{\beta}) = \text{const}. \quad (2.20)$$

Эти законы сохранения в определённом смысле вполне аналогичны известным законам сохранения в системе только точечных вихрей. Естественным ещё одним законом сохранения является закон сохранения энергии системы  $H = \text{const}$ .

Систему уравнений (2.15–2.17) можно записать и в более симметричном виде [13], вводя следующую скобку Пуассона

$$\{A, B\} = \sum_{\alpha} \frac{1}{\Gamma_{\alpha}} \varepsilon_{ik} \frac{\partial A}{\partial x_i^{\alpha}} \frac{\partial B}{\partial x_k^{\alpha}} - \sum_{\beta} \varepsilon_{ik} \frac{\partial A}{\partial D_i^{\beta}} \frac{\partial B}{\partial x_{dk}^{\beta}} - \sum_{\beta} \varepsilon_{ik} \frac{\partial A}{\partial x_{di}^{\beta}} \frac{\partial B}{\partial D_k^{\beta}}. \quad (2.21)$$

Тогда гамильтоновы уравнения принимают обычный вид

$$\dot{x}_{vi}^{\alpha} = \{x_{vi}^{\alpha}, H\}, \quad (2.22)$$

$$\dot{x}_{di}^{\beta} = \{x_{di}^{\beta}, H\}, \quad (2.23)$$

$$\dot{D}_i^{\beta} = \{D_i^{\beta}, H\}. \quad (2.24)$$

Используя скобку Пуассона (2.21) легко проверить, что в инволюции находятся только три из приведенных выше инвариантов. Напомним, что свойство инволюции означает обращение в нуль скобки Пуассона от двух соответствующих величин. Действительно, для приведенных выше 4-х первых интегралов движения непосредственно проверкой легко получить

$$\{I_1, H\} = \{I_2, H\} = \{J, H\} = 0, \quad (2.25)$$

кроме этого,

$$\{I_1, I_2\} = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha}, \quad (2.26)$$

$$\{I_1, J\} = 2I_2, \quad (2.27)$$

$$\{I_2, J\} = -2I_1. \quad (2.28)$$

Другими словами, эти интегралы не находятся в инволюции. Однако, используя свойства скобки Пуассона, установим, что

$$\begin{aligned} \{I_1^2 + I_2^2, J\} &= \{I_1^2, J\} + \{I_2^2, J\} = 2I_1\{I_1, J\} + 2I_2\{I_2, J\} = \\ &= 2I_1 2I_2 - 2I_2 2I_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Таким образом, 3 первых интеграла движения  $H, J, I_1^2 + I_2^2$  находятся в инволюции [13], [15]. Частный случай этих законов сохранения для системы вихрей хорошо известны [1]. Согласно теореме Лиувилля для гамильтоновых систем – это означает, что система сингулярностей интегрируема в квадратурах только в случае трех степеней свободы. Нетрудно понять, что тогда точно интегрируемыми является случай двух взаимодействующих точечных вихрей (см., например [10]), случай трех взаимодействующих точечных вихрей [6, 14] и, наконец, случай взаимодействующих точечного вихря и точечного дипольного вихря [13], [15].

В заключение обсудим другие способы вывода уравнений движения точечных вихрей. С физической точки зрения существует два взгляда на такие объекты. Один из них заключается в рассмотрении их как сингулярных объектов или предельных объектов, второй предполагает выкалывание точек положения этих вихрей из фазового пространства. При этом основной проблемой остается проблема самовоздействия точечного вихря. Это довольно общая проблема, касающаяся практически всех точечных объектов в физике. Существует множество попыток вывода уравнений движения вихрей, используя варианты этих подходов. Попытка более подробного описания их предпринята в работе [16].

Следует заметить, что математические попытки «более строго» вывода уравнений движения таких объектов, как правило, только создают иллюзию строгости. Как говорил великий математик А. Н. Колмогоров: «Важно не то, что строго, а то, что правильно». В частности, например в работе [16] предлагается другой вывод уравнений движения дипольных точечных вихрей, исходя из интегральных законов сохранения. Этот вывод демонстрирует на самом деле, скорее доказательство согласованности частного случая более общих уравнений, полученных ранее в [13] с гидродинамическими законами сохранения. В работе [13] получены даже более общие уравнения движения взаимодействующих точечных вихрей и точечных диполей. На самом деле, такой интегральный подход, строго говоря, не является даже другим, т. к. приведенный выше подход с использованием обобщенных функций согласован, по своему определению, с интегральным подходом. Особое внимание обсуждению отсутствия самовоздействия локализованных вихрей уделим в разделе 9. Здесь заметим только, что в приведенном выше выводе члены с самовоздействием обращаются в нуль, как для точечных вихрей и абсолютно аналогично для точечных дипольных вихрей, благодаря свойствам обобщенных функций. Следует упомянуть еще одно замечание к работе [16], в которой уравнения, описывающие движения точечных вихрей в угловой области, рассматривается как новый тип уравнений движения вихрей. Это выглядит неестественным, если исходить из существования точечного вихря как физического объекта. Согласно подобной идеологии, уравнение движения электрона в конденсаторе также следовало бы считать новым типом, по сравнению с уравнением движения его в безграничной среде. С нашей точки зрения, это уравнения движения тех же объектов, но в других граничных условиях. В работе [16] для описания точечных вихрей использовался удобный язык комплексного анализа. Мы также будем использовать его в последующих разделах.

В принципе, использованный выше способ вывода уравнений для локализованных вихрей может быть использован и для других более сложных уравнений, например, для сжимаемой жидкости и для других гидродинамических сред. Ему можно придать совершенно естественную форму. Действительно, при поиске локализованных сингулярных объектов приходится рассматривать поле скоростей, содержащее степенные сингулярности. Если искать решения гидродинамических уравнений такого типа, то автоматически следует искать решения этих уравнений в классе обобщенных функций. Причина этого в том, что производные от таких функций могут состоять из двух частей, классической и добавки соответствующих обобщенных функций (см., например, [11], [12]). Таким образом, при подстановке такого поля скорости в гидродинамические уравнения появляются слагаемые двух типов. Один из них «обычные» функции со степенными сингулярностями, а второй это обобщенные  $\delta$ -функции и их производные. Разумеется, если говорить о решении уравнений, то должны обратиться

в нуль все вклады. При обращении в нуль функции со степенными сингулярностями возникает соотношение, определяющее скорость жидкости в зависимости от положений локализованных сингулярностей. Положения сингулярностей при этом остаются произвольными. Обращение в нуль обобщенных вкладов, которое достигается обращением в нуль множителей при обобщенных функциях и определяют уравнения движения положений сингулярностей и эволюцию их характеристик. Разумеется, если это не приводит к переопределенной системе уравнений, не имеющих решений. Проблема самовоздействия при этом сводится к проверке обращения в нуль этих вкладов. При этом существенную роль играют свойства обобщенных функций.

## РАЗДЕЛ 3. ДВИЖЕНИЕ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ

В этом разделе обсудим движение обычных точечных вихрей. Начнем с простого случая двух точечных вихрей.

### 3.1. О точной интегрируемости системы двух и трех вихрей

Уравнения движения таких вихрей получим из системы уравнений (2.11), (2.12), полагая отличными от нуля только мощность двух вихрей  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$

$$\begin{aligned}\frac{dx_i^1(t)}{dt} &= \varepsilon_{ik} \Gamma_2 \frac{(x_k^1 - x_k^2)}{|\vec{x}^1 - \vec{x}^2|^2}, \\ \frac{dx_i^2(t)}{dt} &= \varepsilon_{ik} \Gamma_1 \frac{(x_k^2 - x_k^1)}{|\vec{x}^2 - \vec{x}^1|^2}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Приведенная система уравнений является гамильтоновой с гамильтонианом, который получается при упрощении общего гамильтониана (2.14):

$$H = \Gamma_1 \Gamma_2 \ln |\vec{x}^1 - \vec{x}^2|.\tag{3.2}$$

Система гамильтоновых уравнений (3.1) полностью описывает взаимодействие двух точечных вихрей и определяет законы их движения.

Интересно отметить несколько необычных свойств этой гамильтоновой системы. Роль импульса в ней играет одна из координат. Это означает, что фазовое пространство ее совпадает с реальным пространством, в котором вихри движутся. Следствием этого является, например, отсутствие столкновений двух вихрей. Второе свойство – отсутствие лагранжиана, для этой системы лагранжевы подход неприменим. Таким образом, гамильтонова система уравнений для вихрей может служить необычным примером, когда уравнения движения возникают не из вариационного принципа. Система уравнений (3.1) имеет, кроме закона сохранения энергии, несколько дополнительных интегралов движения:

$$I_1 = \Gamma_1 x_1^1 + \Gamma_2 x_1^2 = \text{const} , \quad (3.3)$$

$$I_2 = \Gamma_1 x_2^1 + \Gamma_2 x_2^2 = \text{const} , \quad (3.4)$$

$$J = \Gamma_1 (\vec{x}^1)^2 + \Gamma_2 (\vec{x}^2)^2 = \text{const} . \quad (3.5)$$

Дополнительные законы сохранения имеют простую физическую интерпретацию.  $I_1$  – сохранение проекции координаты центра завихренности на ось  $x_1$ , а  $I_2$  – проекции координаты центра завихренности на ось  $x_2$ . Инвариант  $J$  дает аналог закона сохранения момента импульса. Три из этих инвариантов находятся в инволюции. Поэтому, воспользовавшись теоремой Лиувилля, можно утверждать, что системы двух и трех вихрей точно интегрируются<sup>3</sup>. Другими словами, задача трех тел для вихрей имеет точное решение. Этот факт был замечен еще Пуанкаре.

### 3.2. О возможных режимах движения вихрей

Обсудим теперь подробнее, какие режимы движения двух взаимодействующих вихрей возможны. Из закона сохранения энергии для двух вихрей следует сохранение расстояния между ними. Далее будем различать два случая: 1)  $\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} = 0$  и 2)  $\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \neq 0$  и ограничимся обсуждением вихрей равной интенсивности  $|\Gamma_1| = |\Gamma_2| \equiv |\Gamma|$ .

В первом случае двух вихрей одинаковой интенсивности, но разного знака завихренности характер их движения наиболее прост. Такая пара

<sup>3</sup> Теорема Лиувилля об интегрируемости гамильтоновых систем утверждает, что такая система интегрируема в квадратурах, если имеет независимые законы сохранения, находящиеся в инволюции, число которых совпадает с половиной размерности фазового пространства.

образует квазичастицу, которая распространяется прямолинейно с постоянной скоростью. Если выбрать, без потери общности, начальные положения вихрей  $x_{20}^1 = -a, x_{20}^2 = a$ , а  $x_{10}^1 = x_{10}^2 = 0$  (см. рис. 3.1), то из законов сохранения  $I_2$  и  $I_1$  следует

$$x_1^2 = x_1^1, \quad x_2^2 - x_2^1 = 2a, \quad (3.6)$$

причем здесь использовано, что  $\Gamma_2 = -\Gamma_1 = \Gamma$ . Тогда остается проинтегрировать уравнения

$$dx_1^1 / dt = \Gamma / 4\pi a, \quad dx_2^1 / dt = 0, \quad (3.7)$$

решения которых имеют вид

$$x_1^2 = x_1^1 = \Gamma \cdot t / 4\pi a, \quad x_2^1 = -a, \quad x_2^2 = a \quad (3.8)$$

и полностью описывают движение вихрей. Основным результат состоит в том, что такая вихревая пара движется с постоянной скоростью, которая прямопропорциональна величине завихренности  $\Gamma$  и обратно пропорциональна расстоянию между вихрями.

Рассмотрим второй случай  $\sum_\alpha \Gamma_\alpha \neq 0$  на простейшем примере  $\Gamma_2 = \Gamma_1 = \Gamma$ . Используем ту же начальную конфигурацию вихрей. Из законов сохранения следует, что

$$x_1^2 + x_1^1 = 0, \quad x_2^2 + x_2^1 = 0 \quad (x_1^1)^2 + (x_1^2)^2 + (x_2^1)^2 + (x_2^2)^2 = 2a^2, \quad (3.9)$$

упростив последнее равенство, получим

$$(x_1^1)^2 + (x_2^1)^2 = a^2. \quad (3.10)$$

Это означает, что два вихря одинаковой завихренности вращаются друг вокруг друга с радиусом вращения, определяемым начальными

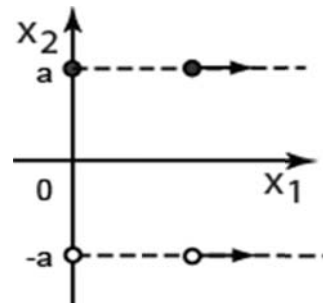


Рис. 3.1. Движение двух точечных вихрей противоположного знака завихренности

условиями. Частоту вращения  $\Gamma/(\pi a^2)$  легко получить из оставшихся уравнений движения. В общем случае не равных по величине завихренностей характер движения двух вихрей немного усложняется. Вихри вращаются по двум концентрическим окружностям радиусами  $R_1 = l \cdot \Gamma_1 / (\Gamma_1 + \Gamma_2)$  и  $R_2 = l \cdot \Gamma_2 / (\Gamma_1 + \Gamma_2)$  (здесь  $l$  – расстояние между вихрями) с определенной частотой (см., например, [10]).

Таким образом, мы изучили взаимодействие двух точечных вихрей в несжимаемой идеальной гидродинамике. Возникающее поле скоростей восстанавливается при известных законах изменения координат вихрей со временем, согласно соотношениям

$$V_1 = \sum_{\alpha} \frac{\Gamma_{\alpha}}{2\pi} \frac{(x_2 - x_2^{\alpha})}{(\bar{x} - \bar{x}^{\alpha})^2}, \quad (3.11)$$

$$V_2 = - \sum_{\alpha} \frac{\Gamma_{\alpha}}{2\pi} \frac{(x_1 - x_1^{\alpha})}{(\bar{x} - \bar{x}^{\alpha})^2}. \quad (3.12)$$

Более общий случай двух взаимодействующих вихрей разной интенсивности также легко исследовать (см., например, [6], [10]). Столь же детально исследованы движения трех взаимодействующих вихрей [3], [4],

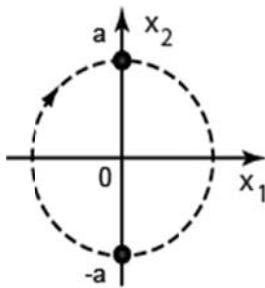


Рис. 3.2. Движение двух точечных вихрей с завихренностью одного знака

[17], [18]. Кроме этого, известно большое число специальных конфигураций вихрей, для которых удается найти точные решения [6]. Известны также и более сложные гидродинамические структуры, содержащие точечные вихри [19]. Однако, в случае общего положения системы вихрей, уже начиная с  $N \geq 4$ , не интегрируемы и в них возникают хаотические режимы или детерминированный хаос [8], [20], [21], [22].

В заключение раздела следует отметить, что модель взаимодействующих вихрей широко используется во многих физических задачах, связанных с обтеканием тел, срывов вихрей с кромок крыла самолета, образованием и эволюцией когерентных вихревых структур, двухмерной турбулентностью и во многих других случаях.

## РАЗДЕЛ 4. ЭВОЛЮЦИЯ ТОЧЕЧНОГО ОБЫЧНОГО ВИХРЯ И ТОЧЕЧНОГО ДИПОЛЬНОГО ВИХРЯ

Рассмотрим более детально взаимодействие точечного вихря и точечного вихревого диполя [15]. Как отмечалось ранее, задача о движении точечного вихря и точечного дипольного вихря относится к точно интегрируемой.

### 4.1 Уравнения движения взаимодействующих точечного вихря и точечного дипольного вихря

Для этого случая уравнения (2.11–2.13) упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_{di}}{dt} &= -\frac{\varepsilon_{ik}}{2\pi} \frac{\Gamma l_k}{l^2}, & \frac{dx_{vi}}{dt} &= -\frac{\varepsilon_{ik}}{2\pi} \left( \frac{D_k}{l^2} - 2 \frac{\vec{D} \cdot \vec{l}}{l^4} l_k \right), \\ \frac{dD_i}{dt} &= -\frac{\Gamma \varepsilon_{ik}}{2\pi} \left( \frac{D_k}{l^2} - 2 \frac{\vec{D} \cdot \vec{l}}{l^4} l_k \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

причем, здесь вектора  $\vec{x}_d$  и  $\vec{x}_v$  определяют положения точечного дипольного и обычного вихря, соответственно. Вектор  $\vec{l} = \vec{x}_d - \vec{x}_v$  определяет расстояние между ними. Естественно, как было показано выше, эта система уравнений обладает законами сохранения

$$d(\Gamma \vec{x}_v - \vec{D}) / dt = 0 \Rightarrow \Gamma \vec{x}_v - \vec{D} = \text{const} \equiv \vec{A}, \quad (4.2)$$

$$d(\Gamma(\vec{x}_v)^2 - 2\vec{x}_d \cdot \vec{D}) / dt = 0 \Rightarrow \Gamma(\vec{x}_v)^2 - 2\vec{x}_d \cdot \vec{D} = \text{const} \equiv B. \quad (4.3)$$

Интересно отметить важное следствие закона сохранения (4.2). Положение точечного вихря в любой момент времени однозначно определяется начальными условиями и вектором дипольного момента точечного диполя.

Значения постоянного вектора  $\vec{A}$  и постоянной  $B$  определяются начальными условиями. Далее удобно мощность вихря и дипольный

момент нормировать на  $2\pi$  без изменения обозначений ( $\Gamma/2\pi \rightarrow \Gamma$  и  $\bar{D}/2\pi \rightarrow \bar{D}$ ). Кроме этого, удобно перейти от системы уравнений в терминах координат к системе в терминах расстояния между диполем и вихрем  $\vec{l} = \vec{x}_d - \vec{x}_v$ . Число уравнений, описывающих взаимодействие вихря и диполя, после такого перехода сокращается до 4. С физической точки зрения, основную роль играет не абсолютные положения вихря и диполя, а их относительное расположение относительно друг друга. После перехода к этим переменным получим более простую систему уравнений

$$\frac{dD_i}{dt} = -\varepsilon_{ik}\Gamma \left( \frac{D_k}{l^2} - 2\frac{\bar{D} \cdot \vec{l}}{l^4} l_k \right), \quad \frac{dl_i}{dt} = -\varepsilon_{ik} \left( \frac{\Gamma l_k}{l^2} - \frac{D_k}{l^2} + 2\frac{\bar{D} \cdot \vec{l}}{l^4} l_k \right). \quad (4.4)$$

Для этой системы уравнений закон сохранения (4.3) с учетом (4.2), трансформируется в

$$\bar{D} \cdot (\bar{D} + 2\Gamma \vec{l}) = const \equiv \bar{A}^2 - \Gamma B = b. \quad (4.5)$$

Начнем анализ поведения вихря и диполя с изучения изменений величины расстояния между ними  $|\vec{l}|$  и величины дипольного момента  $|\bar{D}|$ . Для этого получим уравнения для  $|\vec{l}|^2$  и  $|\bar{D}|^2$ .

$$\frac{1}{2} \frac{d|\vec{l}|^2}{dt} = \frac{\varepsilon_{ik} l_i D_k}{l^2}, \quad \frac{1}{2} \frac{d\bar{D}^2}{dt} = 2\Gamma \frac{\bar{D} \cdot \vec{l}}{l^2} \frac{\varepsilon_{ik} D_i l_k}{l^2}. \quad (4.6)$$

Из закона сохранения (4.5) следует, что

$$2\Gamma \bar{D} \cdot \vec{l} = b - \bar{D}^2, \quad (4.7)$$

где  $b = \bar{D}_0^2 - 2\Gamma l_0$ . Уже из записи уравнений в такой форме легко обнаружить простое частное решение этой системы уравнений. Этот случай соответствует начальному условию  $\bar{D} \cdot \vec{l}|_{t=0} = 0$ . Другими словами, в начальный момент времени  $\vec{l}$  ортогонально дипольному моменту  $\bar{D}$ . Тогда из уравнения (4.6) следует сохранение величины дипольного момента со временем  $|\bar{D}|$ . Кроме этого из закона сохранения (4.5) следует сохранение ортогональности  $\bar{D}$  между  $\vec{l}$  со временем. Следовательно, уравнение для расстояния  $|\vec{l}|^2 \equiv l^2$  можно записать в виде

$$l dl / dt = D_0 / l ,$$

здесь  $D_0$  – начальная величина дипольного момента. Интегрируя это уравнение, легко получить частное решение

$$\vec{D} \cdot \vec{l} = 0, \quad D = D_0, \quad l^3 = 3D_0 t + l_0^3. \quad (4.8)$$

Это решение соответствует специальному случаю, когда дипольный момент направлен при  $t = 0$  ортогонально к направлению между вихрем и диполем. Угол между ними сохраняется в процессе эволюции. Тогда величина дипольного момента сохраняется, а расстояние между ними увеличивается пропорционально  $t^{1/3}$ . Таким образом, при начальной ортогональности  $\vec{l}$  и  $\vec{D}$  вихрь и точечный вихревой диполь удаляются друг от друга или взаимноотталкиваются.

В случае общего положения ( $\vec{D} \cdot \vec{l}|_{t=0} \neq 0$ ), используя систему уравнений (4.6), легко убедиться в наличии еще одного инварианта

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{D} \cdot \vec{l}}{l^2} \right) = 0 \Rightarrow \vec{D} \cdot \vec{l} = a l^2, \quad (4.9)$$

где  $a = \vec{D}_0 \cdot \vec{l}_0 / l_0^2$  определяется начальными условиями. Это означает, что величины  $\vec{D} \cdot \vec{l}$ ,  $\vec{D}^2$  и  $l^2$  связаны друг с другом. Знание начальных условий и одной из них достаточно для нахождения двух других величин (см. уравнения (4.5) и (4.9)).

Перейдем теперь к геометрически более естественным координатам. В качестве таких выберем расстояние  $l$  между точечным вихрем и диполем, величину дипольного момента  $D$  и угол  $\theta$  между векторами  $\vec{l}$  и  $\vec{D}$ . Система уравнений (4.4) в этих координатах принимает вид:

$$\begin{aligned} dl / dt &= D l^{-2} \sin(\theta), \quad dD / dt = -2\Gamma \cdot D \cdot l^{-2} \sin(\theta) \cos(\theta), \\ dDl \cos(\theta) / dt &= 2D^2 l^{-2} \sin(\theta) \cos(\theta). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Последнее уравнение, после использования предыдущих, определяет эволюцию угла  $\theta$ . Законы сохранения (4.9) и (4.7) в этих переменных запишем как

$$D \cos(\theta) / l = a, \quad D^2 + 2\Gamma D l \cos(\theta) = b.$$

Постоянные  $a$  и  $b$  определяются начальными условиями. Используя эти законы сохранения легко доказать, что

$$D^2 + 2\Gamma a l^2 = b.$$

Таким образом, в пространстве  $(l, D, \theta)$  траектории лежат на поверхности, качественный вид которой зависит от знаков  $\Gamma a$  и  $b$  (см., например, [23]). В свою очередь, знаки этих постоянных определяются начальными условиями. Так, если  $b > 0$  и  $\Gamma a > 0$ , то эта поверхность цилиндр с эллипсом в сечении. Разумеется, из-за положительной определенности  $l$  и  $D$ , физический смысл имеет только часть этой поверхности  $l \geq 0$  и  $D \geq 0$ . При  $b > 0$  и  $\Gamma a < 0$  эта поверхность имеет в сечении гиперболу. Аналогичный тип в сечении реализуется и при  $b < 0$  и  $\Gamma a < 0$ . Случай  $b = 0$  и  $\Gamma a < 0$  соответствует двум пересекающимся плоскостям. Задав эти поверхности параметрически с параметром  $s$  и найдя линии пересечения с поверхностью оставшегося закона сохранения, легко получить параметрический вид траекторий. Так, при  $b > 0$  и  $\Gamma a > 0$  эта траектория определяется как

$$D = \sqrt{b} \cos(s), \quad l = \sqrt{b/2\Gamma a} \cdot \sin(s), \quad \cos(\theta) = \sqrt{a/2\Gamma} \cdot \tan(s).$$

Разумеется, параметр  $s$  меняется в области, которая определяется неравенствами  $0 \leq \sqrt{\frac{a}{2\Gamma}} \tan(s) \leq 1$ . В этом случае возможные значения  $l$  и  $D$  положительны и ограничены сверху. Для получения точного решения достаточно установить пока неизвестную зависимость параметра  $s$  от времени. Область значений начальных условий, при которых реализуется этот тип траекторий, легко установить. На рис. 4.1 показаны все области начальных условий, соответствующие различным типам поверхностей и, соответственно, траекторий.

При  $b > 0$  и  $\Gamma a < 0$  параметрический вид траектории

$$D = \sqrt{b} \cosh(s), \quad l = \sqrt{b/2|\Gamma a|} \cdot \sinh(s), \\ \cos(\theta) = \sqrt{|a|/2|\Gamma|} \cdot \tanh(s).$$

Область изменения параметра  $s$  определяется условиями  $-1 \leq \sqrt{a/2\Gamma} \tanh(s) \leq 1$ . В этом случае  $l$  и  $D$  уже могут неограниченно нарастать. Остается обсудить область начальных условий, при которых  $b < 0$ . Легко понять, что область  $\Gamma a > 0$  не реализуется, а область  $\Gamma a < 0$  эквивалентна области  $b > 0$  и  $\Gamma a < 0$  с точностью до пере-

обозначений  $D \rightarrow \sqrt{2|\Gamma a|}l$  и  $l \rightarrow D / \sqrt{2|\Gamma a|}$ . Также просто решается вопрос о законе движения вдоль траектории. Для этого подставим параметрический вид траектории в уравнение движения и получим уравнение, определяющее зависимость параметра  $s$  от времени

$$d \sin(s) / dt = (2\Gamma a)^{3/2} \cdot [1 - (1 + a / 2\Gamma) \cdot \sin(s)^2]^{1/2} / b \sin(s)^2, \quad (4.11)$$

если  $b > 0, \Gamma a > 0$ ,

$$d \sin(s) / dt = (2\Gamma a)^{3/2} \cdot [1 + (1 - a / 2\Gamma) \cdot \sinh(s)^2]^{1/2} / b \sinh(s)^2, \quad (4.12)$$

если  $b > 0, \Gamma a < 0$ .

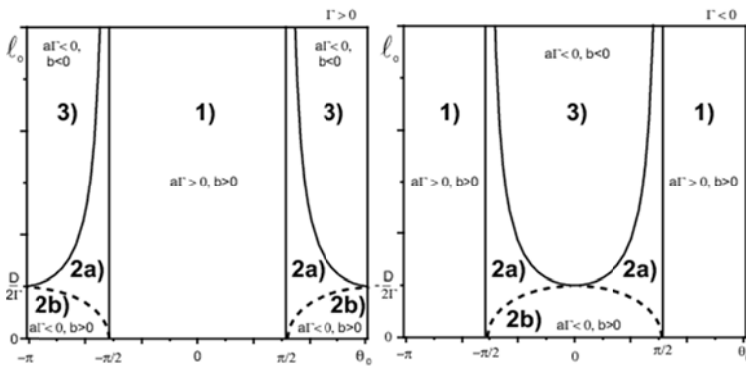


Рис. 4.1. На плоскости  $(l, \theta)$  показаны области знакопостоянства параметров  $b$  и  $a$ . Слева при  $\Gamma > 0$ , справа для  $\Gamma < 0$ . Область параметров  $b > 0$  и  $a\Gamma > 0$  обозначена 1). В областях 2a)  $b > 0$ ,  $a\Gamma < 0$  и  $|a|/2|\Gamma| < 1$  и 2b)  $b > 0$ ,  $a\Gamma < 0$  и  $|a|/2|\Gamma| > 1$ . Параметры в области 3) удовлетворяют неравенствам  $b < 0$ ,  $a\Gamma < 0$  и  $|a|/2|\Gamma| < 1$ . Граница между областями 2a) и 2b) соответствует  $|a|/2|\Gamma| = 1$ . Сплошная кривая, разделяющая области 2a) и 3) удовлетворяет условию  $b = 0$

Остается обсудить область параметров  $b < 0$  и  $\Gamma a < 0$ . В этом случае второй инвариант удобно записать как

$$D^2 - 2|\Gamma a|l^2 = -|b|,$$

откуда следует параметрический вид поверхности

$$D = \sqrt{|b|} \sinh(s), \quad l = \sqrt{|b|/2|\Gamma a|} \cdot \cosh(s),$$

а из первого инварианта зависимость угла  $\theta$

$$\cos(\theta) = \text{sign}(a) \sqrt{|a|/2|\Gamma|} \cdot \coth(s).$$

Естественно, подставляя такие зависимости в систему уравнений (4.10), получим уравнение для зависимости  $s$  от времени вида

$$\begin{aligned} \cosh(s)^2 d \cosh(s) / dt = \\ = b^{-1} (2|a\Gamma|)^{3/2} \cdot [(1 - |a|/2|\Gamma|) \coth(s)^2 - 1]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Эти нелинейные уравнения можно легко проинтегрировать в элементарных функциях. Ниже обсудим все эти режимы движения более детально.

#### 4.2. Режимы взаимодействия

Начнем с области параметров  $a\Gamma > 0$  и  $b > 0$ . В этой области параметров уравнение (4.11) удобно привести к простой форме, выполняя замену

$$y = \sqrt{\varepsilon} \sin(s).$$

Здесь введено обозначение  $\varepsilon = 1 + a/2\Gamma > 1$ . Обратим внимание, что величина  $y$  с точностью до постоянного множителя совпадает с величиной  $l$ . Другими словами,  $y = \sqrt{\varepsilon 2a\Gamma/b} \cdot l$ . Теперь, выполняя приведенную выше замену в уравнении (4.11), получим

$$y^2 \cdot dy / dt = b^{-1} \cdot (2\varepsilon a\Gamma)^{3/2} \cdot \sqrt{1 - y^2}. \quad (4.14)$$

Область допустимых значений величины  $y$ , как следует из этого уравнения, определяется неравенствами  $-1 \leq y \leq 1$ . Прежде чем интегрировать это уравнение, обсудим качественное поведение  $y$  от времени. Легко заметить, что граничные значения  $y = \pm 1$  соответствуют неподвижным точкам. Для анализа их типов изучим поведение решений в их окрестности. Начнем с точки  $y_* = 1$ .

Будем искать решение в виде  $y = 1 - \Delta y$ , предполагая отклонение от неподвижной точки малым  $\Delta y \ll 1$ . Тогда, сохраняя главный порядок по отклонению  $\Delta y$ , получим уравнение для  $\Delta y$

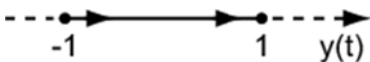
$$d\Delta y / dt \sqrt{\Delta y} = -2(2a\Gamma)^{3/2} b^{-1},$$

и решение этого уравнения

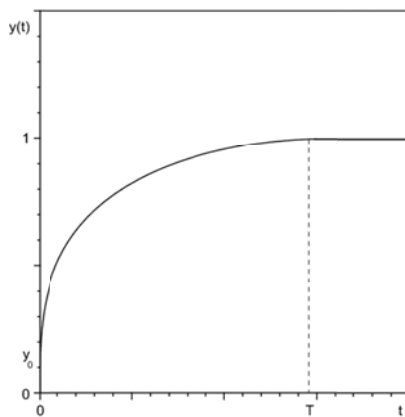
$$\sqrt{\Delta y} = -4b^{-1}(2a\Gamma)^{3/2}t + \sqrt{\Delta y_0}$$

показывает, что эта неподвижная точка вырождена и ее можно назвать устойчивым полуузлом (см. рис. 4.2). Слово полуузел означает, что векторное поле или правая часть уравнения (4.14) не определена при  $y > 1$ . Аналогично можно изучить поведение  $y = -1 + \Delta y$  в окрестности неподвижной точки  $y_* = -1$ . Уравнение для малых отклонений от нее, имеет вид:

$$d\Delta y / dt \sqrt{\Delta y} = 2(2a\Gamma)^{3/2} b^{-1},$$



*Рис. 4.2. На отрезке  $[-1, 1]$  оси  $y$  показано векторное поле, соответствующее уравнению (4.14). Вне этого отрезка векторное поле не определено. На концах отрезка расположены неподвижные точки: устойчивая справа и неустойчивая слева*



*Рис. 4.3. Изменение решения  $y$  от времени. После конечного времени релаксации  $T$  устанавливается постоянный режим  $y = 1$ . Физический смысл имеет только область  $y > 0$*

и решение

$$\sqrt{\Delta y} = 4b^{-1}(2a\Gamma)^{3/2}t + \sqrt{\Delta y_0}$$

указывает, что эта точка также вырождена и ее можно отнести к неустойчивому полуузлу (см. рис. 4.2). Таким образом, из общих соображений можно сказать, что в этом режиме со временем любое решение попадает

в неподвижную точку  $y_* = 1$  и эволюция прекращается. Другими словами, в результате взаимодействия возникает универсальное стационарное состояние.

Возвращаясь к уравнению (4.14), отметим, что оно интегрируется в элементарных функциях (см., например, [24]). Так его решение в неявном виде легко получить

$$\arcsin(y) - y\sqrt{1-y^2} = 2(2\varepsilon a\Gamma)^{3/2} b^{-1}t + C_0. \quad (4.15)$$

Вид этого решения приведен на рис. 4.3. Нетрудно увидеть, что поведение точного решения полностью соответствует качественным соображениям, приведенными выше. Интересной особенностью этого решения является конечность времени релаксации  $T$  в неподвижную точку. Из решения (4.15) это время легко получить

$$T = b \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin(y_0) + y_0 \sqrt{1-y_0^2} \right) / 2(2\varepsilon a\Gamma)^{3/2}. \quad (4.16)$$

Начальное условие  $y_0$  определяется начальными значениями  $l_0$ ,  $D_0$  и  $\theta_0$ . Напомним, что хотя уравнение (4.14) определено в области  $-1 \leq y \leq 1$ , но физически допустима более узкая область  $0 < y \leq 1$  из-за положительной определенности  $l > 0$  и  $D > 0$ . Поэтому, если начальное условие  $y_0 \approx +0$ , то время релаксации максимально и равно

$$T = \pi b / 4(2\varepsilon a\Gamma)^{3/2}. \quad (4.17)$$

Таким образом, в этом режиме (область параметров 1)  $a\Gamma > 0$  и  $b > 0$ ) в результате взаимодействия точечного вихря и диполя через конечное время релаксации устанавливается стационарное состояние, при котором

$$D = \sqrt{b} \cos(s_*), l = \sqrt{b/2a\Gamma} \cdot \sin(s_*), \cos(\theta) = \sqrt{a/2\Gamma} \cdot \tan(s_*),$$

где  $s_*$  определяется уравнением

$$\sin(s_*) = 1 / \sqrt{\varepsilon}. \quad (4.18)$$

Другими словами, за конечное время (4.16) величина дипольного момента, расстояние между вихрем и диполем, и угол между направлением дипольного момента и вектором, соединяющим вихрь с диполем,

строго определены и зависят только от значения инварианта  $a$  и мощности вихря  $\Gamma$ . Значение второго инварианта  $b$  определяет только величину времени релаксации в это состояние. Область исходных параметров, при котором реализуется этот режим, показана на рис. 4.1.

Перейдем к изучению второго режима при  $a\Gamma < 0$  и  $b > 0$ . Этот режим более разнообразный. Так в рамках общих неравенств  $a\Gamma < 0$  и  $b > 0$  следует различать три подобласти с качественно различным поведением (см. рис. 4.1). Первая подобласть 2а) ограничена условием

$$1 - |a|/2|\Gamma| > 0 \quad (4.19)$$

и вторая 2б) с противоположным неравенством на параметры

$$1 - |a|/2|\Gamma| < 0. \quad (4.20)$$

И наконец, граница раздела между ними, соответствующая наиболее простому случаю

$$1 - |a|/2|\Gamma| = 0. \quad (4.21)$$

Начнем со значений параметров, соответствующих неравенству (4.19). В этом случае также удобно выполнить замену переменных  $y = \sqrt{2\lambda|a\Gamma| \cdot b^{-1}} \cdot l = \sqrt{\lambda} \sinh(s)$ , где  $\lambda = 1 - |a|/2|\Gamma|$ . В этих переменных уравнение (4.12) принимает вид:

$$y^2 dy / dt = (2\lambda|a\Gamma|)^{3/2} b^{-1} \sqrt{1 + y^2}. \quad (4.22)$$

Легко заметить, что допустимые значения переменной  $y$  ограничены только положительностью значений  $D > 0$  и  $l > 0$ . Это приводит к условию  $y > 0$ . Также у этого уравнения отсутствуют неподвижные точки. Точное решение в элементарных функциях (см., например, [24]) легко получить

$$y\sqrt{1 + y^2} - \operatorname{arcsinh}(y) = 2(2\lambda|a\Gamma|)^{3/2} b^{-1} t + C_0. \quad (4.23)$$

Характерное поведение этого решения приведено на рис. 4.4.

Используя полученное решение, легко доказать, что при таких значениях параметров на больших временах величина  $S$  монотонно нарастает как

$$s(t) \simeq \ln \left( 2\lambda \sqrt{(2|a\Gamma|)^{3/2} \cdot b^{-1} \cdot t} \right).$$

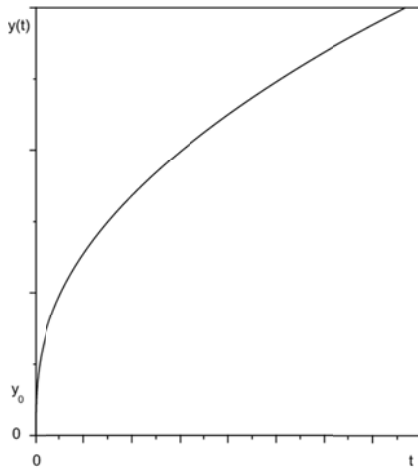


Рис. 4.4. График решения (4.23).  
Показано монотонное нарастание  $y(t)$

Естественно, это означает монотонное увеличение расстояния между вихрем и диполем, а также дипольного момента. При этом угол между направлением дипольного момента и вектором, соединяющим вихрь и диполь, стремится к универсальному значению  $\theta = \sqrt{|a|/2|\Gamma|}$ .

Перейдем теперь к анализу поведения системы в области параметров, соответствующих условию (4.20). Аналогично, выполняя другую замену в уравнении (4.12),

$$y = \sqrt{2\mu|a\Gamma|b^{-1}} \cdot l = \sqrt{\mu} \sinh(s),$$

где  $\mu = (|a|/2|\Gamma|) - 1$ , получим уравнение

$$y^2 dy / dt = (\mu 2|a\Gamma|)^{3/2} b^{-1} \sqrt{1-y^2}. \quad (4.24)$$

Вид этого уравнения совпадает с ранее проинтегрированным уравнением (4.14), поэтому решение легко привести

$$\arcsin y - y\sqrt{1-y^2} = 2(\mu 2|a\Gamma|)^{3/2} b^{-1} t + C_0, \quad (4.25)$$

здесь  $C_0$  – постоянная интегрирования, определяемая начальным условием. Различие между этими двумя случаями состоит в виде замены переменных. Естественно, область допустимых значений  $y > 0$ . Правая часть уравнения (4.24) обращается в нуль в неподвижной точке  $y = 1$ . Которая, согласно проведенному ранее анализу, – устойчивый полуузел (см. рис. 4.2). Поведение решения показано на рис. 4.3. Естественно, оценка конечного времени релаксации  $T$  в состояние  $y = 1$  получается совершенно аналогично

$$T = b \cdot (\mu 2 |a\Gamma|)^{-3} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin(y_0) + y_0 \sqrt{1 - y_0^2} \right),$$

где  $y_0 = y(t)|_{t=0}$  – начальное условие. Таким образом, при этих условиях после конечного времени релаксации устанавливается универсальное состояние

$$D = \sqrt{b} \cosh(s_*), \quad l = \sqrt{b / 2\mu |a\Gamma|}, \quad \cos(\theta) = \sqrt{|a|/2|\Gamma|} \cdot \tanh(s_*),$$

здесь значение  $s_*$  определяется из уравнения

$$\sinh(s_*) = 1 / \sqrt{\mu}.$$

После выхода в это состояние его эволюция прекращается. Теперь осталось изучить простой случай  $1 - |a|/2|\Gamma| = 0$ . При таких значениях параметров уравнение (4.12) существенно упрощается и принимает вид

$$d \sinh(s) / dt = (2|\Gamma a|)^{3/2} b^{-1} \cdot \sinh(s)^{-2}. \quad (4.26)$$

Решение этого уравнения легко найти:

$$\sinh(s)^3 = 3b^{-1} (2|\Gamma a|)^{3/2} t + \sinh(s_0)^3.$$

Таким образом, в этом случае реализуется частное решение (54), рассмотренное ранее. Тем самым исчерпаны все режимы поведения взаимодействующих точечного вихря и точечного диполя в области параметров обозначенной как 2а) и 2б) на рис. 4.1.

Рассмотрим теперь более редкий режим (при  $a\Gamma < 0$  и  $b = 0$ ) эволюции системы точечный вихрь – диполь. Параметры, при которых он реализуется, лежат на 2-мерном многообразии и не занимают трехмерной области в пространстве  $(l, D, \theta)$ . При этих значениях параметров инвариант (4.5) приводит к связи между расстоянием и величиной дипольного момента вида

$$D = \pm \sqrt{2|a\Gamma|} l.$$

Знак « $\pm$ » физически запрещен благодаря положительности  $l$  и  $D$ . Подстановка этой связи в систему уравнений (4.10) приводит к следующим уравнениям:

$$dl/dt = l^{-1} \sin(\theta) \cdot \sqrt{2|a\Gamma|}, \quad dl/dt = -2\Gamma \cdot l^{-1} \sin(\theta) \cdot \cos(\theta), \\ d\cos(\theta)/dt = 0.$$

Последнее уравнение означает сохранение угла  $\theta$  со временем. Эта переопределенная система уравнений может иметь решение только при выполнении определенного условия. Условие совместности первых двух уравнений легко записать

$$\sqrt{2|a\Gamma|} = -2\Gamma \cos(\theta),$$

и вторая возможность  $\theta = 0, \pi$ . В этом случае отсутствует эволюция со временем и величины  $l$ ,  $D$  и угол  $\theta = 0, \pi$  сохраняются. Таким образом, при таком расположении точечного вихря и точечного диполя их положение сохраняется со временем. Вернемся теперь к первому случаю условий совместности. Это условие выполняется в определенной области параметров, а именно при  $\sqrt{|a|/2|\Gamma|} \leq 1$  и величина сохраняющегося угла  $\theta$  находится из уравнения

$$\cos(\theta) = -\text{sign}(\Gamma) \cdot \sqrt{|a|/2|\Gamma|}.$$

После этого остается решить уравнение, определяющее изменение расстояния между вихрем и диполем

$$dl/dt = l^{-1} \sqrt{2|a\Gamma|} \sqrt{1 - |a|/2|\Gamma|}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$l^2 = t \cdot 2\sqrt{2|a\Gamma|} \sqrt{1 - |a|/2|\Gamma|} + l_0^2$$

и соответственно, величина дипольного момента  $D = \sqrt{2|a\Gamma|}l$  (см. рис. 4.5).

Таким образом, в области параметров  $a\Gamma < 0$  и  $b = 0$  и  $\sqrt{|a|/2|\Gamma|} \leq 1$  при определенном значении угла  $\theta$  расстояние между точечным диполем и вихрем, а также величина дипольного момента возрастает со временем корневым образом. Для изучения режима в области параметров  $a\Gamma < 0$  и  $b < 0$  в уравнении (4.12) удобно перейти к новой переменной  $y = \sqrt{1 - |a|/2|\Gamma|} \cosh(s) \equiv \sqrt{\chi} \cosh(s)$ , которая, как и в предыдущих случаях, пропорциональна расстоянию между точечным вихрем и точечным диполем. Разумеется, уже из вида урав-

нения (4.12) следует, что физически допустимая область параметров ограничивается неравенством  $1 - |a|/2|\Gamma| > 0$ .

После перехода к переменной  $y$  уравнение (4.12) принимает вид:

$$y^2 dy / dt = b^{-1} (2\chi |\Gamma a|)^{3/2} \sqrt{y^2 - 1} \quad (4.27)$$

и решение этого уравнения находится в элементарных функциях

$$y\sqrt{y^2 - 1} + \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = 2b^{-1} \cdot (2\chi |\Gamma a|)^{3/2} t + C_0, \quad (4.28)$$

здесь  $C_0$  – постоянная интегрирования определяется начальным условием. Поведение  $y(t)$  показано на рис. 4.6.

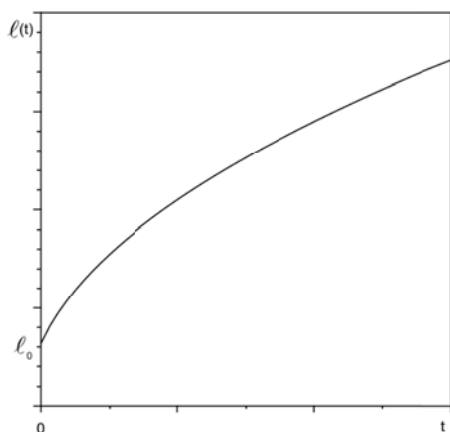


Рис. 4.5. Показана характерная эволюция  $l$  со временем

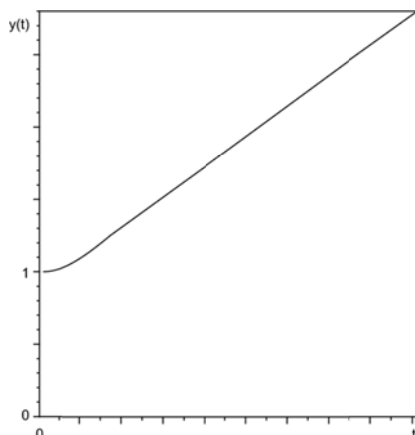


Рис. 4.6. Начальное условие для  $y(t)$  в этом режиме должно удовлетворять неравенству  $y_0 > 1$ . Видно, после непродолжительной стадии переходного режима, монотонное нарастание  $y(t)$

Допустимая область начальных условий  $y_0$  и текущих значений  $y(t)$  это  $y > 1$ . Оценим асимптотический рост  $y(t)$  на больших временах  $y^2 \approx 2b^{-1} \cdot (2\chi |\Gamma a|)^{3/2} t$  т. е. увеличение расстояния между вихрем и диполем будет происходить по корневому закону.

Таким образом, задача об эволюции взаимодействующих точечного вихря и точечного дипольного вихря интегрируется в элементарных

функциях, а не только в квадратурах. В результате взаимодействия могут возникать только три типа асимптотических движений. Это состояние покоя при специальном относительном положении вихря и диполя ( $a\Gamma < 0$ ,  $b < 0$  и  $\theta = 0, \pi$ ). Фактически, это означает отсутствие взаимодействия при таком расположении. Более общим является режим отталкивания с неограниченным ростом относительного расстояния между ними. Он реализуется в областях ( $a\Gamma < 0$ ,  $b > 0$ ,  $|a|/2|\Gamma| \leq 1$ ), ( $a\Gamma < 0$ ,  $b = 0$ ) и ( $a\Gamma < 0$ ,  $b < 0$ ,  $|a|/2|\Gamma| \leq 1$ ). Третий режим соответствует выходу за конечное время релаксации в универсальный стационарный режим, в котором сохраняются расстояние, величина дипольного момента и угол  $\theta$ . Такие режимы возникают в областях начальных условий ( $a\Gamma > 0$ ,  $b > 0$ ) и ( $a\Gamma < 0$ ,  $b > 0$ ,  $|a|/2|\Gamma| > 1$ ). Более сложное поведение большего числа точечных вихрей и точечных вихрей дипольного типа остается неисследованным. Следует ожидать, что в случае общего положения при большем числе точечных вихрей, включающих дипольные вихри, будет реализоваться хаотическое поведение. Разумеется, остаются возможными и частные интегрируемые случаи при выборе специальных условий.

## РАЗДЕЛ 5. ДВИЖЕНИЕ ДИПОЛЬНОГО ТОЧЕЧНОГО ВИХРЯ В ОБЛАСТЯХ С ГРАНИЦАМИ

В работе [13] был обнаружен новый тип точечного вихря дипольного типа, который, как и ранее известный точечный вихрь, может рассматриваться в качестве специфических гидродинамических квазичастиц. Взаимодействие между этими вихрями и обычными точечными вихрями определяет поле скорости в двумерной гидродинамике. Система произвольного числа таких вихрей оказалась гамильтоновой с тремя первыми интегралами движения, находящимися в инволюции. Согласно теореме Лиувилля, это означает, что кроме известного случая интегрирования системы двух и трех обычных точечных вихрей [3], [17], [4], [18] по аналогичной причине интегрируется задача о взаимодействии обычного точечного вихря и точечного вихря дипольного типа [15]. Точные решения и поведения двух точечных вихрей, один из которых дипольного типа, рассмотрено в работе [15]. В работе [26], используя такие вихри, получены новые стационарные решения двумерной идеальной гидродинамики. Однако в этих работах точечные вихри дипольного типа были введены в безграничной среде. Интересно, обсудить поведение вихрей дипольного типа при наличии границы среды. В этом разделе рассмотрен простейший

случай движения одного точечного вихря дипольного типа при наличии плоской границы среды (см. [16], и независимо в [25]). Более полное изложение характера взаимодействия точечного дипольного вихря с плоской границей приведено в [25]. Поэтому в изложении ниже будем следовать этой работе.

Как отмечалось в первом разделе, одно из важных прикладных значений точечных вихрей заключается в характере переноса завихренности среды и стимулировании процессов перемешивания среды. С этой точки зрения интересно выяснить роль дипольного вихря в эффективном обмене завихренностью между границей и средой. Интерес к таким процессам вызван двумя важными причинами. Во-первых, обычный точечный вихрь у плоской границы движется с сохранением расстояния до нее и не способствует обмену завихренности между средой и границей. Во-вторых, зарождение завихренности происходит именно вблизи границ и для распространения ее в среду требуется эффективный механизм переноса ее в среду.

Как будет показано в данном разделе, эта задача оказывается точно интегрируемой, что позволяет полностью описать все режимы движения вихря у плоской границы. Кроме этого, удастся установить простые асимптотические законы эволюции вихря на больших временах. В результате обнаруживается, что вихрь дипольного типа в случае общего положения удаляется от границы среды. Это означает, что он служит эффективным переносчиком завихренности и других «вмороженных» характеристик от границ в среду. Это важное свойство, если учесть, что обычно зарождение завихренности, как правило, связано с границами среды [28]. Кроме этого, ниже будет рассмотрено поведение дипольного вихря и в области ограниченной границей в форме прямоугольного угла. Собственно знание поведения точечного дипольного вихря в таких областях позволит качественно предсказывать его поведение в более сложных и даже ограниченных областях.

### 5.1. Функция тока точечного дипольного вихря у плоской границы и в угле

Для определения характера движения точечного вихря дипольного типа у твердой границы удобно использовать метод изображений [27]. Согласно этому методу, точечному дипольному вихрю у стенки можно сопоставить систему двух точечных вихрей дипольного типа в безграничной среде. Такая система точечных дипольных вихрей должна удовлетворять тому же граничному условию, что и исходная задача. Другими словами, функция тока в безграничной среде должна обращаться в ноль на линии, расположенной на месте расположения границы. Пусть дипольный вихрь находится у плоской границы  $x_1 = 0$

и жидкость заполняет полупространство  $x_1 > 0$  (см. рис. 5.1). При такой геометрии функция тока должна удовлетворять граничному условию  $\varphi|_{x_1=0} = 0$ . Таким образом, нужно подобрать условия, при которых дипольный вихрь, взаимодействующий со своим изображением, удовлетворяет нужному условию. Из симметричных соображений дипольный вихрь-изображение располагается в точке  $x_1^{(1)} = -x_1$  и  $x_2^{(1)} = x_2$  (см. рис. 5.1). Остается выяснить, как связаны дипольный момент изображения  $\vec{D}^{(1)}$  с дипольным моментом исходного вихря  $\vec{D} = (D_1, D_2)$ . Используя функцию тока двух таких вихрей, запишем нужное условие

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \left\{ D_i(t) \frac{x_i - x_i(t)}{|\vec{x} - \vec{x}(t)|^2} + D_i^{(1)}(t) \frac{x_i - x_i^{(1)}(t)}{|\vec{x} - \vec{x}^{(1)}(t)|^2} \right\} \Big|_{x=0} = 0. \quad (5.1)$$

Здесь  $\vec{x}(t)$  положение исходного вихря, а  $\vec{x}^{(1)}(t)$  положение его изображения. После учета связи между координатами вихрей это условие легко преобразуется у виду

$$-D_1(t)x_1(t) + D_2(t)(x_2 - x_2(t)) + D_1^{(1)}(t)x_1(t) + D_2^{(1)}(t)(x_2 - x_2(t)) = 0$$

и, как нетрудно заметить, удовлетворяется при выборе дипольного момента изображения согласно

$$D_1^{(1)}(t) = D_1(t), \quad D_2^{(1)}(t) = -D_2(t). \quad (5.2)$$

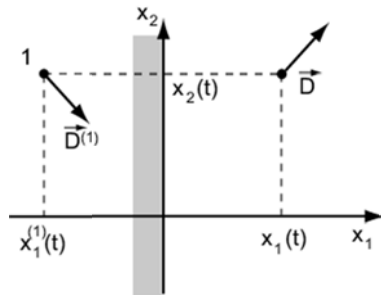


Рис. 5.1. Показано положение границы и точечного вихря дипольного типа.

Жидкость занимает полупространство  $x_1 > 0$

Таким образом, поведение вихря у твердой границы можно описать, переходя к безграницной среде с двумя точечными дипольными вихрями при специальном выборе их характеристик. Нормальная к границе

компонента дипольного момента изображения совпадает с нормальной компонентой образа, а касательная компонента изображения меняет знак. Используя этот принцип, можно рассмотреть поведение дипольного вихря и в ряде других граничных условиях. В частности, легко изучить движение дипольного вихря в жидкости ограниченной твердыми стенками, образующими прямой угол (область занятая жидкостью  $x_1 > 0$  и  $x_2 > 0$ ).

Обращения в нуль функции тока на границе среды можно достичь, размещая вихри изображений, как показано на рис. 5.2. В случае прямоугольной границы достаточно трех вихрей изображений. Легко проверить, что функция тока такой конфигурации дипольных вихрей зануляется при  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ . Следовательно, эволюция дипольного вихря в прямоугольном угле сводится к задаче движения четырех взаимодействующих дипольных вихрей в безграничной среде. Величины дипольных моментов этих вихрей показаны на рис. 5.2. Разумеется, при выборе в качестве исходного дипольного вихря вне прямоугольного угла автоматически получаем описание эволюции дипольного вихря у границы твердого тела, занимающего область  $x_1 > 0$  и  $x_2 > 0$ . Кроме этого, аналогично легко получить уравнения движения вихрей и в углах другой величины, а также в круговой области и ряде других простейших граничных условиях.

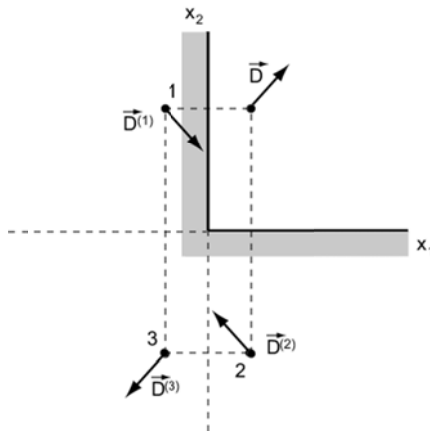


Рис. 5.2. Показано положение дипольного вихря в точке  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  с дипольным моментом  $\vec{D} = (D_1, D_2)$  в прямоугольном угле. Такие же граничные условия возникают при размещении в безграничной среде образов еще трех дипольных вихрей с координатами  $\vec{x}^{(1)} = (-x_1, x_2)$ ,  $\vec{x}^{(2)} = (x_1, -x_2)$ ,

$\vec{x}^{(3)} = (-x_1, -x_2)$  и дипольными моментами, выбранными согласно

$$\vec{D}^{(1)} = (D_1, -D_2), \quad \vec{D}^{(2)} = (-D_1, D_2), \quad \vec{D}^{(3)} = (-D_1, -D_2).$$

Число в скобках при векторах соответствует номеру вихря

## 5.2. Уравнение движения у плоской границы

Перейдем к уравнениям движения дипольного вихря у плоской границы. Следует заметить, что характер движения обычного точечного вихря у такой границы был выяснен еще Гельмгольцем. Вихрь движется с постоянной скоростью вдоль границы на постоянном расстоянии от нее. Уравнения движения обычного точечного вихря в углах было получено значительно позже в 1954 году. Получить уравнение движения дипольного вихря у плоской границы можно, используя общие уравнения движения (2.11) – (2.13), записав их для частного случая дипольного вихря и его изображения, а можно, используя гамильтониан такой системы.

Для получения гамильтониана для таких вихрей используем общий гамильтониан (2.14), полученный в работе [13]. Так гамильтониан для двух взаимодействующих вихрей дипольного типа имеет вид

$$H = -\frac{1}{2\pi} \frac{2D_m(x_m - x_m^{(1)})D_l^{(1)}(x_l - x_l^{(1)}) - D_m D_m^{(1)}(\vec{x} - \vec{x}^{(1)})^2}{|\vec{x} - \vec{x}^{(1)}|^4}, \quad (5.3)$$

здесь  $\vec{x}$ ,  $\vec{x}^{(1)}$  – координаты и  $\vec{D}$ ,  $\vec{D}^{(1)}$  – дипольные моменты двух дипольных вихрей. Учтем теперь полученные выше связи между положениями и дипольными моментами вихря и его изображения. После простых преобразований найдем

$$H = -(D_1^2 + D_2^2) / 8\pi x_1^2. \quad (5.4)$$

Исходя из этого гамильтониана, легко получить уравнения движения вихря дипольного типа у твердой стенки согласно

$$dx_i / dt = -\varepsilon_{ik} \partial H / \partial D_k, \quad (5.5)$$

$$dD_i / dt = -\varepsilon_{ik} \partial H / \partial x_k. \quad (5.6)$$

где  $\varepsilon_{ik}$  – единичный антисимметричный тензор. После подстановки гамильтониана получим систему уравнений

$$dx_1 / dt = D_2 / 4\pi x_1^2, \quad (5.7)$$

$$dx_2 / dt = -D_1 / 4\pi x_1^2, \quad (5.8)$$

$$dD_1 / dt = 0, \quad (5.9)$$

$$dD_2 / dt = (D_1^2 + D_2^2) / 4\pi x_1^3. \quad (5.10)$$

Прежде всего, из этой системы уравнений следует сохранение ортогональной к границе компоненты дипольного момента вихря  $D_1(t) = D_1(0) \equiv \text{const}$ . Это следствие общего закона сохранения  $I = \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} x_{v1}^{(\alpha)} - \sum_{\beta} D_1^{(\beta)}$ , который выполняется для системы взаимодействующих обычных точечных вихрей и точечных дипольных вихрей [13]. В этом соотношении  $\Gamma_{\alpha}$  интенсивность  $\alpha$ -точечного вихря и  $x_{v1}^{(\alpha)}$  его координата. Поэтому при отсутствии точечного вихря в нашем случае он редуцируется к сохранению  $D_1(t) = \text{const}$ . С учетом этого закона сохранения система уравнений распадается на две подсистемы уравнений. Так, достаточно решить замкнутую систему двух уравнений (5.7), (5.10) для нахождения всех характеристик вихря. Следует отметить, что систему уравнений (5.7)–(5.10) можно получить и непосредственно из уравнений движения двух вихрей дипольного типа [13], после подстановки связи между координатами и дипольными моментами<sup>4</sup>. Разумеется, энергия точечного вихря сохраняется и, следовательно, величина дипольного момента определяется удаленностью от границы

$$-(D_1^2 + D_2^2) / 8\pi x_1^2 = E_0,$$

где  $E_0$  начальное значение энергии вихря. Таким образом,

$$D_1^2 + D_2^2 = -8\pi E_0 x_1^2.$$

Используя этот инвариант, определим зависимость от времени продольной к границе компоненты дипольного момента  $D_2$ . Для этого разрешим его относительно  $x_1$ :

$$x_1 = +[-(D_1^2 + D_2^2) / 8\pi E_0]^{1/2}. \quad (5.11)$$

Здесь учтено, что энергия дипольного вихря  $E_0 < 0$  и жидкость занимает положительную полуплоскость  $x_1 \geq 0$ . Последнее определяет выбор положительного знака квадратного корня. Используя это соотношение, исключим координату  $x_1$  из уравнения (5.10). В результате получим

$$dD_2 / dt = C / (D_1^2 + D_2^2)^{1/2},$$

<sup>4</sup> Система уравнений (5.7) – (5.10), приведенная выше, отличается от полученной в [16] выбором системы координат.

где постоянная  $C = (-8\pi E_0)^{\frac{3}{2}} / 4\pi > 0$  определяется энергией вихря. С учетом сохранения  $D_1$  это уравнение интегрируется в элементарных функциях

$$D_2 \sqrt{D_1^2 + D_2^2} + D_1^2 \ln(D_2 + \sqrt{D_1^2 + D_2^2}) = 2Ct + \text{const}. \quad (5.12)$$

Постоянная интегрирования определяется начальными условиями согласно уравнения  $\text{const} = D_2(0) \sqrt{D_1^2 + D_2^2(0)} + D_1^2 \ln(D_2(0) + \sqrt{D_1^2 + D_2^2(0)})$ . Здесь и далее для обозначения начальных значений соответствующих величин будем использовать обозначение вида  $D_2(0)$ . Из этого решения легко установить асимптотическое увеличение  $D_2(t)$  согласно соотношению

$$D_2(t) \sim \sqrt{2Ct}.$$

Естественно, при заданном законе изменения  $D_2(t)$  изменение координат вихря легко вычисляется. Так,  $x_1(t)$  определяется по  $D_2(t)$  алгебраическим соотношением (5.11), которое удобно записать в виде

$$x_1 = x_1(0) \cdot \{[D_1^2 + D_2^2(t)] / [D_1^2 + D_2^2(0)]\}^{1/2}, \quad (5.13)$$

используя закон сохранения энергии. После этого координата  $x_2(t)$  интегрированием уравнения (5.8). Случай вырожденного решения при  $D_1 = 0$  рассмотрен в работе [16]. В этом случае согласно уравнению (5.13) положение дипольного вихря  $x_1 = D_2 \cdot x_1(0) / D_2(0)$  пропорционально отличной от нуля компоненте дипольного момента, а решение уравнения (5.10) принимает очевидный вид  $D_2^2(t) = D_2(0)^2 \cdot (1 + t \cdot D_2(0) / 2\pi x_1(0)^3)$ . Из него следует, что при  $D_2(0) < 0$  за конечное время дипольный момент обращается в нуль и, соответственно, только в этом случае дипольный вихрь приближается к границе. При любом малом отклонении от нуля нормальной к границе компоненты дипольного момента  $D_1$  стадия приближения к стенке через некоторое время меняется на удаление от нее на бесконечность.

Используя полученные точные решения, обсудим характер движения вихря у стенки. Прежде всего легко заметить, что компонента дипольного момента вдоль стенки возрастает со временем. На больших

временах по корневому закону. На начальном этапе при  $D_2(0) < 0$  эта компонента сначала убывает, а затем возрастает (см. рис. 5.3).

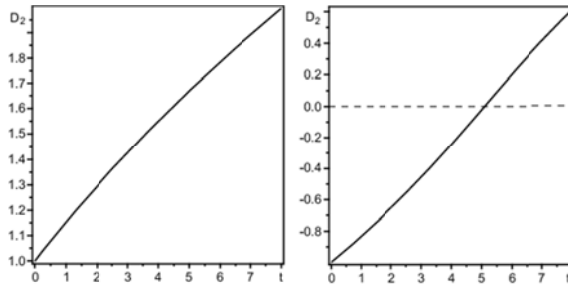


Рис. 5.3. Изменение  $D_2$  со временем: слева при начальных условиях  $D_2(0) = 1$ ,  $D_1(0) = 1$ ,  $x(0) = 1$  и  $y(0) = 0$ , справа  $D_2(0) = -1$  и остальные начальные данные совпадают с предыдущими

Такое изменение продольной компоненты дипольного момента приводит к тому, что асимптотически при больших временах вихрь удаляется от границы как

$$x_1 \approx x_1(0) \cdot \{2Ct / [D_1^2 + D_2^2(0)]\}^{1/2}. \quad (5.14)$$

Разумеется, при  $D_2(0) < 0$  присутствует начальная стадия при-ближения к границе (см. соотношение (5.13)) на минимальное расстояние

$$x_{1min} = x_1(0) \cdot |D_1| / (D_1^2 + D_2^2(0))^{1/2},$$

после чего вихрь удаляется от границы, выходя на асимптотический режим (5.14). Теперь остается обсудить движение вихря вдоль границы. Для этого вернемся к уравнению (5.8). Используя уравнение (5.7) и связь (5.11), получим

$$dx_1 / dx_2 = -[D_1 x_1(0)]^{-1} \cdot \sqrt{(D_1^2 + D_2^2(0))x_1^2 - x_1(0)^2 D_1^2}.$$

Интегрируя это уравнение, получим траекторию движения вихря у границы

$$\frac{\ln\left(\sqrt{D_1^2 + D_2^2(0)}x_1 + \sqrt{(D_1^2 + D_2^2(0))x_1^2 - D_1^2 x_1(0)^2}\right)}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2(0)}} = -\text{sign}(D_2(0)) \frac{x_2}{D_1 x_1(0)} + \text{const}. \quad (5.15)$$

Постоянная интегрирования определяется начальными условиями. Примеры траекторий движения вихрей показаны на рис. 5.4.

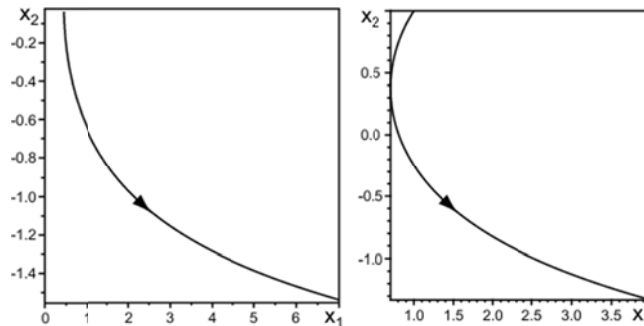


Рис. 5.4. Слева траектория движения вихря при  $D_1 > 0$  и  $D_2 > 0$ , справа при  $D_1 > 0$  и  $D_2 < 0$ . Направление движения указано стрелкой на траектории. Справа видна начальная стадия приближения к границе и последующее удаление от нее

Главный вывод, который следует из уравнения (5.15), определяющего траектории, это экспоненциальное удаление вихря от стенки. Следует отметить, что обычный точечный вихрь движется с постоянной скоростью вдоль плоской границы с сохранением расстояния до нее. Направление продольного движения вихря дипольного типа определяется знаком  $D_1(0)$ . С физической точки зрения это означает, что вихри дипольного типа могут порождать эффективный механизм переноса завихренности от границ, где она генерируется, в объем среды. Разумеется, аналогично они могут интенсифицировать вынос в среду и других пассивных «примесей», например, температуры. Для многих физических явлений это исключительно важное свойство.

В заключение подраздела следует заметить, что частный случай двух взаимодействующих вихрей дипольного типа интегрируется в квадратурах при специальном выборе дипольных моментов. Этот выбор связан с обращением в нуль значений некоторых первых интегралов движения. Так, рассмотренный выше случай соответствует нулевому значению  $I = \sum D_2^{(\alpha)} = 0$  и  $J = \sum \vec{D}^{(\alpha)} \cdot \vec{x}^{(\alpha)} = 0$ . Оставшийся интеграл  $\sum D_1^{(\alpha)} = \text{const}$  и энергия принимают произвольные значения. Таким образом, причина интегрируемости рассмотренной системы с двумя степенями свободы связана с наличием двух законов сохранения  $I_1$  и  $H$ , находящихся в инволюции. В случае общего положения задача об эволюции двух точечных вихрей дипольного типа является неинтегрируемой.

Перейдем теперь к обсуждению движения точечного дипольного вихря в области ограниченной прямоугольной границей. Начнем с вывода

уравнений движения, используя приведенные выше вихри – изображения. Снова можно использовать как прямо специализацию общих уравнений движения на этот специальный случай, так и соответствующий гамильтониан.

### 5.3. У р а в н е н и е д в и ж е н и я в п р я м о у г о л ь н о м у г л у

Используя метод изображений, получим гамильтониан вихря в среде, ограниченной прямоугольным углом. Используя гамильтониан четырех взаимодействующих дипольных вихрей [120], после подстановки положений и дипольных моментов изображений, получим

$$H = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{D_1^2 + D_2^2}{x_1^2} + \frac{D_1^2 + D_2^2}{x_2^2} - \frac{(x_1^2 - x_2^2)(D_1^2 - D_2^2) + 4D_1D_2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right\}.$$

Здесь  $x_1 > 0$  и  $x_2 > 0$ . Как и ранее, этот гамильтониан можно рассматривать как гамильтониан дипольного вихря, движущегося в углу. Уравнения движения получим стандартным образом согласно (5.5), (5.6):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{D_2}{x_1^2} + \frac{D_2}{x_2^2} + \frac{D_2(x_1^2 - x_2^2) - 2D_1x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{D_1}{x_1^2} + \frac{D_1}{x_2^2} - \frac{D_1(x_1^2 - x_2^2) + 2D_2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right), \\ \frac{dD_1}{dt} &= -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{D_1^2 + D_2^2}{x_2^3} + \frac{(D_2^2 - D_1^2)x_2 + 2D_1D_2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - 2x_2 \frac{(D_1^2 - D_2^2)(x_1^2 - x_2^2) + 4D_1D_2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^3} \right), \\ \frac{dD_2}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{D_1^2 + D_2^2}{x_1^3} + \frac{(D_1^2 - D_2^2)x_1 + 2D_1D_2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - 2x_1 \frac{(D_1^2 - D_2^2)(x_1^2 - x_2^2) + 4D_1D_2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^3} \right). \end{aligned}$$

Естественно, это более сложная динамическая система с двумя степенями свободы. Энергия этой системы дипольных вихрей сохраняется. Однако другие общие законы сохранения, полученные в работе [13], «тривиализуются». Для рассматриваемой конфигурации дипольных вихрей они обращаются в нуль. Поэтому вопрос об интегрируемости в квадратурах этой системы уравнений остается открытым. Однако, легко заметить присутствие дискретной симметрии уравнений, связанной с перестановкой координат.

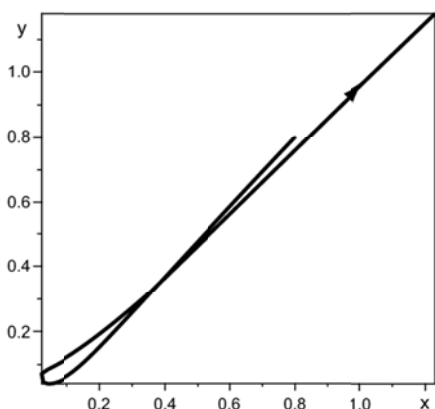


Рис. 5.5. Движение дипольного вихря с начальными координатами  $x_1(0) = 0.8$ ,  $x_2(0) = 0.8$  и начальным значением дипольного момента  $D_1(0) = 1.1$

$D_2(0) = -1$ , полученное численно.

Аналогичное качественное изменение движения вихря возникает при любом малом нарушении симметрии например при сохранении  $D_1 = -D_2$ , но отклонении от диагонали  $x_1(0) \neq x_2(0)$

дипольного вихря чувствителен к нарушению условия  $D_1 = -D_2$ . Так, при даже при малом нарушении этого условия дипольный вихрь, приближающийся к вершине угла, начинает при больших временах удаляться от нее (см. рис. 5.5).

Кроме этого, можно рассмотреть асимптотическое поведение вихря, например, при  $x_2 \gg x_1$ . В нулевом приближении приближенная система уравнений совпадает с уравнениями (5.7)–(5.10). Это позволяет описать асимптотическое поведение вихря. Численные результаты также демонстрируют типичность удаления дипольного вихрей от вершины угла в среду (см. рис. 5.6). Следовательно, и в случае прямоугольного угла дипольный вихрь осуществляет эффективный обмен завихренностью между границей и средой.

Исходя из полученных результатов, можно заметить, что дипольные вихри играют исключительно важную роль в процессах обмена завихренностью и в ограниченных областях.

Это позволяет обнаружить простой частный случай движения дипольного вихря с  $x_1 = x_2$  и  $D_1 = -D_2$ . Уравнения движения для него упрощаются и принимают вид:

$$dx_1 / dt = -5D_1 / 4\pi x_1^2,$$

$$dD_1 / dt = -5D_1^2 / 4\pi x_1^3.$$

Этот частный случай точно интегрируем. Решение этой системы уравнений имеет вид

$$D_1 = D_1(0) \cdot x_1 / x_1(0),$$

$$x_1^2 = x_1^2(0) - 5t \cdot D_1(0) / 2x_1(0).$$

Таким образом, при  $D_1(0) > 0$  дипольный вихрь приближается к вершине угла, а при начальном условии  $D_1(0) < 0$  удаляется вдоль биссектрисы угла от его вершины в среду. Характер движения

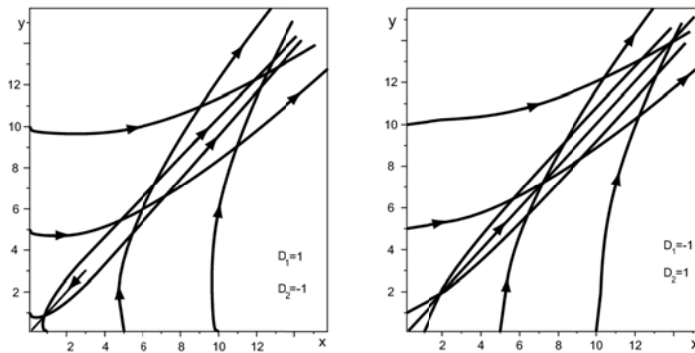


Рис. 5.6. Показаны проекции траекторий движения вихрей на плоскость  $(x_1, x_2)$  с начальным дипольным моментом. Слева  $D_1(0)=1$ ,  $D_2(0)=-1$ , а с права  $D_1(0)=-1$ ,  $D_2(0)=1$ . Начальные положения вихрей соответствуют разным начальным положениям дипольных вихрей в среде. Слева только одна траектория, соответствующая полученному выше аналитическому решению, движется в вершину угла. Справа эта же траектория удаляется вдоль биссектрисы от вершины угла

## РАЗДЕЛ 6. НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ВИХРЕВЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

Ряд примеров стационарных вихрей и вихревых конфигураций хорошо известен. Однако в этом разделе мы обсудим некоторые вихревые течения, обнаруженные относительно недавно. Очевидно, два точечных вихря стационарной конфигурации не образуют. Однако, уже три коллинеарных вихря могут образовать стационарную конфигурацию, при выполнении условия [30]:

$$(\sum \Gamma_i)^2 = \sum \Gamma_i^2.$$

Из четырех вихрей также можно образовать стационарную конфигурацию. Для этого следует поместить три вихря одинаковой завихренности в вершины равностороннего треугольника, а вихрь с такой же, но противоположной завихренностью поместить в центр этого треугольника [31]. В общем случае стационарные конфигурации точечных вихрей произвольной завихренности изучены мало. Однако если все вихри имеют по модулю одинаковую завихренность, то уже возможна общая теория [32].

Пусть имеется  $N_+$  вихрей положительной завихренности  $\kappa$  в точках  $z_+$  и  $N_-$  вихрей отрицательной завихренности в точках  $z_-$ . Тогда полиномы

$$P(z) = \prod (z - z_+), Q(z) = \prod (z - z_-)$$

могут быть найдены из красивого уравнения, которое получается из условия стационарности:

$$Q P'' + P Q'' = 2 P' Q'.$$

Замечательно, что числа  $N_+$ ,  $N_-$  не могут быть произвольными, они оказываются связаны «магическими» соотношениями:

$$N_+ = n(n+1)/2, N_- = n(n-1)/2, n = 1, 2, \dots$$

т. е образуют пары  $(1;0)$ ,  $(3;1)$ ,  $(6;3)$  и т. д. Интересными являются нетривиальные стационарные мультипольные конфигурации с симметрией  $n$ -ого порядка. Такие точные решения были найдены в работе [33] с помощью метода конформных отображений и функции Шварца. Центральный вихрь окружен  $N$  сателлитами, в центрах которых завихренность имеет сингулярности, как у точечных вихрей. В работе [34] было построено более сложное решение, в котором  $N$  сателлитов окружают вихревое кольцо. Другой тип решений был найден в работе [35] и независимо в работе [19] разными методами. В этих работах были найдены решения, в которых  $N$  несингулярных сателлитов окружают точечный вихрь. Сателлиты описывают рациональное поле завихренности, поэтому мы называем их рациональными ожерельями. Рассмотрим более подробно работу [19], т. к. используемый в ней метод будет обобщен в следующем подразделе на более общий случай.

### 6.1. Интегрирование стационарных уравнений Эйлера

Далее мы будем использовать двумерные уравнения Эйлера в форме скобки Пуассона для завихренности  $\omega$  и функции тока  $\psi$ :

$$-\omega = \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \{\psi, \Delta \psi\} = 0, \quad (6.2)$$

$$\{\psi, \Delta \psi\} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (6.3)$$

В качестве стационарного решения скобки Пуассона (6.2) часто используется *анзатц*<sup>5</sup>:

$$\Delta \psi = f(\psi), \quad (6.4)$$

где  $f(\psi)$  достаточно произвольная дифференцируемая функция  $\psi$ . Например, для решения Ламба [37,38],  $f(\psi)$  выбирается линейной функцией, для решения Стюарта [36]  $f(\psi) = \exp(-\psi)$ , для решений [39]  $f(\psi) = -\sinh \psi$ . В данном подразделе, в качестве стационарного решения скобки Пуассона мы рассмотрим более общий *анзатц*:

$$\Delta \psi = f(\psi) - \sum_{\alpha=1}^N \kappa_{\alpha} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\alpha}), \quad (6.5)$$

где  $\kappa_{\alpha}$  постоянная завихренность  $\alpha$ -сингулярности, а  $\vec{x}_{\alpha} = \text{Const}$  ее координаты,  $(\alpha = 1, \dots, N)$ ,  $\delta$  – дельта-функция Дирака.

Прежде всего, найдем достаточные условия существования решения типа (6.5) для уравнения (6.2). Для этого мы подставим выражение (6.5) в уравнение (6.2) не считая заранее координаты сингулярностей  $\vec{x}_{\alpha}, (\alpha = 1, \dots, N)$  постоянными. Поскольку гладкая часть уравнения (6.2) и коэффициенты перед  $\delta$ -функциями должны обращаться в нуль независимо, то, предполагая что  $df(\psi)/d\psi \neq 0$ , получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_{\alpha}} \frac{dx_{\alpha}}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial y_{\alpha}} \frac{dy_{\alpha}}{dt} \right) = 0, \quad (6.6)$$

$$dx_{\alpha}/dt = -\partial \psi / \partial y|_{\vec{x}=\vec{x}_{\alpha}}, \quad dy_{\alpha}/dt = \partial \psi / \partial x|_{\vec{x}=\vec{x}_{\alpha}}. \quad (6.7)$$

<sup>5</sup>Ansatz (нем.), здесь первый шаг, почин; подход.

Здесь  $\alpha = 1, \dots, N$ . В случае  $f(\psi) = 0$ , уравнение (6.6) выпадает и уравнение (6.7) совпадает очевидно с уравнениями движения точечных вихрей. Из уравнений (6.6), (6.7) следует, что *анзатц* (6.5) является стационарным решением уравнения (6.2) если все сингулярности неподвижны и функция  $\psi$  не зависит явно от времени, т. е.

$$\partial\psi / \partial x \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_\alpha} = \partial\psi / \partial y \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_\alpha} = 0 \quad (6.8)$$

и  $\partial\psi / \partial t = 0, (\alpha = 1, \dots, N)$ . Рассмотрим далее частный случай *анзаца* (6.5):

$$-\Delta\psi = \exp(\psi / \Gamma_0) - 4\pi n \Gamma_0 \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad (6.9)$$

где  $n$  – положительное целое число  $n > 0, \infty > \Gamma_0 > 0$  и функция,  $f(\psi)$  выбрана так же, как и в работе Стюарта [36]. С помощью очевидного изменения масштабов:

$$\psi / \Gamma_0 \rightarrow \psi; x \rightarrow \Gamma_0^{1/2} x; y \rightarrow \Gamma_0^{1/2} y,$$

уравнение (6.9) редуцируется к виду:

$$\omega = -\Delta\psi = \exp(\psi) - 4\pi n \delta(\vec{x} - \vec{x}_0). \quad (6.10)$$

Уравнение (6.10) показывает, что точечный вихрь с отрицательной завихренностью находится в поле  $\exp(\psi)$  положительной завихренности. Прежде всего перейдем к новой функции  $\varphi$ :

$$-\psi = \varphi. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.10) принимает вид:

$$\Delta\varphi = \exp(-\varphi) - 4\pi n \delta(\vec{x} - \vec{x}_0). \quad (6.12)$$

Если  $n = 0$ , то уравнение (6.12) является хорошо известным уравнением Лиувилля и имеет частный класс решений вида:

$$\varphi = -\ln 8 \cdot |u'(z)|^2 / \left(1 + |u(z)|^2\right)^2, \quad (6.13)$$

причем  $u'(z) = du(z)/dz$ , (см. на-  
пример [40]), где  $u'(z)$  – произвольная  
целая функция комплексной пере-  
менной  $z = x + iy$ , не имеющая нулей.

Легко проверить прямым вычис-  
лением, что  $\Delta\varphi$  имеет следующий вид:

$$\Delta\varphi = [8|u'(z)|^2 / (1 + |u(z)|^2)^2] - \Delta \ln |u'(z)|^2. \quad (6.14)$$

Для целой функции без нулей  
 $\Delta \ln |u'(z)|^2$  тождественно равен нулю.  
Все такие функции имеют вид (см.,  
например, [41]).

$$u'(z) = \exp g(z),$$

где  $g(z)$  – произвольная целая функция. Например, для решения  
Стюарта [36]  $g(z) = \lambda z$ , ( $\lambda = \text{Const}$ ).

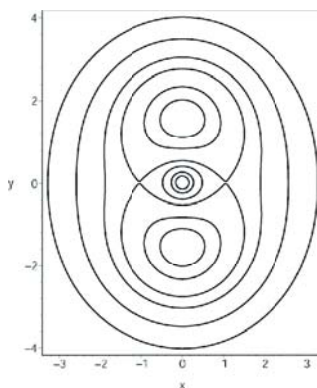


Рис. 6.1. Простейшая вихревая  
структура. Случай простого нуля  
с  $A = C = 1$ ,  $N = 1$

## 6.2. Точные стационарные решения

Теперь легко записать решение уравнения (6.12) при  $n \neq 0$ .  
Рассмотрим функцию  $u(z)$  следующего вида:

$$u(z) = A \cdot (n+1)^{-1} (z - z_0)^{n+1} + C, \quad u'(z) = A (z - z_0)^n, \quad (6.15)$$

где  $A$  и  $C$  не нулевые комплексные постоянные,  $u'(z)$  имеют ноль  $n$ -  
го порядка в точке  $z_0$ . Поскольку

$$\Delta \ln |z - z_0|^{2n} = 4\pi n \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad (6.16)$$

то подстановка функции (6.13), (6.15) в уравнение (6.12) показывает, что  
если мы принимаем во внимание выражения (6.14), (6.16), то уравнение  
(6.12) тождественно удовлетворяется. Это означает, что мы получаем  
решение уравнения (6.12), имеющее вид:

$$\varphi = -\ln \{8|A|^2 |z - z_0|^{2n} / \left[1 + |A \cdot (n+1)^{-1} (z - z_0)^{n+1} + C|^2\right]^2\}. \quad (6.17)$$

Это дает для функции  $\psi$  (6.11) выражение

$$\psi = n \ln |z - z_0|^{2n} + \ln \{8|A|^2 / \left[1 + |A \cdot (n+1)^{-1} (z - z_0)^{n+1} + C|^2\right]^2\}.$$

Для завихренности  $\omega = -\Delta\psi$  с учетом уравнения (6.14) получаем:

$$\omega = 8|A|^2 |z - z_0|^{2n} / \left[1 + |A \cdot (n+1)^{-1} (z - z_0)^{n+1} + C|^2\right]^2 - 4\pi n \delta(\bar{x} - \bar{x}_0). \quad (6.18)$$

Легко убедиться в том, что условия стационарности (6.8) удовлетворяются для решения (6.17). Действительно, второй член в уравнении (6.17) не дает никакого вклада в скорость движения сингулярной точки (6.8). Первый член в (6.17) совпадает со скоростью точечного вихря, т. е. очевидно — нуль. Поэтому точка  $z_0$  не движется, решение (6.17) является стационарным решением уравнения (6.2). Первый член в (6.18) описывает гладкие рациональные вихри, второй член дает точечный вихрь с завихренностью равной  $-4\pi n$ , находящийся в точке  $z_0$ . При  $|z| \rightarrow \infty$  рациональная часть завихренности стремится к нулю, как степенная функция:

$$\omega \rightarrow 8(n+1)^2 |A|^{-2} |z|^{-2(n+2)},$$

и функция тока имеет следующую асимптотику:

$$\psi \rightarrow -2(n+2) \ln |z|.$$

Очевидно, что жидкость вблизи точечного вихря и вдали от него вращается в противоположных направлениях. Поэтому решение (6.17) описывает вихревую структуру во вращающемся сдвиговом течении. Решения (6.17), (6.18) описывают семейство рациональных вихрей, зависящих от целочисленного параметра  $n$  и двух комплексных ненулевых постоянных  $A$  и  $C$ . Знаменатель в формуле (6.18) в общем случае есть полином степени  $4(n+1)$ . В действительности решение (6.17) для любого  $n$  является только двухпараметрическим. Чтобы убедиться в этом, запишем  $A$  и  $C$  в тригонометрической форме:

$$A = |A| \exp i\alpha; C = |C| \exp i\beta.$$

Тогда решение (6.17) принимает вид:

$$\psi = \ln \frac{8|A|^2 |z|^{2n}}{\left\{1 + |C|^2 + |A|^2 (n+1)^{-2} |z|^{2(n+1)} + 2|A||C|(n+1)^{-1} |z|^{(n+1)} \cos[(n+1)\varphi + \alpha - \beta]\right\}^2}. \quad (6.19)$$

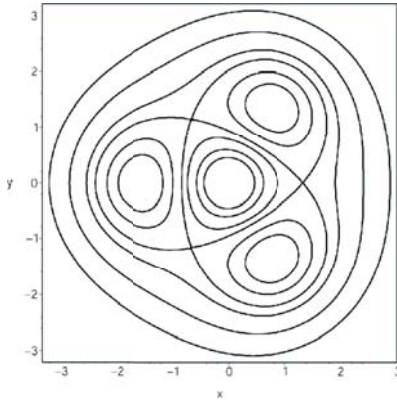


Рис. 6.2. Ожерелье с симметрией третьего порядка с  $A = C = 1$ ,  $N = 2$

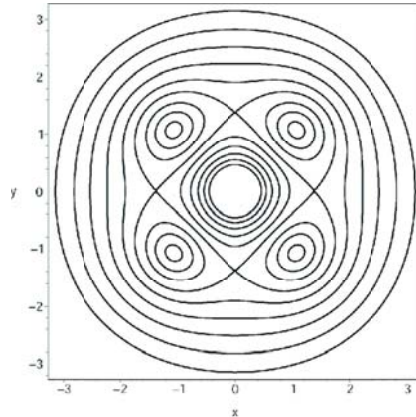


Рис. 6.3. Ожерелье с симметрией четвертого порядка с  $A = C = 1$ ,  $N = 3$

Здесь  $\varphi$  есть фаза комплексной переменной  $z = r \exp i\varphi$ , а несущественная постоянная  $z_0$  и положена равной нулю. Таким образом, решение (6.19) зависит от  $|A|, |C|$  и разности фаз  $\gamma = \alpha - \beta$ . Однако зависимость от параметра  $\gamma$  несущественна, т. к. она может быть исключена поворотом системы координат:

$$\varphi \rightarrow \varphi' - \gamma / (n+1).$$

В результате решение (6.19) зависит только от  $|A| \neq 0, |C| \neq 0$  и целого числа  $n$ . Подчеркнем, что решение (6.19) существенно двух параметрическое для любого  $n$ , т. к. если  $|A| = 0$  или  $|C| = 0$ , то решение (6.19) становится тривиальным. Наличие решения в явной форме позволяет изучить аналитически полученные вихревые структуры, особенно то, как они меняются в зависимости  $n$ . Несмотря на свою простоту, формула (6.19) описывает множество мультипольных вихрей с различной симметрией, как это легко увидеть из природы (см. рис. 6.1 – рис. 6.6). Мультипольные вихри образуют множество спутников, образующих ожерелья вокруг центра точечного вихря. Опишем

теперь эту вихревую структуру более детально. Используя функцию тока (6.19), прежде всего найдем компоненты поля скорости:

$$-\partial\psi/\partial x = -2n \cdot r^{-1} \cos\varphi + 4D_1^{-1} [|A|^2 (n+1)^{-1} r^{2n+1} \cos\varphi + |A||C| r^n \cos(n\varphi)], \quad (6.20)$$

$$-\partial\psi/\partial y = -2n \cdot r^{-1} \sin\varphi + 4D_1^{-1} [|A|^2 (n+1)^{-1} r^{2n+1} \sin\varphi - |A||C| r^n \sin(n\varphi)], \quad (6.21)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= 1 + |A(n+1)^{-1} z^{n+1} + C|^2 = \\ &= 1 + |C|^2 + |A|^2 (n+1)^{-2} |z|^{2(n+1)} + 2|A||C|(n+1)^{-1} |z|^{(n+1)} \cos[(n+1)\varphi]. \end{aligned}$$

Из уравнений (6.20) и (6.21) получаем уравнения для координат стационарных точек поля скорости:

$$A_1 = 0, A_2 = 0, \quad (6.22)$$

где

$$A_1 = \cos\varphi \left[ -nD_1 + 2|A|^2 (n+1)^{-1} r^{2(n+1)} \right] + 2|A||C| r^{n+1} \cos(n\varphi), \quad (6.23)$$

$$A_2 = \sin\varphi \left[ -nD_1 + 2|A|^2 (n+1)^{-1} r^{2(n+1)} \right] - 2|A||C| r^{n+1} \sin(n\varphi). \quad (6.24)$$

Из (6.22) – (6.24) следует простое условие разрешимости:

$$|A||C| r^{n+1} \sin(n+1)\varphi = 0.$$

Поскольку мы интересуемся стационарными точками, для которых  $r \neq 0, |A| \neq 0, |C| \neq 0$ , очевидно:

$$\varphi_k = \frac{\pi k}{n+1}; (k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, n+1).$$

Всего имеется  $2(n+1)$  стационарная точка. Ясно, что  $(n+1)$  точек являются эллиптическими и столько же имеется гиперболических точек. Найдем теперь радиальные координаты стационарных точек. Для того, чтобы их найти, учтем соотношения

$$\begin{aligned}\cos(n\varphi_k) &= (-1)^{k+1} \sin \varphi_k, \\ \cos(n+1)\varphi_k &= (-1)^k,\end{aligned}$$

которые выполняются в стационарных точках. Учитывая эти соотношения, из (6.22) получим

$$|A|^2 (n+2)(n+1)^{-2} r_k^{2(n+1)} + (-1)^k 2|A||C|(n+1)^{-1} r_k^{n+1} - n(1+|C|^2) = 0. \quad (6.25)$$

Из уравнения (6.25) получаем радиальные координаты стационарных точек поля скорости:

$$r_{k0}^{n+1} = (n+1)|C| \cdot \left[ \left( 1 + n(n+2)|C|^{-2}(1+|C|^2) \right)^{1/2} - (-1)^k \right] / |A| \cdot (n+2). \quad (6.26)$$

Формула (6.26) показывает, что имеется две окружности стационарных точек. Стационарные точки с нечетным значением  $k = 2p+1$  расположены на окружности, радиус которой мы обозначим  $r_{s0}$  и стационарные точки с четным значением  $k = 2p$  расположены на окружности радиуса  $r_{h0}$ .

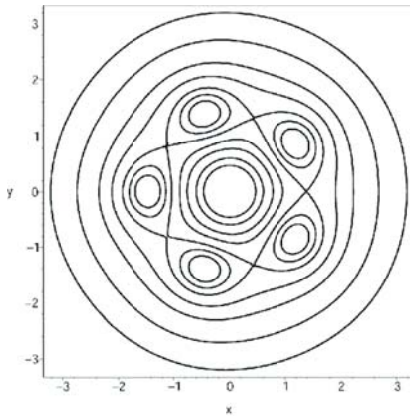


Рис. 6.4. Мультиполюсная структура с симметрией пятого порядка с  $A = C = 1$ ,  $N = 4$

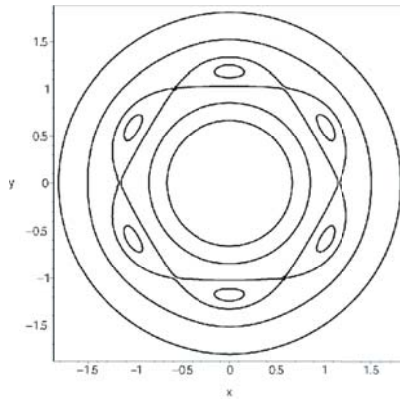


Рис. 6.5. Ожерелье с симметрией шестого порядка с  $A = C = 1$ ,  $N = 5$

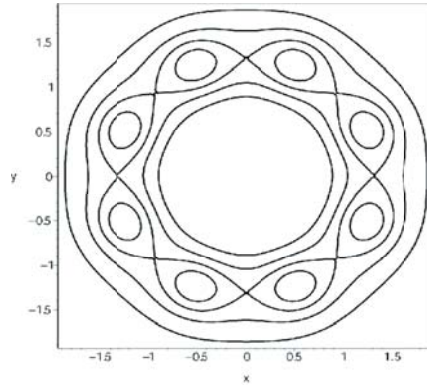


Рис. 6.6. Ожерелье с симметрией восьмого порядка с  $A = C = 1$ ,  $N = 7$

Легко видеть, что  $r_{s0} > r_{h0}$ . Определение типа стационарных точек является довольно стандартным, но несколько громоздким. Поэтому мы приведем только результат [19]. Как нетрудно найти, при  $k = 2p + 1$  стационарная точка будет эллиптической, а при  $k = 2p$  — гиперболической. В результате точечный вихрь с завихренностью  $4\pi n$  окружен ожерельем из  $n + 1$  спутников, которые образуют симметрию  $(n + 1)$ -ого порядка. Центры спутников расположены на окружности радиуса  $r_{s0}$ :

$$r_{s0}^{n+1} = (n+1)|C| \cdot \left[ \left( 1 + n(n+2)|C|^{-2}(1+|C|^2) \right)^{1/2} + 1 \right] / |A| \cdot (n+2). \quad (6.27)$$

и угол между соседними спутниками равен  $2\pi / (n+1)$ . Каждый спутник имеет в центре конечную завихренность  $\omega_{s0}$ , равную (6.18):

$$\omega_{s0} = \frac{2|A|^2 r_{s0}^{2n}}{\left[ \left( 1 + |C|^2 \right) (n+1)(n+2)^{-1} + |A||C|(n+2)^{-1} r_{s0}^{n+1} \right]^2}. \quad (6.28)$$

Завихренность спутников имеет противоположный знак, по сравнению с центральным вихрем. Для первых значений  $n = 1, 2, \dots, 5$ , вихревые структуры показаны на рис. 6.1, рис. 6.2, ..., рис. 6.5. Когда  $n$  возрастает, различие между радиусами окружностей эллиптических и гиперболических точек уменьшается, в соответствии с формулой (6.26). Решение в целом описывает стационарную структуру переходного слоя во вращающейся жидкости (рис. 6.5, рис. 6.6). Напомним, что решение Стюарта [169] описывает ламинарный переходной слой в плоском сдвиговом течении.

Важным отличием между вращательным переходным слоем и решением Стюарта является наличие во вращательном слое произвольного количества вихрей. При  $n \gg 1$  из формул (6.27) и (6.28) получаем асимптотику:

$$r_{s_0}^n \simeq n \left( |A|^{-2} (1 + |C|^2) \right)^{1/2}, \quad \omega_{s_0} \simeq 2n^2 \left[ |C| + \left( 1 + |C|^2 \right)^{1/2} \right]^{-2},$$

для характерных масштабов вихревых спутников  $L_{s_0}$  при  $n \gg 1$ , получаем

$$L_{s_0} \simeq \pi r_{s_0} / n = \pi / n^{1-1/n} \left( |A|^2 (1 + |C|^2) \right)^{1/2n}.$$

Из этих асимптотических свойств видно, что когда  $n$  увеличивается, завихренность в центре вихревого спутника растет, как  $n^2$ ,  $r_{s_0}$  — стремится к предельному значению  $r_0 = 1$ , и характерный масштаб спутника уменьшается как  $n^{-1}$ . Учитывая начальное изменение масштабов, можно записать предельный радиус  $R_0$  в исходных переменных:

$$R_0 = \Gamma_0^{1/2}.$$

Типичный масштаб  $L_{s_0}$  приобретает множитель  $\Gamma_0^{1/2}$ :

$$L_{s_0} \rightarrow \Gamma_0^{1/2} L_{s_0}.$$

Когда  $n \rightarrow \infty$ , переходный слой стремится к сингулярному распределению завихренности на окружности  $R_0$ . Интересно отметить, что при больших числах  $n$  произведение  $\omega_{s_0}(n)$  на площадь вихревого спутника  $S(n)$  (полная интенсивность завихренности спутника  $\Gamma_{s_0}$ ) не зависит от  $n$ :

$$\Gamma_{s_0} \simeq \omega_{s_0}(n) \pi L_{s_0}^2 = 2\pi^2 \Gamma_0 / \left[ |C| + \left( 1 + |C|^2 \right)^{1/2} \right]^2.$$

В данном подразделе использовалась функция  $u'(z)$ , которая имеет в точке  $z_0$ , нуль  $n$ -ого порядка. Поэтому возникает вопрос, можно ли использовать другую функцию  $u'(z)$ , которая имеет в точке

$z_0$  полюс  $n$ -го порядка, чтобы получить другие решения уравнения (6.10)? Мы можем выбрать функцию  $u'(z)$ , например, в виде

$$u(z) = A \cdot (1-m)^{-1} (z-z_0)^{1-m} + C, \quad u'(z) = A(z-z_0)^{-m}. \quad (6.29)$$

Априори это не очевидно. В работе [19] решения уравнения (6.12) с функцией (6.29) приведены в явном виде. Однако решения уравнения (6.12) с функцией  $u'(z)$ , которая имеет нуль  $n$ -го порядка, и решения того же уравнения с функцией  $u'(z)$ , которая имеет полюс порядка  $(n+2)$ , принадлежат к одному классу эквивалентности. В работе [19] указано соответствующее явное преобразование параметров  $A, C$  и фазы  $\gamma$ , трансформирующее одно решение в другое. Таким образом, рассмотренный способ решения уравнения Эйлера позволяет найти только один класс вихревых решений.

## РАЗДЕЛ 7. СТАЦИОНАРНЫЕ ВИХРЕВЫЕ КОНФИГУРАЦИИ СО СЛОЖНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Важная роль дипольных сингулярностей в динамике  $2D$ -уравнений Эйлера уже была отмечена в предыдущих разделах. Как уже говорилось, дипольная сингулярность является более сложной, чем точечный вихрь, т. к. индекс ее векторного поля равен двум (в отличие от простых сингулярностей, индекс которых равен  $\pm 1$ ). В данной главе мы, следуя работе [26], рассмотрим решения двумерных уравнений Эйлера со сложными сингулярностями. Как уже говорилось, более сложные мультипольные особенности, вообще говоря, не совместимы с динамикой двумерных уравнений Эйлера. Однако в данном разделе мы увидим, что стационарные двумерные уравнения Эйлера имеют новый класс точных стационарных решений со сложной особой точкой, индекс которой равен трем. Эти решения находятся в явном виде и выражаются через элементарные функции. Данные решения описывают локализованные вихревые структуры, в которых сложная особая точка окружена вихревыми сателлитами.

## 7.1. Обобщение анзаца стационарности

Для поиска стационарных решений уравнения Эйлера с особенностями типа точечных вихрей, в разделе 6 был использован *анзац*:

$$\Delta\Psi = f(\Psi) - \sum_{\alpha=1}^N \Gamma^\alpha \delta(\vec{x} - \vec{x}^\alpha).$$

В простейшем случае точные стационарные решения были приведены в разделе 6. В данном разделе мы будем исследовать более общий *анзац*. Предположим, что завихренность  $\omega = -\Delta\Psi$  может быть представлена в виде

$$\Delta\Psi = f(\Psi) - \sum_{\alpha=1}^N \Gamma^\alpha \delta(\vec{x} - \vec{x}^\alpha) - \sum_{\beta=1}^M D_i^\beta \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\vec{x} - \vec{x}^\beta). \quad (7.1)$$

В разложении (7.1) координаты особенностей  $\vec{x}^\alpha, \vec{x}^\beta$  и коэффициенты  $D_i^\beta$  могут зависеть от времени. Таким образом, предполагается, что завихренность состоит из гладкой части и сингулярной части, которая является обобщенной функцией. Рассмотрим вначале физический смысл разложения (7.1). Первый член в правой части, очевидно, является гладкой частью поля завихренности. Вторая группа членов является завихренностью, которая создается множеством  $N$  точечных вихрей, с функцией тока  $\Psi_N$ :

$$\Psi_N = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^N \Gamma^\alpha \ln |\vec{x} - \vec{x}^\alpha|^2.$$

Третья группа членов в разложении (7.1) с первыми производными от  $\delta$ -функции описывает завихренность, которая создается группой  $M$  дипольных сингулярностей:

$$\Delta\Psi_M = -\sum_{\beta=1}^M D_i^\beta \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\vec{x} - \vec{x}^\beta).$$

Действительно, применим оператор

$$D_i^\beta \frac{\partial}{\partial x_i} = D_1^\beta \frac{\partial}{\partial x_1} + D_2^\beta \frac{\partial}{\partial x_2}$$

к уравнению Лапласа:

$$\frac{1}{4\pi} \Delta \ln |\vec{x} - \vec{x}^\beta|^2 = \delta(\vec{x} - \vec{x}^\beta).$$

Очевидно, что:

$$\frac{1}{4\pi} \Delta (D_i^\beta \frac{\partial}{\partial x_i}) \ln |\vec{x} - \vec{x}^\beta|^2 = (D_i^\beta \frac{\partial}{\partial x_i}) \delta(\vec{x} - \vec{x}^\beta).$$

Поэтому завихренность, которая создается третьей группой членов, имеет функцию тока  $\Psi_M$

$$\Psi_M = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\beta=1}^M (D_i^\beta \frac{\partial}{\partial x_i}) \ln |\vec{x} - \vec{x}^\beta|^2,$$

т. е. представляет собой сумму функции тока  $\dot{\Gamma}$  дипольных сингулярностей вида:

$$\Psi_D^\beta = \frac{1}{2\pi} D_i^\beta \frac{(x_i - x_i^\beta)}{|\vec{x} - \vec{x}^\beta|^2},$$

которые находятся в точках  $\vec{x}_\beta$  и имеют дипольные моменты  $\frac{1}{2\pi} \vec{D}^\beta$ .

Само по себе присутствие дополнительных источников завихренности в виде производных от  $\delta$ -функции в разложении (7.1) ничем не запрещено, если они совместимы с уравнением Эйлера. Здесь нужно напомнить, что сингулярная часть завихренности, как и любая обобщенная функция с точечным носителем, состоит только из суммы  $\delta$ -функции и ее производных. Однако, как будет видно в следующем разделе, условие совместимости разложения (7.1) с уравнением Эйлера является далеко не тривиальным и накладывает на разложение (7.1) важные ограничения. Рассмотрим вначале одну дипольную сингулярность, которая находится в точке  $\vec{x}_0$  и имеет дипольный момент  $\vec{D}$ . Скобка Пуассона для одной дипольной сингулярности принимает вид:

$$\{\Psi_D, \Delta \Psi_D\} = \frac{\partial \Psi_D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \vec{D} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) - \frac{\partial \Psi_D}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \vec{D} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0). \quad (7.2)$$

Покажем, что скобка Пуассона (7.2) равна нулю. Подставим в (7.2) производные в явном виде и выполним детально вычисление этой скобки:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \bar{D} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \delta(\bar{x} - \bar{x}_0) &= D_1 \delta''_{xx}(x - x_0) \delta(y - y_0) + D_2 \delta'_x(x - x_0) \delta'_y(y - y_0), \\ \frac{\partial}{\partial y} \bar{D} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \delta(\bar{x} - \bar{x}_0) &= D_1 \delta'_x(x - x_0) \delta'_y(y - y_0) + D_2 \delta(x - x_0) \delta''_{yy}(y - y_0). \\ \frac{\partial \Psi_D}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \frac{D_1[(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2] - 2D_2(x - x_0)(y - y_0)}{|\bar{x} - \bar{x}_0|^4}, \\ \frac{\partial \Psi_D}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi} \frac{D_2[(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2] - 2D_1(x - x_0)(y - y_0)}{|\bar{x} - \bar{x}_0|^4}.\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}2\pi \{\Psi_D, \Delta \Psi_D\} &= \left[ \frac{(D_1^2 + D_2^2)(y - y_0)^2}{|\bar{x} - \bar{x}_0|^4} \delta'_y(y - y_0) \right] \delta'_x(x - x_0) - \\ &\quad - \left[ \frac{(D_1^2 + D_2^2)(x - x_0)^2}{|\bar{x} - \bar{x}_0|^4} \delta'_x(x - x_0) \right] \delta'_y(y - y_0) + \\ &\quad + \frac{D_1 D_2 [(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2] - 2D_2^2(x - x_0)(y - y_0)}{|\bar{x} - \bar{x}_0|^4} \delta(x - x_0) \delta''_{yy}(y - y_0) - \\ &\quad - \frac{D_1 D_2 [(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2] - 2D_1^2(x - x_0)(y - y_0)}{|\bar{x} - \bar{x}_0|^4} \delta(y - y_0) \delta''_{xx}(x - x_0).\end{aligned}\tag{7.3}$$

Действие первой производной от  $\delta$ -функции на обычные функции дается формулой (2.8), из которой следует, что первый и второй члены в формуле (7.3) обращаются в нуль, т. к. содержат нули вида:

$$\begin{aligned}(y - y_0) \delta(y - y_0); (y - y_0)^2 \big|_{y - y_0 = 0} \delta'_y(y - y_0); \\ (x - x_0) \delta(x - x_0); (x - x_0)^2 \big|_{x - x_0 = 0} \delta'_x(x - x_0).\end{aligned}$$

Кроме того, в третьем и четвертом слагаемых обращаются в нуль член с множителем  $D_2^2$ , т. к. содержит нуль  $(x - x_0) \delta(x - x_0)$ , и член с множителем  $D_1^2$ , т. к. содержит нуль  $(y - y_0) \delta(y - y_0)$ . Кроме того, очевидно, нулю равны члены:  $D_1 D_2 [(x - x_0)^2 \delta(x - x_0)] \delta''_{yy}(y - y_0)$  и  $D_1 D_2 [(y - y_0)^2 \delta(y - y_0)] \delta''_{xx}(x - x_0)$ . В результате скобка (7.3) равна

$$2\pi \{\Psi_D, \Delta\Psi_D\} = \frac{D_1 D_2 (y - y_0)^2}{|\bar{x} - \bar{x}_0|^4} \delta(x - x_0) \delta''_{yy}(y - y_0) - \frac{D_1 D_2 (x - x_0)^2}{|\bar{x} - \bar{x}_0|^4} \delta(y - y_0) \delta''_{xx}(x - x_0) \quad (7.4)$$

Воспользуемся теперь формулой (2.9), по которой действует вторая производная от  $\delta$ -функции. Применим формулу (2.9) к коммутатору (7.4). Очевидно, что все члены обращаются в нуль, кроме членов без производных от  $\delta$ -функции, которые взаимно сокращаются:

$$2\pi \{\Psi_D, \Delta\Psi_D\} = \frac{2D_1 D_2}{|\bar{x} - \bar{x}_0|^4} \delta(\bar{x} - \bar{x}_0) - \frac{2D_1 D_2}{|\bar{x} - \bar{x}_0|^4} \delta(\bar{x} - \bar{x}_0) = 0.$$

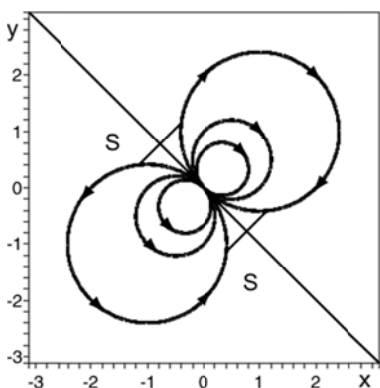


Рис. 7.1. Дипольная сингулярность, с индексом векторного поля, равным 2

Таким образом, мы доказали, что в дипольной сингулярности отсутствует самовоздействие и в результате она является точным стационарным решением уравнений Эйлера. Отсутствие самовоздействия в дипольной сингулярности можно понять также из простых физических соображений. Действительно, из рис. 7.1 видно, что из-за симметрии конфигурации линии тока поток импульса, который втекает в сингулярность через произвольную площадку  $S$ , в точности равен потоку импульса, который вытекает из сингулярности через такую же

симметричную площадку  $S$ . Т. е. сила, которая действует на сингулярность равна нулю и сингулярность является неподвижной.

Естественно, возникает вопрос, имеют ли более высокие мультипольные сингулярности, например, квадрупольная, самовоздействие? Для ответа на этот вопрос нужно вычислить скобку Пуассона  $\{\Psi, \Delta\Psi\}$  для квадрупольной сингулярности. Квадрупольная сингулярность порождается функцией тока:

$$\Psi_{D_2} = -\frac{1}{8\pi} D_{i_1 i_2} \frac{\partial^2}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \ln |\bar{x} - \bar{x}_0|^2$$

и имеет завихренность:

$$\omega = \frac{1}{2} D_{i_1 i_2} \frac{\partial^2}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \delta(\bar{x} - \bar{x}_0).$$

Вычислим скобки Пуассона  $\{\Psi, \Delta\Psi\}$ , что дает следующий результат:

$$\left\{\Psi_{D_2}, \Delta\Psi_{D_2}\right\} = -\frac{1}{3\pi} \frac{D_{12}(D_{11} + D_{22})}{(x^2 + y^2)^3} \delta(\vec{x}),$$

демонстрирующий, что в общем случае в квадрупольной сингулярности присутствует самовоздействие (исключением является специальный выбор коэффициентов:  $D_{12} = 0$ , или  $D_{11} + D_{22} = 0$ , однако, даже если выбрать такие значения коэффициентов в некоторый момент времени, то можно убедиться что эти значения не сохраняются со временем). Самовоздействие означает, что данная сингулярность является не физической. Аналогичные результаты получаются для мультиполей более высоких порядков. Поэтому, в общем случае, мультипольные сингулярности более высоких порядков, чем диполь, не совместимы с уравнением Эйлера, как уже отмечалось ранее.

## 7.2. Стационарные решения

### Со сложными особыми точками

Рассмотрим вопрос, в каких случаях разложение завихренности (7.1) совместимо с уравнением Эйлера и какие при этом возникают ограничения в нестационарном и стационарном случаях. Нестационарный случай уже был рассмотрен ранее.

Рассмотрим теперь стационарный случай, когда  $f(\Psi) \neq 0, df(\Psi)/d\Psi \neq 0$ . В этом случае функция тока может зависеть от времени, из-за зависимости от времени координат особенностей и дипольных моментов. Подстановка завихренности (7.1) в уравнение Эйлера (2.3) дает для гладкой части функции тока уравнение:

$$\left[ \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\partial\Psi}{\partial x_v^\alpha} \frac{dx_v^\alpha}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial y_v^\alpha} \frac{dy_v^\alpha}{dt} \right) + \sum_{\beta=1}^M \left( \frac{\partial\Psi}{\partial x_d^\beta} \frac{dx_d^\beta}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial y_d^\beta} \frac{dy_d^\beta}{dt} \right) + \sum_{\beta=1}^M \frac{\partial\Psi}{\partial D_i^\beta} \frac{dD_i^\beta}{dt} \right] \frac{df(\Psi)}{d\Psi} = 0. \quad (7.5)$$

Первый член (7.5) связан с явной зависимостью функции тока  $\Psi$  от времени, второй и третий члены обусловлены движением особенностей. Четвертый член в (7.5) связан с зависимостью дипольных моментов от времени. К уравнению (7.5) нужно еще добавить уравнения для сингулярных частей поля завихренности. В случае  $df(\Psi)/d\Psi = 0$ ,

уравнение (7.5) отсутствует и остаются только уравнения движения сингуляриностей. Достаточное условие стационарности, т. е. обращение в нуль уравнения (7.5) при  $df(\Psi)/d\Psi \neq 0$  состоит в следующем:

1. Функция тока не зависит явно от времени.
2. Все особенности являются неподвижными.
3. Все дипольные моменты  $D_i^\beta$  не зависят от времени.

В результате достаточным условием неподвижности всех сингуляриностей и стационарности всех дипольных моментов является условие обращения в нуль скобки Пуассона:

$$\{\Psi, \Delta\Psi\} = 0, \quad (7.6)$$

что, в свою очередь, означает обращение в нуль независимо от всех коэффициентов перед различными сингулярностями в скобке Пуассона (7.6).

Перейдем к вопросу о нахождении точных стационарных решений двумерного уравнения Эйлера в случае, когда  $\frac{df(\Psi)}{d\Psi} \neq 0$ . Далее скобку Пуассона

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\Psi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\Psi}{\partial x} = 0 \quad (7.7)$$

удобно считать безразмерной. Выберем *анзатц* (7.1) в виде

$$\Delta\Psi = \exp(-\Psi/\Gamma_0) + 4\pi n\Gamma_0\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) - 4\pi\vec{D} \cdot \partial\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)/\partial\vec{x}. \quad (7.8)$$

Здесь функция  $f(\Psi)$  выбирается, как в работе Стюарта [42], коэффициенты  $\Gamma_0$  и  $\vec{D}$  предполагаются постоянными, координата  $\vec{x}_0$  предполагается не зависящей от времени (далее можно выбрать  $\vec{x}_0 = 0$ ).  $n$  — есть целое положительное число. Выполним в уравнении (7.8) перенормировку:

$$\Psi/\Gamma_0 \rightarrow \Psi', x \rightarrow \Gamma_0^{1/2}x', y \rightarrow \Gamma_0^{1/2}y', \vec{D}/\Gamma_0^{3/2} \rightarrow \vec{D}'.$$

Опуская штрих, запишем завихренность (7.8) в виде

$$\Delta\Psi = \exp(-\Psi) + 4\pi n\delta(\vec{x}) - 4\pi\vec{D} \frac{\partial}{\partial\vec{x}} \delta(\vec{x}). \quad (7.9)$$

Найдем сначала точные решения уравнения (7.9), а затем покажем, что они являются точными стационарными решениями двумерного

уравнения Эйлера (7.7). Будем искать решение уравнения (7.9) в форме Лиувилля:

$$\Psi = -\ln 8 |u'(z)|^2 / (1 + |u(z)|^2)^2, \quad (7.10)$$

здесь  $u'(z) = du(z)/dz$  – неизвестная пока функция комплексного переменного  $z = x + iy$ ,  $u(z)$  – первообразная этой функции. Прямое вычисление Лапласиана функции (7.10) дает:

$$\Delta \Psi = 8 |u'(z)|^2 \cdot (1 + |u(z)|^2)^{-2} - \Delta \ln |u'(z)|^2. \quad (7.11)$$

Здесь важно отметить, что формула (7.11) справедлива для произвольной аналитической функции  $u'(z)$ , независимо от структуры ее особенностей. Подставляя формулу (7.11) в уравнение (7.9), получаем уравнение для функции  $|u'(z)|^2$ :

$$-\Delta \ln |u'(z)|^2 = 4\pi n \delta(\vec{x}) - 4\pi \vec{D} \cdot \partial \delta(\vec{x}) / \partial \vec{x}. \quad (7.12)$$

Легко видеть, что уравнение (7.12) удовлетворяется, если выбрать функцию  $|u'(z)|^2$  в виде

$$|u'(z)|^2 = |z|^{-2n} \cdot \exp \vec{D} \cdot \partial \ln |z|^2 / \partial \vec{x}. \quad (7.13)$$

Действительно:

$$\ln |u'(z)|^2 = -n \ln |z|^2 + \vec{D} \cdot \partial \ln |z|^2 / \partial \vec{x}. \quad (7.14)$$

Первый член в (7.14) дает функцию Грина уравнения Лапласа:

$$\Delta \ln |z|^2 = 4\pi \delta(\vec{x}) \quad (7.15)$$

и описывает точечный вихрь. Второй член в (7.14) является результатом применения оператора  $\vec{D} \cdot \partial / \partial \vec{x}$  к уравнению (7.15) и описывает точечный диполь. Введем комплексный дипольный момент  $D = D_1 + iD_2$ . Тогда дипольный оператор  $\vec{D} \cdot \partial / \partial \vec{x}$  можно записать в комплексной форме:

$$\bar{D} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = D \frac{\partial}{\partial z} + \bar{D} \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

здесь  $\bar{D}, \bar{z}$  — обозначают комплексно сопряженные величины. При этом функцию (7.13) можно записать в виде

$$\left| u'(z) \right|^2 = \frac{1}{|z|^{2n}} \exp \left( D \frac{\partial}{\partial z} + \bar{D} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) (\ln z + \ln \bar{z}) = \frac{1}{z^n} \exp \left( \frac{D}{z} \right) \frac{1}{\bar{z}^n} \exp \left( \frac{\bar{D}}{\bar{z}} \right). \quad (7.16)$$

Из формулы (7.16) следует, что функцию  $u'(z)$  можно выбрать в виде

$$u'(z) = z^{-n} \cdot \exp(D/z). \quad (7.17)$$

В точке  $z = 0$ , функция  $u'(z)$  (7.17) имеет существенную особую точку, которая сливается с полюсом порядка  $n$ . Найдем теперь первообразную функцию  $u_n(z)$ :

$$u_n(z) = \int \exp(D/z) \cdot z^{-n} dz.$$

Переходя к новой переменной  $w = D/z$ , получаем:

$$u_n(w) = -D^{1-n} \int W^{(n-2)} \exp W dW \quad (7.18)$$

Из формулы (7.18) видно, что первообразная является элементарной функцией только при  $n \geq 2$ . Именно этот случай будет рассматриваться в данном разделе (другие случаи будут рассмотрены отдельно).

Интегрирование по частям в формуле (7.18) при  $n \geq 2$  дает:

$$u_n(z) = -D^{-1} z^{2-n} \exp(D/z) P_{n-2}(z), \quad (7.19)$$

где полином  $P_{n-2}(z)$  имеет вид:

$$P_{n-2}(z) = 1 - (n-2)(z/D) + (n-2)(n-3)(z/D)^2 + \dots + (-1)^{n-3} (n-2)! (z/D)^{n-3} + (-1)^{n-2} (n-2)! (z/D)^{n-2}. \quad (7.20)$$

В результате  $|u_n(z)|^2$  запишем как

$$|u_n(z)|^2 = |D|^{-2} |z|^{2(2-n)} \exp\left(2(D_1x + D_2y)/(x^2 + y^2)\right) |P_{n-2}(z)|^2.$$

Первообразная  $u_n(z)$  (7.19), как и функция  $u'(z)$  (7.17) имеет в точке  $z = 0$  существенную особую точку, которая сливается с полюсом порядка  $(n-2)$ . В вещественной форме  $|u'(z)|^2$ , очевидно, имеет вид:

$$|u'(z)|^2 = (x^2 + y^2)^{-n} \exp\left(2(D_1x + D_2y)/(x^2 + y^2)\right). \quad (7.21)$$

Отсюда видно, что существенно особая точка описывает в комплексной форме особенность типа точечного диполя, а полюс описывает точечный вихрь, т.к. выражение (7.21) порождает в функции тока (7.10) члены вида:

$$-\ln|u'(z)|^2 = n \ln(x^2 + y^2) - 2(D_1x + D_2y)/(x^2 + y^2).$$

Таким образом, точное решение уравнения (7.9) дается формулой (7.10), где  $u(z)$  определяется соотношением (7.19), а  $u'(z)$  – формулой (7.17). Теперь нужно доказать, что полученное решение обращает в нуль скобку Пуассона (7.7). Вычислим вначале поле скорости. Производные  $\partial\Psi/\partial x$  и  $\partial\Psi/\partial y$  имеют вид:

$$\partial\Psi/\partial x = 2[1 + |u(z)|^2]^{-1} \cdot \partial[u(z)\overline{u(z)}]/\partial x,$$

$$\partial\Psi/\partial y = 2[1 + |u(z)|^2]^{-1} \cdot \partial[u(z)\overline{u(z)}]/\partial y.$$

Используя представление  $\partial/\partial x = \partial/\partial z + \partial/\partial \bar{z}$ ,  $\partial/\partial y = i\partial/\partial z - i\partial/\partial \bar{z}$  получаем более удобную формулу для производных:

$$\partial\Psi/\partial x = 2[1 + |u(z)|^2]^{-1} \left( \bar{u} du/dz + u d\bar{u}/dz \right),$$

$$\partial\Psi/\partial y = 2i[1 + |u(z)|^2]^{-1} \left( \bar{u} du/dz - u d\bar{u}/dz \right),$$

Учитывая (7.17), после простых алгебраических преобразований получаем выражение для компонент поля скорости:

$$\partial \Psi / \partial x = 2 \exp \left( (D\bar{z} + \bar{D}z) / |z|^2 \right) \cdot \left[ (1 + |u(z)|^2) |D|^2 |z|^{2n} \right]^{-1} \cdot (D\bar{z}^2 \bar{P}_{n-2} + \bar{D}z^2 P_{n-2}), \quad (7.22)$$

$$\partial \Psi / \partial y = 2i \exp \left( (D\bar{z} + \bar{D}z) / |z|^2 \right) \cdot \left[ (1 + |u(z)|^2) |D|^2 |z|^{2n} \right]^{-1} \cdot (D\bar{z}^2 \bar{P}_{n-2} - \bar{D}z^2 P_{n-2}), \quad (7.23)$$

Напомним, что  $n \geq 2$ . Покажем теперь, что функция (7.10), (7.19) является точным решением скобки Пуассона (7.7). Для этого подставим выражение для завихренности (7.8) и производные (7.22), (7.23) в скобку Пуассона (7.7). Рассмотрим вначале простейший случай  $n = 2$ . В этом случае полином  $P_{n-2} = 1$  и производные (7.22), (7.23) принимают простой вид:

$$\begin{aligned} \partial \Psi / \partial x &= -4 \exp \left( (D\bar{z} + \bar{D}z) / |z|^2 \right) \cdot \left[ (1 + |u|^2) |D|^2 |z|^4 \right]^{-1} \cdot (D_1 x^2 + 2D_2 xy - D_1 y^2), \\ \partial \Psi / \partial y &= 4 \exp \left( (D\bar{z} + \bar{D}z) / |z|^2 \right) \cdot \left[ (1 + |u|^2) |D|^2 |z|^4 \right]^{-1} \cdot (D_2 x^2 - 2D_1 xy - D_2 y^2), \\ |u(z)|^2 &= |D|^{-2} \cdot \exp \left( (D\bar{z} + \bar{D}z) / |z|^2 \right) \end{aligned} \quad (7.24)$$

Скобки Пуассона (7.7) запишем в явном виде:

$$\begin{aligned} \{\Psi, \Delta \Psi\} &= 4\pi n \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \delta(x) \delta'(y) - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \delta(y) \delta'(x) \right] - \\ &\quad - 4\pi \left[ D_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} - D_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] \delta'(x) \delta'(y) - \\ &\quad - 4\pi \left[ D_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \delta(x) \delta''(y) - D_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \delta(y) \delta''(x) \right]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Очевидно, что все члены в первой скобке (7.25) равны нулю, т. к. содержат нули вида:

$$x^2 \delta(x), x \delta(x), x^2 \delta'(x); y^2 \delta(y), y \delta(y), y^2 \delta'(y).$$

Во второй скобке часть членов также равна нулю, но имеются «опасные» члены вида:  $xy \delta'(x) \delta'(y)$ . Однако, эти члены входят во вторую скобку в комбинации:

$$\left( D_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} - D_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \delta'(x) \delta'(y) = [\dots] (-D_1 D_2 xy + D_2 D_1 xy) \delta'(x) \delta'(y) = 0,$$

т. е. взаимно сокращаются. Здесь скобка  $[\dots]$  обозначает общий множитель. Рассмотрим теперь последнюю скобку в (7.25). В этой скобке также часть членов сразу обращается в нуль, но имеются «опасные» члены вида:  $y^2 \delta(x) \delta''(y)$  и  $x^2 \delta(y) \delta''(x)$ . В скобки (7.25) эти «опасные» члены входят в комбинации:

$$[\dots][D_2 D_1 y^2 \delta(x) \delta''(y) - D_1 D_2 x^2 \delta(y) \delta''(x)],$$

здесь скобка  $[\dots]$  также обозначает общий множитель. Применим теперь формулу

$$f(x) \delta^{(2)}(x) = f^{(2)}(0) \delta(x) - 2 f^{(1)}(0) \delta^{(1)}(x) + f(0) \delta^{(2)}(x)$$

Из этой формулы видно, что «опасные» члены имеют вид:

$$D_1 D_2 \delta(x) \delta(y) \frac{d^2}{dy^2} y^2 - D_1 D_2 \delta(x) \delta(y) \frac{d^2}{dx^2} x^2 = 0$$

и в коммутаторе (7.25) взаимно сокращаются, остальные члены дают ноль. Таким образом, скобка Пуассона обращается в нуль на всех сингулярностях. В соответствии с результатами раздела 3 это гарантирует неподвижность особенностей и сохранение дипольного момента  $\vec{D}$ . В результате доказано, что полученное решение уравнения (7.9), является точным стационарным решением двумерного уравнения Эйлера (7.7) при  $n = 2$ . Рассмотрим теперь общий случай  $n > 2$ . В этом случае скорости (7.22), (7.23) содержат полиномы  $P_{n-2}(z)$  (см. соотношение (7.20)) и  $\overline{P_{n-2}}(z)$ .

Нетрудно видеть, что дополнительные степени  $z$  или  $\bar{z}$  в этих полиномах порождают только нулевые члены в скобке Пуассона. Опасные члены соответствуют только первому члену в полиноме  $P_{n-2}(z)$ , т. е. единице. Но эти члены соответствуют случаю  $n = 2$ , и уже рассмотрены ранее, где показано их сокращение. Таким образом, доказано, что формулы (7.10), вместе с функцией  $u_n(z)$  (7.19), дают точное стационарное решение двумерного уравнения Эйлера при  $n \geq 2$ . В явном виде это решение имеет вид:

$$\Psi = -\ln 8 - \ln |u'(z)|^2 + 2 \ln(1 + |u(z)|^2) =$$

$$= -\ln 8 + n \ln(x^2 + y^2) - 2(D_1 x + D_2 y) / (x^2 + y^2)^{-1} + \\ + 2 \ln \left[ 1 + |P_{n-2}(z)|^2 [D]^2 (x^2 + y^2)^{(n-2)} \right]^{-1} \cdot \exp \left( 2(D_1 x + D_2 y) / (x^2 + y^2) \right) \Big].$$

1) Рассмотрим вначале самый простой случай, когда  $n = 2$ . В этом случае функция  $u_2(z)$  (7.19) имеет вид:

$$u_2(z) = -D^{-1} \exp(D/z),$$

Функция  $|u_2(z)|^2$  дается формулой (7.24),  $u_2'(z)$  имеет вид:

$$|u_2'(z)|^2 = (x^2 + y^2)^{-2} \cdot \exp \left( 2(D_1 x + D_2 y) / (x^2 + y^2) \right).$$

В результате находим функцию тока (7.10):

$$\Psi = -\ln 8 + 2 \ln(x^2 + y^2) - 2 \left( (D_1 x + D_2 y) / (x^2 + y^2) \right) + \\ + 2 \ln \left[ 1 + (D_1^2 + D_2^2)^{-1} \cdot \exp \left( 2(D_1 x + D_2 y) / (x^2 + y^2) \right) \right] \quad (7.26)$$

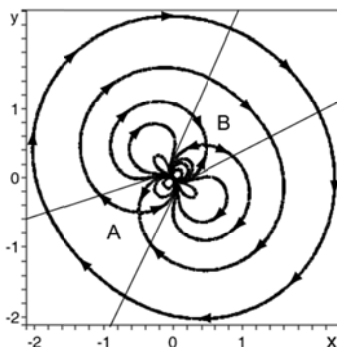


Рис. 7.2. Простейшая вихревая структура с индексом векторного поля равным 3, ( $n = 2$ ). Сложная сингулярность есть результат слияния существенной особой точки (дипольной сингулярности) с полюсом (точечным вихрем). Видно присутствие двух гиперболических особых точек A и B, соответственно внешней и внутренней. Сепаратрисы этих точек соединяют гиперболические точки с центральной сложной особой точкой. Прямые линии означают исключительные направления центральной особой точки

Далее, можно считать, что  $D_1 = D_2$ . Вихревая структура, которая описывается функцией тока (7.26), представлена на рис. 7.2, при  $D_1 = D_2 = 1$ . Ясно, что при больших значениях  $|\vec{x}|^2 \rightarrow \infty$  функция тока (7.26) асимптотически совпадает с функцией тока точечного вихря с отрицательной завихренностью и является аксиально симметричной. Из рис. 7.2 видно, что внутри внешней замкнутой линии тока находится вихревая структура с нетривиальной топологией линии тока. В центре находится сложная особая точка, которая получилась в результате слияния особенностей типа точечного вихря и точечного диполя. Кроме того, видно присутствие двух гиперболических точек, одной внешней  $A$  и одной внутренней  $B$ . Сепаратрисы этих точек соединяют гиперболические точки с центральной сложной особой точкой.

### 7.3. Сложные особые точки

Рассмотрим более детально структуру сложной особой точки. Общая теория таких особенностей изложена в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например [43], [44]). Следуя этой теории, нужно, прежде всего, выделить исключительные направления особой точки. Это есть направления касательных, по которым в особую точку входит или выходит бесконечное число интегральных кривых. Из рис. 7.2. видно, что имеется четыре таких исключительных направления, которые обозначены на рис. 7.2. прямыми линиями. Интегральные кривые, которые находятся внутри прямых линий образуют сектора. В нашем случае между исключительными линиями находится только четыре эллиптических сектора. (см., например [44]). В соответствии с общей теорией, индекс  $J(0)$  сложной особой точки дается формулой Бендиксона (см., например, [43]):

$$J(0) = (2 + n_e - n_h) / 2,$$

где  $n_e$  – число эллиптических секторов,  $n_h$  – число гиперболических секторов. В нашем случае  $n_h = 0$ ,  $n_e = 4$ . Поэтому

$$J(0) = 3. \quad (7.27)$$

Условие (7.27) означает, что сложная особая точка является структурно устойчивой, т. к. необходимое и достаточное условие структурной устойчивости особой точки, на плоскости состоит в том, что ее индекс  $J(0) \neq 0$  (см., например [45]). Заметим, что в случае дипольной сингулярности исключительные направления совпадают с направлением

вектора дипольного момента  $\vec{D}$ , а индекс диполя  $J_D = 2$ , т. е. точечный диполь также является структурно устойчивой особенностью. Индекс сложной особой точки можно найти иначе, без использования общей теории. Для этого вырежем особые точки окружностями, как показано на рис. 7.3. Тогда, в полученной многосвязной области индекс векторного поля равен нулю, т. е.:

$$\sum_i J_i + J(0) + J_s = 0,$$

где  $J_s$  – индекс внешней окружности  $S$ ,  $\sum_i J_i$  – есть сумма индексов всех внутренних простых особых точек. Это означает, что индекс вихревой структуры, которая окружена контуром  $S$ , равен:

$$J_A + J_B + J(0) = 1. \quad (7.28)$$

Поскольку индекс гиперболических точек  $A$  и  $B$  равен  $(-1)$ , то уравнение (7.28), дает индекс сложной особой точки  $J(0) = +3$ .

2) Рассмотрим теперь случай  $n = 3$ . (Диполь плюс полюс порядка  $n = 3$ .) В этом случае полином  $P_{n-2}(z)$  уже не тривиален:

$P_1(z) = 1 - z/D$ . Функция  $|u_3(z)|^2$  имеет вид:

$$|u_3(z)|^2 = |D|^{-4} |D/z|^2 \exp\left((D\bar{z} + \bar{D}z)/|z|^2\right) |1 - (z/D)|^2,$$

или в вещественной форме:

$$|u_3(z)|^2 = (x^2 + y^2)^{-1} (D_1^2 + D_2^2)^{-1} \exp\left(2(D_1x + D_2y)/(x^2 + y^2)\right) \times \quad (7.29)$$

$$\times \left[1 + (x^2 + y^2)(D_1^2 + D_2^2)^{-1} - 2(D_1x + D_2y)(D_1^2 + D_2^2)^{-1}\right].$$

Соответственно функция  $\Psi$  имеет вид:

$$\Psi = -\ln 8 + 3 \ln(x^2 + y^2) - 2(D_1x + D_2y)(x^2 + y^2)^{-1} + 2 \ln[1 + |u_3(z)|^2],$$

где  $|u_3(z)|^2$  дается формулой (7.29). Картина линий тока представлена на рис. 7.4 при  $D_1 = D_2 = 1$ . Видно, что в отличие от предыдущего случая, в решении появилась эллиптическая точка. Предыдущая внутренняя гиперболическая точка ращепилась на две. Структура центральной особой точки не изменилась, ее индекс остался равным 3.

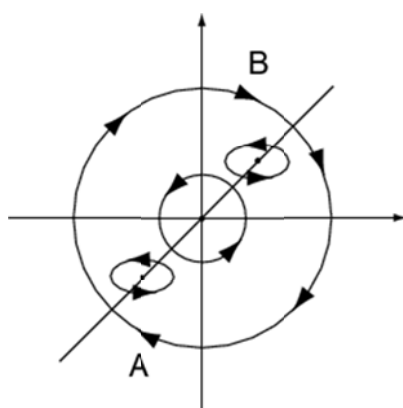


Рис. 7.3. Контур, который используется при нахождении индекса сложной особой точки

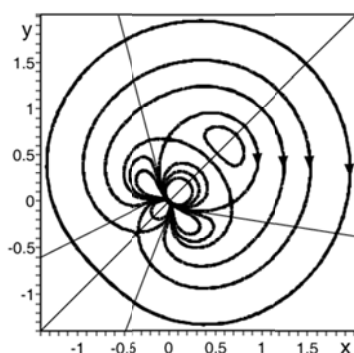


Рис. 7.4. Вихревая структура при  $n = 3$

(диполь плюс полюс порядка  $n = 3$ ). Видно, что появилась эллиптическая точка. Внутренняя гиперболическая особая точка распалась на две. Структура центральной особой точки не изменилась. Прямые линии обозначают по-прежнему исключительные направления особой точки. Структура внешней сепаратрисы не изменилась. Усложнилась структура внутренних сепаратрис, которые окружают теперь еще новую эллиптическую точку

Отметим, что внешняя сепаратриса осталась прежней. Она окружает всю внутреннюю вихревую структуру, включая новую эллиптическую точку, вокруг которой возник вихрь с отрицательной завихренностью. Сепаратриса предыдущей внутренней гиперболической точки усложнилась, т. к. теперь она окружает еще дополнительную эллиптическую точку. Все сепаратрисы

связывают гиперболические точки либо друг с другом, либо с центральной особенностью.

3) Рассмотрим теперь случай  $n = 4$  (диполь плюс полюс порядка  $n = 4$ ). В этом случае полином  $P_{n-2}(z)$  имеет вид:

$$P_2(z) = 1 - 2(z/D) + 2(z/D)^2.$$

В вещественном виде:

$$|P_2(z)|^2 = 1 - 4 \frac{D_1 x + D_2 y}{(D_1^2 + D_2^2)} \left(1 + 2 \frac{(x^2 + y^2)}{(D_1^2 + D_2^2)}\right) + \\ + 4 \frac{[(D_1^2 - D_2^2)(x^2 - y^2) + 4D_1 D_2 xy]}{(D_1^2 + D_2^2)^2} + 4 \frac{(x^2 + y^2)}{(D_1^2 + D_2^2)} \left(1 + \frac{(x^2 + y^2)}{(D_1^2 + D_2^2)}\right).$$

Функция  $|u_4(z)|^2$  принимает вид:

$$|u_4(z)|^2 = |P_2(z)|^2 \cdot |D|^2 |z|^{-4} \exp\left((D\bar{z} + \bar{D}z)/|z|^2\right).$$

В результате для функций тока получаем выражение:

$$\Psi = -\ln 8 + 4 \ln(x^2 + y^2) - 2(D_1 x + D_2 y) \cdot (x^2 + y^2)^{-1} + 2 \ln[1 + |u_4(z)|^2].$$

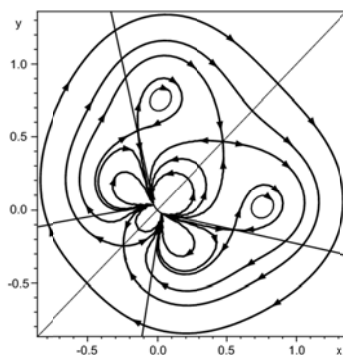


Рис. 7.5. Вихревая структура при  $n = 4$ , «бабочка» (диполь плюс полюс порядка  $n = 4$ ). Видно, что появились две новых эллиптических особых точки, с двумя вихревыми сателлитами. Кроме того, появилась новая группа сепаратрис, которая связывает вихревые сателлиты с центральной особой точкой. Топологическая структура сепаратрис внешней и внутренней гиперболических точек не изменилась

Картина линий тока представлена на рис. 7.5 при  $D_1 = D_2 = 1$  («бабочка»). Прежде всего, видно, что появились две эллиптических особые точки и вокруг них появилось два вихря сателлита. Число гиперболических точек равно четырем. Структура сепаратрис существенно усложнилась. Видно, что имеется три группы сепаратрис. Первая сепаратриса такого же типа, как и внешняя сепаратриса во всех предыдущих случаях. Вторая сепаратриса такая же, как и сепаратриса внутренней гиперболической точки в первом случае. Однако, появилась новая группа сепаратрис, которая связывает вихревые сателлиты (эллиптические особые точки) с центральной особой точкой, структура которой топологически не изменилась.

4) Рассмотрим теперь полюса более высокого порядка:  $n = 5$ , и  $n = 6$ . Полиномы  $P_{n-2}(z)$  имеют вид соответственно:

$$P_3(z) = 1 - 3(z/D) + 6(z/D)^2 - 6(z/D)^3,$$

$$P_4(z) = 1 - 4(z/D) + 12(z/D)^2 - 24(z/D)^3 + 24(z/D)^4.$$

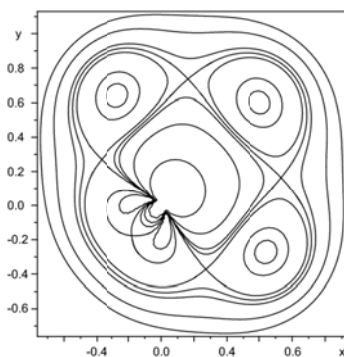


Рис. 7.6. Вихревая структура при  $n = 5$ . В этом случае появились три эллиптические особые точки (три вихревых сателлита) и 5 гиперболических точек

Линии тока при  $n = 5$  представлены на рис. 7.6, при  $D_1 = D_2 = 1$ . В этом случае появилось три эллиптических особые точки (три вихревых сателлита) и пять гиперболических особых точек. В случае  $n = 6$  появляется четыре эллиптических особых точки и шесть гиперболических точек. При дальнейшем увеличении номера  $n$  всегда присутствует  $n$  – гиперболических особых точек и  $n - 2$  эллиптические точки. Центральная особая точка сохраняет четыре исключительных направления, т. е. ее индекс остается равным 3. Возникающая вихревая структура имеет симметрию относительно диагонали квадрата. Диагональ всегда проходит через центральную особую точку и противоположную особую точку, которая

гиперболическая при  $n = 2k$ , и эллиптическая при  $n = 2k + 1$ . Получающаяся вихревая структура имеет вид ожерелья, состоящего из вихрей сателлитов, кроме нижнего сектора, который всегда имеет гиперболическую особую точку, связанную сепаратрисами с центральной особенностью.

Как мы видим, особенность векторного поля индекса 3 может быть интерпретирована в комплексной форме как слияние в функции  $u'(z)$  (7.17) полюса, который соответствует точечному вихрю с существенной особой точкой, которая соответствует точечному диполю. Рассмотренные здесь точные локализованные решения описывают вихревые структуры сложной формы, где особая точка окружена вихревыми сателлитами, которые с ростом числа  $N$  имеют тенденцию образовывать симметричные ожерелья. Сам факт существования точных решений со сложными особенностями является довольно важным, поэтому мы ограничились рассмотрением только простейшего класса точных решений, которые выражаются в элементарных функциях. Мы не касались вопросов построения более сложных решений, которые выражаются через специальные функции и вопросов устойчивости вихревых конфигурации со сложными особыми точками.

## РАЗДЕЛ 8. СПИРАЛЬНЫЕ КВАЗИДВУМЕРНЫЕ КРУПНОМАСШТАБНЫЕ ВИХРИ

Важность процессов генерации крупномасштабных когерентных вихревых структур в гидродинамике хорошо известна. Под крупномасштабными понимаются вихри, которые возникают либо под воздействием силы с намного меньшим масштабом, либо возникают в турбулентности с характерным масштабом много меньшим, чем масштаб вихрей. Если такие когерентные структуры возникают в мелкомасштабной турбулентности, то они играют ключевую роль в процессах переноса (см., например [46]). Существование когерентных вихревых структур хорошо подтверждается результатами численных и лабораторных экспериментов [47–50], особенно для двумерной или квази двумерной турбулентности [51–55]. Такие вихри хорошо наблюдаются в геофизической гидродинамике в виде разнообразных циклонов в атмосферах планет [56]. Часто крупномасштабные структуры являются квазидвумерными, т. е. их поле скорости является двумерным, а сами вихри распространяются перпендикулярно плоскости вращения жидкости, образуя вихревые спирали. В данном разделе рассмотрим несколько примеров таких квазидвумерных вихрей,

которые возникают в результате развития крупномасштабной неустойчивости в стратифицированной жидкости, уделяя основное внимание нелинейным вихрям. Теория крупномасштабной неустойчивости, в результате которой генерируются спиральные волны и вихри, была предложена в работе Фриша, Ши и Сулема [57] (анизотропный кинетический  $\alpha$ -эффект). В этой работе крупномасштабная неустойчивость возникала под действием мелкомасштабной силы, у которой была нарушена четность (при нулевой спиральности). В последующей работе [57] был изучен обратный каскад энергии и нелинейные режимы насыщения неустойчивости. Хотя нарушение четности является более общим понятием, чем спиральность, именно спиральность  $\bar{v}rot\bar{v} \neq 0$  является наиболее распространенным механизмом нарушения четности гидродинамических течений. Ситуация, однако, здесь более тонкая. Наличие спиральности само по себе не гарантирует существование крупномасштабной неустойчивости. Например, если в работе [57] в качестве внешней силу выбрать спиральную силу, то неустойчивость исчезнет. Много работ было посвящено изучению этого вопроса (см., например, [58–61]). В результате было осознано, что мелкомасштабная турбулентность, способная генерировать крупномасштабные возмущения не может быть просто однородной, изотропной и спиральной [62], а должна обладать дополнительными специальными свойствами. В ряде случаев было показано существование крупномасштабной неустойчивости (вихревое динамо или гидродинамический  $\alpha$ -эффект). Так, в частности, в работе [59] было показано существование крупномасштабной неустойчивости в конвективных системах с мелкомасштабной спиральной турбулентностью. Эти работы, а также результаты численного моделирования подробно описаны в обзоре [63], где сделан акцент на возможных применениях этих результатов к проблеме возникновения тропических циклонов.

В этой главе мы более подробно остановимся на теории генерации квазидвумерных спиральных вихрей в стратифицированной жидкости под действием мелкомасштабной спиральной силы [64].

### **8.1. Крупномасштабная неустойчивость, приводящая к генерации спиральных вихревых структур**

Пусть в жидкости имеется устойчивая температурная стратификация. Приложим к такой жидкости мелкомасштабную спиральную внешнюю силу с малым числом Рейнольдса  $R \ll 1$ . Такая сила будет поддерживать в жидкости мелкомасштабные спиральные флуктуации поля скорости ( $\bar{v}rot\bar{v} \neq 0$ ). Жидкость будем рассматривать как безграничную. На первый взгляд в такой системе нет никаких неустойчивостей. Однако, далее мы покажем, что, несмотря на устойчивую стратификацию

в жидкости, возникает крупномасштабная неустойчивость, приводящая к генерации спиральных вихревых структур с  $2D$  полем скорости. Теория этой неустойчивости строится методом асимптотического многомасштабного разложения, аналогично тому, как это было сделано в работе Фриша, Ши и Сулем в теории АКА-эффекта [57].

Рассмотрим уравнения движения несжимаемой жидкости при наличии постоянного градиента температуры в приближении Буссинеска:

$$\partial \vec{V} / \partial t + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\rho_0^{-1} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + g \beta T \vec{l} + \vec{F}_0; \quad (8.1)$$

$$\partial T / \partial t + (\vec{V} \nabla) T = \chi \Delta T - V_z A. \quad (8.2)$$

$\nabla \vec{V} = 0$ ,  $\vec{l} = (0, 0, 1)$  – единичный вектор в направлении оси  $z$ ,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения,  $A = dT_0 / dz$  – постоянный равновесный градиент температуры,  $A = \text{Const}$ ,  $A > 0$ .  $\rho_0 = \text{const}$ ,  $\nabla T_0 = A \vec{l}$ . В уравнение Эйлера (8.1) включена сила Архимеда и внешняя сила  $\vec{F}_0$ ,  $\text{div} \vec{F}_0 = 0$ . Силу  $\vec{F}_0$  запишем в виде  $\vec{F}_0 = f_0 \vec{F}_0(x / \lambda_0, t / t_0)$ , где  $\lambda_0$  – характерный масштаб,  $t_0$  – характерное время,  $f_0$  – характерная амплитуда. Характерную скорость, которая вызывается внешней силой, обозначим  $v_0 = v_0(x / \lambda_0, t / t_0)$ . В безразмерных переменных  $(t, \vec{x}, \vec{V})$ :

$$\begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow \vec{x} / \lambda_0, t \rightarrow t / t_0, \vec{V} \rightarrow \vec{V} / v_0, \vec{F}_0 \rightarrow \vec{F} / f_0, P \rightarrow P / \rho_0 P_0, \\ t_0 &= \lambda_0^2 / \nu, P_0 = v_0 \nu / \lambda_0, f_0 = v_0 \nu / \lambda_0^2, v_0 = f_0 \lambda_0^2 / \nu. \end{aligned}$$

уравнения движения принимают вид:

$$\begin{aligned} \partial \vec{V} / \partial t + R(\vec{V} \nabla) \vec{V} &= -\nabla P + \Delta \vec{V} + (\lambda_0^2 / v_0 \nu) g \beta T \vec{l} + \vec{F}_0 \\ \partial T / \partial t + R(\vec{V} \nabla) T &= \text{Pr}^{-1} \cdot \Delta T - R V_z (A \lambda_0), \end{aligned}$$

где  $R = \lambda_0 v_0 / \nu$  – число Рейнольдса на масштабе  $\lambda_0$ ,  $\text{Pr} = \nu / \chi$  – число Прандтля. Вводя безразмерную температуру  $T \rightarrow T / \lambda_0 A$ , получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + R(\vec{V} \nabla) \vec{V} - \Delta \vec{V} &= -\nabla P + \frac{Ra}{R \text{Pr}} T \vec{l} + \vec{F}_0, \\ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T \right) &= -V_z - (\vec{V} \nabla) T. \end{aligned}$$

Здесь  $Ra = \frac{\lambda_0^4 Ag\beta}{\chi\nu}$  – число Релея на масштабе  $\lambda_0$ . Далее для про-

стоты будем рассматривать случай  $Pr = 1$ . Переходя к новой температуре  $T \rightarrow T/R$ , окончательно получим:

$$\partial \vec{V} / \partial t + R(\vec{V} \nabla) \vec{V} - \Delta \vec{V} = -\nabla P + Ra T \vec{l} + \vec{F}_0, \quad (8.3)$$

$$(\partial T / \partial t - \Delta T) = -V_z - R(\vec{V} \nabla) T. \quad (8.4)$$

$$\text{div} \vec{V} = 0.$$

Малым параметром асимптотического разложения будем считать число Рейнольдса  $R = \lambda_0 \nu_0 / \nu \ll 1$  на масштабе  $\lambda_0$ . Параметр  $Ra$  будем считать не большим и не малым, не влияющим на схему разложения (т. е. внесхемным параметром).

## 8.2. У р а в н е н и я   н е л и н е й н о й   т е о р и и г е н е р а ц и и   к р у п н о м а с ш т а б н ы х В и х р е в ы х   с т р у к т у р

Рассмотрим следующую постановку задачи. Будем считать внешнюю силу спиральной, мелкомасштабной и высокочастотной. Такая сила вызывает мелкомасштабные флуктуации скорости и температуры на фоне равновесного состояния. При усреднении такие быстро осциллирующие флуктуации дают нуль. Однако из-за малого нелинейного взаимодействия между ними в каких-то порядках теории возмущения могут возникнуть члены, которые при усреднении не дают нуля. Это означает, что они не являются осциллирующими т. е. будут крупномасштабными. С формальной точки зрения такие члены будут секулярными, т. е. будут условиями разрешимости многомасштабного асимптотического разложения. Нахождение и исследование уравнений разрешимости, т. е. уравнений для крупномасштабных возмущений и является основной задачей. Обозначим далее мелкомасштабные переменные  $x_0 = (\vec{x}_0, t_0)$ , а крупномасштабные переменные  $X = (\vec{X}, T)$ . Производную  $\partial / \partial x_0^i$  будем обозначать  $\partial_i$ , производную  $\partial / \partial t_0$  будем обозначать  $\partial_t$ , а производную по крупномасштабным переменным  $\partial / \partial \vec{X} \equiv \nabla$  и  $\partial / \partial T \equiv \partial_T$  соответственно. Между температурой  $T$  и крупномасштабным временем  $T$  недоразумений не возникает т. к. время является аргументом, а температура – функцией. При построении многомасштабного асимптотического разложения мы будем следовать методу, предложенному в работе [57]. Можно

было бы начинать с построения линейной теории развития неустойчивости, а затем перейти к нелинейной теории. Однако, в действительности, нелинейная теория оказывается технически менее громоздкой. Поэтому мы сразу будем строить нелинейную теорию, а затем рассмотрим линейный предел.

Будем искать асимптотическое решение уравнений (8.3), (8.4) в следующем виде:

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \frac{1}{R} \vec{W}_{-1}(X) + \vec{v}_0(x_0) + R \vec{V}_1 + R^2 \vec{V}_2 + R^3 \vec{V}_3 + \dots$$

$$T(\vec{x}, t) = \frac{1}{R} T_{-1}(X) + T_0(x_0) + R T_1 + R^2 T_2 + R^3 T_3 + \dots$$

$$P(\vec{x}, t) = \frac{1}{R^3} P_{-3}(X) + \frac{1}{R^2} P_{-2}(X) + \frac{1}{R} P_{-1}(X) + P_0(x_0) + R(P_1 + \bar{P}_1(X)) + R^2 P_2 + R^3 P_3 + \dots$$

Разложим пространственные и временные производные в уравнениях (8.3), (8.4) в асимптотический ряд вида:

$$\partial / \partial x^i = \partial_i + R^2 \nabla + \dots$$

$$\partial / \partial t = \partial_t + R^4 \partial_T + \dots$$

Подставляя эти выражения в исходные уравнения (8.3), (8.4) и собирая вместе члены одинаковых порядков по  $R$ , до степени  $R^3$  включительно, получаем уравнения многомасштабного асимптотического разложения. Приведем алгебраическую структуру асимптотического разложения уравнений (8.3), (8.4) для нелинейной теории (индексы мы писать не будем, т. к. они в любой момент могут быть легко восстановлены). В порядке  $R^{-3}$  имеется только уравнение:

$$\partial P_{-3} = 0, \Rightarrow P_{-3} = P_{-3}(X).$$

В порядке  $R^{-2}$  имеем уравнение:

$$\partial P_{-2} = 0, \Rightarrow P_{-2} = P_{-2}(X).$$

В порядке  $R^{-1}$  получаем систему уравнений:

$$\partial_t W_{-1} - \partial^2 W_{-1} = -(\partial P_{-1} + \nabla P_{-3}) + Ra T_{-1} l_z - \partial W_{-1} W_{-1}, \quad (8.5)$$

$$\partial_t T_{-1} - \partial^2 T_{-1} = -\partial W_{-1} T_{-1} - W_{-1}^z, \quad (8.6)$$

$$\partial W_{-1} = 0.$$

Система уравнений (8.5), (8.6) дает секулярные члены:

$$-\nabla P_{-3} + Ra T_{-1} l_z = 0.$$

$$W_{-1}^z = 0.$$

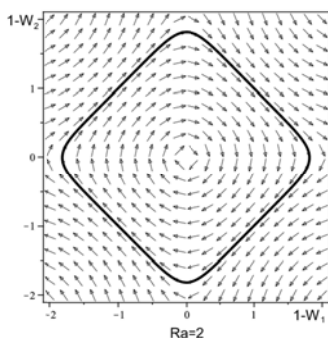


Рис. 8.1. Фазовый портрет при  $Ra = 2$ ,  $C_1 = C_2 = 0$ . Жирной линией показана траектория в фазовом пространстве, выходящая из точки  $(1,1)$  и после «времени»  $Z = L$  возвращающаяся в ту же точку. Эта траектория соответствует стационарному солитону краевой задачи в слое толщины  $L$  с твердыми границами

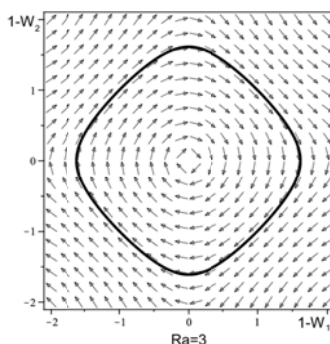


Рис. 8.2. Фазовый портрет при  $Ra = 3$ ,  $C_1 = C_2 = 0$ . Жирной линией показана траектория в фазовом пространстве, выходящая из точки  $(1,1)$  и после «времени»  $Z = L$  возвращающаяся в ту же точку. Эта траектория соответствует стационарному солитону краевой задачи в слое толщины  $L$  с твердыми границами при  $z = 0$  и  $z = L$

В нулевом порядке  $R^0$  имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_t v_0 - \partial^2 v_0 + \partial(W_{-1} v_0 + v_0 W_{-1}) &= \\ &= -(\partial P_0 + \nabla P_{-2}) + Ra T_0 l_z + F, \\ \partial_t T_0 - \partial^2 T_0 + \partial(W_{-1} T_0 + v_0 T_{-1}) &= -v_0^z, \\ \partial v_0 &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения дают одно секулярное уравнение:

$$\nabla P_{-2} = 0, \Rightarrow P_{-2} = \text{Const.}$$

Рассмотрим уравнения первого приближения  $R$ :

$$\partial_t v_1 - \partial^2 v_1 + \partial(W_{-1} v_1 + v_1 W_{-1} + v_0 v_0) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\nabla(W_{-1}W_{-1}) - (\partial P_1 + \nabla P_{-1}) + RaT_1l_z. \\
\partial_t T_1 - \partial^2 T_1 + \partial(W_{-1}T_1 + v_1T_{-1} + v_0T_0) + \nabla(W_{-1}T_{-1}) &= -v_1^z. \\
\partial V_1 + \nabla W_{-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Из этой системы уравнений следуют следующие секулярные уравнения:

$$\nabla W_{-1} = 0, \quad (8.7)$$

$$\nabla(W_{-1}W_{-1}) = -\nabla P_{-1}, \quad (8.8)$$

$$\nabla(W_{-1}T_{-1}) = 0. \quad (8.9)$$

Секулярные уравнения (8.7) – (8.9), очевидно, удовлетворяются для следующей геометрии поля скорости:

$$W = (W_x(Z), W_y(Z), 0); T_{-1} = T_{-1}(Z); \nabla P_{-1} = 0, \Rightarrow P_{-1} = Const.$$

Во втором порядке  $R^2$  получаем уравнения:

$$\begin{aligned}
\partial_t v_2 - \partial^2 v_2 - 2\partial \nabla v_0 + \partial(W_{-1}v_2 + v_2W_{-1} + v_0v_1 + v_1v_0) &= \\
&= -\nabla(W_{-1}v_0 + v_0W_{-1}) - (\partial P_2 + \nabla P_0) + RaT_2l_z, \\
\partial_t T_2 - \partial^2 T_2 - 2\partial \nabla T_0 + \partial(W_{-1}T_2 + v_2T_{-1} + v_0T_1 + v_1T_0) &= \\
&= -\nabla(W_{-1}T_0 + v_0T_{-1}) - v_2. \\
\partial v_2 + \nabla v_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в порядке  $R^2$  секулярных членов нет.

Перейдем к наиболее важному порядку  $R^3$ . В этом порядке получаем уравнения:

$$\begin{aligned}
\partial_t v_3 + \partial_T W_{-1} - (\partial^2 v_3 + 2\partial \nabla v_1 + \Delta W_{-1}) + \nabla(W_{-1}v_1 + v_1W_{-1} + v_0v_0) + \\
+ \partial(W_{-1}v_3 + v_3W_{-1} + v_0v_2 + v_2v_0 + v_1v_1) &= -(\partial P_3 + \nabla \bar{P}_1) + RaT_3l_z. \\
\partial_t T_3 + \partial_T T_{-1} - (\partial^2 T_3 + 2\partial \nabla T_1 + \Delta T_{-1}) + \nabla(W_{-1}T_1 + v_1T_{-1} + v_0T_0) + \\
+ \partial(W_{-1}T_3 + v_3T_{-1} + v_0T_2 + v_2T_0 + v_1T_1) &= -v_3^z. \\
\partial v_3 + \nabla v_1 &= 0.
\end{aligned}$$

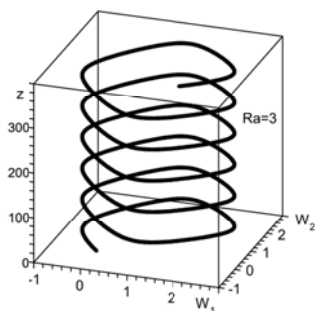


Рис. 8.3. Спиральная вихревая структура при  $Ra = 3$ ,  $C_1 = C_2 = 0$

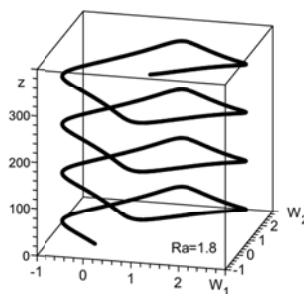


Рис. 8.4. Спиральная вихревая структура при  $Ra = 1.8$ ,  $C_1 = C_2 = 0$

Отсюда получаем основное секулярное уравнение:

$$\begin{aligned}\partial_T W_{-1} - \Delta W_{-1} + \nabla(\overline{v_0 v_0}) &= -\nabla \bar{P}_1, \\ \partial_T T_{-1} - \Delta T_{-1} + \nabla(v_0 T_0) &= 0.\end{aligned}$$

Приведем секулярные члены в явном виде:

$$\partial_T W^i - \Delta W^i + \nabla_k (\overline{v_0^k v_0^i}) = -\nabla_i \bar{P}_1; \quad (8.10)$$

$$\partial_T T - \Delta T + \nabla_k (\overline{v_0^k T_0}) = 0. \quad (8.11)$$

В этих уравнениях мы не пишем нижний индекс  $(-1)$ . Кроме того, имеются секулярные уравнения:

$$\nabla_i W^i = 0, W^z = 0, \quad (8.12)$$

$$\nabla_k (W^k W^i) = -\nabla_i P_{-1}, \quad (8.13)$$

$$\nabla_k (W^k T) = 0. \quad (8.14)$$

Уравнения (8.12) – (8.14) удовлетворяются в случае

$$W = (W^x(z), W^y(z), 0), \text{ and } P_{-1} = \text{Const.}$$

Имеется также уравнение для нахождения давления  $P_{-3}$ :

$$\nabla_z P_{-3} = Ra T l_z.$$

Ясно, что основными уравнениями для нелинейного  $\alpha$ -эффекта являются уравнения (8.10). Для получения этих уравнений в замкнутом виде нужно вычислить напряжения Рейнольдса  $\nabla_k \overline{(v_0^k v_0^i)}$ . Прежде всего для этого нужно найти поля  $v_0^k$  нулевого приближения. Из асимптотического разложения в нулевом порядке имеем уравнения:

$$\partial_t v_0^i - \partial^2 v_0^i + W^k \partial_k v_0^i = -\partial_i P_0 + Ra T_0 l^i + F_0^i, \quad (8.15)$$

$$\partial_t T_0 - \partial^2 T_0 + W^k \partial_k T_0 = -v_0^k l^k. \quad (8.16)$$

Введем оператор  $\hat{D}_0$ :

$$\hat{D}_0 = \partial_t - \partial^2 + W^k \partial_k.$$

Используя оператор  $\hat{D}_0$ , запишем уравнения (8.15) и (8.16) в виде

$$\hat{D}_0 v_0^i = -\partial_i P_0 + Ra T_0 l^i + F_0^i, \quad (8.17)$$

$$\hat{D}_0 T_0 = -v_0^k l^k$$

Исключая из уравнения (342) температуру и давление, получаем

$$(\hat{D}_0 \delta_{ik} + \hat{P}_{ip} Ra l^k l^p) v_0^k = \hat{D}_0 F_0^i.$$

Разделив это уравнение на  $\hat{D}_0^2$ , можем записать его в виде

$$L_{ik} v_0^k = \frac{F_0^i}{\hat{D}_0},$$

где  $L_{ik}$  оператор:

$$L_{ik} \equiv \delta_{ik} + Ra \frac{\hat{P}_{ip}}{\hat{D}_0^2} l_p l_k.$$

Легко убедиться непосредственной проверкой, что обратный оператор  $L_{kj}^{-1}$  имеет вид:

$$L_{kj}^{-1} = \delta_{kj} - \frac{Ra \hat{P}_{km} l_m l_j}{\hat{D}_0^2 + Ra \hat{P}_{pq} l_p l_q}, \quad L_{ik} L_{kj}^{-1} = \delta_{ij}.$$

В результате легко находятся поле  $v_0^k$  и  $T_0$  :

$$v_0^k = \left[ \delta_{kj} - \frac{Ra \hat{P}_{km} l_m l_j}{\hat{D}_0^2 + Ra \hat{P}_{pq} l_p l_q} \right] \frac{F_0^j}{\hat{D}_0}, \quad (8.18)$$

$$T_0 = - \left[ 1 - \frac{Ra \hat{P}_{nm} l_m l_n}{\hat{D}_0^2 + Ra \hat{P}_{pq} l_p l_q} \right] \frac{(l^j F_0^j)}{\hat{D}_0^2}.$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, необходимо в явном виде задать спиральную внешнюю силу  $F_0^j$ . Самый простой и естественный способ – это задать внешнюю силу детерминированным образом (можно, конечно, задать внешнюю силу и статистическим образом, задав корреляторы случайного поля. Это, однако, приводит к гораздо более громоздким вычислениям). Как известно, спиральность означает, что  $\vec{F}_0 \text{rot} \vec{F}_0 \neq 0$ . Определим силу  $\vec{F}_0$  следующим образом:

$$\vec{F}_0 = f_0 \left[ \vec{i} \cos \varphi_2 + \vec{j} \sin \varphi_1 + \vec{k} (\cos \varphi_1 + \sin \varphi_2) \right], \quad (8.19)$$

где

$$\varphi_1 = k_0 x - \omega_0 t, \varphi_2 = k_0 y - \omega_0 t, \quad (8.20)$$

или

$$\varphi_1 = \vec{k}_1 \vec{x} - \omega_0 t, \varphi_2 = \vec{k}_2 \vec{x} - \omega_0 t,$$

$$\vec{k}_1 = k_0(1, 0, 0); \vec{k}_2 = k_0(0, 1, 0).$$

Очевидно, что  $\text{rot} \vec{F}_0 = k_0 \varepsilon \vec{F}_0$ , где  $\varepsilon$  – единичный псевдоскаляр, т. е. спиральность равна:

$$\vec{F}_0 \text{rot} \vec{F}_0 = k_0 \varepsilon \vec{F}_0^2 \neq 0.$$

Выражения (8.19), (8.20) очень удобны для промежуточных вычислений, в окончательных формулах нужно, очевидно положить  $f_0, k_0, \omega_0$  равными единице, т. к. внешняя сила была безразмерной и зависела только от безразмерных пространственно-временных аргументов. Сила (8.19) физически проста и может быть реализована в лабораторных экспериментах и численном моделировании.

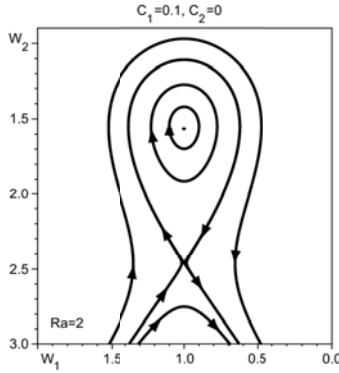


Рис. 8.5. Фазовый портрет динамической системы (8.32), (8.33) при значениях параметров  $Ra = 2$ ,  $C_1 = C_2 = 0$

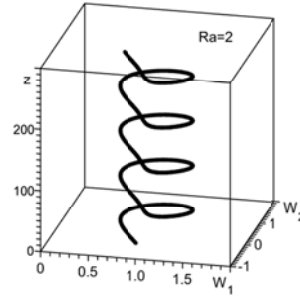


Рис. 8.6. Спиральная вихревая структура при  $Ra = 2$ ,  $C_1 = 0.1$ ,  $C_2 = 0$ . Эта структура соответствует замкнутой траектории в окрестности эллиптической неподвижной точки на рис. 8.5

Удобно записать силу (8.19) в комплексной форме. Очевидно:

$$\vec{F}_0 = \vec{A} \exp(i\varphi_1) + \vec{A}^* \exp(-i\varphi_1) + \vec{B} \exp(i\varphi_2) + \vec{B}^* \exp(-i\varphi_2), \quad (8.21)$$

где вектора  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  имеют вид:

$$\vec{A} = \frac{f_0}{2} (\vec{k} - i\vec{j}), \quad \vec{B} = \frac{f_0}{2} (\vec{i} - i\vec{k}),$$

а  $\varphi_1, \varphi_2$  даются формулами (8.20). Действие оператора  $\hat{D}_0$  на собственную функцию  $\exp(i\omega t + i\vec{k}\vec{x})$ , очевидно, имеет вид:

$$\hat{D}_0 \exp(i\omega t + i\vec{k}\vec{x}) = \hat{D}_0(\omega, \vec{k}) \exp(i\omega t + i\vec{k}\vec{x}),$$

где  $\hat{D}_0(\omega, \vec{k})$  равно

$$\hat{D}_0(\omega, \vec{k}) = i(\omega + \vec{k}\vec{W}) + k^2.$$

Отсюда очевидно, что:

$$\hat{D}_0(\omega, -\vec{k}_1) = i(\omega - \vec{k}_1\vec{W}) + k_1^2, \quad \hat{D}_0^*(\omega, -\vec{k}_1) = \hat{D}_0(-\omega, \vec{k}_1),$$

$$\widehat{D}_0(\omega, -\vec{k}_2) = i(\omega - \vec{k}_2 \vec{W}) + k_2^2, \quad \widehat{D}_0^*(\omega, -\vec{k}_2) = \widehat{D}_0(-\omega, \vec{k}_2).$$

Из формул (8.18), следует, что поле  $v_0^k$  состоит из четырех членов:

$$v_0^k = v_{01}^k + v_{02}^k + v_{03}^k + v_{04}^k \quad \text{где} \quad v_{02}^k = (v_{01}^k)^*, v_{04}^k = (v_{03}^k)^*,$$

$$v_{01}^k = e^{i\varphi_1} \left[ \delta_{kj} - \frac{Ra \widehat{P}_{km} l_m l_j}{\widehat{D}_0^2(-\omega_0, \vec{k}_1) + Ra \widehat{P} l l} \right] \frac{A^j}{\widehat{D}_0(-\omega_0, \vec{k}_1)},$$

$$v_{03}^k = e^{i\varphi_2} \left[ \delta_{kj} - \frac{Ra \widehat{P}_{km} l_m l_j}{\widehat{D}_0^2(-\omega_0, \vec{k}_2) + Ra \widehat{P} l l} \right] \frac{B^j}{\widehat{D}_0(-\omega_0, \vec{k}_2)}.$$

Как уже отмечалось, в скалярных операторах  $\widehat{D}_0$  можно положить  $\omega_0 = 1, \vec{k}_1 = (1, 0, 0), \vec{k}_2 = (0, 1, 0)$ . Тогда, учитывая, что  $\widehat{P} l l = 1$ , получим:

$$\begin{aligned} \widehat{D}_0(\omega_0, \vec{k}_1) &= 1 + i(1 - W_1) \equiv D_1, \\ \widehat{D}_0(-\omega_0, \vec{k}_1) &= D_1^*, \\ \widehat{D}_0(\omega_0, -\vec{k}_2) &= 1 + i(1 - W_2) \equiv D_2, \\ \widehat{D}_0(-\omega_0, \vec{k}_2) &= D_2^*. \end{aligned}$$

Учитывая эти формулы, можно записать скорости  $v_0^k$  в виде

$$v_{01}^k = e^{i\varphi_1} \left[ \delta_{kj} - \frac{Ra \widehat{P}_{km} l_m l_j}{D_1^{*2} + Ra} \right] \frac{A^j}{D_1^*}, \quad (8.22)$$

$$v_{03}^k = e^{i\varphi_2} \left[ \delta_{kj} - \frac{Ra \widehat{P}_{km} l_m l_j}{D_2^{*2} + Ra} \right] \frac{B^j}{D_2^*}. \quad (8.23)$$

Для вычислений напряжений Рейнольдса нужно прежде всего вычислить выражение

$$\overline{v_0^k v_0^i} = 2 Re \left( \overline{v_{01}^k v_{01}^{i*}} + \overline{v_{03}^k v_{03}^{i*}} \right).$$

Учитывая формулы (8.22), получаем:

$$\overline{v_{01}^k v_{01}^{i*}} + \overline{v_{01}^{k*} v_{01}^i} = T_{(1)}^{ki} = \frac{1}{|D_1|^2} (A_k A_i^* + A_k^* A_i) - \frac{Ra A_z^*}{|D_1|^2} \left( \frac{l_k A_i + l_i A_k}{D_1^2 + Ra} \right) - \frac{Ra A_z}{|D_1|^2} \left( \frac{l_k A_i^* + l_i A_k^*}{D_1^{*2} + Ra} \right) + \frac{2}{|D_1|^2} \frac{Ra^2 l_k l_i |A_z|^2}{|D_1^2 + Ra|^2}.$$

Аналогично, учитывая формулы (8.23), получаем:

$$\overline{v_{03}^k v_{03}^{i*}} + \overline{v_{03}^{k*} v_{03}^i} = T_{(2)}^{ki} = \frac{1}{|D_2|^2} (B_k B_i^* + B_k^* B_i) - \frac{Ra B_z^*}{|D_2|^2} \left( \frac{l_k B_i + l_i B_k}{D_2^2 + Ra} \right) - \frac{Ra B_z}{|D_2|^2} \left( \frac{l_k B_i^* + l_i B_k^*}{D_2^{*2} + Ra} \right) + \frac{2}{|D_2|^2} \frac{Ra^2 l_k l_i |B_z|^2}{|D_2^2 + Ra|^2}.$$

Ясно, что интерес представляют компоненты  $T_{(1)}^{3i}$  и  $T_{(2)}^{3i}$ .

Рассмотрим вначале компоненты тензора  $T_{(1)}^{3i}$ .

$$T_{(1)}^{31} = \frac{1}{|D_1|^2} (A_3 A_1^* + A_3^* A_1) - \frac{Ra}{|D_1|^2} \left( \frac{A_3^* A_1}{D_1^2 + Ra} + \frac{A_3 A_1^*}{D_1^{*2} + Ra} \right) = 0,$$

т. к.  $A_1^* = A_1 = 0$

$$T_{(1)}^{32} = \frac{1}{|D_1|^2} (A_3 A_2^* + A_3^* A_2) - \frac{Ra}{|D_1|^2} \left( \frac{A_3^* A_2}{D_1^2 + Ra} + \frac{A_3 A_2^*}{D_1^{*2} + Ra} \right). \quad (8.24)$$

Первая скобка в (8.24) равна нулю  $\left( A_3 = \frac{f_0}{2}, \quad A_2 = -i \frac{f_0}{2} \right)$ ,

поэтому:

$$T_{(1)}^{32} = -\frac{i}{4} \frac{Ra}{|D_1|^2} \frac{(D_1^2 - D_1^{*2})}{|D_1^2 + Ra|^2}.$$

Рассмотрим теперь компоненту  $T_{(2)}^{32}$ :

$$T_{(2)}^{32} = \frac{1}{|D_2|^2} (B_3 B_2^* + B_3^* B_2) - \frac{Ra}{|D_2|^2} \left( \frac{B_3^* B_2}{D_1^2 + Ra} + \frac{B_3 B_2^*}{D_1^{*2} + Ra} \right) = 0,$$

т. к.  $B_2 = B_2^* = 0$ . Рассмотрим компоненту  $T_{(2)}^{31}$ :

$$T_{(2)}^{31} = \frac{1}{|D_2|^2} (B_3 B_1^* + B_3^* B_1) - \frac{Ra}{|D_2|^2} \left( \frac{B_3^* B_1}{D_2^2 + Ra} + \frac{B_3 B_1^*}{D_2^{*2} + Ra} \right). \quad (8.25)$$

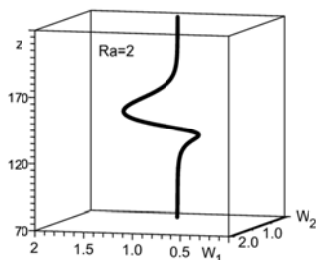


Рис. 8.7. Спиральный солитон, соответствующий сепаратрисе на рис.8.5. При значениях параметров  $Ra = 2$  и выборе  $C_1 = 0.1$   $C_2 = 0.1$ , входящие в решения (8.32) и (8.33)

Первая скобка в формуле (8.25) равна нулю

(т. к.  $B_1 = \frac{f_0}{2}$ ,  $B_3 = -i \frac{f_0}{2}$ ), поэтому:

$$T_{(2)}^{31} = -\frac{i}{4} \frac{Ra}{|D_2|^2} \frac{(D_2^{*2} - D_2^2)}{|D_2^2 + Ra|^2}.$$

Учитывая формулы

$$\begin{aligned} (D_1^2 - D_1^{*2}) &= 4i(1 - W_1), (D_2^{*2} - D_2^2) = -4i(1 - W_2), \\ |D_1|^2 &= 1 + (1 - W_1); |D_2|^2 = 1 + (1 - W_2), \\ |D_1^2 + Ra|^2 &= (W_1(2 - W_1) + Ra)^2 + 4(1 - W_1)^2, \\ |D_2^2 + Ra|^2 &= (W_2(2 - W_2) + Ra)^2 + 4(1 - W_2)^2. \end{aligned}$$

компоненты  $T_{(1)}^{32}$ ,  $T_{(2)}^{31}$  принимают вид:

$$\begin{aligned} T_{(1)}^{32} &= \frac{Ra(1 - W_1)}{[1 + (1 - W_1)^2][(W_1(2 - W_1) + Ra)^2 + 4(1 - W_1)^2]}, \\ T_{(2)}^{31} &= -\frac{Ra(1 - W_2)}{[1 + (1 - W_2)^2][(W_2(2 - W_2) + Ra)^2 + 4(1 - W_2)^2]}, \end{aligned}$$

Запишем в явном виде уравнения для нелинейной стадии неустойчивости:

$$\begin{aligned} \partial_T W_1 - \nabla_z^2 W_1 &= -\nabla_z T_{(2)}^{31} = \\ &= \nabla_z \frac{Ra(1-W_2)}{[1+(1-W_2)^2][(W_2(2-W_2)+Ra)^2+4(1-W_2)^2]}, \end{aligned} \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} \partial_T W_2 - \nabla_z^2 W_2 &= -\nabla_z T_{(1)}^{32} = \\ &= -\nabla_z \frac{Ra(1-W_1)}{[1+(1-W_1)^2][(W_1(2-W_1)+Ra)^2+4(1-W_1)^2]}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Здесь использовались обозначения:  $W_1 \equiv W_x, W_2 \equiv W_y$ .

### 8.3. Линейная теория генерации крупномасштабных вихревых структур

Нетрудно видеть, что при малых значениях переменных  $W_1, W_2$  уравнения (8.26), (8.27) сводятся к линейным уравнениям:

$$\partial_T W_1 + \alpha \nabla_z W_2 = \nabla_z^2 W_1, \quad (8.28)$$

$$\partial_T W_2 - \alpha \nabla_z W_1 = \nabla_z^2 W_2, \quad (8.29)$$

где  $\alpha = -\varepsilon Ra \frac{4-2Ra}{(4+Ra^2)^2}$ .

Здесь  $\varepsilon$  обозначает единичный псевдоскаляр, т. к. выражения  $\nabla_z W_y, -\nabla_z W_x$  являются компонентами  $rot \vec{W}$ . Уравнения (8.28), (8.29) только коэффициентом  $\alpha$  отличаются от уравнений АКА-эффекта [57]. Они, очевидно, содержат неустойчивость, которая генерирует крупномасштабные вихревые структуры. Выбирая скорости  $W_1, W_2$  в виде

$$W_1 = A \exp(\gamma T) \sin kz, \quad (8.30)$$

$$W_2 = B \exp(\gamma T) \cos kz, \quad (8.31)$$

Получаем инкремент неустойчивости  $\gamma = \pm \alpha k_z - k_z^2$ , т. е.  
 $\max \gamma = \frac{\alpha^2}{2}$ , при  $k = \frac{\alpha}{2}$ . Формулы (8.30), (8.31) описывают спиральные вихревые структуры (плоскую волну круговой поляризации), амплитуда которой экспоненциально растет со временем. Такие волны иногда называются бегущими волнами Бельтрами, поскольку для них отсутствует обычное гидродинамическое взаимодействие  $\vec{W} \nabla \vec{W} \equiv 0$ . При  $Ra = 2$ , очевидно, линейная неустойчивость пропадает, однако нелинейная неустойчивость остается.

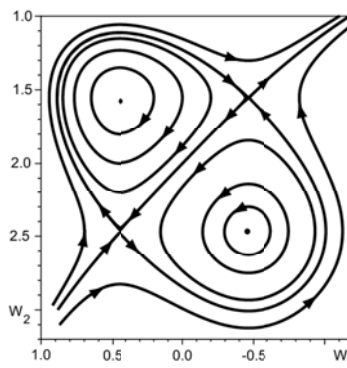


Рис. 8.8. Фазовый портрет динамической системы (8.32), (8.33) при параметрах  $Ra = 2$ ,  $C_1 = 0.1$   $C_2 = 0.1$ . Хорошо заметно появление двух гиперболических и двух эллиптических неподвижных точек

Если внешняя сила имеет нулевую спиральность, то  $\alpha$ -член обращается в нуль согласно общей теореме о симметрии тензора напряжений Рейнольдса [62]. Спиральность заложена в самой структуре внешней силы. Если же в нуль обращается градиент температуры, то  $\alpha$ -член очевидно также обращается в нуль.

#### 8.4. Нелинейные спиральные вихревые структуры

Ясно также, что с ростом  $W_1$ ,  $W_2$  нелинейные члены уменьшаются и неустойчивость стабилизируется. В результате развития и стабилизации неустойчивости возникают нелинейные вихревые спиральные структуры. Представляет интерес изучение формы этих стационарных

структур. Для этой цели положим в уравнениях (8.26), (8.27)  $\partial_T W_1 = \partial_T W_2 = 0$ . Интегрируя эти уравнения по  $z$ , получаем:

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{RaP}{(1+P^2)[4P^2 + (1-P^2+Ra)^2]} + C_1, \quad (8.32)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{RaX}{(1+X^2)[4X^2 + (1-X^2+Ra)^2]} - C_2. \quad (8.33)$$

Здесь введены новые переменные  $X=1-W_1$ ,  $P=1-W_2$ ,  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования. Система уравнений (8.32) и (8.33) может быть записана в гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial P}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial H}{\partial X}.$$

Здесь роль времени играет переменная  $z$ , а гамильтониан  $H$  имеет вид:

$$H = U(P) + U(X) + C_1 P + C_2 X + C_3. \quad (8.34)$$

где функция  $U(x)$  имеет вид:

$$U(x) = \frac{1}{4(4+Ra)} \ln \frac{(1+x^2)^2}{4Ra + (x^2+1-Ra)^2} + \frac{\sqrt{Ra}}{4(4+Ra)} \arctan \frac{1+x^2-Ra}{2\sqrt{Ra}}. \quad (8.35)$$

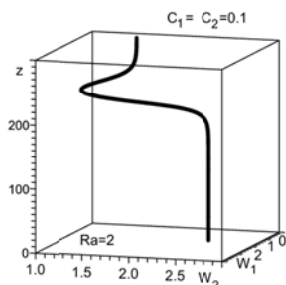


Рис. 8.9. Спиральный кинк, соответствующий сепаратрисе на рис. 8.8

Функция  $H$  (8.34), (8.35) является, очевидно, первым интегралом системы уравнений (8.32), (8.33) и может быть найдена непосредственным интегрированием этой системы. При  $C_1 = 0, C_2 = 0$  функция  $U(x)$  ограничена как сверху, так и снизу. Поэтому сечения потенциальной энергии постоянной  $H = H_0$  дают замкнутые периодические траектории на фазовой плоскости  $(X, P)$ , которые соответствуют спиральным вихревым структурам в реальном пространстве. Примеры фазовых портретов для  $Ra = 2$  и  $Ra = 3$  изображены на

рис. 8.1 и рис. 8.2. При  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$  на фазовой плоскости имеется только одна эллиптическая неподвижная точка. Замкнутые траектории соответствуют периодическим нелинейным вихревым структурам. Жирные замкнутые линии соответствуют нелинейным структурам, которые являются также решениями краевой задачи с твердыми границами:

$$W_1 = 0, W_2 = 0, z = 0, z = L,$$

где  $L$  – период по  $z$  фазовой траектории, выходящей при  $z = 0$ , из точки  $W_1 = 0$ ,  $W_2 = 0$  и возвращающуюся в эти точки при  $z = L$ . Пространственная структура периодических решений изображена на рис. 8.3 – рис. 8.5. Если одна из постоянных, например  $C_1 \neq 0$ , то на фазовом портрете возникает одна гиперболическая точка. Для примера, при  $C_1 = 0.1$  фазовый портрет изображен на рис. 8.5. Пример периодической вихревой структуры, которая соответствует замкнутой траектории на фазовой плоскости при  $Ra = 2$ , приведен на рис. 8.6. Особый интерес представляет решение, соответствующее сепаратрисе на рис. 8.5. Это решение, описывает уединенный спиральный виток поля скорости вокруг оси  $z$  (солитон) рис. 8.7. При удалении от солитона поле скорости выходит на постоянное значение. Такого типа солитоны ранее известны не были. Интересной особенностью этого солитона является тот факт, что он оказывается также решением краевой задачи со свободными границами. Для такой краевой задачи [65]:

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} = \frac{\partial W_2}{\partial z} = 0$$

на границах жидкости. При этом границы должны находиться на большом расстоянии от солитона, много большем, чем характерные размеры солитона. В случае, когда обе постоянные  $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ , на фазовом портрете появляются две гиперболические точки и две эллиптические точки. Пример такого фазового портрета при  $C_1 = 0.1, C_2 = 0.1$  показан на рис. 8.8. Замкнутым траекториям вокруг эллиптических точек по-прежнему соответствуют периодические вихревые структуры. Сепаратрисам на рис. 8.8 соответствуют локализованные решения (солитоны). Поскольку сепаратриса связывает две разные гиперболические точки, то теперь солитон имеет два разных предельных значения поля скорости при  $z \rightarrow \pm\infty$ , рис. 8.9. Такой солитон принято называть кинком. Сепаратрисам на рис. 8.8, соответствуют спиральные кинки. Эти кинки также являются решениями краевой задачи со свободными границами. Таким образом, в рассматриваемой нами

гамильтоновой системе имеется три типа решений: нелинейные периодические волны, солитоны и решения, уходящие на бесконечность. Последние с точки зрения задачи стабилизации крупномасштабной неустойчивости интереса не представляют. В заключение напомним, что система уравнений (8.26), (8.27) является замкнутой. Поле скорости  $W_1$ ,  $W_2$  в свою очередь определяет давление  $\bar{P}_1$  и дает вклад в уравнение для температуры (8.11). Замыкание этого уравнения выполняется аналогично замыканию уравнения для скорости. Однако это уравнение носит второстепенный характер и результат замыкания мы здесь не приводим, чтобы не загромождать изложение. В заключение заметим, что для неустойчивости требуется наличие температурной стратификации. Ранее считалось, что эта стратификация устойчива. Однако формулы для неустойчивости допускают переход и к неустойчивой стратификации, т. е. допускают замену  $Ra \rightarrow -Ra$ . Однако, нужно помнить, что число  $Ra$  должно быть достаточно малым, чтобы в системе не возникла обычная конвективная неустойчивость.

## РАЗДЕЛ 9. ТОЧЕЧНЫЕ ВИХРИ В ДВУХЖИДКОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ ПЛАЗМЫ

В этом разделе рассмотрим двухжидкостную (электронную и ионную) бесстолкновительную 2D-гидродинамику плазмы. Покажем, следуя работе [66], что в такой двухжидкостной гидродинамике плазмы естественным образом можно ввести точечные вихри, которые являются точными решениями уравнений движения, когда их динамика подчиняется полученной динамической системе. Точечные вихри в двухжидкостной гидродинамике плазмы разделяются на два типа: ионные вихри и электронные вихри. Плазменные точечные вихри устроены более сложно, чем точечные вихри в обычной жидкости, поскольку они создают вокруг себя кольцевые токи, которые взаимодействуют с самосогласованным магнитным полем. Структура этих вихрей будет подробно описана ниже. Уравнения, которым подчиняется движение ансамбля электронно-ионных точечных вихрей представляют собой существенное обобщение уравнения движения обычных гидродинамических вихрей.

### 9.1. Уравнения для функции тока точечных вихрей

Уравнения движения плазмы в двухжидкостной гидродинамике, как обычно, запишем в виде

$$m_i n_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} + \nabla P_i = q_i n_i \vec{E} + \frac{q_i n_i}{c} [\vec{v}_i \times \vec{B}], \quad (9.1)$$

$$m_e n_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} + \nabla P_e = q_e n_e \vec{E} + \frac{q_e n_e}{c} [\vec{v}_e \times \vec{B}]. \quad (9.2)$$

Здесь  $n_i, n_e$  – плотности числа ионов и электронов,  $\vec{v}_i, \vec{v}_e$  – скорости ионов и электронов,  $P_i, P_e$  – давление ионов и электронов,  $\vec{E}$  – электрическое поле,  $\vec{B}$  – магнитное поле,  $m_i, m_e$  – массы ионов и электронов,  $q_i, q_e$  – заряды ионов и электронов. Уравнения движения (9.1), (9.2) нужно дополнить уравнениями непрерывности

$$\partial n_i / \partial t + \operatorname{div} n_i \vec{v}_i = 0, \quad \partial n_e / \partial t + \operatorname{div} n_e \vec{v}_e = 0,$$

уравнением Пуассона:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(n_i - n_e),$$

уравнением Ампера:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = 4\pi(q_i n_i \vec{v}_i + q_e n_e \vec{v}_e) / c, \quad (9.3)$$

а также

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial \vec{B} / c \partial t, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \end{aligned}$$

причем, в уравнении (9.3) мы пренебрегаем током смещения.

В работе [67] показано, что уравнения движения (9.1), (9.2) можно записать в виде интегралов в замороженности. Обозначим:

$$\vec{J}_i = n_i^{-1} (\operatorname{rot} \vec{v}_i + q_i \vec{B} / m_i c), \quad (9.4)$$

$$\vec{J}_e = n_e^{-1} (\operatorname{rot} \vec{v}_e + q_e \vec{B} / m_e c). \quad (9.5)$$

Тогда уравнения (9.1), (9.2), после применения к ним операции  $rot$ , с учетом уравнений Максвелла, могут быть записаны в виде

$$d\vec{J}_i / dt = (\vec{J}_i \nabla) \vec{v}_i, \quad (9.6)$$

$$d\vec{J}_e / dt = (\vec{J}_e \nabla) \vec{v}_e. \quad (9.7)$$

Эта форма записи уравнении движения в виде уравнении интегралов в замороженности  $\vec{J}_{i,e}$  оказывается для наших целей более эффективной, чем первоначальная форма (9.1), (9.2). Некоторые примеры интегралов в замороженности  $\vec{J}_{i,e}$  были рассмотрены в работе [67] (см. также работы [68], [69]). Далее будем рассматривать двумерный случай. Кроме того, будем считать, что плотность плазмы не возмущается, т. е.  $n_i = n_e = n_0$ . Это означает, что движение плазмы является несжимаемым, т. е.

$$\partial v_x^{i,e} / \partial x + \partial v_y^{i,e} / \partial y = 0. \quad (9.8)$$

Магнитное поле  $\vec{B}$  будем описывать с помощью векторного потенциала  $\vec{A}$ ,  $\vec{B} = rot \vec{A}$ , в кулоновской калибровке:

$$div \vec{A} = \partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y = 0. \quad (9.9)$$

Уравнение (9.8) позволяет ввести потенциал скорости  $\Psi^{i,e}$ :

$$v_x^{i,e} = \partial \Psi^{i,e} / \partial y, v_y^{i,e} = -\partial \Psi^{i,e} / \partial x.$$

Уравнение (9.9) также позволяет ввести для магнитного поля потенциальную функцию  $\Psi_B$ :

$$A_x = \partial \Psi_B / \partial y, A_y = -\partial \Psi_B / \partial x. \quad (9.10)$$

В двумерном случае все функции имеют вид:

$$\vec{v}_{i,e} = (v_x^{i,e}(x, y), v_y^{i,e}(x, y), 0); \vec{A} = (A_x(x, y), A_y(x, y), 0). \quad (9.11)$$

Кроме того, будем считать, что величины, входящие в уравнения движения, не зависят от координаты  $z$ :

$$\partial / \partial z = 0.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{v}_{i,e} &= -\vec{k} \Delta_2 \Psi^{i,e}, \\ \vec{B} = \text{rot} \vec{A} &= -\vec{k} \Delta_2 \Psi_B. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Таким образом, поле скорости лежит в плоскости  $(x, y)$ , а магнитное поле имеет только компоненту  $B_z$ . Тогда интегралы в замороженности принимают вид:

$$\vec{J}_{i,e} = -\vec{k} \cdot n_{i,e}^{-1} (\Delta_2 \Psi^{i,e} + q_{i,e} \Delta_2 \Psi_B / m_{i,e} c).$$

Интегралы в замороженности имеют только компоненту  $J^z$ :

$$J_{i,e}^z = -n_{i,e}^{-1} (\Delta_2 \Psi^{i,e} + q_{i,e} \Delta_2 \Psi_B / m_{i,e} c).$$

Как уже отмечалось ранее, плазма предполагается несжимаемой:

$$n_i = n_e = n_0,$$

поэтому уравнение Пуассона удовлетворяется автоматически. Рассмотрим теперь уравнение Ампера (9.3). В кулоновской калибровке имеем:

$$\text{rot} \vec{B} = \text{rot} \text{rot} \vec{A} = -\Delta \vec{A},$$

и уравнение Ампера принимает вид:

$$-\Delta \vec{A} = 4\pi |q| n_0 (\vec{v}_i - \vec{v}_e) / c.$$

Перейдем в уравнении Ампера к потенциалам и запишем его в компонентах. Получим для  $x$  – компоненты:

$$-\Delta_2 \cdot \partial \Psi_B / \partial y = 4\pi |q| n_0 c^{-1} \cdot (\partial \Psi^i / \partial y - \partial \Psi^e / \partial y),$$

и для  $y$  – компоненты:

$$\Delta_2 \cdot \partial \Psi_B / \partial x = -4\pi |q| n_0 c^{-1} \cdot (\partial \Psi^i / \partial x - \partial \Psi^e / \partial x),$$

Уравнения Ампера очевидно удовлетворяются, если положить:

$$-\Delta_2 \Psi_B = 4\pi |q| n_0 c^{-1} (\Psi^i - \Psi^e). \quad (9.13)$$

Учитывая уравнение (9.13), запишем интегралы в замороженности в виде

$$J_z^i = -\Delta_2 \Psi^i / n_0 + 4\pi q^2 (\Psi^i - \Psi^e) / m_i c^2, \quad (9.14)$$

$$J_z^e = -\Delta_2 \Psi^e / n_0 - 4\pi q^2 (\Psi^i - \Psi^e) / m_e c^2. \quad (9.15)$$

Параметры  $4\pi q^2 n_0 / m_i c^2, 4\pi q^2 n_0 / m_e c^2$  можно записать по другому. Обозначим  $V_{T\alpha}$  — тепловую скорость частиц сорта  $\alpha$ :  $V_{T\alpha}^2 = 2T_\alpha / m_\alpha$ ,  $r_{d\alpha} = \sqrt{T_\alpha / 4\pi n_0 q^2}$  — дебаевский радиус. Тогда

$$4\pi q^2 n_0 / m_\alpha c^2 = V_{T\alpha}^2 / 2c^2 r_{d\alpha}^2 = \lambda_\alpha^{-2}.$$

В 2D геометрии, уравнения в замороженности (9.6), (9.7) принимают вид:

$$\partial n_0 J_z^\alpha / \partial t + \{n_0 J_z^\alpha, \Psi^\alpha\} = 0. \quad (9.16)$$

Здесь  $\{\dots\}$  обозначают скобки Пуассона:

$$\{n_0 J_z^\alpha, \Psi^\alpha\} = \frac{\partial n_0 J_z^\alpha}{\partial x} \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial y} - \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial x} \frac{\partial n_0 J_z^\alpha}{\partial y}, \quad (9.17)$$

а индекс  $\alpha = (i, e)$  принимает два значения.

Перейдем к рассмотрению ионно-электронного точечного вихря. Формула (9.16) показывает, что в двухжидкостной гидродинамике плазмы один точечный вихрь, расположенный в точке  $\vec{r}_{0\alpha}$ , естественно определяется соотношением

$$n_0 J_z^\alpha = A_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0\alpha}). \quad (9.18)$$

Следует отметить, что точки  $\vec{r}_{0i}$  и  $\vec{r}_{0e}$ , вообще говоря, разные. Учитывая формулы (9.14), (9.13), из (9.18), получаем:

$$-\Delta_2 \Psi^i + \lambda_i^{-2} (\Psi^i - \Psi^e) = A_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0i}), \quad (9.19)$$

$$-\Delta_2 \Psi^e - \lambda_e^2 (\Psi^i - \Psi^e) = A_e \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0e}). \quad (9.20)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}\lambda_+^{-2} &= \lambda_e^{-2} + \lambda_i^{-2} = 4\pi q^2 n_0 (m_e^{-1} + m_i^{-1}) / c^2, \\ \lambda_-^{-2} &= \lambda_e^{-2} - \lambda_i^{-2} = 4\pi q^2 n_0 (m_e^{-1} - m_i^{-1}) / c^2,\end{aligned}\quad (9.21)$$

Здесь, конечно, можно учесть малость  $m_e / m_i \ll 1$ , однако, из соображений симметрии пока этого делать не будем. Складывая и вычитая уравнения (9.19), (9.20), получаем:

$$-\Delta_2(\Psi^i - \Psi^e) + \lambda_+^{-2}(\Psi^i - \Psi^e) = A_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0i}) - A_e \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0e}), \quad (9.22)$$

$$-\Delta_2(\Psi^i + \Psi^e) - \lambda_-^{-2}(\Psi^i - \Psi^e) = A_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0i}) + A_e \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0e}). \quad (9.23)$$

Введем характерный масштаб  $L$ . Выполним в уравнениях (9.16), (9.17), (9.18), (9.22), (9.23) обезразмеривание:

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x / L, y \rightarrow y / L, \Psi^\alpha \rightarrow \Psi^\alpha / L^2, A_\alpha \rightarrow A_\alpha / L^2. \\ -\Delta_2(\Psi^i - \Psi^e) + \lambda_+^{-2} L^2(\Psi^i - \Psi^e) &= A_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0i}) - A_e \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0e}),\end{aligned}\quad (9.24)$$

$$-\Delta_2(\Psi^i + \Psi^e) - \lambda_-^{-2} L^2(\Psi^i - \Psi^e) = A_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0i}) + A_e \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0e}), \quad (9.25)$$

(здесь размерности  $[\Psi] = [A]$ ). Обозначим:

$$\begin{aligned}\Psi_- &= \Psi^i - \Psi^e, \Psi_+ = \Psi^i + \Psi^e, \\ \Psi^i &= (\Psi_+ + \Psi_-) / 2, \Psi^e = (\Psi_+ - \Psi_-) / 2.\end{aligned}$$

Уравнения (9.24), (9.25) принимают вид:

$$\Delta_2 \Psi_- - \lambda_+^{-2} L^2 \Psi_- = A_e \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0e}) - A_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0i}), \quad (9.26)$$

$$\Delta_2 \Psi_+ + \lambda_-^{-2} L^2 \Psi_- = -A_e \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0e}) - A_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0i}). \quad (9.27)$$

Ясно, что эти уравнения легко решаются. Рассмотрим сначала уравнение Гельмгольца:

$$(\Delta_2 + k^2)G = \delta(\vec{x}).$$

Функция Грина  $G$  хорошо известна:

$$G = -K_0(-ik|\vec{x}|) / 2\pi,$$

здесь  $K_0(x)$  – функция Макдональда. Делаем замену:  $k \rightarrow iL / \lambda_+$ , получаем решение уравнения (9.26):

$$\Psi_- = A_i K_0(L|\vec{r} - \vec{r}_{0i}| / \lambda_+) / 2\pi - A_e K_0(L|\vec{r} - \vec{r}_{0e}| / \lambda_+) / 2\pi.$$

Функция Макдональда  $K_0(|\vec{x}|)$  имеет следующие асимптотики:

$$K_0(L\lambda_+^{-1}|\vec{x}|) \rightarrow (\pi\lambda_+^{-1} / 2|\vec{x}|L)^{1/2} \exp(-L|\vec{x}| / \lambda_+); |\vec{x}| \rightarrow \infty.$$

$$K_0(L|\vec{x}| / \lambda_+) \rightarrow -\ln(L|\vec{x}| / \lambda_+); |\vec{x}| \rightarrow 0.$$

$$dK_0(z) / dz = -K_1(z).$$

Функция  $\Psi_+$ , очевидно, удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta_2 \Psi_+ = -A_i \lambda_-^{-2} L^2 K_0(L|\vec{r} - \vec{r}_{0i}| / \lambda_+) / 2\pi + A_e \lambda_-^{-2} L K_0(L|\vec{r} - \vec{r}_{0e}| / \lambda_+) / 2\pi - A_e \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0e}) - A_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0i}).$$

Решение  $\Psi_+$  находится с помощью функции Грина уравнения Лапласа:

$$\Delta_2 G = \delta(\vec{x}); G = \frac{1}{2\pi} \ln|\vec{x}|.$$

$$\begin{aligned} \Psi_+ = & -\frac{A_e}{2\pi} \left[ \ln|\vec{r} - \vec{r}_{0e}| - \frac{1}{2\pi} \frac{L^2}{\lambda_-^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|\vec{r} - \vec{\xi}| K_0\left(\frac{L}{\lambda_+}|\vec{\xi} - \vec{r}_{0e}|\right) d\vec{\xi} \right] - \\ & -\frac{A_i}{2\pi} \left[ \ln|\vec{r} - \vec{r}_{0i}| + \frac{1}{2\pi} \frac{L^2}{\lambda_-^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|\vec{r} - \vec{\xi}| K_0\left(\frac{L}{\lambda_+}|\vec{\xi} - \vec{r}_{0i}|\right) d\vec{\xi} \right]. \end{aligned} \quad (9.28)$$

В формуле (9.28) появляются нелокальные члены. Теперь можно найти выражения для функции тока  $\Psi^\alpha$  ионов и электронов:

$$\Psi^i = -\frac{A_e}{4\pi} \left[ \ln|\vec{r} - \vec{r}_{0e}| + K_0\left(\frac{L}{\lambda_+}|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|\right) - \frac{1}{2\pi} \frac{L^2}{\lambda_-^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|\vec{r} - \vec{\xi}| K_0\left(\frac{L}{\lambda_+}|\vec{\xi} - \vec{r}_{0e}|\right) d\vec{\xi} \right] - \quad (9.29)$$

$$-\frac{A_i}{4\pi} \left[ \ln|\vec{r} - \vec{r}_{0i}| - K_0\left(\frac{L}{\lambda_+}|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|\right) + \frac{1}{2\pi} \frac{L^2}{\lambda_-^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|\vec{r} - \vec{\xi}| K_0\left(\frac{L}{\lambda_+}|\vec{\xi} - \vec{r}_{0i}|\right) d\vec{\xi} \right].$$

$$\Psi^e = -\frac{A_e}{4\pi} \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| - K_0 \left( \frac{L}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| \right) - \frac{1}{2\pi} \frac{L^2}{\lambda_-^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |\vec{r} - \vec{\xi}| K_0 \left( \frac{L}{\lambda_+} |\vec{\xi} - \vec{r}_{0e}| \right) d\vec{\xi} \right] - \quad (9.30)$$

$$-\frac{A_i}{4\pi} \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| + K_0 \left( \frac{L}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| \right) + \frac{1}{2\pi} \frac{L^2}{\lambda_-^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |\vec{r} - \vec{\xi}| K_0 \left( \frac{L}{\lambda_+} |\vec{\xi} - \vec{r}_{0i}| \right) d\vec{\xi} \right].$$

Рассмотрим теперь уравнение для магнитного поля (координаты безразмерные):

$$\Delta_2 \Psi_B = -2n_0 c^{-1} L^2 \left[ q_e A_e K_0 \left( L |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| / \lambda_+ \right) + q_i A_i K_0 \left( L |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| / \lambda_+ \right) \right]. \quad (9.31)$$

Из этого уравнения видно, что ни магнитное поле, ни токи не содержат  $\delta$ -функции. Очевидно,  $\Psi_B$  имеет вид:

$$\Psi_B = -\frac{n_0}{\pi c} L^2 \left[ q_e A_e \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |\vec{r} - \vec{\xi}| K_0 \left( L |\vec{\xi} - \vec{r}_{0e}| / \lambda_+ \right) d\vec{\xi} + \right. \quad (9.32)$$

$$\left. + q_i A_i \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |\vec{r} - \vec{\xi}| K_0 \left( L |\vec{\xi} - \vec{r}_{0i}| / \lambda_+ \right) d\vec{\xi} \right].$$

Первый член в формуле (9.32) описывает вклад в потенциальную функцию магнитного поля  $\Psi_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|)$  в произвольной точке  $\vec{r}$ , от электронного вихря, который находится в точке  $\vec{r}_{0e}$ . Второй член в формуле (9.32) описывает вклад в потенциальную функцию магнитного поля  $\Psi_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|)$  в точке  $\vec{r}$ , от ионного вихря, который находится в точке  $\vec{r}_{0i}$ . Таким образом:

$$\Psi_B(\vec{r}) = \Psi_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|) + \Psi_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|), \quad (9.33)$$

где

$$\Psi_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|) = -\left( \frac{q_e}{c} \right) \frac{n_0}{\pi} L^2 A_e \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |\vec{r} - \vec{\xi}| K_0 \left( \frac{L}{\lambda_+} |\vec{\xi} - \vec{r}_{0e}| \right) d\vec{\xi},$$

$$\Psi_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) = -\left( \frac{q_i}{c} \right) \frac{n_0}{\pi} L^2 A_i \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |\vec{r} - \vec{\xi}| K_0 \left( \frac{L}{\lambda_+} |\vec{\xi} - \vec{r}_{0i}| \right) d\vec{\xi}.$$

Из формулы (9.32) видно, что вся нелокальность в потенциалах  $\Psi^\alpha$  возникает только из-за магнитного поля. Действительно, легко видеть, что

$$\begin{aligned} \Psi^i = & -A_e \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| - K_0 \left( L |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| / \lambda_+ \right) \right] / 4\pi - \\ & -A_i \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| + K_0 \left( L |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| / \lambda_+ \right) \right] / 2\pi + c\Psi_B / 8\pi |q| n_0 \lambda_-^2. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Если учесть малость параметра  $m_e / m_i \ll 1$ , то последний член в формуле (9.34) можно записать в виде

$$c\Psi_B / 8\pi |q| n_0 \lambda_-^2 = |q| \Psi_B / 2m_e c.$$

Из формул (9.33), (9.34) видно, что ионно-электронный точечный вихрь устроен гораздо сложнее, чем точечный вихрь в гидродинамике. Прежде всего, вокруг электронного или ионного вихря возникают кольцевые токи, даже если вихрь неподвижен. В свою очередь, эти токи порождают магнитное поле, которое далее действует на токи. Таким образом, магнитное поле или его потенциал  $\Psi_B$  носит характер самосогласованного поля. В действительности нелокальные члены можно значительно упростить. Согласно работе [66], интеграл

$$I(\vec{\eta}_\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |\vec{r} - \vec{\xi}| K_0 \left( L |\vec{\xi} - \vec{r}_{0\alpha}| / \lambda_+ \right) d\vec{\xi}$$

можно преобразовать к более простому виду:

$$I = \pi \ln |\vec{\eta}|^2 (\lambda_+ / L)^2 \left[ -(L |\vec{\eta}| / \lambda_+) K_1 (L |\vec{\eta}| / \lambda_+) + 1 \right] + \pi \int_{|\vec{\eta}|}^{\infty} \left| \vec{\xi} \right| K_0 \left( L |\vec{\xi}| / \lambda_+ \right) \ln \left| \vec{\xi} \right|^2 d \left| \vec{\xi} \right|.$$

Этот интеграл единственный, который порождает все нелокальные члены. Второй интеграл в этой формуле не берется в явном виде. Это, однако, не порождает проблем в уравнениях движения, которые остаются локальными. Отметим, что функция  $\Psi_B$  выражается через  $I(\vec{\eta}_\alpha)$  в виде

$$\Psi_B(\vec{r}) = -\frac{n_0}{\pi c} L^2 [q_e A_e I(\vec{\eta}_e) + q_i A_i I(\vec{\eta}_i)]. \quad (9.35)$$

Обозначим  $I_B$  функцию:

$$I_B = \frac{1}{2\pi} \frac{L^2}{\lambda_-^2} I = \quad (9.36)$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\vec{\eta}|^2 (\lambda_+ / \lambda_-)^2 \left[ -(L |\vec{\eta}| / \lambda_+) K_1(L |\vec{\eta}| / \lambda_+) + 1 \right] + (L^2 / 2 \lambda_-^2) \int_{|\vec{\eta}|}^{\infty} \left| \vec{\xi} \right| K_0 \left( L \left| \vec{\xi} \right| / L^2 \right) \ln \left| \vec{\xi} \right|^2 d \left| \vec{\xi} \right|.$$

Ясно, что выражение

$$(\lambda_+ / \lambda_-)^2 = (1 - m_e / m_i) (1 + m_e / m_i)^{-1},$$

с учетом малости  $m_e / m_i \ll 1$ , практически равно единице:

$$(\lambda_+ / \lambda_-)^2 \simeq 1.$$

Удобно, однако, для отслеживания структуры формул, временно сохранить параметр  $\frac{\lambda_+}{\lambda_-}$  во всех формулах. В конечных формулах всегда можно положить  $\frac{\lambda_+}{\lambda_-} \simeq 1$ . Функция  $\Psi_B(\vec{r}, \vec{r}_e, \vec{r}_i)$  (461) выражается через функцию  $I_B$ , очевидно, следующим образом:

$$-\frac{A_e}{4\pi} \frac{q_e}{|q|} I_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|) - \frac{A_i}{4\pi} \frac{q_i}{|q|} I_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) = \frac{|q|}{2c} \left( \frac{1}{m_e} - \frac{1}{m_i} \right) [\Psi_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|) + \Psi_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|)] \quad (9.37)$$

Теперь можно записать функции  $\Psi^i, \Psi^e$  в виде

$$\Psi^i = -\frac{A_e}{4\pi} \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| + K_0(L |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| / \lambda_+) \right] - \frac{A_i}{4\pi} \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| - K_0(L |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| / \lambda_+) \right] - \quad (9.38)$$

$$-\frac{A_e}{4\pi} \frac{q_e}{|q|} I_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|) - \frac{A_i}{4\pi} \frac{q_i}{|q|} I_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|),$$

$$\Psi^e = -\frac{A_e}{4\pi} \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| - K_0 (L |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| / \lambda_+) \right] - \frac{A_i}{4\pi} \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| + K_0 (L |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| / \lambda_+) \right] - \frac{A_e q_e}{4\pi |q|} I_B (|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|) - \frac{A_i q_i}{4\pi |q|} I_B (|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|). \quad (9.39)$$

Члены, которые содержат функции  $\ln$ , имеют чисто гидродинамический характер и не содержат никаких плазменных параметров. Члены с функцией  $K_0$  уже являются специфическими для плазмы. Они содержат параметр  $\lambda_+$  (см. формулу (9.21)) и связаны с относительным движением электронов и ионов, т.е. с токами в плазме, как видно из формул (9.13), (9.31). Последняя группа членов, которые содержат функции  $I_B$ , связана с векторным потенциалом самосогласованного магнитного поля, как видно из формул (9.10) и (9.37).

## 9.2. Электронный и ионный вихри

Рассмотрим далее два важных частных случая: ионный вихрь и электронный вихрь. Рассмотрим вначале структуру ионного вихря.

Назовем ионным вихрем случай, когда  $A_e = 0$ . В этом случае формулы (9.38), (9.39) дают:

$$\Phi_{(i)}^i (|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) \equiv \Psi^i (A_e = 0) = -\frac{A_i}{4\pi} \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| + I_B (|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) - K_0 \left( \frac{1}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| \right) \right],$$

$$\Phi_{(e)}^i (|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) \equiv \Psi^e (A_e = 0) = -\frac{A_i}{4\pi} \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| + I_B (|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) + K_0 \left( \frac{1}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| \right) \right].$$

Ясно, что в ионном вихре электроны адаптируются к движению ионов так, чтобы были обеспечены условия квазинейтральности. Тогда очевидно, что ионный вихрь имеет нулевой заряд. Даже если ионный вихрь неподвижен, то вокруг него образуются кольцевые токи как ионов, так и электронов, которые порождают самосогласованное магнитное поле. Отсюда получаем в размерных переменных:

$$\Phi_{(i)}^i - \Phi_{(e)}^i = \Psi^i (A_e = 0) - \Psi^e (A_e = 0) = \frac{A_i}{2\pi} K_0 \left( \frac{1}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| \right).$$

Из формулы (9.12) и (9.13) получаем магнитное поле  $B_z$  (в размерных переменных):

$$B_z = A_i \frac{2|q|n_0}{c} K_0 \left( \frac{1}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| \right), \quad (9.40)$$

и уравнение для тока:

$$\begin{aligned} j_x(A_e = 0) &= -\frac{A_i}{2\pi\lambda_+} \frac{4\pi|q|n_0}{c} K_1 \left( \frac{1}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| \right) \frac{(y - y_0^i)}{|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|}, \\ j_y(A_e = 0) &= +\frac{A_i}{2\pi\lambda_+} \frac{4\pi|q|n_0}{c} K_1 \left( \frac{1}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0i}| \right) \frac{(x - x_0^i)}{|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Полученные формулы дают представление об устройстве ионного вихря. Прежде всего из формул (9.40), (9.41) видно, что магнитное поле и токи сосредоточены в области:

$$|\vec{r} - \vec{r}_{0i}| \lesssim \lambda_+,$$

поэтому эту область естественно называть ядром вихря. На больших расстояниях от центра, в области:

$$|\vec{r} - \vec{r}_{0i}| \gg \lambda_+ \quad (9.42)$$

функции тока имеют асимптотику, как точечные вихри в обычной гидродинамике жидкости:

$$\Phi_{(i)}^i = \Phi_{(e)}^i \rightarrow -\frac{A_i}{2\pi} \ln |\vec{r} - \vec{r}_{0i}|. \quad (9.43)$$

В результате скорости ионов и электронов на большом расстоянии принимают вид:

$$\begin{aligned} v_x^i = v_x^e &\rightarrow -\frac{A_i}{2\pi} \frac{(y - y_0^i)}{|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|^2}, \\ v_y^i = v_y^e &\rightarrow +\frac{A_i}{2\pi} \frac{(x - x_0^i)}{|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, в области (9.42) движение ионов и электронов является, фактически, одножидкостным. Рассмотрим теперь структуру электронного вихря. Назовем электронным вихрем случаи, когда  $A_i = 0$ . В этом случае для потенциалов  $\Psi^{i,e}$  из формул (9.38), (9.39) получаем

$$\begin{aligned}\Phi_{(i)}^e(|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|) &\equiv \Psi^i(A_i = 0) = -\frac{A_e}{4\pi} \left[ \ln|\vec{r} - \vec{r}_{0e}| - I_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|) + K_0 \left( \frac{1}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| \right) \right], \\ \Phi_{(e)}^e(|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|) &\equiv \Psi^e(A_i = 0) = -\frac{A_e}{4\pi} \left[ \ln|\vec{r} - \vec{r}_{0e}| - I_B(|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|) - K_0 \left( \frac{1}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| \right) \right], \\ \Phi_{(i)}^e - \Phi_{(e)}^e &= \Psi^i(A_i = 0) - \Psi^e(A_i = 0) = -\frac{A_e}{2\pi} K_0 \left( \frac{1}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| \right).\end{aligned}$$

В случае электронного вихря ионы образуют фон, который гарантирует квазинейтральность электронного вихря. Ясно, что в электронном вихре также происходит полная компенсация зарядов, как и в ионном вихре. Для магнитного поля и токов в электронном вихре получаем

$$\begin{aligned}B_z &= -A_e \frac{2|q|n_0}{c} K_0 \left( \frac{1}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| \right), \\ j_x(A_i = 0) &= +\frac{A_e}{2\pi\lambda_+} \frac{4\pi|q|n_0}{c} K_1 \left( \frac{1}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| \right) \frac{(y - y_0^e)}{|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|}, \\ j_y(A_e = 0) &= -\frac{A_e}{2\pi\lambda_+} \frac{4\pi|q|n_0}{c} K_1 \left( \frac{1}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{0e}| \right) \frac{(x - x_0^e)}{|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|}.\end{aligned}$$

Из полученных формул следует, что электронный вихрь полностью сосредоточен в области:

$$|\vec{r} - \vec{r}_{0e}| \lesssim \lambda_+,$$

т. е. в той же области, где находится ядро и ионного вихря, а при

$$|\vec{r} - \vec{r}_{0e}| \gg \lambda_+,$$

функции тока  $\Phi_{(i)}^e, \Phi_{(e)}^e$  все другие функции экспоненциально спадают. Таким образом, электронные вихри не имеет дальнего действия, в отличие от ионного вихря.

### 9.3. У р а в н е н и я д в и ж е н и я т о ч е ч н ы х п л а з м е н н ы х в и х р е й

Из формул (9.38), (9.39) следует, что функции тока  $\Psi_{i,e}$  можно записать в виде суммы:

$$\begin{aligned}\Psi_i &= \Phi_i^{(e)}(|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|) + \Phi_i^{(i)}(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|), \\ \Psi_e &= \Phi_e^{(e)}(|\vec{r} - \vec{r}_{0e}|) + \Phi_e^{(i)}(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|).\end{aligned}$$

Т. е. потенциалы скоростей движения электронов и ионов являются суммой вкладов от электронных и ионных вихрей (тип вихря обозначен верхним индексом в скобках, нижний индекс обозначает вклад в ионы и электроны, соответственно). Один вихрь, либо электронный, либо ионный является неподвижным из-за отсутствия самодействия. Один электронный и один ионный вихри, как будет показано далее, вращаются друг вокруг друга. Рассмотрим теперь уравнения движения одного ионно-электронного точечного вихря. Для получения уравнений движения точечного вихря применяем стандартную схему. Подставляем формулу (9.18) в уравнения (9.16) и приравниваем члены с одинаковыми особенностями. Нетрудно видеть, что, как и в обычной гидродинамике, в гидродинамике плазмы самодействие отсутствует. В результате получаем уравнения:

$$\frac{dx_0^i}{dt} = \frac{\partial \Psi^i}{\partial y} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0^i}, \quad (9.44)$$

$$\frac{dy_0^i}{dt} = -\frac{\partial \Psi^i}{\partial x} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0^i}, \quad (9.45)$$

$$\frac{dx_0^e}{dt} = \frac{\partial \Psi^e}{\partial y} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0^e}, \quad (9.46)$$

$$\frac{dy_0^e}{dt} = -\frac{\partial \Psi^e}{\partial x} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0^e}. \quad (9.47)$$

Обозначим производную:  $\frac{\partial I_B}{\partial |\vec{\eta}|} \equiv I_B'$ . Эта производная является локальной функцией и находится элементарно из формулы (9.36). Вычисляем производные  $\frac{\partial \Psi^i}{\partial x} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0^i}, \frac{\partial \Psi^i}{\partial y} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0^i}, \frac{\partial \Psi^e}{\partial x} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0^e}, \frac{\partial \Psi^e}{\partial y} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0^e}$  и отбрасываем члены с самовоздействием, получаем уравнения движения ионно-электронного точечного вихря. Введем две функции  $H_0$  и  $H_1$ :

$$\begin{aligned}H_0 &= -\frac{A_e A_i}{4\pi} \ln |\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0e}| - \frac{A_e A_i}{4\pi} K_0 \left( \frac{L}{\lambda_+} |\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0e}| \right), \\ H_1 &= \frac{A_e A_i}{4\pi} I_B(|\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0e}|).\end{aligned}$$

Тогда уравнения движения ионно-электронного точечного вихря можно записать в виде

$$A_i \frac{dx_0^i}{dt} = \frac{\partial}{\partial y_0^i} \left( H_0 + \frac{q_i}{|q|} H_1 \right), \quad (9.48)$$

$$A_i \frac{dy_0^i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_0^i} \left( H_0 + \frac{q_i}{|q|} H_1 \right), \quad (9.49)$$

$$A_e \frac{dx_0^e}{dt} = \frac{\partial}{\partial y_0^e} \left( H_0 + \frac{q_e}{|q|} H_1 \right), \quad (9.50)$$

$$A_e \frac{dy_0^e}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_0^e} \left( H_0 + \frac{q_e}{|q|} H_1 \right). \quad (9.51)$$

Здесь нужно напомнить, что точечные вихри не образуют замкнутой подсистемы, т. к. находятся в магнитном поле, которое порождается токами в плазме. Это приводит к тому, что уравнения движения точечных вихрей не имеют тех симметрий, которые свойственны уравнениям движения обычных гидродинамических вихрей. Тем не менее уравнения движения (9.48)–(9.51) близки к гамильтоновым уравнениям. Прежде всего отметим, что уравнения движения как ионного вихря, так и электронного вихря являются гамильтоновыми. Общую систему уравнений движения ионно-электронных точечных вихрей (9.48)–(9.51) можно назвать квази-гамильтоновой, т. к. она сохраняет некоторые существенные свойства общих гамильтоновых систем. Важное свойство динамической системы (9.48)–(9.51) состоит в том, что она определяет поток жидкости в фазовом пространстве, который является несжимаемым, как и в случае чисто гамильтоновых систем. Т. е.  $\text{div} \vec{V} = 0$ , где  $\vec{V} = (\dot{x}_i, \dot{y}_i; \dot{x}_e, \dot{y}_e)$  – скорость жидкости в фазовом пространстве. Из уравнений (9.48) – (9.51) непосредственно видно, что:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_i} + \frac{\partial \dot{x}_e}{\partial x_e} + \frac{\partial \dot{y}_e}{\partial y_e} = 0.$$

Если ввести скобки Пуассона:

$$\{f, g\} = \frac{1}{A_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_0^i} \frac{\partial g}{\partial y_0^i} - \frac{\partial f}{\partial y_0^i} \frac{\partial g}{\partial x_0^i} \right) + \frac{1}{A_e} \left( \frac{\partial f}{\partial x_0^e} \frac{\partial g}{\partial y_0^e} - \frac{\partial f}{\partial y_0^e} \frac{\partial g}{\partial x_0^e} \right).$$

то гамильтонианы  $(H_0 + H_1), (H_0 - H_1)$  находятся в инволюции, т. е.:

$$\{(H_0 + H_1), (H_0 - H_1)\} = 0.$$

Этот факт, однако, является частным случаем, и не сохраняется при переходе к произвольному числу вихрей. В то же время, несжимаемость фазового потока жидкости сохраняется для произвольного числа вихрей. Уравнения движения (9.48)–(9.51) можно решить в явном виде. Для этого рассмотрим более подробно динамику одного точечного электронно-ионного вихря. Обозначим расстояние между вихрями:

$$\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0e} = \vec{d}, |\vec{d}| = d.$$

Тогда из уравнений движения, очевидно, следует:

$$\frac{d}{dt}(x_0^i - x_0^e) = \frac{1}{4\pi}(y_0^i - y_0^e) \left[ -\frac{(A_e + A_i)}{d^2} + I_B' \frac{(A_e - A_i)}{d} + \frac{L}{\lambda_+} K_1 \left( \frac{L}{\lambda_+} d \right) \frac{(A_e + A_i)}{d} \right]$$

$$\frac{d}{dt}(y_0^i - y_0^e) = -\frac{1}{4\pi}(x_0^i - x_0^e) \left[ -\frac{(A_e + A_i)}{d^2} + I_B' \frac{(A_e - A_i)}{d} + \frac{L}{\lambda_+} K_1 \left( \frac{L}{\lambda_+} d \right) \frac{(A_e + A_i)}{d} \right]$$

Отсюда сразу следует интеграл движения:

$$(x_0^i - x_0^e)^2 + (y_0^i - y_0^e)^2 = d^2 = Const. \quad (9.52)$$

Обозначим  $\Omega$  частоту:

$$\Omega = \left[ -\frac{(A_e + A_i)}{d^2} + \frac{(A_e - A_i)}{d} \frac{\partial I_B(d)}{\partial d} + \frac{1}{\lambda_+} K_1 \left( \frac{d}{\lambda_+} \right) \frac{(A_e + A_i)}{d} \right], \quad (9.53)$$

получаем уравнение вращения вихрей:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_0^i - x_0^e) + \frac{\Omega^2}{16\pi^2}(x_0^i - x_0^e) = 0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_0^i - y_0^e) + \frac{\Omega^2}{16\pi^2}(y_0^i - y_0^e) = 0.$$

Переход к случаю многих вихрей является совершенно естественным. В формулах (9.19), (9.20) переходим к суммам  $\delta$ -функций:

$$\begin{aligned} -\Delta_2 \Psi^i + \frac{1}{\lambda_i^2} (\Psi^i - \Psi^e) &= \sum_{\alpha} A_i^{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0i}^{\alpha}), \\ -\Delta_2 \Psi^e - \frac{1}{\lambda_e^2} (\Psi^i - \Psi^e) &= \sum_{\alpha} A_e^{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0e}^{\alpha}). \end{aligned}$$

В результате, очевидно, возникают суммы в формулах (9.29), (9.30) и других. Формулы (9.38), (9.39), очевидно, обобщаются на случай многих вихрей:

$$\begin{aligned} \Psi_i = & - \sum_{\alpha=1}^N \frac{A_{\alpha}^e}{4\pi} \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}^e| + K_0 \left( \frac{L}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}^e| \right) \right] - \\ & - \sum_{\beta=1}^M \frac{A_{\beta}^i}{4\pi} \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_{\beta}^i| - K_0 \left( \frac{L}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{\beta}^i| \right) \right] - \end{aligned} \quad (9.54)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{\alpha=1}^N \frac{A_{\alpha}^e}{4\pi} \frac{q_e}{|q|} I_B(|\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}^e|) - \sum_{\beta=1}^M \frac{A_{\beta}^i}{4\pi} \frac{q_i}{|q|} I_B(|\vec{r} - \vec{r}_{\beta}^i|), \\ \Psi_e = & \sum_{\alpha=1}^N \frac{A_{\alpha}^e}{4\pi} \left[ -\ln |\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}^e| + I_B |\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}^e| + K_0 \left( \frac{L}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}^e| \right) \right] + \\ & + \sum_{\beta=1}^M \frac{A_{\beta}^i}{4\pi} \left[ -\ln |\vec{r} - \vec{r}_{\beta}^i| - I_B |\vec{r} - \vec{r}_{\beta}^i| - K_0 \left( \frac{L}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_{\beta}^i| \right) \right] - \\ & - \sum_{\alpha=1}^N \frac{A_{\alpha}^e}{4\pi} \frac{q_e}{|q|} I_B(|\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}^e|) - \sum_{\beta=1}^M \frac{A_{\beta}^i}{4\pi} \frac{q_i}{|q|} I_B(|\vec{r} - \vec{r}_{\beta}^i|). \end{aligned} \quad (9.55)$$

Здесь  $N$  – число электронных вихрей, а  $M$  – число ионных вихрей.

Соответственно, уравнения движения вихрей имеют вид:

$$\frac{dx_m^i}{dt} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_m^i}, \quad \frac{dy_m^i}{dt} = -\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_m^i}, \quad (9.56)$$

$$\frac{dx_n^e}{dt} = \frac{\partial \Psi_e}{\partial y} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_n^e}, \quad \frac{dy_n^e}{dt} = -\frac{\partial \Psi_e}{\partial x} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_n^e}, \quad (9.57)$$

Члены с самодействием в уравнениях (9.56), (9.57) отсутствуют, точно также, как и в уравнениях (9.44)–(9.47).

Формулы (9.54), (9.55) можно записать компактно в виде:

$$\begin{aligned} \Psi_p = & \sum_{\alpha=1}^{N(e)} \frac{A_\alpha^e}{4\pi} \left[ -\ln |\vec{r} - \vec{r}_\alpha^e| - \frac{q_e}{|q|} I_B |\vec{r} - \vec{r}_\alpha^e| + \frac{q_p q_e}{q^2} K_0 \left( \frac{L}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_\alpha^e| \right) \right] + \\ & + \sum_{\beta=1}^{N(i)} \frac{A_\beta^i}{4\pi} \left[ -\ln |\vec{r} - \vec{r}_\beta^i| - \frac{q_i}{|q|} I_B |\vec{r} - \vec{r}_\beta^i| + \frac{q_p q_i}{q^2} K_0 \left( \frac{L}{\lambda_+} |\vec{r} - \vec{r}_\beta^i| \right) \right]. \end{aligned}$$

Индекс  $p = i, e$ . Здесь  $N(e)$  – число электронных вихрей, а  $N(i)$  – число ионных вихрей. Уравнения движения вихрей принимают вид:

$$\frac{dx_v^p}{dt} = \frac{\partial \Psi_p}{\partial y_v^p}, \quad \frac{dy_v^p}{dt} = -\frac{\partial \Psi_p}{\partial x_v^p}.$$

Формула (9.37) для потенциальной функции магнитного поля обобщается на случаи произвольного числа вихрей следующим образом:

$$\begin{aligned} & -\sum_{\alpha=1}^{N(e)} \frac{A_\alpha^e}{4\pi} \frac{q_e}{|q|} I_B (|\vec{r} - \vec{r}_\alpha^e|) - \sum_{\beta=1}^{N(i)} \frac{A_\beta^i}{4\pi} \frac{q_i}{|q|} I_B (|\vec{r} - \vec{r}_\beta^i|) = \\ & = \frac{|q|}{2c} \left( \frac{1}{m_e} - \frac{1}{m_i} \right) \left[ \sum_{\alpha=1}^{N(e)} \Psi_B (|\vec{r} - \vec{r}_\alpha^e|) + \sum_{\beta=1}^{N(i)} \Psi_B (|\vec{r} - \vec{r}_\beta^i|) \right] = \Psi_B(\vec{r}). \end{aligned} \quad (9.58)$$

Формула (9.58) показывает, что потенциал  $\Psi_B(\vec{r})$  в произвольной точке является суммой вкладов от всех точечных вихрей. Учитывая формулу (9.10) для векторного потенциала  $\vec{A}$ , легко видеть, что все члены, которые содержат функции  $I_B$  в уравнениях движения, представляют собой «удлинение» импульса точечного вихря в магнитном поле, аналогичное «удлинению» импульса частицы в магнитном поле. Точнее говоря, если точечный вихрь находится в точке  $\vec{r}_v^p$  ( $p = i, e; v = \alpha, \beta$ ), то все члены, которые содержат функции  $I_B$  в уравнениях движения, имеют вид:

$$\frac{|q|}{2c} \left( \frac{1}{m_e} - \frac{1}{m_i} \right) \left[ \sum_{\alpha=1}^{N(e)} \vec{A}(|\vec{r}_v^p - \vec{r}_\alpha^e|) + \sum_{\beta=1}^{N(i)} \vec{A}(|\vec{r}_v^p - \vec{r}_\beta^i|) \right],$$

т. е. представляют собой векторный потенциал, который создается всеми вихрями в точке, где находится точечный вихрь  $\vec{r}_v^p$ . Здесь нужно отметить, как уже говорилось ранее, что точечные вихри не образуют замкнутой подсистемы, т. к. находятся в магнитном поле, которое порождается токами в плазме. Это приводит к тому, что уравнения движения точечных вихрей в плазме не имеют тех симметрий, которые свойственны уравнениям движения обычных гидродинамических вихрей. Т. е. уравнения движения строго говоря, не являются гамильтоновыми, хотя и очень близки к гамильтоновым. В частности, подсистема только ионных или только электронных вихрей является гамильтоновой. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= - \sum_{\beta=1}^{N(p)} \sum_{\alpha=1}^{N(l)} \sum_{\substack{l=i,e \\ p=i,e}} \frac{1}{8\pi} A_{\beta}^p A_{\alpha}^l \ln \left( \left| \vec{r}_{\alpha}^l - \vec{r}_{\beta}^p \right| \right). \\
 H_1 &= \sum_{\beta=1}^{N(p)} \sum_{\alpha=1}^{N(l)} \sum_{\substack{l=i,e \\ p=i,e}} \frac{1}{8\pi} A_{\beta}^p A_{\alpha}^l \frac{q_p q_l}{q^2} K_0 \left( \left| \vec{r}_{\alpha}^l - \vec{r}_{\beta}^p \right| \right). \\
 H_2 &= - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^{N(i)} \sum_{\alpha=1}^{N(i)} \frac{1}{8\pi} A_{\beta}^i A_{\alpha}^i I_B \left( \left| \vec{r}_{\alpha}^i - \vec{r}_{\beta}^i \right| \right), \\
 H_3 &= \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^{N(e)} \sum_{\alpha=1}^{N(e)} \frac{1}{8\pi} A_{\beta}^e A_{\alpha}^e I_B \left( \left| \vec{r}_{\alpha}^e - \vec{r}_{\beta}^e \right| \right). \\
 H_4^p &= \frac{q_p}{|q|} H_4, p = i, e \\
 H_4 &= \sum_{\beta=1}^{N(i)} \sum_{\alpha=1}^{N(e)} \frac{1}{4\pi} A_{\beta}^i A_{\alpha}^e I_B \left( \left| \vec{r}_{\alpha}^e - \vec{r}_{\beta}^i \right| \right). \\
 H &= H_0 + H_1 + H_2 + H_3,
 \end{aligned}$$

тогда уравнения движения можно записать в виде

$$A_v^p \frac{dx_v^p}{dt} = \frac{\partial}{\partial y_v^p} \left( H + \frac{q_p}{|q|} H_4 \right), \quad A_v^p \frac{dy_v^p}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x_v^p} \left( H + \frac{q_p}{|q|} H_4 \right). \quad (9.59)$$

Эти уравнения можно назвать «квази-гамильтоновыми», т. к. они очень близки к гамильтоновым. В частности, подсистема ионных вихрей и подсистема электронных вихрей являются по отдельности гамильтоновыми. Кроме того, общая система (9.59) сохраняет некоторые важные

свойства гамильтоновых систем. Так, например, фазовый поток является несжимаемым. Это означает, что:

$$\sum_{\beta=1}^{N(i)} \left( \frac{\partial x_{\beta}^i}{\partial x_{\beta}^i} + \frac{\partial y_{\beta}^i}{\partial y_{\beta}^i} \right) + \sum_{\alpha=1}^{N(e)} \left( \frac{\partial x_{\alpha}^e}{\partial x_{\alpha}^e} + \frac{\partial y_{\alpha}^e}{\partial y_{\alpha}^e} \right) = 0. \quad (9.60)$$

Уравнения движения точечных вихрей, рассмотренные в данной главе, являются естественной основой для построения конечномерных 2D-динамических и статистических моделей гидродинамического движения плазмы.

Таким образом, точечные вихри в 2D электроно-ионной гидродинамике плазмы возникают практически таким же образом, как и точечные вихри в обычной 2D-гидродинамике. Естественным способом введения точечных вихрей является переход от обычных физических переменных, таких как скорость, плотность, электрическое и магнитное поле к интегралам вмерзженности [67]. В обычной гидродинамике интегралом вмерзженности, как известно, является завихренность, которая порождает классическое определение точечных вихрей. Для двух жидкостной гидродинамики плазмы необходимое обобщение интегралов вмерзженности дано в работе [67]. Для ионной и электронной жидкостей интегралы вмерзженности имеют, соответственно, вид (9.4), (9.5). Использование этих интегралов позволяет по формулам (9.18) ввести точечные вихри в плазменную гидродинамику естественным образом. Однако точечные вихри в гидродинамике плазмы устроены гораздо сложнее, чем точечные вихри в обычной жидкости. Прежде всего, имеется два типа точечных вихрей: ионные и электронные вихри. В ионном вихре завихренность обобщенного импульса ионов пропорциональна  $\delta$ -функции, а в электронном вихре завихренность обобщенного импульса электронов пропорциональна  $\delta$ -функции. Вокруг ионного или электронного вихрей возникают кольцевые токи, даже если сам вихрь неподвижен. Эти токи порождают самосогласованное магнитное поле, которое, в свою очередь, действует на токи. В ионном вихре движение электронов приспособливается к движению ионов так, чтобы обеспечить условия квазинейтральности. В электронном вихре ионы образуют внешний фон, который также гарантирует квазинейтральность вихря. В отличие от обычной гидродинамики, ионный вихрь имеет нетривиальное ядро, характерный размер которого  $l \sim \lambda_+$  (9.21). В области ядра сосредоточены токи и магнитное поле. На масштабах  $l, \lambda_+ \ll l$ , т.е. вдали от ядра токи и магнитное поле убывают экспоненциальным образом. Движение плазмы в этой области является одножидкостным, т.е. практически гидродинамическим. Функции тока убывают с расстоянием логарифмическим образом (9.43), как и в обычной гидродинамике. Т.е. ионные вихри имеют дальное действие, как и обычные точечные вихри

в гидродинамике. По этой причине ансамбль ионных вихрей имеет важное значение для динамики и статистики плазмы на больших масштабах. Один ионный вихрь является неподвижным, поскольку он не имеет самовоздействия, как и гидродинамический вихрь. Электронный вихрь полностью сосредоточен в области  $l \sim \lambda_+$ . При  $\lambda_+ \ll l$ , все его характеристики экспоненциально убывают. Т.е. электронные вихри, в отличие от ионных вихрей, не имеют дальнего действия. Один электронный вихрь также не имеет самовоздействия, и поэтому неподвижен. Таким образом, мы видим, что плазменная природа точечных вихрей проявляется в действительности на масштабах  $l \sim \lambda_+$ .

В плазме может быть произвольное конечное число электронных и ионных точечных вихрей. Такой ансамбль точечных вихрей дает конечномерную аппроксимацию более сложных динамических и статистических (турбулентных), движений плазмы также, как и ансамбль точечных гидродинамических вихрей порождает конечномерные модели двумерных уравнений Эйлера. Совместные уравнения движения одного ионного и одного электронного вихря легко решаются, т. к. расстояние между ними сохраняется (9.52). В результате вихри вращаются друг вокруг друга с частотой (9.53). При переходе к большому числу вихрей ситуация значительно усложняется. Причина состоит в том, что точечные вихри в плазме находятся в самосогласованном магнитном поле и не образуют замкнутой подсистемы, в отличие от обычных гидродинамических вихрей. В результате их уравнения движения не имеют тех симметрий, которые имеют обычные вихри. Так, система уравнений движения (9.59) не является, строго говоря, гамильтоновой. Она очень близка к гамильтоновой системе: в частности, уравнения движения ионных или электронных вихрей являются гамильтоновыми. Общая система уравнений (9.59) сохраняет важные свойства гамильтоновых систем. Например, поток жидкости в фазовом пространстве является несжимаемым (9.60). Поэтому систему уравнений (9.59) можно называть «квази-гамильтоновой». Интересно отметить, что негамильтоновые члены в уравнениях движения (9.59) имеют простую физическую природу. Они связаны с «удлиннением» импульса точечного вихря в магнитном поле, аналогичном обычному «удлиннению» импульса заряженной частицы в магнитном поле и отличаются знаками для электронных и ионных вихрей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этом обзоре хотелось отразить новые важные результаты по динамике вихревых структур в двумерной гидродинамике. Результаты, обсуждающиеся в нем, в основном связаны с интересами авторов. Основной мотив этого обзора — продемонстрировать, что эта область

теоретической физики и гидродинамики находится в состоянии интенсивного развития. В XIX веке Гельмгольцем и Кирхгоффом была введена и исследована концепция точечных вихрей. С тех пор роль точечных вихрей в гидродинамике только возрастает. Уже более двух столетий динамике и статистике таких движущихся сингулярностей уделяют и продолжают уделять всё больше и больше внимание. Однако, как оказалось, точечные вихри не исчерпывают всех имеющихся точечных сингулярностей уравнений Эйлера. В определённом смысле уравнения движения точечных сингулярностей, которые содержат только точечные вихри, не полны. Как описано в данном обзоре, уравнения Эйлера допускают решения в виде ансамбля более сложных сингулярностей, точечных диполей. Индекс особой точки дипольного поля равен двум, в отличие от точечного вихря, индекс которого равен единице. Точечные вихри и точечные диполи образуют полный набор решений, которые дают дискретную аппроксимацию двумерного уравнения Эйлера. Совместные уравнения движения точечных вихрей и точечных диполей имеют гамильтонову структуру с интегралами движения Кирхгоффа. Статистический ансамбль таких вихрей может служить моделью двумерной турбулентности, гамильтониан которой имеет более хорошие свойства, чем гамильтониан точечных вихрей. Более сложные сингулярности не совместимы с уравнением Эйлера и динамически запрещены. Динамика совместного движения точечного вихря и точечного диполя описана в данном обзоре, как и движение точечного диполя в ограниченной области. Интересной особенностью такого движения является то, что диполь имеет тенденцию отталкиваться от границ. Поэтому он может считаться переносчиком завихренности от границы во внутреннюю область. Движение одного точечного вихря и одного точечного диполя описывается полностью интегрируемой динамической системой, решение которой подробно описано в обзоре. Точечные вихри могут образовывать нетривиальные стационарные конфигурации, как сами по себе, так и совместно с несингулярными локализованными вихрями. Как было замечено, в процессе релаксации двумерной турбулентности завихренность концентрируется в локализованные вихри, которые образуют двухмерную структуру: вихревой кристалл. В данном обзоре мы описываем один из таких вихревых кристаллов, в центре которого находится точечный вихрь, а вокруг расположено ожерелье из  $N$  несингулярных вихрей с рациональной завихренностью. Такая структура может быть кандидатом на финальную фазу релаксации двумерной турбулентности.

Появление точечного диполя, как решения уравнения Эйлера, порождает вопрос о роли сингулярностей более высоких порядков. Как уже говорилось, особенности более высоких порядков динамически несовместимы с уравнениями Эйлера, т. е. их движение невозможно. Однако, возникает вопрос, могут ли более высокие особенности быть стационарными решениями уравнения Эйлера? Ответ на этот вопрос положительный. В данном обзоре мы приводим точные решения

уравнения Эйлера, имеющие сложную особую точку индекса три. Решение устроено как слияние дипольной особой точки и полюса порядка  $n$ . В результате вокруг сложной особой точки образуется группа вихревых сателлитов, количество которых зависит от порядка полюса. Построенные конфигурации структурно устойчивы, однако могут деформироваться с сохранением топологии, т. к. по Ляпунову они неустойчивы.

В обзоре представлены также новые результаты по теории генерации крупномасштабной неустойчивости мелкомасштабной турбулентностью. Этому вопросу было посвящено большое количество работ. В этих работах, как правило, турбулентность считалась спиральной и методом функционального усреднения получались уравнения для крупномасштабных возмущений, или турбулентность считалась неинвариантной по отношению к преобразованию чётности и крупномасштабные уравнения получались методом многомасштабного асимптотического разложения. Метод функционального усреднения имеет определённые недостатки. Так, в явном виде не ясно, в каких порядках теории возмущений по малому числу Рейнольдса находятся уравнения для возмущений и крупномасштабных движений. Метод многомасштабного разложения свободен от этих недостатков. Мы используем этот метод для получения уравнений для крупномасштабных возмущений в линейной и нелинейной теории. В результате получаются линейные и нелинейные уравнения Рейнольдса для крупномасштабных возмущений в стратифицированной жидкости с мелкомасштабной спиральной турбулентностью. Анализ этих уравнений показывает присутствие крупномасштабной вихревой неустойчивости. Насыщение этой неустойчивости порождает большое количество нелинейных периодических вихревых структур. Среди этих структур выделяются локализованные вихревые образования типа вращающегося солитона и кинка. Такие вихри могут иметь большое значение в динамике планетных атмосфер и океана. Высказывались идеи, что крупномасштабные вихри в спиральной турбулентности могут иметь отношение к проблеме зарождения тропических циклонов. Изложенная здесь теория может быть обобщена на случай мелкомасштабной турбулентности без спиральности, но с градиентом температуры и вращением.

Впечатляющие успехи дискретных моделей гидродинамики с использованием точечных вихрей порождают естественный вопрос. Можно ли построить аналоги точечных вихрей в гидродинамике плазмы? Как мы доказываем в обзоре, ответ на этот вопрос положительный. Основой такого обобщения является представление уравнений двужидкостной гидродинамики плазмы с помощью обобщённых интегралов в замороженности. Точечные вихри возникают, когда обобщённые интегралы в замороженности представляют собой суммы  $\delta$ -функций. Точечные вихри в гидродинамике плазмы устроены гораздо сложнее, чем в обычной гидродинамике. Прежде всего, имеется два типа вихрей: электронные и ионные. В электронных вихрях ионы образуют фон, на котором вращаются электроны. В ионных вихрях вращаются ионы, а электроны

подстраиваются под движение ионов. В обоих случаях точечные вихри имеют плазменное ядро, за пределами которого поля убывают. В ионном вихре поля убывают медленно, как в обычной гидродинамике, а в электронном вихре поля убывают экспоненциально. Поэтому для турбулентности плазмы и процессов переноса ионные вихри играют фундаментальную роль. Двумерная плазма может быть представлена как ансамбль точечных электронных и ионных вихрей. Динамика движения этих вихрей является квазигамильтоновой. Такая схема позволяет развить дискретную модель динамики плазмы и статистическую модель плазменной турбулентности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. – 928 с. (Lamb H. *Hydrodynamics*. Ed. 6-th. – N. Y. Dover publ. 1945. – 632 p.)
2. Glaz H.M. Two attempts at modeling two-dimensional turbulence // in «Turbulence Seminae», ed. P. Bernard, T. Ratio, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, p. 135–155, 1977.
3. Grobli W. Speciale Probleme uber die Bewegung geradlinigerparalleler Wirbelfaden // Vierteljahrsh. d. Naturforsch. Geselsch. 1877. V. 22. – P. 37–81, 129–165.
4. Новиков Е.А. Динамика и статистика системы вихрей // ЖЭТФ, 1975, т. 68, вып. 5, – С. 1868–1882.
5. Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. – М.: АН СССР, 1962. – 402 с. (Kirchhoff G. *Vorlesungen uber mathematische Physik: Mechanik*. – Teubner, 1876. – 464 p.)
6. Саффемен Ф.Дж. Динамика вихрей. – М.: Научный мир, 2000. – 376 с.
7. Новиков Е. А., Седов Ю. Б. Стохастические свойства системы четырех вихрей // ЖЭТФ, 1978, т. 75, вып. 3, – С. 868–876.
8. Зиглин С. Л. Неинтегрируемость задачи о движение четырех точечных вихрей // ДАН СССР, 1979, т. 250, № 6, – С. 1296–1322.
9. Aref H. Stirring by chaotic advection // J. Fluid. Mech. 1984. v.143. – P. 1–21.
10. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. – Киев.: Наукова Думка, 1993. – 280 с.
11. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959. – 470 с.
12. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 280 с.
13. V. V. Yanovsky, A. V. Tur, K. N. Kulik. Singularities Motion Equations in 2-Dimensional Ideal Hydrodynamics of Incompressible Fluid // Phys. Lett. A, 2009. V. 373. – P. 2484–2487.
14. Aref H. Motion of three vortices // Phys. Fluids 1988. v.31. №6. – P. 1392–1409.
15. К. Н. Кулик, А. В. Тур, В. В. Яновский. Взаимодействие точечного и дипольного вихря в несжимаемой жидкости // ТМФ. 2010. т. 162. № 3. – С. 459–480.
16. Stefan G. Llewellyn Smith. How do singularities move in potential flow?// Physica D. V. 2011. V. 240. – P. 1644–1651.
17. Sygne J. L. On the motion of three vortices // Can. J. Math. 1949. V. 1. – P. 257–270.
18. Aref H. Motion of three vortices // Phys. Fluids/ 1988. V.31. №6. – P. 1392–1409.
19. Tur A. V., Yanovsky V.V. Point vortices with a rational necklace: New exact stationary solutions of the two-dimensional Euler equation // Physycs of Fluids. 2004. V. 16. N. 8.– P. 2877–2885.

20. Castilla M. S. A. C., Moauro V., Negrini P., Oliva W. M. The four positive vortices problem – Regions of chaotic behavior and non-integrability // *Ann. de l'Institut Henri Poincaré – Phys. Theor.*, 1993. V. 59(1). – P. 99–115.
21. Castilla M. S. A. C., Moauro V., Negrini P. P., Oliva V. M. The non-intergability of the four positive vortices problem. – PhD Thesis, Dip. Mat. Universita, Trento, UTM, May 1992.
22. Koiller J., Carvalho S. P. Non-integrability of the four-vortex system: analytical proof // *Comm. Math. Phys.* 1989. V.120(4). – P. 643–652.
23. Постников М.И. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1979. Постников М.И. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
24. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. – М., Наука, 1981. – 798 с. (Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A. and Marichev O. J. Integrals and Series: Vol.2. – Spetcial Functions, Gordon and Breach Science Publ. 1986).
25. Tur A.V., Yanovsky V.V. Interaction of a dipole point vortex with flat boundary, arXiv:1204.4557v1 (physics. flu-dyn) 20 Apr 2012.
26. Tur A., Yanovsky V., Kulik K. Vortex structures with complex points singularities in the two-dimensional Euler equation. New exact solutions // *Physica D*. 2011. V. 240. – P. 1069–1079; arXiv:1201.5271v1.
27. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – Мир.: Москва, 1965. – 703 с.
28. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 792 с. (Batchelor G. K. An introduction to fluid mechanics. – Camb. Univ. Press. 1967).
29. Brown C. E., Michael W.H. Effect of leading-edge separation on the lift of a delta-wing // *J.Aerosp. Sci.* 1954. V. 21. – P. 690–694.
30. Newton P. K. The N-vortex problem: analitical techniques. – Springer-Verlag. N.Y. 2001. – 415 p.
31. Tkachenko V. M. O vichrevich reschetkach // *JETF* 1965. 49. 6(12). – P. 1875–1883.
32. Aref H. The numerical experiment in fluid mechanics // *J.Fluid Mech.* 1986. V. 173. – P. 15–41.
33. Crowdy D. A class of exact multipolar vortices // *Phys.Fluids* 1999. V.11, N 9. – P. 2556–2564.
34. Crowdy D. G. The construction of exact multipolar equilibria of the two-dimensional Euler equations // *Phys. Fluids*. 2002. V. 14(1). – P. 257–267.
35. Crowdy D. G. Polygonal N-vortex arraya: Stuart model // *Phys.Fluids*, 2003. V.15, N12. – P. 3710– 3717.
36. Stuart J. T. On finite amplitude oscillations in laminar mixing layer // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 29. – P. 417–440.
37. Козлов В. В. Общая теория вихрей. – РХД. Изд. дом «Удм. унив.» 1998. – 238 с.
38. Helmholtz H. Uber Integrate hydrodinamischen Gleichungen weiche den Wirbelbewegungen entsprechen // *J. rein, angew. Math.* 1858, V. 55, – P. 25–55. (Гельмгольц Г. Основы вихревой теории. – М.: Иж., ИКИ. 2002. – 82 с.)
39. Mallier R. and Maslowe S. A. A row of counter rotating vortices // *Phys.Fluids*. 1994. V. 5. – P. 1074–1075.
40. Forsyth A. R. Theory of Differential equations. – Dover Edition, New York. 1956. V. 6. – P. 1343.
41. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 749 с.
42. Stuart J. T. On finite amplitude ocsillations in laminar mixing layer // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 29, No. 3. – P. 417– 440.
43. Hartman P. Ordinary differetial equations. – N.Y. 1964. – 612 p.
44. Nemitsky V. V., and Stepanov V. V. Qualitative theory of differential equations. – N.J. Princeton. 1960.
45. Красносельский М.А. Векторные поля на плоскости. – М.: Физ.-Мат. лит., 1963. – 245 с.
46. "The Role of Coherent Structures in Modeling Turbulence and Mixing", Proc.of the Int.Conf., Madrid, Spain, 1980, Lecture Notes in Phys., 136, Springer-Verlag, 1981.— 394 p.

47. McWilliams J. C. The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 146. – P. 21.
48. Sommeria J. Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box, *J. Fluid Mech.* 1986. V. 170. – P. 139–168.
49. Shats M. G., Xia H., Punzmann H. Spectral condensation in plasmas and fluids and its role in low-to-high phase transitions in toroidal plasma // *Phys. Rev. E.* 2005. V. 71. 046409.
50. Shats M. G., Xia H., Punzmann H., Falkovich G. Suppression of Turbulence by Self-Generated and Imposed Mean Flows // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. 164502.
51. Couder Y., Basdevant C. Experimental and numerical study of vortex couples in two-dimensional flows // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 173. – P. 225–251.
52. Paret J., Tabeling P. Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy: Experimental observations // *Phys. of Fluids* 1998. V. 10, – P. 3126.
53. Molenaar D., Clercx H.J.H., van Heijst G.J.F. Angular momentum of forced 2D turbulence in a square no-slip domain // *Physica D.* 2004. V. 196. – P. 329–340.
54. Chertkov M., Connaughton C., Kolokolov I., Lebedev V. Dynamics of Energy Condensation in Two-Dimensional Turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. 084501.
55. Xia H., Shats M. G., Falkovich G. Spectrally condensed turbulence in thin layers // *Phys. of Fluids.* 2009. V.21. 125101.
56. Sommeria J., Meyers S. P., Swinney H. L. Laboratory simulation of Jupiter's Great Red Spot // *Nature, London.* 1988. V. 331. – P. 689.
57. Frisch U., She Z. S., Sulem P. L. Large-scale flow driven by the anisotropic kinetic alpha effect // *Physica D*, 1987. V. 28. – P. 382–392.
58. Moiseev S. S., Sagdeev R. Z., Tur A. V., Khomenko G. A., Yanovsky V. V. A theory of large-scale structure origination in hydrodynamic turbulence // *Sov. Phys. JETP* 1983. V. 58, – P. 1149–1157.
59. Moiseev S. S., Rutkevich P. B., Tur A. V., Yanovsky V. V. Vortex dynamos in a helical turbulent convection // *Sov. Phys. JETP.* 1988. V.67. – P. 294–299.
60. Lupyan E. A., Mazurov A. A., Rutkevich P. B., Tur A.V. Generation of large-scale vortices through the action of spiral turbulence of a convective nature // *Sov. Phys. JETP.* 1992. V. 75. – P. 833–838.
61. Khomenko G. A., Moiseev S. S., Tur A. V. The hydrodynamic alpha-effect in a compressible fluid, *J. Fluid Mech.* 1991. V. 225. – P. 355–369.
62. Krause F., Rudiger G. On the Reynolds stress in mean field hydrodynamics.1. Incompressible homogeneous isotropic turbulence // *Astron.Nachr.* 1974. V. 295. – P. 93–99.
63. Levina G. V., Moiseev S. S., Rutkevich P. B. Hydrodynamic alpha-effect in a convective system // *Advances in Fluid Mechanics.* 2000. V.25. – P. 110–161.
64. Tur A., Yanovsky V. Large-scale instability in hydrodynamics with stable temperature stratification driven by small-scale helical force / *arXiv:1204.5024v1*.
65. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability.* – Dover Pub.N.Y., 1961.
66. Tur A.V., Yanovsky V.V. Point vortices in two-fluid 2D-plasma hydrodynamics // *Phys. of Plasmas* / 2010. V.17. 112308.
67. Moiseev S.S., Sagdeev R.Z., Tur A.V., Yanovsky V.V. // *Sov. Phys. JETP.* 1983. V. 56(1). – P.117–123.
68. Tur A.V., Yanovsky V.V. Invariants in Dissipationless hydrodynamics media // *J. Fluid. Mech.* 1993. V.248. – P. 67–106.
69. Sagdeev R.Z., Moiseev S.S., Tur A.V., Yanovsky V.V. Problem of the strong turbulence and topological solitons, in book: «Nonlinear Phenomena in plasma and Hydrodynamics». – M.: Mir, 1986. – P. 137–182.

## ЧАСТЬ V

---

# ВЛИЯНИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ НА ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

*Н. Ф. Шульга, С. П. Фомин*

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»*

*НАН Украины,*

*Институт теоретической физики имени А. И. Ахиезера*

*ул. Академическая 1, Харьков, 61108, Украина.*

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,*

*пл. Свободы 4, Харьков, 61022, Украина*

Представлен краткий обзор результатов теоретических и экспериментальных исследований процесса тормозного излучения релятивистских электронов в аморфной среде в случае, когда многократное рассеяние частицы в веществе оказывает существенное влияние на излучение. Показано, что помимо известного эффекта Ландау-Померанчука-Мигдала при высоких энергиях имеет место также эффект подавления тормозного излучения в тонком слое вещества, существенно отличающийся по своим характеристикам от первого и являющийся прямым проявлением особенностей излучения «полуголого» электрона. Проведено сравнение результатов теоретических расчетов с данными недавних экспериментов, выполненных в СЛАК и ЦЕРН.

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема взаимодействия частиц большой энергии с веществом всегда привлекала к себе большое внимание как теоретиков, так и экспериментаторов. Связано это с тем, что при больших энергиях эффективность взаимодействия частицы с атомами среды может значительно отличаться от эффективности ее взаимодействия с изолированными атомами. Особый интерес в этой области занимает процесс излучения ультрарелятивистских электронов в веществе, поскольку при больших энергиях он развивается в большой, быстро растущей с энергией пространственной области вдоль импульса частицы. Эта область получила название длины когерентности процесса излучения. Если в пределах этой длины частица сталкивается со многими атомами вещества, то взаимодействие с каждым из них будет отличаться от взаимодействия с отдельным изолированным атомом и необходимо учитывать особенности взаимодействия налетающей частицы со всей совокупностью атомов. Впервые это четко было сформулировано М. Л. Тер-Микаеляном [1] при изучении излучения релятивистских частиц в кристаллах.

Важность этого замечательного, поначалу столь парадоксального явления, была вскоре оценена. Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчук на его основе показали [2], что в аморфной среде рост длины когерентности с энергией приводит к уменьшению тормозного излучения (эффект Ландау-Померанчука). Затем последовали открытия и других подобных эффектов в электродинамике и физике сильного взаимодействия (см., например, обзоры [3–7] и ссылки в них).

Взаимодействие частиц с атомами вещества в пределах длины когерентности может иметь как регулярный, так и стохастический характер.

Регулярное взаимодействие возможно при прохождении частицы через кристаллическую среду. Периодичность расположения атомов в кристаллической решетке может приводить к различным когерентным и интерференционным эффектам в излучении. На возможность существования таких эффектов было обращено внимание в начале 50-х годов в работах Б. Феретти [8], М. Л. Тер-Микаеляна [1] и Г. Юбералла [9] при теоретическом анализе процесса излучения ультрарелятивистских электронов в ориентированных кристаллах. Проведенное в этих работах рассмотрение данного процесса основывалось на использовании первого Борновского приближения квантовой электродинамики. При этом было показано, что при малых углах падения ультра релятивистских электронов на кристалл по отношению к одной из кристаллографических осей или плоскостей в спектре излучения должны появляться резкие максимумы с высокой интенсивностью и поляризацией излучения в них. Эти эффекты впоследствии были подтверждены во многих экспериментах на ускорителях электронов с энергией до нескольких ГэВ (см. обзоры [5, 7, 10, 11] и ссылки в них) и уже на протяжении многих лет они используются

для получения монохроматических и поляризованных пучков фотонов большой энергии для исследований в области ядерной физики [10–12].

Стохастический характер взаимодействия частицы с атомами вещества имеет место при ее прохождении через аморфную среду. Стохастичность в этом случае обусловлена многократным рассеянием на случайным образом расположенных атомах аморфного вещества. Влияние этого рассеяния на излучение впервые было отмечено в работах Ландау и Померенчука [2]. В этих работах было показано, что многократное рассеяние электронов большой энергии в пределах длины когерентности процесса излучения может привести к значительному уменьшению излучения в области малых частот. Эффект подавления излучения возникает, если средний квадрат угла многократного рассеяния на длине когерентности превысит квадрат характерного угла излучения релятивистского электрона. На основе предложенной в [2] теории данного эффекта, однако, удалось получить только качественные оценки его величины. Количественная теория данного эффекта была впоследствии развита А. Б. Мигдалом [13, 14] на основе предложенного им для этой задачи метода кинетического уравнения. Экспериментальные же исследования в этой области в течение длительного промежутка времени (до 90-х годов) практически не проводились ввиду отсутствия ускорителей электронов достаточно высокой энергии, требуемой для возникновения эффекта.

В 70-х годах наметились новые направления исследований в данной области, связанные с обнаружением того факта, что с ростом энергии частиц быстро нарушаются условия применимости отмеченных выше теорий. Так, анализ вклада второго [15] и высших порядков теории возмущений [16–18] в процесс когерентного излучения ультрарелятивистских электронов в кристалле показал, что условия применимости первого Борновского приближения для описания этого процесса быстро нарушаются с ростом энергии частиц и с уменьшением углов их падения на кристалл по отношению к одной из кристаллографических осей или плоскостей. В частности, эти условия нарушаются при возникновении явления каналирования быстрых заряженных частиц в кристалле. Это привело к необходимости развития новых подходов к построению теории взаимодействия частиц большой энергии с ориентированными кристаллами, справедливой в более широкой области, чем область применимости Борновской теории возмущений.

Кроме того, было обнаружено, что процесс излучения ультрарелятивистского электрона в тонком слое вещества может развиваться существенно иначе, чем в толстых мишенях. Такая ситуация имеет место, например, если длина когерентности процесса излучения становится большой по сравнению с толщиной мишени, причем, она возможна при взаимодействии частицы как с аморфными, так и кристаллическими мишенями [19].

Следует отметить, что при больших энергиях частиц длина когерентности процесса излучения может превысить не только расстояние между атомами в веществе, но и быть сравнимой с размерами самих физических установок и даже превышать их. При этом возникает проблема построения теории развития в пространстве и времени процесса излучения ультрарелятивистских электронов в условиях, когда они в течение длительного времени могут находиться в так называемом «полуголом» состоянии (см. по этому поводу работы [18–23]).

Отметим также, что с 70-х годов начали открываться новые возможности в проведении экспериментальных исследований процессов взаимодействия быстрых заряженных частиц с веществом, связанные как с созданием новых ускорителей частиц ультра больших энергий (SLAC, DESY, FNAL, CERN и др.), так и совершенствованием измерительной техники.

В настоящей работе дан краткий обзор некоторых последних результатов, полученных при исследовании влияния многократного рассеяния на излучение ультрарелятивистских электронов в тонких и толстых аморфных мишенях, а также их экспериментальной проверке на ускорителях СЛАК (Стенфорд, США) и ЦЕРН (Женева, Швейцария). Состояние дел в исследованиях по физике процесса излучения релятивистских электронов в ориентированных кристаллах отражено в обзорах и монографиях [7, 24–31].

Мы начинаем с введения понятия длины когерентности процесса излучения, которое естественным образом возникает в теории излучения релятивистских электронов в веществе. Рассмотрены несколько путей введения этого понятия, связанные с работами Г. Бете и В. Гайтлера [32], М. Л. Тер-Микаеляна [1, 5], Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчука [2].

Затем рассмотрена классическая теория эффекта Ландау-Померанчука в аморфных средах как в ее простейшей форме, данной авторами [2], так и в усовершенствованной форме, приданной ей А. Б. Мигдалом [13].

Значительное место в обзоре уделено теории влияния многократного рассеяния на излучение электронов большой энергии в тонких мишенях. Здесь излагаются как основные положения количественной теории эффекта, так и анализируется возможность использования асимптотических формул для описания процесса излучения в тонких мишенях. Особое внимание при этом обращено на анализ условий применимости полученных результатов и сравнительный анализ характеристик излучения в тонких мишенях с характеристиками излучения, связанными с режимами излучения Бете-Гайтлера и Ландау-Померанчука.

В обзоре приводятся также некоторые результаты последних экспериментальных исследований обсуждаемых эффектов, полученных на ускорителях СЛАК и ЦЕРН, а также обсуждается их соответствие теоретическим предсказаниям.

## РАЗДЕЛ 1.

# ДЛИНА КОГЕРЕНТНОСТИ ПРОЦЕССА ИЗЛУЧЕНИЯ

### 1.1. Возможность интерференционного эффекта при больших энергиях

Рассмотрим вначале физические причины, по которым взаимодействие электронов большой энергии с атомами в веществе может отличаться от взаимодействия с атомами, разнесенными на большие расстояния друг от друга. Здесь следует отметить, что даже сама постановка такого вопроса первоначально была весьма нетривиальной.

Об этом, в частности, свидетельствует дискуссия, возникшая в начале 50-х годов прошлого века между Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчуком с одной стороны, и Е. Л. Фейнбергом и М. Л. Тер-Микаеляном с другой стороны<sup>6</sup>.

А именно, в 1952 году Тер-Микаелян, аспирант ФИАН, подготовил под руководством своего руководителя Фейнберга кандидатскую диссертацию, посвященную интерференционному излучению ультрарелятивистских электронов в кристалле. Фейнберг договорился с Ландау об обсуждении полученных в этой работе результатов. В обсуждении принял участие также и Померанчук.

Тер-Микаелян начал свое сообщение с названия работы. Ландау сразу перебил его, уточнив, что речь, видимо, идет о частицах не очень большой энергии, ибо для интерференции необходимо, чтобы длина волны электрона была велика либо сравнима с постоянной решетки. Тер-Микаелян, однако, подтвердил, что он рассматривает интерференционный эффект в излучении для электронов большой энергии. Ландау возразил, что никакого интерференционного эффекта не может быть в этом случае, и обсуждать больше нечего. На этом, фактически, дискуссия завершилась. Ни Тер-Микаелян, ни Фейнберг в тот момент времени не нашли каких-либо аргументов в пользу существования эффекта.

Впоследствии, однако, участники дискуссии сообразили, в чем здесь дело, и каждый из них нашел свое объяснение возможности интерференционного эффекта в излучении при больших энергиях в веществе. Более того, каждое из этих объяснений послужило стимулом для развития новых направлений работ в данной области.

---

<sup>6</sup> Некоторые детали этой дискуссии описаны [33].

Сущность вопроса состояла в том, что вместо отмеченной выше де-Бройлевской длины волны электрона,  $\hbar/p$ , в теории процесса излучения электронов большой энергии в веществе появляется другая длина, ответственная за этот процесс. Она определяется соотношением [5, 7]

$$l_c = \frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m^2\omega}, \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon$  – энергия начального электрона;  $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$  – энергия конечного электрона,  $\omega$  – частота излученного фотона и  $m$  – масса электрона. Эта длина получила название длины когерентности процесса излучения. Она определяет продольный размер пространственной области, в пределах которой существенны интерференционные эффекты в излучении.

Длина  $l_c$  быстро растет с ростом энергии электрона и с уменьшением частоты излученного фотона. При достаточно больших  $\varepsilon$  и малых  $\omega$  она может не только превысить расстояние между атомами в веществе, но и достигнуть макроскопических размеров, сравнимых с размерами даже физических установок. Учитывая важность понятия длины когерентности  $l_c$  для процесса излучения ультрарелятивистского электрона и многочисленные проявления этой длины в физических процессах при высоких энергиях, рассмотрим более подробно некоторые физические причины, приводящие к возникновению такой длины.

## 1.2. Учет экранировки потенциала атома

Первые указания относительно существования длины (1.1), ответственной за процесс излучения релятивистского электрона, можно увидеть еще в работе Бете и Гайтлера [32], в которой рассматривалось влияние экранировки потенциала атома атомарными электронами на процесс тормозного излучения релятивистского электрона. Рассмотрение влияния этого фактора на процесс тормозного излучения в [32] основывалось на анализе законов сохранения энергии и импульса при излучении, согласно которым

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon' + \hbar\omega, \\ \vec{p} &= \vec{p}' + \hbar\vec{k} + \vec{q}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\vec{p}$  и  $\vec{p}'$  – импульсы начального и конечного электрона,  $\vec{k}$  – волновой вектор излученного фотона и  $\vec{q}$  – переданный импульс внешнему полю (атому). Из законов сохранения энергии и импульса вытекает, что излучение электрона в поле атома возможно при выполнении условия

$$q \geq q_{\min}, \quad (1.3)$$

где  $q_{\min}$  – минимальное значение переданного импульса, определяемое соотношением

$$q_{\min} = \delta = \hbar m^2 \omega / 2\varepsilon\varepsilon'. \quad (1.4)$$

Такому значению  $q_{\min}$ , согласно соотношению неопределенности, соответствуют расстояния

$$r_{\max} \sim \hbar / q_{\min} = 2\varepsilon\varepsilon' / m^2 \omega, \quad (1.5)$$

которые ответственны за процесс излучения электрона в поле атома (здесь и далее мы пользуемся системой единиц, в которой скорость света принята равной единице).

Бете и Гайтлером было показано, что если расстояния  $r_{\max}$  будут малы по сравнению с радиусом Томаса-Ферми экранирования потенциала атома  $R$  [34], то влиянием эффекта экранировки на излучение можно пренебречь, и излучение электрона в поле атома будет определяться только Кулоновской частью его потенциала. Для Кулоновского же потенциала  $U(r) = \frac{Ze|e|}{r}$ , как показано Бете и Гайтлером [32], дифференциальное сечение излучения имеет следующий вид:

$$\omega \frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{4Z^2 e^6}{m^2} \left( 1 + \left( \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) \left( \ln \frac{2\varepsilon\varepsilon'}{\hbar\omega m} - \frac{1}{2} \right), \quad (1.6)$$

где  $Z/e$  – заряд ядра атома.

При выполнении же условия

$$r_{\max} > R, \quad (1.7)$$

существенным для излучения становится учет экранировки потенциала атома атомными электронами, и, как отмечается в [7, 32], характерные расстояния, вносящие существенный вклад в излучение, ограничены радиусом экранировки потенциала атома. Благодаря этому эффекту, сечение излучения электрона в поле экранированного потенциала Кулона оказывается значительно меньшим, чем сечение излучения электрона в кулоновском поле атома, когда эффект экранировки отсутствует. Дифференциальное сечение излучения в этом случае определяется следующим соотношением:

$$\omega \frac{d\sigma_{BH}}{d\omega} = \frac{4Z^2 e^6}{m^2} \left[ \left( 1 + \left( \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) \ln \frac{mR}{\hbar} + \frac{1}{9} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right]. \quad (1.8)$$

Длина  $r_{\max}$  фактически совпадает с длиной когерентности процесса излучения  $l_c$ , которая быстро растет с ростом энергии электрона. Заметим в этой связи, что неравенство (1.7) даже для  $\hbar\omega \sim \varepsilon$  уже выполняется при энергиях электронов в несколько десятков МэВ. Поэтому, начиная с таких энергий электронов, требуется учет влияния на излучение экранировки потенциала атома.

### 1.3. Введение длины когерентности Тер-Микаеляном

Тер-Микаелян при анализе причин, приводящих к интерференционному эффекту в излучении для ультрарелятивистских электронов в кристалле, обратил внимание на то, что следует различать продольные и поперечные расстояния, ответственные за формирование процесса излучения электронов большой энергии в кристалле [1]. А именно, он показал, что характерные значения поперечных расстояний (прицельных параметров), вносящие основной вклад в излучение при высоких энергиях по порядку величины определяются радиусом экранировки потенциала отдельного атома кристаллической решетки, тогда как на характерные значения продольных расстояний эффект экранировки потенциала атома никакого влияния не оказывает. Иными словами, характерные значения продольных расстояний, вносящие основной вклад в излучение ультрарелятивистских электронов в кристалле, определяются по порядку величины длиной когерентности процесса излучения (1.1) как при учете экранировки потенциала каждого атома решетка, так и в пренебрежении этим эффектом (см. рис. 1.1). К такому выводу Тер-Микаелян пришел при анализе законов сохранения энергии и импульса при излучении (1.2) и структуры формулы первого борновского приближения квантовой электродинамики для дифференциального сечения излучения электронов в кристалле, записанной в представлении переданных внешнему полю импульсов.

А именно, в таком представлении в первом борновском приближении квантовой электродинамики формула для дифференциального сечения излучения имеет следующую структуру в области переданных импульсов  $q_{\perp} \leq mc$ , вносящей основной вклад в сечение излучения

$$d\sigma \sim \frac{d\omega}{\omega} \int d^2 q_{\perp} \int_{\delta}^{\infty} dq \frac{q_{\perp}^2}{q_{\parallel}^2} |U_{\vec{q}}|^2 \quad (1.9)$$

где  $\vec{q}_{\perp}$  и  $q_{\parallel}$  – компоненты переданного импульса, ортогональная и параллельная импульсу начального электрона  $\vec{p}$ , и  $U_{\vec{q}}$  – Фурье-компонент потенциала совокупности атомов кристаллической решетки. Согласно этой формуле, основной вклад в интеграл по  $q_{\perp}$  вносят значения  $q_{\perp} \sim \hbar/R$ , тогда как характерные значения продольной составляющей переданного импульса при больших значениях энергии электрона, когда  $\hbar/R \gg \delta$ , составляют по порядку величины  $q_{\parallel eff} \sim \delta$ . Длина же

$$l \sim \hbar/q_{\parallel eff}, \quad (1.10)$$

соответствующая таким значениям продольной составляющей импульса электрона по порядку величины совпадает с длиной когерентности процесса излучения (1.1). Таким образом, независимо от экранировки потенциала отдельного атома среды, продольные импульсу расстояния, ответственные за процесс излучения ультрарелятивистского электрона, по порядку величины определяются длиной когерентности (1.1).

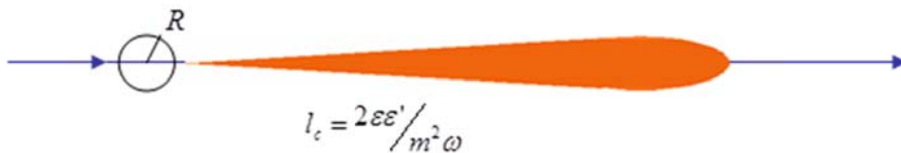


Рис. 1.1. Длина когерентности процесса излучения

Длина  $l_c$  быстро растет с ростом энергии электрона. Если эта длина превысит расстояние между атомами в кристалле, требуется учитывать интерференционный эффект в его взаимодействии с атомами кристалла, находящимися в пределах длины когерентности  $l_c$ . При этом в зависимости от ориентации кристалла относительно падающего пучка возможны различные когерентные и интерференционные эффекты в излучении, приводящие как к усилению, так и ослаблению излучения из кристалла по сравнению с излучением из аморфной среды (см., например, [5, 7]). Так при падении электрона под малым углом  $\psi$  к одной из кристаллических цепочек атомов (см. рис. 1.2) имеет место когерентный эффект в излучении в области малых частот. Происходит это благодаря сложению амплитуд волн, которые излучаются электроном при последовательных

столкновениях с атомами цепочки. Из-за корреляций между последовательными столкновениями электрона с атомами цепочки сдвиг фаз излученных волн при столкновении с каждым атомом в этом случае мал по сравнению с единицей. Благодаря этому происходит значительное усиление излучения из кристалла по сравнению с излучением из аморфной среды (см. рис. 1.2).

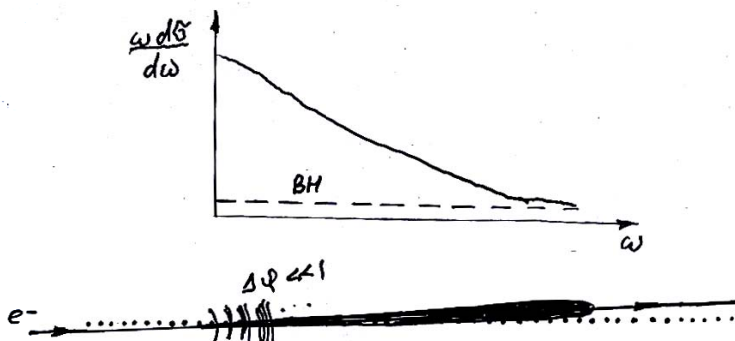


Рис. 1.2. Когерентное излучение быстрого электрона в поле отдельной цепочки атома

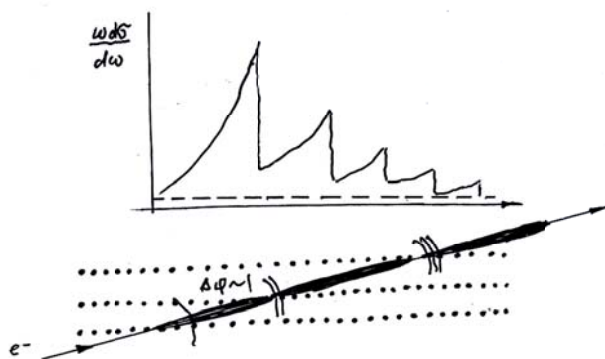


Рис. 1.3. Интерференционный эффект при излучении релятивистского электрона в кристалле

Если же электрон движется в кристалле под малым углом к одной из кристаллографических осей вдоль одной из кристаллических плоскостей (см. рис. 1.3), то он испытывает периодические столкновения с различными цепочками атомов, образующими данную плоскость. В этом случае наряду с когерентным эффектом в излучении при столкновении с каждой цепочкой атомов, возможен интерференционный эффект в излучении при столкновении с различными цепочками атомов. Послед-

ний эффект имеет место, если сдвиг фаз волн, излученных при последовательных столкновениях с различными цепочками атомов, составляет  $\Delta\varphi \sim 2\pi n$ , где  $n$  – целые числа. Это ведет к появлению резких максимумов в спектре излучения (см. рис. 1.3).

#### 1.4. Интерпретация Ландау и Померанчука

Рассмотрение Ландау и Померанчука основывалось на анализе в рамках классической электродинамики фазовых соотношений для электромагнитных волн, излученных электроном с различных участков пути вдоль направления движения электрона [2]. Это позволило не только определить длину, в пределах которой существенны интерференционные эффекты в излучении, но и установить влияние на эту длину ряда факторов, таких как многократное рассеяние электронов в среде и диэлектрические свойства среды. Учет этих факторов оказался весьма важным при изучении излучения электронов большой энергии даже в аморфной среде. С тем, чтобы показать это, рассмотрим излучение ультрарелятивистского электрона в аморфной среде на основе классической электродинамики.

Спектрально-угловая плотность излучения электрона, движущегося во внешнем поле по траектории  $\vec{r}(t)$ , определяется в классической электродинамике следующей формулой (см., например, [7, 35, 36])

$$\frac{dE}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \left| \vec{k} \times \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{v}(t) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r}(t))} \right|^2, \quad (1.11)$$

где  $\vec{k}$  – волновой вектор излученной волны и  $\vec{v}(t)$  – скорость электрона. Для частиц большой энергии отклонение траектории электрона в веществе от прямолинейной мало. При этом в первом приближении по этому отклонению зависимость продольной и поперечной составляющей скорости электрона от времени может быть представлена в виде

$$\vec{v}(t) \approx \vec{v}_0 \left( 1 - \frac{1}{2} v_{\perp}^2(t) \right) + \vec{v}_{\perp}(t), \quad (1.12)$$

где  $\vec{v}_0$  – начальное значение скорости электрона и  $\vec{v}_{\perp}(t)$  – поперечная составляющая его скорости к моменту времени  $t$ . Для траектории электрона в этом случае находим

$$\vec{r}(t) \approx \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \vec{v}_0 \cdot \frac{1}{2} \int_0^t dt' v_{\perp}^2(t') + \int_0^t dt' \vec{v}_{\perp}(t'), \quad (1.13)$$

где  $\vec{r}_0$  – значение траектории  $\vec{r}(t)$  при  $t = 0$  (для простоты далее полагаем  $\vec{r}_0 = 0$ ).

Траектория электрона в аморфной среде вследствие многократного рассеяния на различных атомах является случайной. Поэтому формула (1.11) должна быть усреднена по этим случайным траекториям. Точное проведение такой процедуры оказалось весьма затруднительным ввиду того, что случайная величина  $\vec{v}_{\perp}(t)$  входит в (1.11) как в предэкспоненциальные члены, так и в фазу экспоненты. С целью получения качественных оценок Ландау и Померанчук применили процедуру усреднения отдельно для предэкспоненциальных членов и для фазы экспоненты. При этом для среднего значения фазы они пришли к следующему выражению:

$$\langle \Delta \varphi(t) \rangle = (\omega - \vec{k} \vec{v}_0) t + \frac{k v_0}{2} \int_0^t dt' \langle v_{\perp}^2(t') \rangle. \quad (1.14)$$

При выводе этого соотношения учтено, что в аморфной среде  $\langle \vec{v}_{\perp}(t) \rangle = 0$ . Для малых углов излучения  $\theta \ll 1$  и  $|\vec{k}| = \omega$  соотношение (1.12) приобретает следующий вид:

$$\langle \Delta \varphi(t) \rangle \approx \frac{\omega}{2\gamma^2} \left( t + \gamma^2 \int_0^t dt' \langle v_{\perp}^2(t') \rangle + \gamma^2 \theta^2 \cdot t \right), \quad (1.15)$$

где  $\gamma = \varepsilon / m$  – Лоренц-фактор электрона.

Величина  $\langle v_{\perp}^2(t) \rangle$  представляет собой среднее значение квадрата угла многократного рассеяния электрона в аморфной среде, определяемое соотношением [5, 7]

$$\langle v_{\perp}^2(t) \rangle = \overline{\theta_t^2} = q \cdot t, \quad (1.16)$$

где  $q = \varepsilon_s^2 / L_R \cdot \varepsilon^2$ ,  $\varepsilon_s^2 = 4\pi m^2 / e^2$  и  $L_R$  – радиационная длина.

С учетом (1.16) находим, что

$$\langle \Delta \varphi_t \rangle \approx \frac{\omega}{2\gamma^2} t \left( 1 + \gamma^2 \theta^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \overline{\theta_t^2} \right) \quad (1.17)$$

Интерференционный эффект в излучении должен проявляться при  $\langle \Delta \varphi_t \rangle \lesssim 1$ . Поэтому интервал времени  $\Delta t$ , в течение которого этот эффект существенен, определяется из соотношения

$$\Delta t = \frac{2\gamma^2/\omega}{1 + \gamma^2\theta^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\overline{\theta_{\Delta t}^2}}. \quad (1.18)$$

Данное соотношение представляет собой уравнение для определения  $\Delta t$ . При  $\gamma^2\overline{\theta_{\Delta t}^2} \ll 1$  для  $\theta = 0$  оно приводит к выражению, совпадающему с длиной когерентности процесса излучения (1.1).

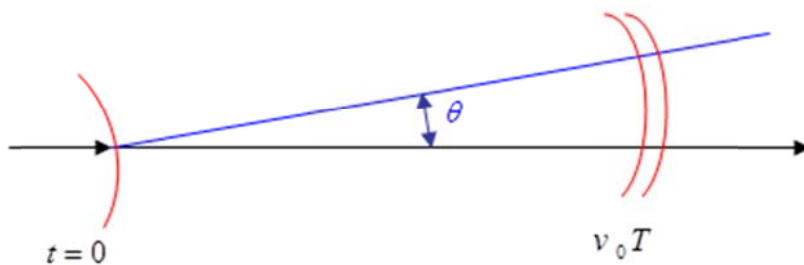


Рис. 1.4. Интерференция электромагнитных волн, излученных релятивистским электроном с различных участков пути [37]

Возникновение интерференционного эффекта в излучении на больших расстояниях вдоль направления движения электрона в этом случае можно проиллюстрировать следующим образом [37] (см. рис. 1.4).

Пусть электрон в моменты времени  $t=0$  и  $t=T$  испускает электромагнитную волну под малым углом  $\theta$  к направлению своего движения. Тогда, если движение электрона близко к прямолинейному, то сдвиг фаз этих электромагнитных волн будет определяться соотношением

$$\Delta \varphi = (\omega - \vec{k}\vec{v}_0)T. \quad (1.19)$$

В области малых углов излучения  $\theta$  это соотношение приобретает следующий вид

$$\Delta \varphi = (\omega / 2\gamma^2) (1 + \gamma^2\theta^2) T. \quad (1.20)$$

При этом значительный интерференционный эффект в излучении будет иметь место, если  $\Delta \varphi \sim 1$ . Отсюда находим, что интерферен-

ционный эффект в излучении будет проявляться на больших расстояниях вдоль направления движения электрона

$$l = v_0 T \approx \frac{2\gamma^2}{\omega} \frac{1}{1 + \gamma^2 \theta^2}, \quad (1.21)$$

которые значительно превосходят длину излученной волны  $\lambda = 1/\omega$ .

Если же  $\gamma^2 \overline{\theta_{\Delta t}^2} \gg 1$ , то, согласно (1.18), величина  $\Delta t$  оказывается меньшей, чем длина  $l_c$ . Таким образом, многократное рассеяние электронов большой энергии в аморфной среде оказывает влияние на интерференционные свойства излучения. Благодаря этому, как показано в [2], происходит уменьшение излучения ультрарелятивистских электронов в аморфной среде по сравнению с соответствующим результатом Бете и Гайтлера.

## РАЗДЕЛ 2.

### ЭФФЕКТ ЛАНДАУ – ПОМЕРАНЧУКА–МИГДАЛА

При движении в веществе быстрый электрон последовательно сталкивается с различными атомами среды. Если при этом длина когерентности процесса излучения (1.1) будет мала по сравнению с длиной свободного пробега между его последовательными столкновениями с различными атомами, то излучение на этих атомах можно рассматривать как независимое. При этом в аморфной среде спектральная плотность излучения релятивистского электрона будет определяться следующей формулой:

$$\frac{dE_{BH}}{d\omega} = L n \omega \frac{d\sigma_{BH}}{d\omega}, \quad (2.1)$$

где  $L$  – толщина мишени,  $n$  – плотность атомов в среде и  $d\sigma_{BH}/d\omega$  – сечение Бете-Гайтлера излучения электрона в поле отдельного атома среды (см. формулу (1.8)). Здесь и далее мы пользуемся системой единиц, в которой постоянная Планка принята равной единице.

В теории взаимодействия частиц большой энергии с веществом эта формула с логарифмической точностью обычно представляется в виде [7, 38, 39]

$$\frac{dE_{BH}}{d\omega} = \frac{4}{3} \frac{L}{L_R} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{\varepsilon \varepsilon'} \right), \quad (2.2)$$

где  $L_R$  – радиационная длина, определяемая соотношением

$$\frac{1}{L_R} = \frac{4Z^2 e^6 n}{m^2} \ln mR. \quad (2.3)$$

Длина когерентности процесса излучения  $l_c$ , однако, быстро возрастает с ростом энергии электрона и с уменьшением частоты излучаемого фотона  $\omega$ . Ландау и Померанчук обратили внимание на то, что если в пределах этой длины электрон будет сталкиваться с многими атомами среды, то необходим учет интерференционного эффекта в излучении электрона на этих атомах, а также влияния на этот эффект многократного рассеяния частицы в среде. А именно, они показали, что если среднеквадратичное значение угла многократного рассеяния электрона в пределах длины когерентности излучения  $\sqrt{\theta^2(l_c)}$  превысит величину характерного угла излучения релятивистского электрона  $\theta_\gamma \sim \gamma^{-1}$ , то спектральная плотность излучения будет меньше, чем результат, даваемый формулой Бете-Гайтлера (2.2). При выполнении же противоположного условия, т. е. при  $\sqrt{\theta^2(l_c)} < \theta_\gamma$ , несмотря на большое число столкновений электрона с атомами среды в пределах длины когерентности  $l_c$ , спектральная плотность излучения совпадает с соответствующим результатом Бете и Гайтлера (2.2).

С тем, чтобы показать это, Ландау и Померанчук воспользовались упрощенной процедурой усреднения классической формулы для спектральной плотности излучения (1.11) по многократному рассеянию электрона в аморфной среде [2]. Эта процедура усреднения заключалась в разложении входящих в (1.11) величин по малым углам рассеяния релятивистского электрона в веществе и в замене среднего значения от синуса на синус от среднего значения. В результате им удалось оценить спектральную плотность излучения быстрых электронов в аморфной среде при выполнении условия  $\gamma^2 \overline{\theta^2(l_c)} \gg 1$ , когда многократное рассеяние оказывает значительное влияние на излучение [2]:

$$\frac{dE_{LP}}{d\omega} = \frac{e^2}{2} \sqrt{\frac{3\omega q}{2\pi}} L. \quad (2.4)$$

где  $q$  – средний квадрат угла многократного рассеяния на единице пути (см. формулу (1.16)).

Сравнивая выражение (2.4) с формулой Бете-Гайтлера (2.2) мы видим, что при выполнении условия  $\gamma^2 \overline{\theta^2}(l_c) \gg 1$ ,

$$\frac{dE_{LP}}{d\omega} \ll \frac{dE_{BH}}{d\omega} \quad (2.5)$$

Таким образом, Ландау и Померанчук показали, что характер излучения электронов большой энергии в аморфной среде существенным образом изменяется при  $\gamma^2 \overline{\theta^2}(l_c) \gg 1$  по сравнению с характером излучения, определяемым формулой Бете и Гайтлера (2.2), согласно которой излучение при столкновении электронов с различными атомами среды происходит независимым образом.

Отметим, что формула (2.4) является только оценочной. Более того, используемая процедура вычислений не позволила Ландау и Померанчуку воспроизвести результат Бете и Гайтлера в области его применимости. Связано это как с некорректной процедурой усреднения общей формулы (1.11) по многократному рассеянию частицы в среде, так и с тем обстоятельством, что при разложении в (1.11) по малым углам рассеяния были отброшены члены того же порядка малости, что и оставленные. Однако, несмотря на это, формула (2.4) на качественном уровне правильно воспроизводит основные закономерности влияния многократного рассеяния на излучение электронов в веществе при  $\gamma^2 \overline{\theta^2}(l_c) \gg 1$ .

Количественная теория влияния многократного рассеяния на излучение релятивистских электронов в аморфной среде была разработана Мигдалом [3]. Эта теория основана на применении к данной задаче метода кинетического уравнения. Мигдал получил следующую формулу для спектра излучения электрона в аморфной среде в области малых частот  $\omega \ll \varepsilon$ :

$$\frac{dE}{d\omega} = \left( \frac{dE}{d\omega} \right)_0 \Phi_M(s), \quad (2.6)$$

где  $(dE/d\omega)_0$  – спектр излучения без учета влияния многократного рассеяния на излучение (этот спектр совпадает с логарифмической точностью с соответствующим результатом Бете и Гайтлера (2.2)) и  $\Phi_M(s)$  – полученная Мигдалом функция, которая описывает влияние многократного рассеяния на излучение:

$$\Phi_M(s) = 24s^2 \left( \int_0^\infty dt \coth t e^{-2st} \sin 2st - \frac{\pi}{4} \right). \quad (2.7)$$

Параметр  $s$  определяется следующим выражением:

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2\omega_{LPM}}}, \quad (2.8)$$

где

$$\omega_{LPM} = \frac{16\pi Z^2 e^4 n}{m^4} \ln(mR). \quad (2.9)$$

Величина  $\omega_{LPM}$  определяет область энергий излучаемых гамма-квантов, начиная с которой с уменьшением  $\omega$  многократное рассеяние оказывает значительное влияние на излучение.

Функция Мигдала близка к единице при  $s > 1$ , т.е. при  $\omega > \omega_{LPM}$ . Спектр излучения (2.6) в этом случае практически совпадает с соответствующим результатом Бете и Гайтлера (2.2).

Если же  $s \ll 1$ , то

$$\Phi_M(s) \approx 6s. \quad (2.10)$$

Интенсивность излучения в этом случае оказывается гораздо меньшей, чем результат, даваемый формулой Бете и Гайтлера. График функции Мигдала при произвольных значениях параметра  $s$  представлен на рис. 2.1.

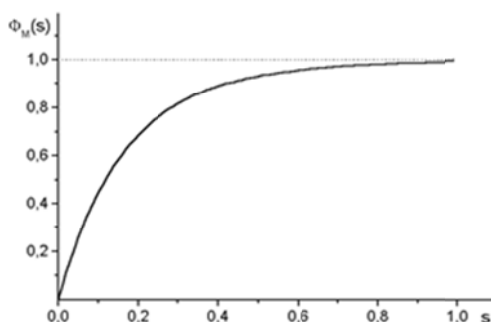


Рис. 2.1. График функции Мигдала (2.7)

Формула (2.6) с асимптотикой (2.10) отличается от качественного результата Ландау и Померанчука (2.4) только численным коэффициентом. Учитывая важный вклад А. Б. Мигдала в теорию рассматриваемого эффекта, этот эффект получил в мировой литературе название эффекта Ландау–Померанчука–Мигдала (ЛПМ-эффекта).

Развитию теории данного эффекта и используемого в ней метода кинетического уравнения в дальнейшем было посвящено большое число

работ, в которых совершенствовались детали математического описания эффекта и проводился учет ряда других факторов, оказывающих влияние на тормозное излучение электронов в веществе, таких как эффект отдачи при излучении, влияние поляризации среды, поглощение фотонов и другие (см. обзоры и монографии [5, 7, 39–43], посвященные данной теме, и ссылки в них).

Заметим, что количественная теория ЛПМ-эффекта может быть развита и на основе метода Ландау и Померанчука, если в последнем выполнить правильно процедуру разложения спектральной плотности излучения (1.11) по малым углам рассеяния частицы в веществе и корректно провести процедуру усреднения полученного выражения по случайным траекториям электрона в среде. Это было сделано в работах [44, 45] на основе метода функционального интегрирования (метода интегрирования по случайным траекториям). Полученный при этом результат полностью совпал с результатом Мигдала (2.6).

## РАЗДЕЛ 3. ИЗЛУЧЕНИЕ В ТОНКОМ СЛОЕ ВЕЩЕСТВА

Основной результат теории Мигдала ЛПМ-эффекта (2.6) был получен в предположении, что излучение с различных участков пути частицы в веществе является однородным. Это находит свое отражение в наличии линейной зависимости спектральной плотности излучения от толщины мишени. Реализация такой ситуации соответствует случаю достаточно толстой мишени, когда ее толщина  $L$  велика по сравнению с длиной когерентности процесса тормозного излучения  $l_c$ . При достаточно больших энергиях электронов и малых энергиях излучаемых фотонов, однако, может быть выполнено и противоположное условие

$$l_c \gg L, \quad (3.1)$$

при котором длина, на которой развивается процесс излучения, велика по сравнению с толщиной мишени (см. рис. 3.1). Этот случай представляет особый интерес, так как при выполнении условия (3.1) формирование излучения происходит на длине, которая значительно превосходит размеры пространственной области действия на электрон внешнего поля, и требуется учет интерференционного эффекта в излучении при его взаимодействии со всеми атомами среды. Иными словами, при выполнении условия (3.1) взаимодействие частицы с мишенью должно рассматриваться как с целым объектом. Благодаря этим особенностям, как будет показано ниже, существенно изменяются многие закономерности процесса излучения по сравнению с закономерностями в случаях

Бете-Гайтлеровского режима излучения и эффекта Ландау-Померанчука. При этом, в частности, линейная зависимость спектральной плотности излучения от толщины мишени может смениться на более слабую логарифмическую зависимость. Это, в свою очередь, означает, что с ростом толщины мишени число столкновений электрона с атомами среды увеличивается, а вот излучение при этом практически не добавляется.

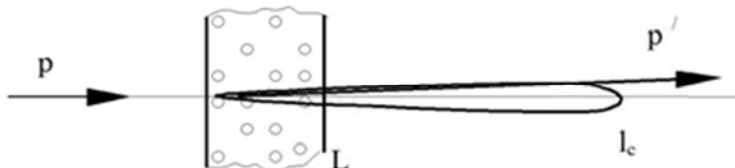


Рис. 3.1. Излучение быстрых электронов в тонком слое вещества

Обратим внимание далее на некоторые особенности процесса излучения ультрарелятивистского электрона при выполнении условия (3.1). Процесс излучения в этом случае может быть рассмотрен на основе различных методов, таких как метод кинетического уравнения [46], классическая теория излучения [19, 47], теорема о факторизации сечения излучения [48] и др. [49–53]. Мы остановимся ниже на втором из этих методов, так как он позволяет наиболее простым способом понять существо рассматриваемой проблемы и получить количественные результаты, позволяющие проанализировать экспериментальные данные.

В классической электродинамике спектрально-угловая плотность излучения определяется формулой (1.11). Входящий в эту формулу интеграл

$$\vec{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot \vec{v}(t) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r}(t))} \quad (3.2)$$

посредством интегрирования по частям может быть представлен следующим виде:

$$\vec{I} = i \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r}(t))} \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}(t)}{\omega - \vec{k}\vec{v}(t)}. \quad (3.3)$$

Такое представление вектора  $\vec{I}$  является довольно удобным при рассмотрении излучения в локализованных внешних полях, так как подинтегральная функция отлична от нуля только в области, где на частицу действует внешнее поле.

Если же в области действия на частицу внешнего поля фазовый фактор в экспоненте  $\exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r}(t))]$  мал по сравнению с единицей, то эта экспонента в (3.3) может быть заменена на единицу и тогда

$$\bar{I} \approx i \left( \frac{\vec{v}'}{\omega - \vec{k}\vec{v}'} - \frac{\vec{v}}{\omega - \vec{k}\vec{v}} \right), \quad (3.4)$$

где  $\vec{v}$  и  $\vec{v}'$  – скорости электрона до и после взаимодействия с локализованным внешним полем.

При высоких энергиях возможность пренебрежения фазовым фактором в экспоненте в выражении (3.3) соответствует выполнению условия (3.1). Действительно, при высоких энергиях типичные значения углов рассеяния частицы в веществе малы по сравнению с единицей. В этом случае в первом приближении по углу рассеяния скорость частицы и ее траекторию в веществе можно представить в виде (1.12) и (1.13). При этом среднее значение фазы в экспоненте (3.3) в области действия на частицу внешнего поля определяется соотношением (1.7) при значении  $t = L$ . Отсюда находим, что при выполнении условия (3.1) данная фаза мала и экспоненту в (3.3) можно заменить на единицу.

Подставляя (3.4) в (1.11), и учитывая, что при высоких энергиях характерные значения углов рассеяния электрона в тонкой мишени  $\theta_e$  малы, получим после интегрирования по углам излучения следующее выражение для спектральной плотности излучения электрона в тонком слое вещества:

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{2e^2}{\pi} \left[ \frac{2\xi^2 + 1}{\xi\sqrt{\xi^2 + 1}} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) - 1 \right], \quad (3.5)$$

где  $\xi = \gamma\theta_e/2$ . Отметим, что входящий в эту формулу параметр  $\xi$  представляет собой по порядку величины отношение угла рассеяния частицы мишенью  $\theta_e$  к характерному значению угла излучения релятивистской частицы  $\theta_\gamma \sim \gamma^{-1}$ .

Формула (3.5) показывает, что при выполнении условия (3.1) спектральная плотность излучения определяется только углом рассеяния частицы и не зависит от деталей ее траектории внутри мишени. Поэтому, формула (3.5) может быть использована для расчетов излучения в различных мишенях, таких как тонкая аморфная пластинка, ориентированный кристалл, локализованное внешнее поле. Необходимо только чтобы продольный размер мишени был мал по сравнению с длиной когерентности. Различие между процессами излучения в этих случаях будет определяться только функцией распределения рассеянных мишенью электронов по углам  $f(\theta_e, L)$ , с которой должна быть усреднена формула (3.5) [19]

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega} \right\rangle = \int d^2\theta_e \cdot f(\theta_e, L) \cdot \frac{dE(\theta_e)}{d\omega}, \quad (3.6)$$

где  $\vec{\theta}_e = (\vartheta_x, \vartheta_y)$  – двумерный угол рассеяния частицы мишенью в плоскости, ортогональной начальной скорости электрона  $\vec{v}$ .

При прохождении быстрых электронов сквозь тонкий слой аморфного вещества функция распределения частиц по углам рассеяния определяется формулой Бете-Мольер [54, 55]:

$$f(\theta_e, L) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \eta d\eta J_0(\eta\theta_e) \cdot \exp\left(-nL \int_0^\infty \chi d\chi \sigma(\chi) [1 - J_0(\chi\eta)]\right), \quad (3.7)$$

где  $\sigma(\chi)$  – сечение упругого рассеяния электрона в поле отдельного атома мишени.

Обратим внимание на некоторые особенности процесса излучения электронов в тонком слое аморфного вещества при различных толщинах мишени. С этой целью отметим, что формула (3.7) учитывает как многократное, так и однократное рассеяние частицы на большие углы. При  $L \rightarrow 0$ , когда влиянием многократного рассеяния на излучения можно пренебречь, формула (3.7) полностью воспроизводит результат Бете и Гайтлера (2.2) для относительно мягкой области спектра излучения  $\omega \ll \varepsilon$ .

Анализ формулы (3.6) показывает [7, 19], что результат Бете и Гайтлера (2.2) остается в силе и при выполнении условия  $\gamma^2 \overline{\theta_e^2} \ll 1$ , где  $\overline{\theta_e^2}$  – среднее значение квадрата угла рассеяния электронов мишенью,

$$\overline{\theta_e^2} = \int d^2\theta_e \theta_e^2 f(\theta_e, L). \quad (3.8)$$

Связано это со следующим асимптотическим поведением формулы (4.5) в области малых и больших значений углов рассеяния:

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{2e^2}{3\pi} \begin{cases} 4\xi^2 & , \quad \xi \ll 1 \\ 3\ln(4\xi^2) & , \quad \xi \gg 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Заменяя в этих формулах  $\theta_e^2$  на среднее значение квадрата угла рассеяния частицы мишенью  $\overline{\theta_e^2}$ , приходим к следующим оценкам для среднего значения спектральной плотности излучения:

$$\frac{dE}{d\omega} \sim \frac{2e^2}{3\pi} \begin{cases} \gamma^2 \overline{\theta_e^2} & , \quad \gamma^2 \overline{\theta_e^2} \ll 1 \\ 3 \ln(\gamma^2 \overline{\theta_e^2}) & , \quad \gamma^2 \overline{\theta_e^2} \gg 1 \end{cases} \quad (3.10a)$$

$$(3.10b)$$

Эти соотношения показывают, что при выполнении условия  $\gamma^2 \overline{\theta_e^2} \ll 1$  среднее значение спектральной плотности излучения совпадает с (логарифмической точностью) с соответствующим результатом Бете и Гайтлера, характерным для которого является линейная зависимость спектра излучения от толщины мишени.

С ростом толщины мишени, однако, увеличивается среднее значение квадрата угла многократного рассеяния электрона мишенью. При этом нарушается условие  $\gamma^2 \overline{\theta_e^2} \ll 1$  и, согласно (3.10), происходит изменение характера излучения частицы в веществе, при котором линейная зависимость спектра излучения от  $L$  сменяется более слабой логарифмической зависимостью. Такое изменение характера излучения электрона в тонком слое вещества происходит при выполнении такого же условия, что и условие возникновения ЛПМ-эффекта подавления излучения в толстой мишени. Вместе с тем, проявления этих эффектов при  $\gamma^2 \overline{\theta_e^2} \gg 1$  существенно различаются. Так, в случае ЛПМ-эффекта спектр излучения зависит от частоты излученного фотона и всегда имеет линейную зависимость от толщины мишени, тогда как, согласно (3.10), спектр излучения не зависит от  $\omega$  и весьма слабо (логарифмически) зависит от толщины мишени  $L$ . Отметим, однако, что от  $\omega$  зависят условия применимости формулы (4.5). А именно, эта формула справедлива при выполнении условия  $l_c \gg L$ , тогда как формула Мигдала (3.6) для спектра излучения справедлива при выполнении противоположного условия.

Обсуждаемые выше зависимости спектральной плотности излучения от толщины мишени иллюстрирует рис. 3.2, на котором представлены зависимости, определяемые формулами Бете и Гайтлера (2.2), Мигдала (2.6) и формулой (3.6) для электронов с энергией 150 ГэВ, проходящих через танталовую мишень, при различных значениях энергий излученных фотонов ( $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ ). На этом рисунке стрелками отмечены толщины  $L = l_c(\omega_i)$ , при которых имеет место переход от области применимости формулы (3.6) к области применимости формулы Мигдала (2.6). Вычисления выполнены для значений  $\omega_1 = 800$  МэВ,  $\omega_2 = 350$  МэВ и  $\omega_3 = 150$  МэВ. По оси абсцисс отложена толщина мишени в процентах от радиационной длины  $L_R$ . Приведенные графики показывают, что, изменяя толщину мишени, можно наблюдать проявление трех различных механизмов излучения релятивистских электронов в аморфной мишени.

Полученные результаты показывают, что при выполнении условия  $\gamma^2 \overline{\theta_e^2} \gg 1$  спектральная плотность излучения практически не зависит от толщины мишени  $L$ . Этот результат может показаться весьма странным, так как с ростом  $L$  увеличивается число столкновений электронов с атомами среды, но излучение при этом, согласно (3.10), практически не добавляется. Такое поведение характеристик излучения может быть объяснено особенностями развития в пространстве и времени процесса излучения ультрарелятивистского электрона после его рассеяния в локализованном внешнем поле на большой угол. После такого рассеяния электрон в течение длительного промежутка времени может находиться в «полуголом» состоянии со значительно подавленными низкочастотными Фурье-компонентами в окружающем его собственном Кулоновском поле по сравнению с соответствующими Фурье-компонентами поля частицы до рассеяния. Если при этом электрон, находящийся в «полуголом» состоянии, затем рассеивается на других центрах, то он практически ничего не излучает (более детальное рассмотрение этого вопроса см. в работах [6, 18–23]).

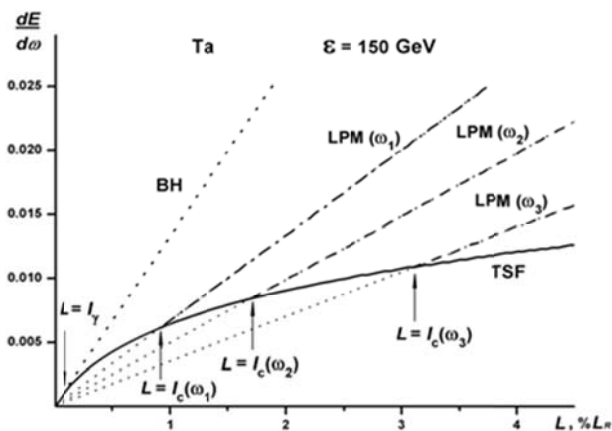


Рис. 3.2. Спектр излучения электронов с энергией 150 ГэВ в танталовой мишени как функция толщины мишени  $L$  (%  $L_R$ ).

Описание кривых приведено в тексте

Заметим, что непосредственное использование асимптотической формулы (3.10 б) для количественного анализа спектральной плотности излучения при  $\gamma^2 \overline{\theta_e^2} \gg 1$  может привести к значительным расхождениям с результатом, даваемым точной формулой (3.6). Такая ситуация возникла, в частности, при анализе экспериментальных данных SLAC E-146 [56] на основе полученных в работе [46] формул. При этом отмечалось, что асимптотическая формула (3.10 б) приводит в условиях данного эксперимента к результату, превышающему результат Бете-Гайтлера почти в два раза, что явно противоречило наблюдаемому в эксперименте

поведению спектральной плотности излучения. Причина такого расхождения, как было установлено впоследствии [47, 49], заключалась в том, что в условиях эксперимента [56] оказалось необходимым учитывать следующие члены разложения (3.5) по параметру  $\xi$  и использовать функцию Бете-Мольер (3.7) при проведении процедуры усреднения спектральной плотности излучения (3.6). В работе [46] такая процедура усреднения проводилась на основе Гауссового распределения частиц по углам рассеяния, которое не учитывает процесс однократного рассеяния частиц на большие углы. С учетом сделанных замечаний, как показано в [47], несколько первых членов разложения формулы (3.6) по обратным степеням параметра  $a^2 = \gamma^2 \overline{\theta_e^2}$  имеют следующий вид:

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega} \right\rangle = \frac{2e^2}{\pi} \left[ (\ln a^2 - C) \left( 1 + \frac{2}{a^2} \right) + \frac{2}{a^2} + \frac{C}{B} - 1 \right], \quad (3.11)$$

где  $C = 0.577$  – постоянная Эйлера, а параметр  $B$  определяется из условия

$$B - \ln B = \ln(4\pi Z^2 e^4 n R^2 L) + 1 - 2C. \quad (3.12)$$

Формула (3.11) с достаточно хорошей точностью описывает результаты, упомянутого выше эксперимента [56] в области ее применимости (см. раздел 4).

## РАЗДЕЛ 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛПМ-ЭФФЕКТА

Первые эксперименты по обнаружению ЛПМ-эффекта проводились с использованием космических лучей [57] и вторичных пучков электронов с энергией 40 ГэВ на ускорителе протонов ИФВЭ (г. Противно, Россия) [58]. Однако из-за недостаточной статистики измерений в этих экспериментах речь могла идти только о качественном подтверждении существования ЛПМ-эффекта.

Детальное экспериментальное исследование ЛПМ-эффекта было проведено лишь спустя 40 лет после его предсказания. Этот эксперимент был выполнен в 1993–95 годах на ускорителе СЛАК (г. Стэнфорд, США) при энергиях электронов 8 и 25 ГэВ [43, 59, 60]. В этом эксперименте были измерены спектры тормозного излучения электронов в области малых энергий гамма-квантов (от 200 кэВ до 500 МэВ) для мишеней, изготовленных из различных материалов (от углерода до урана) в довольно большом интервале толщин мишеней (от 0.1 % до 6 % радиационной

длины). Измерения проводились с достаточно высокой точностью, что позволило провести количественное сравнение экспериментальных данных с теоретическими расчетами, а также исследовать различные механизмы влияния среды на процесс тормозного излучения электронов в веществе. Некоторые результаты эксперимента и сравнение экспериментальных данных с теоретическими расчётами представлено на рис. 4.1 и рис. 4.2.

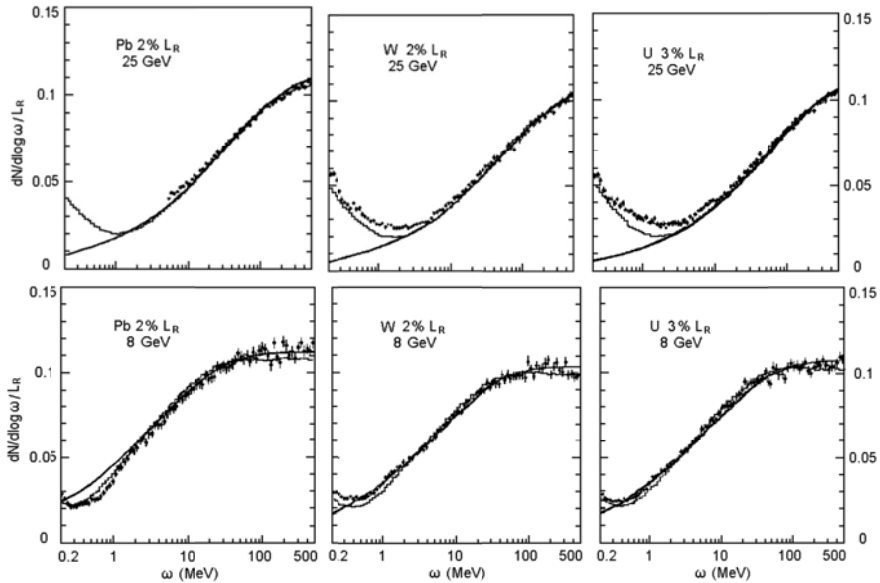


Рис. 4.1. Спектры излучения электронов с энергией 8 и 25 ГэВ в мишенях свинца (толщиной 2 %  $L_R$ ) вольфрама (2 %  $L_R$ ) и урана (3 %  $L_R$ ) в диапазоне частот от 0.2 до 500 МэВ. Сплошные кривые – результаты вычислений по формуле Мигдала (2.6); гистограммы – результаты моделирования спектра излучения методом Монте-Карло [43]

Сплошные кривые на этих рисунках соответствуют результатам вычислений по формуле Мигдала (2.6), гистограммы – результаты Монте-Карло моделирования спектра излучения с учетом вклада переходного излучения [60], прямые линии на рис. 4.2 для мишени золота толщиной 0.7 %  $L_R$  – результаты вычислений по формуле (3.11).

Полученные в СЛАК экспериментальные данные [43, 59, 60] показали хорошее согласие с предсказаниями теории Мигдала для относительно толстых мишеней в области энергий гамма-квантов  $\omega > \gamma\omega_p$ , где  $\omega_p = \sqrt{4\pi n Ze^2/m}$  – частота пламенных колебаний электронов среды [5]. В области же меньших частот наряду с ЛПМ-эффектом существенными становятся также эффекты, связанные с учетом диэлектрических свойств среды, такие как эффект Тер-Микаеляна подавления излучения в области малых частот [5, 61] и переходное излучение [62]. Все эти эффекты были

учтены при компьютерном моделировании на основе метода Монте-Карло в работе [60] при анализе экспериментальных данных (см. гистограммы на рис. 4.1 и рис. 4.2). Тем не менее, даже после учета всех этих эффектов в случае мишени золота толщиной 0.7 % радиационной длины наблюдалось значительное расхождение между результатами теории и эксперимента в области энергий гамма-квантов  $1 \text{ МэВ} < \omega < 20 \text{ МэВ}$  (см. рис. 4.2). Такое «неожиданное» поведение спектра излучения в этой области частот первоначально участниками эксперимента E-146 трактовалось как некий не имеющий теоретического объяснения «краевой эффект» и была предпринята попытка исключить его путем процедуры вычитания спектров излучения двух мишеней различной толщины [56, 59]. Связано это было с попыткой использовать для объяснения экспериментальных данных некоторые результаты работы Терновского [46], в которой в рамках метода кинетического уравнения Мигдала учитывалось влияние границы мишени. Вместе с тем, когда в [56] были предприняты попытки использовать формулы Терновского для того, чтобы описать «краевой эффект», то вместо уменьшения излучения в рассматриваемой области частот был получен результат, превышающий результат Бете и Гайтлера почти в два раза. Поэтому в [56] был сделан вывод о том, что формулы работы [46] дают «нефизичный результат». Это стимулировало новую волну теоретических исследований влияния многократного рассеяния на излучение (см. работы [47–53]).

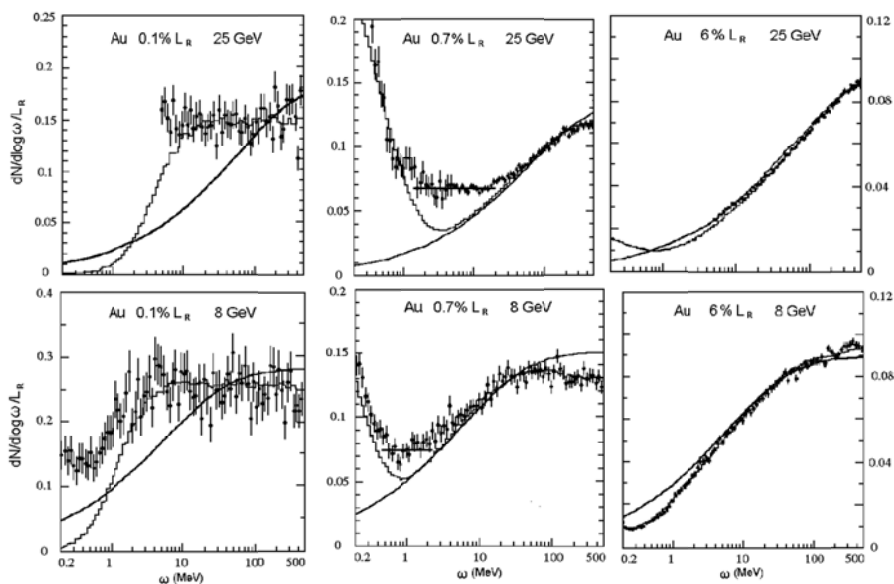


Рис. 4.2. То же, что на рис. 4.1 для мишеней золота толщиной 0.1 %  $L_R$ , 0.7 %  $L_R$  и 6 %  $L_R$ . Прямые линии – результаты вычисления по формуле (3.11) для мишени золота толщиной 0.7 %  $L_R$ .

В работе [47] было обращено внимание на то, что в эксперименте [59] в рассматриваемой области частот выполняется условие  $l_c \gg L$ . Это условие является противоположным условию применимости теории Мигдала ЛПМ-эффекта  $L \gg l_c$ , поэтому формулы Мигдала в этом случае не могут быть применены для анализа процесса излучения. Анализ особенностей процесса излучения в случае  $l_c \gg L$  был проведен ранее в работе [19]. В работах [47, 49] было показано, что «нефизичный результат», полученный в [56] при анализе результатов эксперимента E-146 на основе формул Терновского [46], был связан с использованием асимптотической формулы для спектральной плотности излучения (эта формула совпадает с формулой (3.10)  $\partial$ , полученной в [19] другим путем), которой в условиях эксперимента [59, 60] еще нельзя пользоваться (см. по этому поводу заключительную часть раздела 3).

При выполнении условия  $l_c \gg L$ , как отмечалось выше, справедлива изложенная в разделе 3 теория влияния многократного рассеяния на излучение в тонком слое аморфного вещества. Согласно этой теории, спектральная плотность излучения в рассматриваемом случае определяется формулой (3.6). Первые же члены асимптотического разложения этой формулы по обратным степеням параметра  $a^2 = \gamma^2 \theta_e^2$  определяются формулой (3.11). Обе эти формулы в условиях эксперимента [59] приводят к результату, обозначенному на рис. 4.2 прямой линией, который хорошо согласуется с экспериментальными данными. Таким образом, анализ результатов эксперимента SLAC E-146 показал, что в этом эксперименте наряду с подтверждением ЛПМ-эффекта был обнаружен эффект подавления тормозного излучения электронов большой энергии в тонком слое вещества, который был предсказан в работах [19, 46]. Этот эффект после его детального изучения в эксперименте NA63 на ускорителе SPS CERN (ЦЕРН, Женева, Швейцария) получил в литературе название эффекта Терновского-Шульги-Фомина (ТШФ-эффект) [63–67].

Отметим, однако, что обнаруженное в эксперименте SLAC E-146 [59, 60] проявление ТШФ-эффекта в рассматриваемом диапазоне энергий электронов и толщин мишеней отчетливо наблюдалось только в одном измерении (мишень золота толщиной 0.7 %  $L_R$ ) и имело место в довольно узкой области частот излученных фотонов. С ростом энергии электронов, однако, быстро расширяется область частот, в которой должен иметь место данный эффект и область толщин мишеней, в которой спектральная плотность излучения существенно отличается как от результата Бете и Гайтлера, так и ЛПМ-режима излучения. Особый интерес при этом представляет зависимость спектральной плотности излучения от толщины мишени (см. рис. 3.2), так как эта зависимость позволяет выявить необычное свойство излучения ультрарелятивистского электрона, связанное с возможностью его длительного пребывания в состоянии с неравновесным собственным Кулоновским полем, т. е. в «полуголом» состоянии. Такое экспериментальное исследование было выполнено недавно в ЦЕРН

на ускорителе SPS при энергиях электронов до 300 ГэВ участниками международной коллаборации NA63 (см. [63–67]).

На рис. 4.3 представлены некоторые результаты измерений зависимости спектральной плотности излучения электронов с энергией 149 ГэВ от толщины мишени тантала при энергиях гамма-квантов  $\omega = 347$  МэВ (а) и 795 МэВ (б) [66, 67]. По оси ординат на этом рисунке, следуя работе [66], приведена величина спектральной плотности излучения, отнесенная к толщине мишени  $L$ , выраженной в единицах радиационной длины материала мишени  $L_R$ , т. е. величина  $(L_R / L) \cdot dE / d\omega$ . В этих единицах спектральная плотность излучения Бете-Гайтлера представляет собой в рассматриваемой области энергий гамма-квантов константу, примерно равную 4/3. На рис. 4.3 линия ВН представлена с учетом эффекта мультипольности излучения, когда два кванта, испущенные одним электроном, регистрируются детектором как один квант суммарной энергии, что приводит к некоторому искажению реального спектра излучения, а именно, к его снижению в области малых частот.

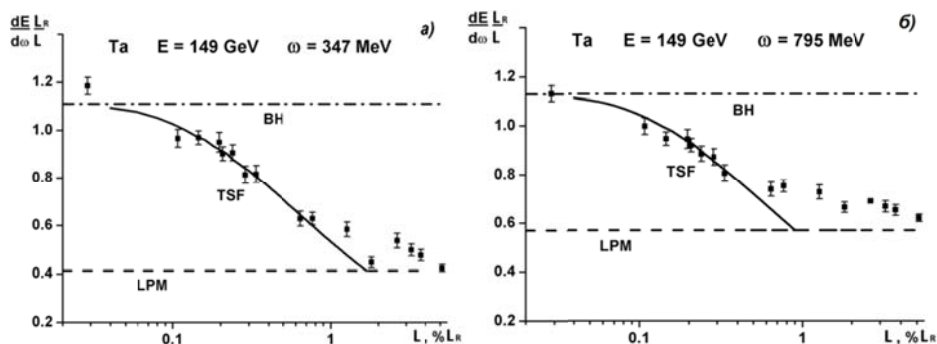


Рис. 4.3. Спектральная плотность излучения электронов с энергией 149 ГэВ с единицы пути в мишени тантала как функция толщины мишени  $L$  ( $\% L_R$ ), выраженной в единицах радиационной длины.  
Детальное описание кривых приведено в тексте

Как уже упоминалось, зависимость спектральной плотности излучения от толщины мишени в условиях ЛПМ-эффекта также является линейной. Поэтому, в используемых на рис. 4.3 единицах эта зависимость имеет вид горизонтальной прямой (пунктирная линия LPM), положение которой зависит от энергии гамма-кванта и определяется формулой Мигдала (2.6). Сплошные кривые на рис. 4.3 соответствуют результатам вычислений спектральной плотности излучения по формуле (3.6). Эти кривые на рис. 4.3 а и б совпадают, так как определяющая их формула не содержит зависимости от  $\omega$ . Они демонстрируют логарифмическое поведение спектра излучения с ростом толщины мишени для относительно тонких мишеней, толщина которых мала по сравнению с длиной когерентности процесса излучения  $L < l_c$ . Так как  $l_c$  зависит от энергии

гамма-кванта (см. формулу (1.1)), то ширина переходной области между режимами излучения Бете-Гайтлера и ЛПМ режимом оказывается различной для различных областей спектра излучения. Кривые TSF описывают поведение спектральной плотности в этой промежуточной области.

Хорошее согласие между предсказаниями теории и результатами эксперимента [66] свидетельствуют об убедительном доказательстве существования эффекта подавления излучения ультрарелятивистских электронов в тонком слое вещества, предсказанного много лет назад в работах [19, 46]. Данный эксперимент, по сути, стал уникальной демонстрацией пространственно-временной эволюции процесса тормозного излучения в веществе, связанной с перестройкой неравновесного Кулоновского поля, окружающего ультрарелятивистский электрон после его рассеяния в веществе (см. [22]). Поэтому не удивительно, что в письме, присланном руководителем эксперимента профессором У. Уггерхоем авторам обзора сразу после получения первых результатов эксперимента, было написано, что «мы, наконец, увидели полутолый электрон!».

Отметим в заключение, что область параметров (энергий гамма-квантов и толщин мишеней), при которых являются справедливыми теория Бете-Гайтлера тормозного излучения в веществе (BH), эффект Ландау-Померанчука-Мигдала (LPM effect) и эффект Терновского-Шульги-Фомина (TSF effect), демонстрирует фазовая диаграмма, приведенная в диссертации Х. Томсена [67], одного из участников эксперимента CERN-NA63. Этот рисунок был вынесен на обложку диссертации как один из важнейших результатов работы.

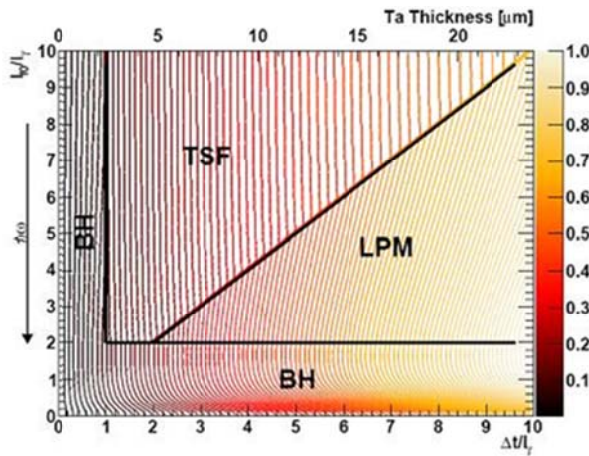


Рис. 4.4. Спектральные распределения тормозного излучения электронов с энергией 200 ГэВ в танталовой мишени (в относительных единицах)

Как можно видеть из этой диаграммы, область применения традиционной теории тормозного излучения Бете и Гайтлера при высоких

энергиях оказывается весьма ограниченной, и излучение главным образом определяется либо формулой Мигдала, которая описывает ЛПМ-эффект, т. е. эффект подавления излучения в относительно толстых мишенях  $L > l_c$ , либо формулой Шульги-Фомина (3.6), описывающей эффект подавления излучения в тонком слое вещества  $L < l_c$ . Граница, разделяющая области применимости этих двух теорий, проходит по линии  $L = l_c$  (или  $\Delta t = l_{\text{fl}}$  в обозначениях работы [67]), что означает равенство толщины мишени  $L$  длине когерентности процесса тормозного излучения  $l_c$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные выше результаты показывают, что при ультравысоких энергиях физическая картина процесса излучения релятивистских электронов в веществе существенным образом изменяется по сравнению с картиной процесса излучения при взаимодействии электрона с отдельным атомом среды. Связано это, прежде всего, с тем, что данный процесс развивается в большой быстро растущей с энергией пространственной области вдоль направления движения частицы. Если в пределах этой области частица сталкивается со многими атомами вещества, то возможно возникновение различных когерентных и интерференционных эффектов в излучении, которые зависят как от взаимного расположения атомов в веществе, так и от размеров мишени. Нами было продемонстрировано проявление таких эффектов в толстых и тонких мишенях на примерах эффекта Ландау–Померанчука–Мигдала и эффекта Терновского–Шульги–Фомина. Оба эти эффекта были экспериментально подтверждены в последние годы на ускорителях СЛАК (США) и ЦЕРН (Швейцария).

В более поздних наших работах [70–73] было показано, что в условиях эффекта Терновского–Шульги–Фомина происходит существенное изменение не только спектральной плотности тормозного излучения ультрарелятивистских электронов и ее зависимости от толщины мишени по сравнению с предсказаниями теории Бете–Гайтлера и теории Мигдала (ЛПМ эффекта), но также кардинальным образом изменяются угловые распределения излучения и его поляризационные характеристики. В настоящее время ведется обсуждение возможности проведения нового экспериментального исследования на ускорителе СЛАК с целью проверки этих предсказаний.

Следует отметить, что аналогичные эффекты имеют место при больших энергиях и в ряде других электродинамических процессах в веществе, таких как фото-образование электрон-позитронных пар [5, 39, 43, 68], когерентное излучение в кристаллах [7, 24–31], развитие электромагнитных ливней [7, 39, 43, 69]. Важным при этом является то, что, начиная с энергий порядка нескольких ТэВ, эти эффекты проявляются практически во всей области энергий рождающихся частиц и приводят к существенным изменениям таких важных параметров, как

радиационная длина, каскадная длина развития электромагнитного ливня в веществе и других. Это, в свою очередь, означает, что эти эффекты должны учитываться при проведении моделирования процессов взаимодействия частиц с веществом при ультрабольшой энергии. Соответствующие изменения должны быть внесены в компьютерные программные комплексы типа GEANT4 и другие, широко используемые при проведении расчетов детекторов и радиационной защиты будущих ускорителей частиц сверхвысоких энергий типа ILC, CLIC и других.

В [74] было показано, что эффект, аналогичный рассмотренному выше эффекту подавления излучения ультрарелятивистских электронов в тонком слое вещества, возможен также при взаимодействии электронов большой энергии с коротким сгустком релятивистских заряженных частиц. Важной особенностью этого процесса является то, что поперечные расстояния, ответственные за процесс излучения в этом случае, могут существенно (в  $\gamma$  раз) превысить характерные для излучения продольные расстояния (длину когерентности  $l_c$ ). Экспериментальная проверка этого эффекта, однако, пока не проводилась.

Отметим в заключение, что эффекты аналогичные ЛПМ и ТШФ эффектам, возможны также при высоких энергиях в физике элементарных частиц и, в частности, в кварк-глюонной плазме. При этом взаимодействие кварков и глюонов, образовавшихся при столкновении высокоэнергетических тяжелых ионов, должно отличаться от их взаимодействия при столкновениях протонов. Плазма в этом случае выступает в роли вещества, с которым взаимодействуют кварки (см. по этому поводу, например, работы [75–80]).

\* \* \*

Мы признательны всем участникам коллаборации CERN NA63 за блестящее проведение сложных измерений тормозного излучения в сверхтонких мишенях. Это позволило впервые наблюдать логарифмическую зависимость интенсивности излучения релятивистских электронов от толщины мишени, теоретически предсказанную много лет тому назад. Такая зависимость является прямым проявлением излучения «полуголого электрона», то есть электрона в состоянии с неравновесным собственным Кулоновским полем. Особая благодарность Ульрику Уггерхою за целеустремленность при проведении этого сложного экспериментального исследования и плодотворные обсуждения на всех его этапах – от постановки эксперимента до анализа полученных результатов.

Данная работа выполнена при частичной поддержке гранта Государственного агентства по науке, инновациям и информатизации Украины (проект Ф58/385-2013), а также проекта ЦО-7-1/2014 Национальной академии наук Украины.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тер-Микаелян М. Л. Интерференционное излучение сверхбыстрого электрона // ЖЭТФ, 1953, т. 25, – С. 296–306.
2. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я. Пределы применимости теории тормозного излучения электронов и образования пар при больших энергиях // ДАН СССР, 1953, т. 92, – С. 535–540; Электронно-каскадные процессы при сверхвысоких энергиях // Там же, С. 735–740.
3. Фейнберг Е. Л. Неупругие дифракционные процессы при высоких энергиях // УФН, 1956, т. 58, – С. 193–230.
4. Feinberg E. L., Pomeranchuk I. Ya. Inelastic diffraction processes at high energy // Nuovo Cimento Suppl. III, 1956. No. 4. – P. 652–662.
5. Тер-Микаелян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. – Ереван. Изд-во. АН Арм.ССР, 1969. – 457 с.
6. Фейнберг Е. Л. Адронные кластеры и "полуголые" частицы в квантовой теории поля // УФН, 1980, т. 132, – С. 255–291.
7. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе. – М.: Наука, 1993. – 334 с.
8. Ferretti B. Sulla bremsstrahlung nei cristalli // Nuovo Cimento. 1950. V. 7. – P. 118–134.
9. Überall H. High-energy interference effect of bremsstrahlung and pair production in crystals. // Phys. Rev. 1956. V.103. – P. 1055–1067.
10. Diambri G. High-energy bremsstrahlung and pair production in thin crystal. // Rev. Mod. Phys. 1968. V. 40. – P. 611–631.
11. Timm U. Coherent bremsstrahlung of electrons in crystals // Fortschr. Phys. 1971. V. 17. – P. 765–808.
12. Saenz A. W., Überall H. (Eds.): Coherent Radiation Sources, Topics in Current Physics v. 38. – Springer, 1985. – 321 p.
13. Мигдал А. Б. Влияние многократного рассеяния на тормозное излучение при больших энергиях // ДАН СССР, 1954, т. 96. – С. 49–52.
14. Мигдал А. Б. Тормозное излучение и образование пар при больших энергиях в конденсированной среде // ЖЭТФ, 1957, т. 32. – С. 633–646.
15. Ахиезер А. И., Фомин П. И., Шульга Н. Ф. Когерентное тормозное излучение электронов и позитронов ультравысокой энергии в кристаллах. // Письма ЖЭТФ, 1971, т. 13, – С. 713–715.
16. Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н.Ф. К теории упругого рассеяния быстрых частиц в квазиклассическом приближении // Теор. Мат. Физ., 1975, т. 23. – С. 11–22.
17. Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н.Ф. Теория упругого рассеяния и тормозного излучения быстрых заряженных частиц в кристаллах // ЭЧАЯ, 1979, т. 10. – С. 51–89.
18. Ахиезер А. И., Шульга Н.Ф. Излучение релятивистских частиц в моно-кристаллах // УФН, 1982, т. 137. – С. 561–604.
19. Шульга Н. Ф., Фомин С. П. О подавлении излучения в аморфной среде и в кристалле // Письма ЖЭТФ, 1978, т. 27. – С. 126–129.
20. Фейнберг Е. Л. Последовательные столкновения при высоких энергиях // ЖЭТФ, 1966, т. 50. – С. 202–214.
21. Фейнберг Е. Л. Частица с неравновесным собственным полем // В сб. статей памяти И.Е. Тамма. Проблемы теоретической физики. – М.: Наука, 1972. – С. 248–264.
22. Fomin S. P., Shul'ga N. F. On the space-time evolution of the process of ultra relativistic electron in a thin layer of substance // Phys. Lett. A, 1986, v. 114. – P. 148–152.
23. Shul'ga N. F., Trofymenko S. V. Electromagnetic wave packets in the theory of bremsstrahlung and transition radiation by high-energy electrons. In the book "Solution and application of scattering propagation, radiation and emission of electromagnetic waves", Edited by A. Kishk, 2012, Rijeka: Croatia, Publ. by InTech. – p. 263–302; <http://dx.doi.org/10.5772/50866>.
24. Кумахов М. А. Излучение каналированных частиц в кристаллах. – М.: Энергоиздат, 1986. – 161 с.
25. Базылев В. А., Жеваго Н. К. Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях. – М.: Наука, 1987. – 272 с.
26. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В.М. Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных монокристаллах. – Новосибирск: Наука: Сиб. отд. 1989. – 400 с.

27. Rullhusen P., Artru X., Dhez P. Novel radiation sources using relativistic electrons. From infrared to X-rays. – Singapore, World Scientific Publ., 1998. – 202 p.
28. Потылицын А.П. Излучение электронов в периодических структурах. – Томск: Изд-во НТЛ, 2009. – 280 с.
29. Akhiezer A. I., Shul'ga N. F., Truten' V. I. Coherent Effects in Scattering and Radiation of High-Energy Particles in Crystals // *Physics Reviews*, v. 19, Amsterdam: Harwood academic publishers, 1998. – 138 p.
30. Бочек Г. Л., Витко В. И., Коваленко Г. Д., Шраменко Б. И. Экспериментальные исследования электромагнитных процессов в монокристаллах. – Харьков: ННЦ ХФТИ, 1998. – 112 с.
31. Shul'ga N. F. Advances in coherent bremsstrahlung and LPM-effect studies (to the 100-th anniversary from the birth of L. D. Landau). In the Book "Charged and neutral particles channeling phenomena. Channeling" 2008, Editors S. Dabagov and L. Palumbo, Series Editor A. Zichichi. – Singapore: World Scientific Publ., 2010. – P. 11–35.
32. Bethe H., Heitler W. On the stopping of fast particles and on the creation of passive electrons // *Proc. Roy. Soc. 1934. V. A 146*. – P. 83–125.
33. Фейнберг Е. Л. Эффект, подтвержденный спустя 40 лет // *Природа*, 1994, т. 11, – С. 30–37.
34. Ахиезер А. И., В. Б. Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1981. – 432 с.
35. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
36. Jackson I. D. . Classical Electrodynamics. – New-York: Wiley, 1999. – 415 P.
37. Galitsky V. M., Gurevich I. I. Coherence effects in ultrarelativistic electron bremsstrahlung // *Nuovo Cimento*. 1964. V. 32. – P. 396–407.
38. Rossi B. High Energy Particles. – New York, 1952. – 317 p.
39. Uggerhoj U. I. The interaction of relativistic particles with strong crystalline fields // *Rev. Mod. Phys.* 2005. V. 77. – P. 1131–1171.
40. Рязанов М. И. Тормозное излучение и образование пар при сверхвысоких энергиях в конденсированном аморфном веществе // *УФН*, 1974, т. 114. – С. 393–414.
41. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф. Влияние многократного рассеяния на излучение релятивистских частиц в аморфных и кристаллических средах // *УФН*, 1987, т. 151. – С. 385–424.
42. Akhiezer A. I., Shul'ga N. F., Fomin S. P. Landau-Pomeranchuk-Migdal Effect. – Cambridge Scientific Publishers, 2005. – 215 p.
43. Klein S. Suppression of bremsstrahlung and pair production due to environmental factors // *Rev. Mod. Phys.* 1999. V. 71. – P. 1501–1538.
44. Ласкин Н. В., Мазманишвили А. С., Шульга Н.Ф. Континуальный подход к учету влияния многократного рассеяния на излучение частиц высоких энергий в кристаллических и аморфных средах // *ДАН СССР*, 1984, т. 227. – С. 850–853.
45. Ласкин Н. В., Мазманишвили А. С., Насонов Н. Н., Шульга Н.Ф. К теории излучения релятивистскими частицами в аморфных и кристаллических средах. // *ЖЭТФ*, 1985, т. 88. – С. 763–780.
46. Терновский Ф.Ф. К теории радиационных процессов в кусочно-однородных средах // *ЖЭТФ*, 1960, т. 39. – С. 171–180.
47. Шульга Н.Ф., Фомин С.П. Об экспериментальной проверке эффекта Ландау–Померанчука–Мигдала // *Письма в ЖЭТФ*, 1996, т. 63. – С. 837–840.
48. Shul'ga N. F., Fomin S.P. Bremsstrahlung of ultrarelativistic electrons in a thin layer of substance. // *Nucl. Instr. and Meth.* 1998. V. B 145. – P. 73–79.
49. Шульга Н. Ф., Фомин С. П. Влияние многократного рассеяния на излучение ультрарелятивистских электронов в тонком слое вещества // *ЖЭТФ*, 1998, т. 113. – С. 58–70.
50. Blankenbecler R. , Drell S. The Landau-Pomeranchuk-Migdal effect for finite targets // *Phys. Rev.*, 1996, v. D53, – P. 6265–6281.
51. Zhakharov B. G. Landau-Pomeranchuk-Migdal effect for finite-size targets // *JETP Lett.* 1996. V. 64. – P. 737–742.
52. Baier R., Dokshitser Yu. L., Peigne S., Schiff D. The Landau-Pomeranchuk-Migdal effect in QED // *Nucl. Phys.* 1996. V. B 478. – P. 577–597.
53. Baier V. N., Katkov V.M. Landau-Pomeranchuk-Migdal effect and transition radiation in structured targets // *Phys. Rev.* 1999. V. D 60, – P. 076001–12.
54. Molire G. Theorie der Streuung schneller geladener Teilchen II: Mehrfach – und Vielfachstreuung // *Z. Naturforsch.* 1948. V. 3a. – P. 78–89.
55. Bethe H. Molire's theory of multiple scattering // *Phys. Rev.* 1953, V. 89. – P. 1256–1266.

56. Klein S. R., Anthony R. L., Backe-Szendy R., et al. A measurement of the LPM effect // Preprint SLAC-PUB-6378, 1993. – 13 p.
57. Miesowicz M., Stanisiz O., Wolter W. Investigation of an electromagnetic cascade of very high energy in the first stage of its development // *Nuovo Cimento*. 1957. V. 5. – P. 513–516.
58. Вафоломеев А. и др. Влияние среды на спектры тормозного излучения электронов с энергией 40 ГэВ // *ЖЭТФ*, 1975, т. 69. – С. 429–434.
59. Anthony P. L., Backe-Szendy R., Bosted P., et al. An accurate measurement of the Landau-Pomeranchuk-Migdal effect // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75. – P. 1949–1952.
60. Anthony P. L. et al. Bremsstrahlung suppression due to the Landau-Pomeranchuk-Migdal and dielectric effects in a variety of materials // *Phys. Rev.* 1997. v. 56. – P. 1375–1390.
61. Тер-Микаелян М. Л. Спектр тормозного излучения в среде // *ДАН СССР*, 1954, т. 94. – С. 1033–1036.
62. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. – М.: Наука, 1984. – 360 с.
63. Hansen H. D., Uggerhoj U. I., Biino C., et al. Landau-Pomeranchuk-Migdal effect for multihundred GeV electrons // *Phys. Rev.* 2004. V. D 69. – P. 032001.
64. Uggerhoj U. I., Knudsen H., Ballestrero S., et al. Formation length effects in very thin targets // *Phys. Rev.* 2005. V. D 72. – P. 112001–6.
65. Thomsen H. D., Esberg J., Kirsebom K., et al. On the macroscopic formation length for GeV photons // *Phys. Lett.* 2009. V. B 672. – P. 323–327.
66. Thomsen H. D., Esberg J., Andersen K. K., et al. Distorted Coulomb field of the scattered electron // *Phys. Rev. D*. 2010. V. 81. – P. 052003.
67. Thomsen H. D. Taming GeV photons and antimatter. Part I. Formation length-related bremsstrahlung effects. PhD Dissertation, Aarhus University, Denmark, 2010.
68. Ахизер А.И., Трутень В.И., Фомин С.П., Шульга Н.Ф. Когерентный эффект в образовании электрон-позитронных пар в кристалле // *ДАН СССР*, 1979, т. 249. – С. 338–341.
69. Ахизер А.И., Шульга Н.Ф. К теории электромагнитных ливней в кристаллических средах. // *ЖЭТФ*, 1983, т. 85. – С. 94–108.
70. Фомин С.П., Шульга Н.Ф., Шульга С.Н. Спектрально-угловые распределения излучения релятивистских электронов в тонком слое вещества // *Ядерная Физика*, 2003, т. 66, № 2. – С. 421–424.
71. Fomin A.S., Fomin S.P., Shul'ga N.F. Multiple scattering effect on angular distribution and polarization of radiation by relativistic electrons in a thin crystal // *Proc. SPIE*, 2005, V. 5974. – P. 177–184.
72. Fomin A.S., Fomin S.P., Shul'ga N.F. Multiple scattering effect on spectral, angular and polarization characteristics of bremsstrahlung in a thin amorphous target // *Proc. SPIE*, 2007, V. 6634. – P. 663406.
73. Fomin A.S., Fomin S.P., Shul'ga N.F. Radiation of a relativistic electron with non-equilibrium own Coulomb field // *Nuovo Cimento*. 2011. V. 34C. – P. 45–53.
74. Шульга Н.Ф., Тютюнник Д.Н. О когерентном излучении при столкновении коротких сгустков релятивистских частиц // *Письма ЖЭТФ*, 2003, т. 78. – С. 1212–1215.
75. Wang X.-N., Gyulassy M., Plumer M. Landau-Pomeranchuk-Migdal effect in QCD and radiative energy loss in a quark-gluon plasma // *Phys. Rev.* 1995. V. D 51. – P. 4346–4352.
76. Zakharov B.G. Radiative energy loss of high energy quarks in finite-size nuclear matter and quark-gluon plasma // *JETP Lett.* 1997. V. 65. – P. 615. [hep-ph/9704255]
77. Baier R., Dokshitzer Y.L., Mueller A.H., Peigne S., Schiff D. Radiative energy loss of high energy quarks and gluons in a finite-volume quark-gluon plasma // *Nucl. Phys.* 1997. V. B 483. – P. 291. [hep-ph/9607355].
78. Aamodt K., et al. ALICE collaboration. Suppression of Charged Particle Production at Large Transverse Momentum in Central Pb–Pb Collisions at 2.76 TeV // *Phys. Lett.* 2011. V. B 696. – P. 30. [arXiv:1012.1004].
79. Arleo F., Peigne S., Sami T. Revisiting scaling properties of medium-induced gluon radiation. // *Phys. Rev.* 2011, V. D 83. – P. 114036. [arXiv:1006.0818].
80. Arleo F., Peigne S. Heavy-quarkonium suppression in p–A collisions from parton energy loss in cold QCD matter // *JHEP*. 2013. V. 03. – P. 122–162. [arXiv: 1212.0434].

---

**А. Г. Загородний, В. М. Куклин. Особенности излучения в неравновесных средах** / Проблемы теоретической физики. Научные труды / В. А. Буц, А. Г. Загородний, В. Е. Захаров, В. И. Карась, В. М. Куклин, А. В. Тур, С. П. Фомин, Н. Ф. Шульга, В. В. Яновский ; ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – Вып. 1. – С. 13–82 (Сер. «Проблемы теоретической и математической физики» ; под общ. ред. А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги).

#### ***Аннотация***

Рассматривается связь между процессами спонтанного и индуцированного излучения на примерах инверсных систем, пучков заряженных частиц и волн. Отмечается, что колебания, которые генерируются токами на комбинационных частотах, демонстрируют характеристики как спонтанного, так и индуцированного излучения. Обнаружен порог появления импульсов индуцированного когерентного излучения при превышении начальной инверсией заселенностей величины, равной корню квадратному из полного числа состояний. Обсуждается квантовомеханическая модель излучения осциллятора, захваченного во внешнюю потенциальную яму и показано, что наибольшая интенсивность линий поглощения и излучения наблюдается на его собственной частоте. Показано, что самомодуляция движущихся электронных сгустков – результат диссипативной пучковой неустойчивости.

**Ключевые слова:** спонтанные и индуцированные процессы, порог индуцированного излучения, излучение осциллятора, захваченного в потенциальную яму, самомодуляция электронного сгустка.

#### ***Реферат***

Показано, что спонтанные и индуцированные процессы в классической электродинамике могут быть представлены в выражениях, допускающих использование прямых аналогий с квантовой электродинамикой. Обсуждается глубокая связь между процессами спонтанного и индуцированного излучения. Рассматриваются главные особенности сверхизлучения (суперлюминисценции), которое демонстрирует черты как спонтанного, так и вынужденного процессов. Детально рассматриваются несколько источников спонтанного излучения: инвертированная система, частицы (пучково-плазменное взаимодействие) и волны (трехволновые взаимодействия). В частности показано, что колебания, которые генерируются токами на комбинационных частотах, демонстрируют характеристики как спонтанного, так и индуцированного излучения. В двух последних случаях мы получаем уравнения для излучаемых волн в форме, подобной уравнениям традиционной теории спонтанного и индуцированного излучения для инвертированных сред. Подобное переформулированное в терминах спонтанных и индуцированных процессов описание позволяет упростить расчеты и дает возможность верифицировать результаты вычислений. Обнаружено изменение характера мазерного излучения в двухуровневой системе, когда начальная инверсия заселенностей превышает порог, равный квадратному корню от полного числа занятых энергетических состояний. Выше этого порога число фотонов начинает расти экспоненциально со временем, при этом формируется импульс

когерентного излучения с крутым передним фронтом и сглаженным задним фронтом. Длительность когерентного импульса, оцененная по его полуширине, растет с увеличением инверсии, если все остальные параметры фиксируются и поглощение энергии отсутствует. Наличие поглощения энергии фотонов приводит к тому, что длительность когерентного импульса практически не изменяется с ростом инверсии, по крайней мере, вблизи порога. Изучен спектр излучения электромагнитных волн осциллятором, который захвачен во внешнюю потенциальную яму. Предполагается, что собственная частота осциллятора значительно больше частоты колебаний в потенциальной яме. Построена квантовомеханическая модель процесса с учетом эффекта отдачи. Наибольшая интенсивность линий излучения и поглощения наблюдается на собственной частоте осциллятора, в случае когда энергия отдачи равна энергии кванта низкочастотных колебаний в потенциальной яме. Что касается сверхизлучения, то характер такого излучения короткого моноэнергетического сгустка заряженных частиц, распространяющегося в плазме, также рассмотрен в данной работе. Показано, что самомодуляция и когерентное излучение движущегося в плазме электронного сгустка – это результат диссипативной пучковой неустойчивости. Неустойчивость возникает в объеме сгустка и амплитуда кильватерного поля достигает значений, которые равны половине максимально достижимой амплитуды в области непосредственно за компактным сгустком с таким же числом частиц.

**Ключевые слова:** спонтанные и индуцированные процессы, порог индуцированного излучения, излучение осциллятора, захваченного в потенциальную яму, самомодуляция электронного сгустка.

PACS numbers: 42.50.Fx, 03.65.Nk, 52.40.Mj, 52.35.Mw.

## **А. Г. Загородній, В. М. Куклін. Особливості випромінювання в нерівноважних середовищах**

### ***Анотація***

Розглянуто зв'язок між процесами спонтанного та індукованого випромінювання на прикладах інверсних систем, пучків заряджених часток та хвиль. Відзначається, що коливання, які генеруються струмом на комбінаційних частотах, мають характеристики як спонтанного, так і індукованого випромінювання. Знайдено поріг появи імпульсів індукованого когерентного випромінювання, коли початкова інверсна заселеність більша, ніж квадратний корінь з повного числа енергетичних рівнів. Розглянуто квантовомеханічну модель випромінювання осцилятора, що захвачено в зовнішню потенційну яму, та показано, що інтенсивність ліній поглинання та випромінювання на власній частоті осцилятора є найбільшою. Показано також, що процес самомодуляції електронних згустків, що рухаються, – результат дисипативної пучкової нестійкості.

**Ключові слова:** спонтанні та індуковані процеси, новий поріг індукованого випромінювання, випромінювання осцилятора, яке захвачено в потенційну яму, самомодуляція електронного згустку.

### ***Реферат***

Показано, що спонтанні та вимушені процеси в класичній електродинаміці можна представити в термінах, що дозволяють використовувати прямі аналогії з квантовою електродинамікою. Розглядається досить міцний зв'язок між процесами спонтанного та індукованого випромінювання. Представлено головні особливості суперфлюоресценції, яка демонструє риси як спонтанного, так і вимушеного процесів. Детально розглядається декілька джерел спонтанного та вимушеного випромінювання: інверсні системи, частки (взаємодія пучка часток з плазмою) та

хвилі (трихвильова взаємодія). Зокрема, показано, що коливання, які генеруються струменями на комбінаційних частотах, демонструють характеристики як спонтанного, так і індукованого випромінювання. В двох останніх випадках отримуємо рівняння для хвиль, що випромінюються, в формі, що відповідає традиційній теорії спонтанного та індукованого випромінювання для інвертованих середовищ. Подібний переформульований опис в термінах спонтанних та індукованих процесів дозволяє спростити розрахунки та дає можливість провести верифікацію результатів обчислень. Визначено зміну характеру мазерного випромінювання дворівневої системи, коли початкова інверсія заселеності перевищує поріг, який дорівнює квадратному кореню з повного числа зайнятих енергетичних станів. Вище порогу число фотонів починає рости експоненціальним чином з часом, причому формуються імпульс когерентного випромінювання з крутим переднім фронтом і згладженим заднім фронтом. Довжина імпульсу, яка вимірюється по його напівширині, росте з підвищенням рівня інверсії, коли всі параметри фіксуються та поглинання енергії відсутнє. Поглинання енергії фотонів призводить до того, що довжина імпульсу практично не змінюється з підвищенням інверсії поблизу порога. Вивчено спектр випромінювання електромагнітних хвиль осцилятором, що захоплено в зовнішню потенційну яму. Вважається, що власна частота осцилятора значно більша за частоту коливань в потенційній ямі. Створена кватомеханічна модель процесу з урахуванням ефекту віддачі. Найбільша інтенсивність ліній поглинання та випромінювання на власній частоті осцилятора, в умовах, коли енергія віддачі дорівнює енергії кванта низькочастотних коливань в потенційній ямі. Щодо суперфлюоресценції, то характер такого випромінювання короткого моноенергетичного згустку заряджених часток, що рухається в плазмі, також представлено в даному огляді. Показано, що самомодуляція і когерентне випромінювання такого електронного згустку – це результат дисипативної пучкової нестійкості. Нестійкість виникає в об'ємі згустку, і амплітуда кінкватерного поля зростає до значень, які дорівнюють половині максимальної амплітуди в області безпосередньо за компактним згустком з такою ж кількістю часток.

**Ключові слова:** спонтанні та індуковані процеси, новий поріг індукованого випромінювання, випромінювання осцилятора, яке захоплено в потенційну яму, самомодуляція електронного згустку.

PACS numbers: 42.50.Fx, 03.65.Nk, 52.40.Mj, 52.35.Mw.

**A. G. Zagorodny, V. M. Kuklin. The features of radiation in nonequilibrium media**

#### *Annotation*

The coupling between processes of spontaneous and induced radiation is examined. It is considered in detail some types of sources of the spontaneous and induced radiation: inverse system, moving particles and currents in plasma. It is shown specifically that oscillation generated by nonlinear current at combined frequencies demonstrated the characteristics of the spontaneous and induced emissions. The induced radiation threshold and the coherent pulse appearance in a two-level system are found when the initial population inversion exceeds some threshold value equal to the square root of the total number of energy states. The highest intensity of the absorption and emission lines is observed on the eigenfrequency of the oscillator, trapped in an external potential well. It is shown, that self-modulation and coherent emission of the moving electron bunch is the result of dissipative instability, as well.

**Keywords:** spontaneous and induced radiation, new threshold of stimulated emission, oscillator in potential well, self-modulation of electron bunch.

### *Abstract*

The processes of spontaneous and induced radiation in classic electrodynamics can be reformulated by using quantum analogy and can be expressed through coefficients and equations that have direct analogy in quantum electrodynamics. It is shown that spontaneous and induced radiation has deep relation in both these cases. It is discussed the main features of superradiation (superfluorescence), which is possessed the characteristics of the spontaneous and induced processes. It is considered in detail some types of sources of the spontaneous radiation: inverse system, particles (the beam-plasma interaction) and currents (three-wave interaction). It is shown specifically that oscillation generated by nonlinear current at combined frequencies demonstrated the characteristics of the spontaneous and induced emissions. In last both cases, we derived the equations for the intensity of emitting waves in a form that is similar to equations obtained in the traditional theory of spontaneous and stimulated emission for the inverse systems. The such reformulated description of spontaneous and induced processes makes simplified some calculations and gives an opportunity to verify results. A change in the character of maser generation in a two-level system is found when the initial population inversion exceeds some threshold value equal to the square root of the total number of completed energy states. Above this threshold, the number of photons begins to grow exponentially with time and the coherent pulse with short leading edge and broadened trailing edge is generated. In this work, we attempt to explain the nature of this threshold. Coherent pulse duration, estimated by its half-width, increases significantly with increasing inversion, if all other parameters are fixed and the absorption is neglected. The inclusion of the energy loss of photons leads to the fact that the duration of coherent pulse is practically almost constant with increasing inversion, at least well away from the threshold. We study the spectrum of electromagnetic waves emitted by oscillator, trapped in an external potential well. It is assumed that the natural frequency of the oscillator is much greater than the frequency of oscillations in the potential well. We consider the quantum model of emission with taking into account the recoil effect. The highest intensity of the absorption and emission lines is observed on the eigenfrequency of the oscillator when the recoil energy is equal to energy of the quantum of low-frequency oscillations in the potential well. As concerns the superradiation, the features of such radiation of short monoenergetic bunches of charged particles, which spread in plasma, are considered. It is shown, that self-modulation and coherent emission of the moving in plasma electron bunch is the result of dissipative instability. The instability appears in the volume of the bunch and the wake field amplitude reaches the values which are half as much as maximal radiation amplitude of the very compact bunch of same number of particles in a certain area outside the bunch.

**Keywords:** spontaneous and induced radiation, new threshold of stimulated emission, oscillator in potential well, self-modulation of electron bunch.

PACS numbers: 42.50.Fx, 03.65.Nk, 52.40.Mj, 52.35.Mw.

**В. А. Буц. Механизмы повышения частоты и степени когерентности излучения** / Проблемы теоретической физики. Научные труды / В. А. Буц, А. Г. Загородний, В. Е. Захаров, В. И. Карась, В. М. Куклин, А. В. Тур, С. П. Фомин, Н. Ф. Шульга, В. В. Яновский ; ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – Вып. 1. – С. 82–247 (Сер. «Проблемы теоретической и математической физики» ; под общ. ред. А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги).

#### **Аннотация**

Изложены новые физические механизмы преобразования энергии НЧ-колебаний в энергию ВЧ-колебаний, а также механизмы преобразования энергии некогерентного излучения в энергию когерентного излучения. В частности, показано, что спектр излучения нерелятивистского осциллятора может быть аналогичен спектру излучения релятивистского осциллятора. Изложен механизм юлы, который во многом похож на квантовый эффект Зенона. Этот механизм позволяет стабилизировать как классические, так и квантовые системы. Показано, что имеется область параметров, при которых второе начало термодинамики оказывается плохо обусловленным законом. Приведен пример, как эта особенность позволяет преобразовывать некогерентное излучение в когерентное излучение. Показано, что при взаимодействии некогерентного рентгеновского излучения с идеальными кристаллами степень когерентности может быть существенно увеличена. Описан механизм вторичных резонансов.

**Ключевые слова:** гармоники, вторичные резонансы, невзаимность, когерентность, эффект Зенона, подавление неустойчивостей, дифракция.

#### **Реферат**

В настоящее время имеется два основных направления исследований, призванных создать источники когерентного коротковолнового излучения (до рентгеновского). Первое, традиционное направление, связано с созданием инверсной населенности для квантовых уровней в этом диапазоне энергий. Трудности этого направления определяются чрезвычайно малым временем жизни возбужденных состояний. В результате значения энергии импульсов таких лазеров очень незначительны и измеряются мДж и даже наноджоулями. Второе направление связано с рентгеновскими ЛСЭ. Это уникальные и чрезвычайно дорогие установки. Основным элементом этих ЛСЭ являются потоки релятивистских электронов с энергиями более 1 ГэВ. Отметим, что для возбуждения рентгеновского излучения достаточно иметь электроны с энергиями порядка 10 кэВ. В обзоре изложены **новые физические механизмы** возбуждения ВЧ-излучения (до рентгеновского), а также механизмы преобразования энергии некогерентного излучения в энергию когерентного излучения. Эти механизмы открывают новые возможности создания источников интенсивного когерентного излучения. Рассматриваемые механизмы разбиты на две части. В первой – изложены механизмы, позволяющие непосредственно возбуждать интенсивное когерентное высокочастотное излучение. К этим механизмам относятся: механизм излучения высоких номеров гармоник нерелятивистскими осцилляторами; механизм вторичных резонансов и механизм юлы. Во второй части изложены механизмы, позволяющие преобразовывать интенсивное некогерентное излучение

в когерентное излучение. К этим механизмам относятся: механизм повышения плотности энергии излучения и степени когерентности при взаимодействии некогерентного излучения с идеальными кристаллами; механизм, основанный на плохой обусловленности второго начала термодинамики. ***Кратко охарактеризуем эти механизмы.*** Показано, что нерелятивистские осцилляторы могут излучать как релятивистские. Это означает, что максимум интенсивности их излучения приходится на высокие номера гармоник. Оказывается, что для этого они должны излучать в периодически неоднородной среде. Важно, что величина неоднородности может быть исчезающе малой. При этом интенсивность излучения нерелятивистских осцилляторов на высоких номерах гармоник может превосходить интенсивность излучения релятивистских осцилляторов. Вторичные резонансы возникают между системами, свойства которых (или одно из них) были изменены в результате первичных резонансов. Описана теория такого преобразования, а также результаты экспериментальных исследований этого механизма. Этот механизм позволяет преобразовывать энергию ВЧ-излучения в излучение терагерцового и оптического диапазонов. Механизм юлы во многих чертах похож на квантовый эффект Зенона. Показано, что его использование позволяет стабилизировать как квантовые, так и классические системы. В частности, открывается возможность существенного увеличения времени жизни возбужденных квантовых систем. Показано, что увеличить плотность энергии рентгеновского излучения и степень его когерентности возможно при взаимодействии излучения с идеальными кристаллами. В частности, получена формула, обобщающая формулу Ван-Циттерта-Цернике на случай распространения излучения в идеальных кристаллах. Показано, что степень когерентности при этом для рентгеновского излучения увеличивается в  $10^4 - 10^6$  раз.

В обзоре отмечено, что существует область параметров взаимодействующих систем, при которых второе начало термодинамики является плохо обусловленным законом. При этом незначительный обмен энергии между ними может привести к полной передаче энтропии. Показано, как эта особенность может быть использована для преобразования некогерентного излучения в когерентное излучение.

**Ключевые слова:** гармоники, вторичные резонансы, невзаимность, когерентность, эффект Зенона, подавление неустойчивостей, дифракция.

PACS numbers: 03.65.Xp, 42.25.Kb, 42.65.Ky, 47.20.Lz, 65.40.Gr

**В. О. Буц. Механізми підвищення частоти и ступеня когерентності випромінювання**

#### ***Анотація***

Викладені нові фізичні механізми перетворення енергії НЧ-коливань в енергію ВЧ-коливань, а також механізми перетворення енергії некогерентного випромінювання в енергію когерентного випромінювання. Зокрема, показано, що спектр випромінювання нерелятивістського осцилятора може бути аналогічний спектру випромінювання релятивістського осцилятора. Викладено механізм дзиги, який багато в чому схожий на квантовий ефект Зенона. Цей механізм дозволяє стабілізувати як класичні, так і квантові системи. Показано, що є область параметрів, за яких другий початок термодинаміки виявляється погано обумовленим законом. Наведено приклад, як ця особливість дозволяє перетворювати некогерентне випромінювання в когерентне випромінювання. Показано, що при взаємодії некогерентного рентгенівського випромінювання з ідеальними

кристалами ступінь когерентності може бути суттєво збільшеним. Описаний механізм вторинних резонансів.

**Ключові слова:** гармоніки, вторинні резонанси, невзаємність, когерентність, ефект Зенона, придушення нестійкостей, дифракція.

### *Реферат*

У цей час є два основні напрямки досліджень, направлених створити джерела когерентного короткохвильового випромінювання (до рентгенівського). Перший, традиційний напрямок, пов'язаний зі створенням інверсної населеності для квантових рівнів у цьому діапазоні енергій. Труднощі цього напрямку визначаються надзвичайно малим часом життя збуджених станів. У результаті значення енергії імпульсів таких лазерів дуже незначні й вимірюються мДж і навіть наноджоулями. Другий напрямок пов'язаний з рентгенівськими ЛВЕ. Це унікальні й надзвичайно дорогі установки. Основним елементом цих ЛВЕ є потоки релятивістських електронів з енергіями, більших за 1 ГеВ. Відзначимо, що для збудження рентгенівського випромінювання досить мати електрони з енергіями порядку 10 Кев. В огляді викладено **нові фізичні механізми** збудження ВЧ-випромінювання (до рентгенівського), а також механізми перетворення енергії некогерентного випромінювання в енергію когерентного випромінювання. Ці механізми відкривають нові можливості для створення джерел інтенсивного когерентного випромінювання. Розглянуті механізми розбиті на дві частини. У першій – викладені механізми, що дозволяють безпосередньо збуджувати інтенсивне когерентне високочастотне випромінювання. До цих механізмів відносяться: механізм випромінювання високих номерів гармонік нерелятивістськими осциляторами; механізм вторинних резонансів і механізм дзиґи. У другій частині викладено механізми, що дозволяють перетворювати інтенсивне некогерентне випромінювання в когерентне випромінювання. До цих механізмів відносяться: механізм підвищення щільності енергії випромінювання й ступеня когерентності при взаємодії некогерентного випромінювання з ідеальними кристалами; механізм, заснований на поганій обумовленості другого початку термодинаміки. **Коротко охарактеризуємо ці механізми.** Показано, що нерелятивістські осцилятори можуть випромінювати, як релятивістські. Це означає, що максимум інтенсивності їх випромінювання припадає на високі номери гармонік. Виявляється, що для цього вони повинні випромінювати в періодично-неоднорідному середовищі. Важливо, що величина неоднорідності може бути зовсім малою. При цьому інтенсивність випромінювання нерелятивістських осциляторів на високих номерах гармонік може перевершувати інтенсивність випромінювання релятивістських осциляторів. Вторинні резонанси виникають між системами, властивості яких (або один з них) були змінені в результаті первинних резонансів. Описана теорія такого перетворення, а також результати експериментальних досліджень цього механізму. Цей механізм дозволяє перетворювати енергію ВЧ-випромінювання у випромінювання терагерцового й оптичного діапазонів. Механізм дзиґи в багатьох рисах схожий на квантовий ефект Зенона. Показано, що його використання дозволяє стабілізувати як квантові, так і класичні системи. Зокрема, відкривається можливість істотного збільшення часу життя збуджених квантових систем. Показано, що збільшити щільність енергії рентгенівського випромінювання й ступінь його когерентності можливо при взаємодії випромінювання з ідеальними кристалами. Зокрема, отримана формула, що узагальнює формулу Ван-Циттерга-Церніке на випадок поширення випромінювання в ідеальних кристалах. Ступінь когерентності при цьому для рентгенівського випромінювання збільшується в  $10^4$  –  $10^6$  разів.

В огляді показано, що існує область параметрів систем, які взаємодіють, за яких другий закон термодинаміки є погано обумовленим законом. При цьому незначний обмін енергії між ними може призвести до повної передачі ентропії. Показано також, як ця особливість може бути використана для перетворення некогерентного випромінювання в когерентне випромінювання.

**Ключові слова:** гармоніки, вторинні резонанси, невзаємність, когерентність, ефект Зенона, придушення нестійкостей, дифракція.

PACS numbers: 03.65.Xp, 42.25.Kb, 42.65.Ky, 47.20.Lz, 65.40.Gr

## V. A. Buts. Mechanisms of increasing the frequency and degree of coherence of the radiation

### *Annotation*

New physical mechanisms of conversion of the low-frequency oscillations energy into high-frequency oscillations and mechanisms of conversion the incoherent radiation into the coherent radiation are described. In particular, it is shown that the radiation spectrum of non-relativistic oscillator may be similar to the spectrum of the relativistic oscillator. Mechanism whirling which in many respects is similar to the quantum Zeno effect is outlined. This mechanism allows us to stabilize both classical and quantum systems. It is shown that there is a range of parameters for which the second law of thermodynamics is bad conditioned law. An example shows how this feature allows you to convert incoherent radiation into coherent radiation. It is shown that the level of coherence can be substantially increased at interaction of incoherent X-rays with ideal crystals. A mechanism of secondary resonances is described too.

**Key words:** harmonics, secondary resonances, nonreciprocity, coherency, Zeno effect, suppression of instabilities, diffraction.

### *Abstract*

Currently there are two main approaches to creation of sources of coherent short-wavelength radiation (up to X-ray). The first, traditional approach, is the creation of inverse population for quantum levels in this energy range. Difficulties in this area are related to extremely short lifetime of the excited states. As a result the energy density of such laser pulses is very small being in order of millijoules or even nanojoules. The second approach is an X-ray FEL. These are unique and extremely expensive installations. The main element of a FEL is a stream of relativistic electrons with energies above 1 GeV while the electrons with energies of about 10 keV are sufficient for X-rays excitation. This review describes **new physical mechanisms** of excitation high frequency radiation (up to X-ray), as well as mechanisms to convert an incoherent radiation into a coherent radiation. These mechanisms open new opportunities for creating sources of intense short-wavelength coherent radiation. Considered mechanisms are divided into two parts. The first part contains the mechanisms of direct excitation of the intense coherent high-frequency radiation. These mechanisms include the mechanism of high number harmonic excitation by nonrelativistic oscillators; mechanism of secondary resonances and the mechanism of whirling. The second part describes the mechanisms of converting an intensive incoherent radiation into coherent radiation. These mechanisms are: a mechanism for increasing the energy density and the degree of coherence of radiation during the interaction of incoherent radiation with perfect crystals and the mechanism based on the ill-conditioned nature of the second law of thermodynamics.

*Below is the brief description of these mechanisms.* It is shown that nonrelativistic oscillators can radiate as relativistic. This means that the maximum intensity of the radiation falls on the high numbers of harmonics. For this they should radiate in a periodically inhomogeneous medium. It is important that the magnitude of nonuniformity can be vanishingly small. It does not define the emission spectrum. Her influence is only at the radiation intensity. The intensity of the high number harmonics radiation by nonrelativistic oscillators may exceed the intensity of radiation emitted by relativistic oscillator in a vacuum. The theory and experimental results of this mechanism are described. Potentially, this mechanism allows to create X-ray FEL using flows of nonrelativistic oscillators. Secondary resonances arise between systems (or one of them), which properties change as the result of primary resonances. Here we provide the theory of such change and describe the results of experimental studies of this mechanism. Using this mechanism it is possible to convert the energy of RF radiation into the terahertz and optical wave-range. Whirligig mechanism in many ways is similar to the quantum Zeno effect. It is shown that its use allows one to stabilize quantum and classical systems. In particular, it opens the possibility of significant increase of a lifetime of an excited quantum system. It is shown that increase of the X-ray energy density together with the degree of coherence is possible when radiation interacts with perfect crystals. In particular, a formula that generalizes the Van Cittert-Zernike theorem to the case of propagation in ideal crystals has been derived. It is shown that the degree of coherence of the X-ray radiation can increase by 4-6 orders of magnitude when this mechanism is deployed. The review shows that there is a range of parameters of systems interaction in which the second law of thermodynamics for these systems becomes an ill-conditioned law. In this case the negligible exchange of energy between the systems leads to complete transfer of entropy from one system to another. It is shown how this feature can be used to convert incoherent radiation into a coherent radiation.

**Key words:** harmonics, secondary resonances, nonreciprocity, coherency, Zeno effect, suppression of instabilities, diffraction.

PACS numbers: 03.65.Xp, 42.25.Kb, 42.65.Ky, 47.20.Lz, 65.40.Gr

---

**В. Е. Захаров, В. И. Карась. Неравновесные колмогоровского типа распределения частиц и их приложения** / Проблемы теоретической физики. Научные труды / В. А. Буц, А. Г. Загородний, В. Е. Захаров, В. И. Карась, В. М. Куклин, А. В. Тур, С. П. Фомин, Н. Ф. Шульга, В. В. Яновский ; ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – Вып. 1. – С. 248–356 (Сер. «Проблемы теоретической и математической физики» ; под общ. ред. А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги).

#### ***Аннотация***

Представлено современное состояние исследований неравновесных (колмогоровского типа) стационарных и нестационарных распределений частиц, взаимодействующих по закону Кулона с учетом статической экранировки и являющихся точными решениями интегралов столкновений Больцмана или в форме Ландау с источником и стоком, обеспечивающими поток энергии по спектру в импульсном пространстве. Рассмотрена реальная ситуация, когда в инерционном интервале функция распределения электронов степенная, а за его пределами – термодинамически равновесная функция Ферми-Дирака. Проанализированы преимущества нового (основанного на неравновесных распределениях) способа преобразования энергии и неравновесная нестационарная кинетика электрон-фононной системы кристалла в сильном электрическом поле (электропластический эффект).

**Ключевые слова:** неравновесность, функции распределения, электрон, фонон, нестационарность, кулоновское взаимодействие, интеграл столкновений, источник и сток, электропластический эффект.

#### ***Реферат***

Представлено современное состояние исследований неравновесных (колмогоровского типа) стационарных и нестационарных распределений частиц, взаимодействующих по закону Кулона с учетом статической экранировки и являющихся точными решениями интегралов столкновений Больцмана или в форме Ландау с источником и стоком, обеспечивающими поток энергии по спектру в импульсном пространстве. Стационарные неравновесные распределения частиц или волн по импульсам (волновым числам) – распределения, обращающиеся в нуль интеграл столкновений в кинетическом уравнении и полностью определяющиеся постоянным в пространстве импульсов (волновых чисел) потоком сохраняющихся величин, например, энергии, импульса, числа частиц (или волнового действия для квазичастиц). Для квантового и классического интегралов столкновений Больцмана приведены явные выражения их как функции импульса  $p$ , показателя степени  $S$ , импульса  $p'$ , который отвечает стоку энергии, импульса  $p''$ , который отвечает источнику энергии. Показано, что при отсутствии частиц вне энергетического интервала, который находится между источником и стоком, в границах инерционного интервала показатель степени  $S$  отличается от универсального не более чем на 10 %. Также рассмотрена более реальная ситуация, когда в инерционном интервале функция распределения электронов степенная, а за его пределами – термодинамически

равновесная функция Ферми-Дирака. Показано, что стационарное неравновесное распределение электронов близкое к универсальному ( $s = -5/4$  в случае безграничного инерционного интервала), если расположение источника и стока, а также их интенсивности удовлетворяют определенным условиям, т. е. неравновесное универсальное распределение электронов возможно даже при числах заполнения значительно (на один-два порядка) меньших равновесных. Проанализированы преимущества нового (основанного на неравновесных распределениях) способа преобразования энергии и неравновесная нестационарная кинетика электрон-фононной системы кристалла в сильном электрическом поле (электропластический эффект).

**Ключевые слова:** неравновесность, функции распределения, электрон, фонон, нестационарность, кулоновское взаимодействие, интеграл столкновений, источник и сток, электропластический эффект.

PACS numbers: 47.11.+j, 47.27.-i, 47.27.Eq, 92.10.Hm

### **В. С. Захаров, В. І. Карась. Нерівноважні колмогорівського типу розподіли частинок та їх застосування**

#### **Анотація**

Представлено сучасний стан досліджень нерівноважних (колмогорівського типу) стаціонарних і нестаціонарних розподілів частинок, взаємодіючих за законом Кулона з урахуванням статичного екранування, і які є точними розв'язками інтегралів зіткнень Больцмана або у формі Ландау з джерелом і витоком, що забезпечують потік енергії по спектру в імпульсному просторі. Розглянута реальна ситуація, коли в інерційному інтервалі функція розподілу електронів степенева, а за його межами – термодинамічно рівноважна функція Фермі-Дірака. Проаналізовано переваги нового (заснованого на нерівноважних розподілах) способу перетворення енергії та нерівноважна нестационарна кінетика електрон-фононної системи кристала в сильному електричному полі (електропластичний ефект).

**Ключові слова:** нерівноважність, функції розподілу, електрон, фонон, нестационарність, кулонівська взаємодія, інтеграл зіткнень, джерело та виток, електропластичний ефект.

#### **Реферат**

Представлено сучасний стан досліджень нерівноважних (колмогорівського типу) стаціонарних і нестаціонарних розподілів частинок, взаємодіючих за законом Кулона з урахуванням статичного екранування, і які є точними рішеннями інтегралів зіткнень Больцмана або у формі Ландау з джерелом і стоком, що забезпечують потік енергії по спектру в імпульсному просторі. Стаціонарні нерівноважні розподіли частинок або хвиль за імпульсами (хвильовими числами) – розподіли, що звертають в нуль інтеграл зіткнень в кінетичному рівнянні і повністю визначаються постійним в просторі імпульсів (хвильових чисел) потоком величини (наприклад, енергії, імпульсу, числа частинок або хвильової дії для квазічастинок), що зберігається. Для квантового та класичного інтегралів зіткнень Больцмана наведені явні вирази їх як функції імпульсу  $p$ , показника ступеня  $S$ , імпульсу  $p'$ , що відповідає витоку енергії та імпульсу  $p''$ , що відповідає джерелу енергії. Показано, що за відсутності частинок поза енергетичним інтервалом, який знаходиться між джерелом і стоком, в межах інерційного інтервалу показник степені відрізняється від

універсального не більше ніж на 10 %. Також розглянута більш реальна ситуація, коли в інерційному інтервалі функція розподілу електронів степенева, а за його межами – термодинамічно рівноважна функція Фермі-Дірака. Показано, що стаціонарний нерівноважний розподіл електронів близький до універсального ( $s = -5/4$  в разі безмежного інерційного інтервалу), якщо розташування джерела і стоку, а також їх інтенсивності задовольняють певним умовам, тобто нерівноважний універсальний розподіл електронів можливий навіть при числах заповнення значно (на один – два порядки) менших рівноважних. Проаналізовано переваги нового (заснованого на нерівноважних розподілах) способу перетворення енергії та нерівноважну нестаціонарну кінетику електрон-фононної системи кристалу в сильному електричному полі (електропластичний ефект).

**Ключові слова:** нерівноважність, функції розподілу, електрон, фонон, нестаціонарність, кулонівська взаємодія, інтеграл зіткнень, джерело та виток, електропластичний ефект.

PACS numbers: 47.11.+j, 47.27.-i, 47.27.Eq, 92.10.Hm

## **V. E. Zakharov, V. I. Karas`. Nonequilibrium Kolmogorov-type particle distributions and their applications**

### ***Annotation***

Presented by the current state of research of nonequilibrium (Kolmogorov-type) stationary and non-stationary distributions of particles interacting by Coulomb's law, taking into account the static screening and are an exact solutions of the Boltzmann or Landau collision integral with a source and a sink ensuring the energy flow along the spectrum in momentum space. We consider the real situation, when the inertial range power-law distribution function of electrons, and beyond - thermodynamic equilibrium Fermi-Dirac function. The advantages of the new (based on the non-equilibrium distributions) of the process of energy conversion and unsteady nonequilibrium kinetics of the electron-phonon system of the crystal in a strong electric field (electroplastic effect).

**Key words:** nonequilibrium, distribution functions, electron, phonon, nonstationary, Coulomb interaction, collision integral, source and sink, electroplastic effect.

### ***Abstract***

Presented by the current state of research of nonequilibrium (Kolmogorov-type) stationary and non-stationary distributions of particles interacting by Coulomb's law, taking into account the static screening and is an exact solution of the Boltzmann collision integral in the Landau or a source and a sink for the flow of energy along the spectrum in momentum space. Stationary non-equilibrium distribution of particles or waves in the momenta (wave numbers) - the distribution of vanishing collision integral in the kinetic equation and is completely determined by a constant in momentum space (wave number) the flow of conserved quantities such as energy, momentum, the number of particles (or wave action for quasiparticles). For the quantum and the classical Boltzmann collision integrals are given their explicit expressions as a function of the momentum  $p$ , the exponent  $S$ , a momentum  $p'$ , which corresponds to the sink of energy, a momentum  $p''$ , which corresponds to the energy source. It is shown that in the absence of particles outside the energy range of which is between the source and the sink in the boundaries of the inertial range exponent differs from the universal no more than 10%. We also considered a more realistic situation, when the inertial range power-law distribution function of electrons, and beyond - thermodynamic

equilibrium Fermi-Dirac function. It is shown that the stationary nonequilibrium distribution of electrons close to the universal ( $s = -5/4$  in the case of the infinite inertial range), if the location of the source and the sink, as well as their intensity satisfy certain conditions, i.e. the universal nonequilibrium distribution of electrons is possible even when the occupation numbers considerably (by one - two orders of magnitude) lower equilibrium one. Analysis is made of the advantages of the new (based on the non-equilibrium distributions) of the process of energy conversion and of the time-dependent kinetics of nonequilibrium electron-phonon system of the crystal in a strong electric field (electroplastic effect).

**Key words:** nonequilibrium, distribution functions, electron, phonon, non-stationary, Coulomb interaction, collision integral, source and sink, electroplastic effect.

PACS numbers: 47.11.+j, 47.27.-i, 47.27.Eq, 92.10.Hm

---

**А. В. Тур, В. В. Яновский. Вихревые структуры в двумерной гидродинамике** / Проблемы теоретической физики. Научные труды / В. А. Буц, А. Г. Загородний, В. Е. Захаров, В. И. Карась, В. М. Куклин, А. В. Тур, С. П. Фомин, Н. Ф. Шульга, В. В. Яновский ; ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – Вып. 1. – С. 357–473 (Сер. «Проблемы теоретической и математической физики» ; под общ. ред. А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги).

### ***Аннотация***

Обзор посвящен новым достижениям динамики вихревых структур в двумерной гидродинамике и в двухжидкостной гидродинамике плазмы. Большое внимание уделено точечным вихрям нового типа. Получены уравнения движения произвольного количества точечных дипольных вихрей, взаимодействующих как друг с другом, так и с заданным количеством обычных точечных вихрей. Обнаружены стационарные гидродинамические течения, содержащие сингулярные вихри. Рассмотрен процесс генерации квазидвумерных крупномасштабных вихревых структур спиральной мелкомасштабной турбулентностью. Выяснен механизм неустойчивости на линейной стадии и стабилизация на нелинейной стадии, приводящая к формированию нелинейных структур.

**Ключевые слова:** двумерная гидродинамика, точечные вихри, точечные дипольные вихри, точные стационарные решения, двухжидкостная гидродинамика плазмы, вихревые структуры, крупномасштабная неустойчивость, спиральная турбулентность.

### ***Реферат***

В обзоре обсуждаются глубокие проблемы вихревых состояний в гидродинамических средах. В двумерной гидродинамике несжимаемой жидкости большое внимание уделено новому типу точечных вихрей дипольного типа. Получены уравнения движения произвольного количества точечных дипольных вихрей, взаимодействующих как друг с другом, так и с заданным количеством обычных точечных вихрей. Показано, что эти уравнения имеют гамильтонову природу и получен гамильтониан такой системы точечных вихрей. Предложена обобщенная скобка Пуассона, позволяющая придать этим уравнениям движения универсальный вид в формализме скобок Пуассона. Получены законы сохранения системы точечных вихрей, и обсуждается вопрос об интегрируемости частных случаев небольшого числа вихрей. Показано, что система двух точечных вихрей, один из которых точечный дипольный вихрь, является точно интегрируемой и детально исследованы все режимы движения такой системы вихрей. Детально обсуждено влияние границ, ограничивающих жидкость, на движение одиночного точечного дипольного вихря. Точные гамильтоновы уравнения движения получены для вихря вблизи плоской границы и для области внутри прямого угла. Показано, что такие вихри «отталкиваются» от границ. Этот эффект делает их исключительно важными для ключевой проблемы переноса завихренности от границ в среду. Кроме нестационарных движений точечных вихрей получены новые классы стационарных решений двумерных уравнений Эйлера. Обнаружен широкий класс нетривиальных решений, которые имеют вид вихревых ожерелий с рациональной завихренностью. Эти вихревые конфигурации имеют симметрию  $N$ -го порядка. При этом  $N$

несингулярных вихрей располагаются симметрично вокруг точечного центрального вихря. Найдены параметры вихрей и характеристики особых точек. В явном виде представлены решения с симметрией до восьмого порядка включительно. Интересно подчеркнуть, что такие конфигурации, имея исключительно сложную структуру, при удалении от нее вписываются в простое вращение жидкости. Точечные дипольные вихри также приводят к новым стационарным течениям. Так были обнаружены стационарные вихревые решения, которые имеют сложные особые точки. Сложными особыми точками называются особые точки векторного поля индекс которых больше единицы. Например, для точечного диполя индекс векторного поля равен двум. Для нахождения точных решений используется теория обобщенных функций. Построены решения с индексом особой точки равным трём. Такие решения возникают из-за слияния дипольной особенности и полюса  $n$ -го порядка. Построены явные решения для полюсов шестого порядка включительно. Большое внимание уделено процессам генерации квазидвумерных крупномасштабных вихревых структур в стратифицированной жидкости под действием спиральной мелкомасштабной силы. Методом многомасштабного асимптотического разложения по малому числу Рейнольдса получены замкнутые усреднённые нелинейные уравнения Рейнольдса для крупномасштабных вихревых возмущений. Линейный анализ этих уравнений показал наличие крупномасштабной неустойчивости. В нелинейном режиме эта неустойчивость насыщается и порождает большое количество периодических вихревых структур. Среди этих структур присутствуют локализованные решения. К ним относятся решения в виде вращающегося солитона нового типа и кинка. Такие вихри должны играть важную роль в атмосферных процессах различных планет. В заключение доказано, что точечные вихри должны появляться и в других гидродинамических системах. Так, точечные вихри были обобщены на двухмерную электронную и ионную гидродинамику плазмы. Основой этого обобщения является представление уравнений двухжидкостной гидродинамики плазмы в форме обобщенных интегралов вмерзновенности. Выражение обобщенной завихренности в виде суммы  $\delta$ -функций позволяет получить уравнения движения точечных вихрей. Показано, что эти уравнения имеют квазигамильтонов вид. Найдено, что имеется два типа точечных плазменных вихрей: ионный вихрь и электронный вихрь. Структура ионного точечного вихря близка к гидродинамической за пределами локализованного плазменного ядра и имеет дальное действие. Электронный точечный вихрь имеет локализованное плазменное ядро, за пределами которого поля экспоненциально убывают. В результате двумерная двухжидкостная гидродинамика плазмы может быть представлена как ансамбль ионных и электронных точечных вихрей. Это обстоятельство порождает большое число новых нелинейных задач в физике плазмы.

**Ключевые слова:** двумерная гидродинамика, точечные вихри, точечные дипольные вихри, точные стационарные решения, двухжидкостная гидродинамика плазмы, вихревые структуры, крупномасштабная неустойчивость, спиральная турбулентность.

PACS numbers: 47.32.C, 47.20.Ky, 47.27.De, 52.30.-q.

**А. В. Тур, В. В. Яновський. Вихрові структури в двовимірній гідродинаміці**

#### *Анотація*

Огляд присвячено новим досягненням динаміки вихрових структур у двовимірній гідродинаміці та у двохиридинній гідродинаміці плазми. Значну увагу приділено точковим вихорам нового типу. Отримано рівняння руху

довільної кількості точкових дипольних вихорів, взаємодіючих як один з одним, так і з задовільною кількістю звичайним точковими вихорами. Виявлені стаціонарні гідродинамічні течії, що містять сингулярні вихори. Розглянуто процес генерації квазидвовимірних великомасштабних вихорових структур спіральною дрібномасштабною турбулентністю. З'ясовано механізм нестійкості на лінійній стадії та стабілізація на нелінійній стадії, що призводить до формування нелінійних структур.

**Ключові слова:** двовимірна гідродинаміка, точкові вихори, точкові дипольні вихори, точні стаціонарні рішення, дворідинна гідродинаміка плазми, вихорові структури, великомасштабна нестійкість, спіральна турбулентність.

### *Реферат*

В огляді обговорюються глибокі проблеми вихрових станів у гідродинамічних середовищах. У двовимірній гідродинаміці нестисливої рідини велика увага приділена новому типу точкових вихорів дипольного типу. Отримані рівняння руху довільної кількості точкових дипольних вихорів, взаємодіючих як один з одним, так і із заданою кількістю звичайних точкових вихорів. Доведено, що ці рівняння мають гамільтонову природу та отримано гамільтоніан такої системи крапкових вихорів. Запропоновано узагальнену дужку Пуассона, що дозволяє надати цим рівнянням руху універсального вигляду у формалізмі дужок Пуассона. Отримано закони збереження системи точкових вихорів і обговорюються питання деяких випадків невеликої кількості вихорів, що інтегрується. Доведено, що система двох точкових вихорів, один з яких точковий дипольний вихор, є точково інтегрована та детально досліджені всі режими руху такої системи вихорів. Детально обговорено вплив границь, що обмежують рідину, на рух точкового дипольного вихору. Точні гамільтонові рівняння руху отримані для вихору поблизу плоскої границі та області усередині прямого кута. Доведено, що такий вихор «відштовхується» від границь. Цей ефект робить їх винятково важливими для ключової проблеми переносу завихреності від границь у середовище.

Крім нестаціонарних рухів крапкових вихрів, отримані нові класи стаціонарних розв'язків двовимірних рівнянь Ейлера. Виявлений широкий клас нетривіальних розв'язків, які мають вигляд вихрових намист із раціональної завихреності. Ці вихрові конфігурації мають симетрію  $N$ -го порядку. При цьому  $N$  несингулярних вихорів розташовуються симетрично навколо крапкового центрального вихору. Знайдені параметри вихорів і характеристики особливих точок. У явному вигляді представлені розв'язки із симетрією до восьмого порядку включно. Цікаво підкреслити, що такі конфігурації, маючи винятково складну структуру, при віддаленні від неї вони вписуються в просте обертання рідини. Точкові дипольні вихори також призводять до появи нових стаціонарних течій. Так були виявлені стаціонарні вихрові розв'язки, які мають складні особливі точки. Складними особливими точками називаються особливі точки векторного поля, індекс яких більше одиниці. Наприклад, для крапкового диполя індекс векторного поля дорівнює двом. Для знаходження точних розв'язків використовується теорія узагальнених функцій. Побудовані розв'язки з індексом особливої крапки рівним трьом. Такі розв'язки виникають через злиття дипольної особливості й полюса  $n$ -го порядку. Побудовані явні розв'язки для полюсів шостого порядку включно.

Велику увагу приділено процесам генерації квазидвовимірних великомасштабних вихрових структур у стратифікованій рідині під дією спіральної дрібномасштабної сили. Методом багатомасштабного асимптотичного розкладу по малому числу Рейнольдса отримані замкнуті усереднені нелінійні рівняння

Рейнольдса для великомасштабних вихорових збуджень. Лінійний аналіз цих рівнянь виявив наявність великомасштабної нестійкості. У нелінійному режимі ця нестійкість насичується й породжує велику кількість періодичних вихорових структур. Серед цих структур присутні локалізовані розв'язки: до них належать розв'язки у вигляді спірального солітону нового типу. Такі вихори повинні відігравати важливу роль в атмосферних процесах різних планет.

Насамкінець доведено, що крапкові вихори повинні з'являтися й в інших гідродинамічних системах. Так, крапкові вихори були узагальнені на двовірну електронну й іонну гідродинаміку плазми. Підґрунтям цього узагальнення є використання рівнянь дворідинної гідродинаміки плазми у формі узагальнених інтегралів вимороженості. Виразження узагальненої завихреності у вигляді суми  $\delta$ -функцій дозволяє одержати рівняння руху крапкових вихрів. Доведено, що ці рівняння мають квазігамільтонів вигляд. Знайдено, що є два типи крапкових плазових вихорів: іонний вихор та електронний вихор. Структура іонного крапкового вихору близька до гідродинамічного та за межами локалізованого ядра має дальню дію. Електронний крапковий вихор має локалізоване плазове ядро, за межами якого поле експоненційно спадає. Таким чином, різноманітні течії у двовимірній, дворідинній гідродинаміці плазми можуть бути представлені ансамблем іонних і електронних крапкових вихорів. Ця обставина породжує велику кількість нових нелінійних задач у фізиці плазми.

**Ключові слова:** двовимірна гідродинаміка, точкові вихори, точкові дипольні вихори, точні стаціонарні рішення, дворідинна гідродинаміка плазми, вихорові структури, великомасштабна нестійкість, спіральна турбулентність.

PACS numbers: 47.32.C, 47.20.Ky, 47.27.De, 52.30.-q.

#### A. V. Tur, V. V. Yanovsky. Vortex structures in two-dimensional hydrodynamics

##### *Annotation*

The review is devoted to new achievements dynamics of vortex structures in two-dimensional hydrodynamics and two-fluid hydrodynamics of the plasma. We pay great attention to the new type of dipole point vortices in two dimensional hydrodynamics of non-compressible fluid. We obtain the motion equations for arbitrary number of dipole point vortices interacting with usual point vortices. Found stationary hydrodynamic flows containing singular vortices. We consider generation processes of quasi two dimensional large scale vortex structures in stratified fluids under impact of helical small scale force. Linear analysis of these equations shows presence of large scale instability. In nonlinear mode this instability saturates and generates a big number of periodical vortex structures. Among these structures there are localized solutions: solutions in the form of rotating solitons of new type and kink.

**Key words:** two-dimensional hydrodynamics, point vortices, point dipole, exact stationary solutions, two-fluid electron-ion hydrodynamics, vortex structures, large-scale instability, helical turbulence.

##### *Abstract*

In the review we discuss key issues of vortex states in hydrodynamic medium. We pay great attention to the new type of dipole point vortices in two dimensional hydrodynamics of non-compressible fluid. We obtain the motion equations for arbitrary number of dipole point vortices interacting with usual point vortices. It is shown that these equations have hamiltonian origins and we get the Hamiltonian

for this system. The generalized Poisson bracket is proposed which allows making universal these motion equations for Poisson brackets formalism. Conservation law for the system of point vortices is obtained and we consider the question concerning the integrability for particular cases of small number of point vortices. It is shown that the system of point dipole and usual point vortex is the exactly integrable, and we study in details all the modes of these vortices system motion. We discuss the impact of fluid boundaries on the motion of single dipole vortex. Exact hamiltonian motion equations are obtained for the vortex near the flat boundary and for the area inside right angle. It is shown, that these vortices are “repelled” from boundaries. This effect makes them extremely important for the essential problem of vorticity transfer from boundaries into media.

In addition to non-stationary point vortices we get new classes of stationary solutions for two dimensional Euler equations. We find a wide class of non-trivial solutions which have the form of vortex necklaces with rational vorticity. These vortex configurations have the  $N$ -order symmetry. But  $N$  of non-singular vortices are located symmetrically around the point central vortex. We find vortices parameters and characteristics of singular points. We present in explicit form solutions with the symmetry up to eighth order including. Point dipole vortices also lead to new stationary flows. In this way were found stationary vortices solutions which are complex singular points. Singular points of vector field with index more than one are called complex singular points. For instance, for point dipole the index of vector field is equal to two. In order to find point solutions one uses the theory of generalized functions. We get solutions with the index of the singular point equal to three. These solutions appear due to the fusion of dipole singularity and  $n$ -order pole. Explicit solutions are obtained for sixth-order poles including.

We consider generation processes of quasi two dimensional large scale vortex structures in stratified fluids under impact of helical small scale force. With the method of multi scale asymptotical development upon small Reynolds number we obtain averaged non-linear Reynolds equations for large scale vortex perturbations. Linear analysis of these equations shows presence of large scale instability. In nonlinear mode this instability saturates and generates a big number of periodical vortex structures. Among these structures there are localized solutions: solutions in the form of rotating solitons of new type and kink. These vortices have an important role in atmosphere processes of different planets.

In conclusion, it is proved that point vortices appear in other hydrodynamic type systems also. So, point vortices are generalized for the case of two dimensional electrons and ion plasma hydrodynamics. The basis for this generalization is the presentation of equations of two fluids plasma hydrodynamics in the form of frozen-in generalized integrals. The expression of generalized vorticity in the form of  $\delta$ -functions sum allows getting motion equations of point vortices. It is shown that these equations have quasi hamiltonian form. It is found that there are two types of point plasma vortices: ion vortex and electron vortex. The structure of ion point vortex is similar to the hydrodynamic one outside of limits of localized plasma kernel and has action a long-range action. The electron point vortex has localized plasma kernel, outside of which fields are decreasing exponentially. As a result bi-dimensional two fluids hydrodynamic of plasma can be presented as the set of ion and electron point vortices. This engenders numerous new nonlinear issues in physic of plasma.

**Key words:** two-dimensional hydrodynamics, point vortices, point dipole, exact stationary solutions, two-fluid electron-ion hydrodynamics, vortex structures, large-scale instability, helical turbulence.

PACS numbers: 47.32.C, 47.20.Ky, 47.27.De, 52.30.-q.

**Н. Ф. Шульга, С. П. Фомин. Влияние многократного рассеяния на тормозное излучение при высоких энергиях** / Проблемы теоретической физики. Научные труды / В. А. Буц, А. Г. Загородний, В. Е. Захаров, В. И. Карась, В. М. Куклин, А. В. Тур, С. П. Фомин, Н. Ф. Шульга, В. В. Яновский ; ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – Вып. 1. – С. 474–507 (Сер. «Проблемы теоретической и математической физики» ; под общ. ред. А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги).

#### **Аннотация**

Представлен краткий обзор результатов теоретических и экспериментальных исследований процесса тормозного излучения релятивистских электронов в аморфной среде в случае, когда многократное рассеяние частицы в веществе оказывает существенное влияние на излучение. Показано, что помимо известного эффекта Ландау-Померанчука-Мигдала при высоких энергиях имеет место также эффект подавления тормозного излучения в тонком слое вещества, существенно отличающийся по своим характеристикам от первого и являющийся прямым проявлением особенностей излучения «полуголого» электрона. Проведено сравнение результатов теоретических расчетов с данными недавних экспериментов, выполненных в СЛАК и ЦЕРН.

**Ключевые слова:** тормозное излучение, релятивистский электрон, многократное рассеяние, ЛПМ-эффект, ТШФ-эффект, «полуголая» частица.

#### **Реферат**

Несмотря на полуторазековую историю электродинамики, проблема излучения представляет до сих пор огромный интерес как с точки зрения теоретической физики, то есть понимания и адекватного описания самого процесса излучения в тех или иных условиях, так и для разнообразных практических приложений: от источников гамма-квантов с заданными характеристиками, до новых детектирующих систем. Особый интерес в последнее время связан с областью высоких энергий, когда процесс излучения движущейся в веществе релятивистской заряженной частицы развивается в большой пространственной области, в которую может попадать большое число атомов вещества. В этом случае необходимо учитывать влияние многократного рассеяния частицы на атомах среды на процесс излучения, что может приводить как к усилению излучения на определенных частотах (когерентные и интерференционные эффекты в кристаллах), так и к его подавлению (например, эффект Ландау-Померанчука-Мигдала в аморфной среде). В представленной работе дан краткий обзор результатов теоретических и экспериментальных исследований процесса тормозного излучения релятивистских электронов в аморфной среде в случае, когда многократное рассеяние частицы в веществе оказывает существенное влияние на излучение. Показано, что помимо известного эффекта Ландау-Померанчука-Мигдала (ЛПМ-эффект) при высоких энергиях имеет место также эффект подавления тормозного излучения в тонком слое вещества, существенно отличающийся по своим характеристикам от первого и являющийся прямым проявлением особенностей излучения «полуголого» электрона. В научной литературе этот эффект получил название эффекта Терновского-Шульги-Фомина (ТШФ-эффект) после детального экспериментального исследования,

выполненного в последние годы международной коллаборацией CERN NA63. Проведено сравнение результатов теоретических расчетов с данными экспериментальных исследований этих эффектов на ускорителях SLAC (США) и CERN (Швейцария). ЛПМ и ТШФ эффекты при больших энергиях приводят к заметным изменениям и в ряде других электродинамических процессов в веществе, таких как фотообразование электрон-позитронных пар, когерентное излучение в кристаллах, развитие электромагнитных ливней. Начиная с энергий порядка нескольких ТэВ, эти эффекты проявляются практически во всей области энергий рождающихся частиц и приводят к существенным изменениям таких важных параметров, как радиационная длина, каскадная длина развития электромагнитного ливня в веществе и других. Таким образом, ЛПМ и ТШФ эффекты необходимо учитывать при расчетах детекторов и радиационной защиты будущих ускорителей частиц сверхвысоких энергий типа ILC, NLC, CLIC и других, путем внесения соответствующих изменений в компьютерные коды типа GEANT4 и ему подобные, широко используемые при проведении моделирования процессов взаимодействия частиц высоких энергий с веществом. Аналоги ЛПМ и ТШФ эффектов должны иметь место также и в квантовой хромодинамике при взаимодействии кварков и глюонов, в частности, в кварк-глюонной плазме, возникающей при столкновении высокоэнергетических тяжелых ионов. Плазма в этом случае выступает в роли вещества, с которым взаимодействуют кварки.

**Ключевые слова:** тормозное излучение, релятивистский электрон, многократное рассеяние, ЛПМ-эффект, ТШФ-эффект, «полуголая» частица.

PACS: 11.80.Fv; 13.40.-f; 41.60.-m

## **М. Ф. Шульга, С. П. Фомін. Вплив багатократного розсіювання на гальмівне випромінювання при високих енергіях**

### ***Анотація***

Представлено короткий огляд результатів теоретичних та експериментальних досліджень процесу гальмового випромінювання релятивістських електронів в аморфному середовищі у випадку, коли багатократне розсіювання частинки в речовині суттєво впливає на процес випромінювання. Показано, що крім відомого ефекту Ландау-Померанчука-Мігдала при високих енергіях має місце також ефект пригнічення гальмового випромінювання в тонкому шарі речовини, який істотно відрізняється за своїми характеристиками від першого і є прямим проявом особливостей випромінювання «напівголого» електрона. Проведено порівняння результатів теоретичних розрахунків з даними недавніх експериментів, виконаних у СЛАК і ЦЕРН.

**Ключові слова:** гальмівне випромінювання, релятивістський електрон, багатократне розсіювання, ЛПМ-ефект, ТШФ-ефект, «напівгола» частинка.

### ***Реферат***

Незважаючи на півторавікову історію електродинаміки, проблема випромінювання представляє і дотепер величезний інтерес як з погляду теоретичної фізики, тобто розуміння й адекватного опису самого процесу випромінювання в тих або інших умовах, так і для різноманітних практичних застосувань: від джерел гамма-квантів із заданими характеристиками, до нових детектуючих систем. Особливий інтерес останнім часом пов'язаний з областю високих енергій, коли процес випромінювання релятивістської зарядженої частинки, що рухається в речовині, розвивається у великій просторовій області, в яку може потрапляти велика кількість атомів речовини. У цьому випадку необхідно враховувати вплив багатократного розсіювання частинки на атомах

середовища на процес випромінювання, що може призводити як до посилення випромінювання на певних частотах (когерентні й інтерференційні ефекти в кристалах), так і до його пригнічення (наприклад, ефект Ландау-Померанчука-Мигдала в аморфному середовищі). У представленій роботі наведено короткий огляд результатів теоретичних і експериментальних досліджень процесу гальмового випромінювання релятивістських електронів в аморфному середовищі у випадку, коли багатократне розсіяння частинки в речовині суттєво впливає на випромінювання. Показано, що крім відомого ефекту Ландау-Померанчука-Мигдала (ЛПМ-ефект) при високих енергіях має місце також ефект пригнічення гальмового випромінювання в тонкому шарі речовини, який істотно відрізняється за своїми характеристиками від першого і є прямим проявом особливостей випромінювання «напівголого» електрона. У науковій літературі цей ефект одержав назву ефекту Терновського-Шульги-Фоміна (або ТШФ-ефект) після детального експериментального дослідження, проведеного в останні роки міжнародною колаборацією CERN NA63. Наведено порівняння результатів теоретичних розрахунків з даними експериментальних досліджень цих ефектів на прискорювачах SLAC (США) і CERN (Швейцарія). ЛПМ і ТШФ-ефекти при надвисоких енергіях призводять до помітних змін і в низці інших електродинамічних процесах, таких як фотоутворення електрон-позитронних пар, когерентне випромінювання в кристалах, розвиток електромагнітних злив у речовині. Починаючи з енергій порядку декількох ТеВ, ці ефекти проявляються практично у всій області енергій частинок, що народжуються, і призводять до істотних змін таких важливих параметрів, як радіаційна довжина, каскадна довжина розвитку електромагнітної зливи та інших. Таким чином, ЛПМ і ТШФ-ефекти необхідно враховувати при розрахунках детекторів і радіаційного захисту майбутніх прискорювачів часток надвисоких енергій типу ILC, NLC, CLIC та інших шляхом внесення відповідних змін у комп'ютерні коди типу GEANT4 і подібних до нього, які широко використовуються при проведенні моделювання процесів взаємодії часток високих енергій з речовиною. Аналоги ЛПМ і ТШФ-ефектів повинні мати місце також і у квантовій хромодинаміці при взаємодії кварків і глюонів, зокрема, у кварк-глюонній плазмі, що виникає при зіткненні високоенергетичних важких іонів. Плазма в цьому випадку виступає в ролі речовини, з якою взаємодіють кварки.

**Ключові слова:** гальмівне випромінювання, релятивістський електрон, багатократне розсіювання, ЛПМ-ефект, ТШФ-ефект, «напівгола» частинка.

PACS: 11.80.Fv; 13.40.-f; 41.60.-m

## N. F. Shul'ga, S. P. Fomin. Multiple Scattering Effects on Bremsstrahlung at High Energy

### *Annotation*

A brief review of the results of theoretical and experimental investigations of relativistic electron bremsstrahlung in an amorphous medium in the case when the multiple scattering of particles in matter has a significant influence on the radiation is presented. It is shown that in addition to the known Landau-Pomeranchuk-Migdal effect at high energies there is also the effect of suppression of radiation in a thin layer of the matter, which differs in its characteristics from the first one and which is a direct manifestation of the radiation features of "half-bare" electron. A comparison of the results of theoretical calculations with the recent experiments performed at SLAC and CERN is carried out.

**Key words:** bremsstrahlung, relativistic electron, multiple scattering, LPM effect, TSF effect, half-bare particle.

### ***Abstract***

Despite a century and a half of Electrodynamics, the radiation problem is still of great interest both from the point of view of theoretical physics, that is, understanding and adequate description of the radiation process in certain conditions, and for a variety of practical applications, from gamma-radiation sources of given characteristics to new detection systems. Of particular interest in recent years is associated with an area of high-energy charged particle when the radiation process in matter is developed in a large spatial region, which could include a large number of atoms. In this case, it is necessary to take into account the effect of multiple scattering of the particle on the medium atoms in the process of radiation, which can lead both to increased radiation at certain frequencies (coherent and interference effects in crystals), and to its suppression (e.g., the Landau-Pomeranchuk-Migdal effect in amorphous medium). In the present paper we give a brief overview of the results of theoretical and experimental studies of the bremsstrahlung of relativistic electrons in an amorphous medium when multiple scattering of particles has a significant influence on the radiation. It is shown that at high energies in addition to the known Landau-Pomeranchuk-Migdal effect (LPM effect) there is also the effect of suppression of bremsstrahlung in a thin layer of matter, which is substantially different in its characteristics from the first one and which is a direct manifestation of the radiation features of "half-bare" electron. In the scientific literature, this effect is known as the Ternovskii-Shul'ga-Fomin effect (TSF effect) after its detailed experimental studies carried out by international collaboration CERN NA63 in recent years. Comparison of the results of theoretical calculations with the experimental data obtained at SLAC (USA) and CERN (Switzerland) accelerators is presented. The LPM and TSF effects at high energies lead to significant changes in several other electrodynamics' processes in the matter, such as photo-production of electron-positron pairs, coherent radiation in crystals, development of electromagnetic showers. Starting from the energies of a few TeV, these effects take place almost the entire energy region of produced particles and lead to significant changes of important parameters such as the radiation length, the cascade length of electromagnetic shower development in matter, and others. Thus, the LPM and TSF effects have to be taken into account when calculating the detectors and radiation protection for future particle accelerators of ultrahigh energy such as ILC, NLC, CLIC, and others, by making corresponding changes in the computer codes like GEANT4 and others, are widely used to carry out simulations of high energy particle interactions with matter. Analogues of LPM and TSF effects must also occur in Quantum Chromo Dynamics in the quark-gluon interaction, in particular, in the quark-gluon plasma produced in collisions of high energy heavy ions. Plasma in this case acts as a matter with which quarks interact.

**Key words:** bremsstrahlung, relativistic electron, multiple scattering, LPM effect, TSF effect, half-bare particle.

PACS: 11.80.Fv; 13.40.-f; 41.60.-m



**Загородний Анатолий Глебович** – доктор физико-математических наук, академик НАН Украины, иностранный член Российской академии наук, иностранный член-корреспондент Австрийской академии наук, вице-президент Академии наук Украины, директор Института теоретической физики имени Н. Н. Боголюбова НАН Украины (Киев), почетный доктор Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.



**Захаров Владимир Евгеньевич** – доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, директор (1993–2003 гг.), главный научный сотрудник Института теоретической физики имени Л. Д. Ландау РАН, зав. сектором Физического института имени П. Н. Лебедева РАН, профессор (Regent's Professor) университета Тусон (Аризона, США), награжден медалью Дирака, лауреат Государственных премий СССР и Российской Федерации.



**Шульга Николай Федорович** – доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Украины, директор Института теоретической физики имени А. И. Ахиезера ННЦ ХФТИ НАН Украины (Харьков), заведующий кафедрой Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, почетный доктор Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.



**Буз Вячеслав Александрович** – доктор физико-математических наук, начальник лаборатории ННЦ ХФТИ (Харьков) НАН Украины, профессор Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.



**Карась Вячеслав Игнатьевич** – доктор физико-математических наук, начальник лаборатории ННЦ ХФТИ (Харьков) НАН Украины, профессор Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники, член-корреспондент Международной академии наук прикладной радиоэлектроники Украины, Беларуси и России.



**Куклин Владимир Михайлович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.



**Тур Анатолий Валентинович** – доктор физико-математических наук, научный сотрудник Национального центра научных исследований Франции (CNRS), профессор Университета Пауль Сабатини, института исследований астрофизики и планетологии, выпускник Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.



**Фомин Сергей Петрович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института теоретической физики имени А. И. Ахиезера ННЦ ХФТИ (Харьков), сотрудник Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники.



**Яновский Владимир Владимирович** – доктор физико-математических наук, заведующий отделом Института монокристаллов НАН Украины (Харьков), профессор Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.

Наукове видання

**Буц** В'ячеслав Олександрович  
**Загородній** Анатолій Глібович  
**Захаров** Володимир Євгенійович  
**Карась** В'ячеслав Ігнатович  
**Куклін** Володимир Михайлович  
**Тур** Анатолій Валентинович  
**Фомін** Сергій Петрович  
**Шульга** Микола Федорович  
**Яновський** Володимир Володимирович

## ПРОБЛЕМИ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Наукові праці

(Рос. мовою)

Випуск 1

За редакцією професора В. М. Кукліна

Серія «Проблеми теоретичної  
і математичної фізики»

За загальною редакцією  
академіка А. Г. Загороднього,  
академіка М. Ф. Шульги

Коректор *О. В. Токар*  
Комп'ютерне верстання *О. С. Чистякова*  
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 70×100/16. Ум. друк. арк. 16,08. Тираж 300 пр.  
Зам. № 187/13.

Видавець і виготовлювач  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,  
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна  
Тел. 705-24-32