Одна задача механики системы матерьяльныхъ точекъ.

Д. К. Бобылева.

Рѣшить вопросъ о движенiи n матерьяльныхъ точекъ $M_1, M_2, \ldots M_i \ldots M_n$, остающихся на прямой линiи, которая не выходитъ изъ плоскости XY; каждая изъ точекъ M_i притягивается къ началу координатъ силою равною $\mu m_i r_i$, а между каждою парою точекъ M_i и M_j существуютъ взаимныя притяженiя, равныя $\varepsilon m_i m_j r_{ij}$.

$m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$ означаютъ массы точекъ, r_i — разстоянiе точки M_i отъ начала координатъ, r_{ij} — разстоянiе между точками M_i и M_j.

Уравненiями связей могутъ служить равенства:

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = 0\,,$$
$$(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1) = 0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x_n - x_1)(y_2 - y_1) - (y_n - y_1)(x_2 - x_1) = 0\,,$$

число которыхъ $(n-2)$. Такъ какъ число всѣхъ координатъ $2n$, то число независимыхъ координатъ равно $2n-(n-2)=(n+2)$, а потому предстоитъ произвести $(2n+4)$ интегрированiй и получить столько же независимыхъ интеграловъ для полнаго рѣшенiя вопроса.

Не трудно видѣть, что дифференцiальныя уравненiя движенiя центра инерцiи будутъ:

$$x_c'' = -\mu x_c\,, \quad y_c'' = -\mu y_c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

и что ихъ рѣшенiя, требующiя четырехъ интегрированiй, будутъ:

$$x_c = a_c \cos t\sqrt{\mu} + \frac{\alpha_c}{\sqrt{\mu}} \sin t\sqrt{\mu}\,,$$

$$y_c = b_c \cos t\sqrt{\mu} + \frac{\beta_c}{\sqrt{\mu}} \sin t\sqrt{\mu}\,,$$

гдѣ a_c, b_c суть начальныя координаты, α_c и β_c — проекціи начальной скорости центра инерціи.

Послѣ этого замѣнимъ x_i черезъ $(x_c + \xi_i)$ и y_i — черезъ $(y_c + \eta_i)$ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія точекъ, которыя на основаніи дифференціальныхъ уравненій (1) получаютъ тогда видъ:

$$\begin{aligned}
m_1\xi_1'' &= -m_1\varkappa^2\xi_1 + \lambda_3(\eta_3 - \eta_2) + \ldots + \lambda_n(\eta_n - \eta_2)\,,\\
m_1\eta_1'' &= -m_1\varkappa^2\eta_1 - \lambda_3(\xi_3 - \xi_2) - \ldots - \lambda_n(\xi_n - \xi_2)\,,\\
m_2\xi_2'' &= -m_2\varkappa^2\xi_2 - \lambda_3(\eta_3 - \eta_1) - \ldots - \lambda_n(\eta_n - \eta_1)\,,\\
m_2\eta_2'' &= -m_2\varkappa^2\eta_2 + \lambda_3(\xi_3 - \xi_1) + \ldots + \lambda_n(\xi_n - \xi_1)\,,\\
m_i\xi_i'' &= -m_i\varkappa^2\xi_i + \lambda_i(\eta_2 - \eta_1)\,,\\
m_i\eta_i'' &= -m_i\varkappa^2\eta_i - \lambda_i(\xi_2 - \xi_1)\,,
\end{aligned}$$

гдѣ i означаетъ одно изъ чиселъ $3, 4, \ldots n$; $\lambda_3, \lambda_4 \ldots \lambda_n$ суть множители, свойственные связямъ; $\varkappa^2 = \mu + \varepsilon M$, $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Изъ этихъ дифференціальныхъ уравненій получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i\eta_i'' - \eta_i\xi_i'') = 0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

далѣе, на основаніи уравненій связей:

$$\xi_i\xi_i'' + \eta_i\eta_i'' = -\varkappa^2(\xi_i^2 + \eta_i^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

для i равнаго $3, 4, \ldots n$; если же принять въ разсчетъ, что всѣ точки находятся на прямой и означить черезъ ϑ уголъ, составляемый этою прямою съ осью X-овъ, такъ что

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{\eta_2}{\xi_2} = \frac{\eta_3}{\xi_3} = \ldots = \frac{\eta_i}{\xi_i} = \ldots = \frac{\eta_n}{\xi_n} = \operatorname{tg}\vartheta\,,$$

то окажется, что дифференціальное уравненіе (3) имѣетъ мѣсто также и для точекъ M_1 и M_2.

Кромѣ этого здѣсь имѣетъ мѣсто законъ живой силы, выражаемый интеграломъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i[(\xi'_i)^2 + (\eta'_i)^2] = -\varkappa^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i{}^2 + \eta_i{}^2) + 2h \quad . \; . \; . \; (4)$$

Означимъ черезъ $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_i, \ldots \varrho_n$ разстоянія точекъ отъ центра инерціи; эти разстоянія и производныя отъ нихъ по времени связаны равенствами:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \varrho_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \varrho_i' = 0 .$$

Интегрируя дифференціальное уравненіе (2), получимъ:

$$J \frac{d\vartheta}{dt} = J_0 \vartheta'_0 , \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I)$$

гдѣ

$$J = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \varrho_i^2 , \quad J_0 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i a_i^2 ;$$

$a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots a_n$ означаютъ начальныя величины разстояній ϱ_1, $\varrho_2, \ldots \varrho_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i, \ldots \alpha_n$ будутъ означать начальныя величины производныхъ $\varrho'_1, \varrho'_2, \ldots \varrho'_n$.

Интегралъ (4) выразится такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i [(\varrho'_i)^2 + \varrho_i^2 (\vartheta')^2] + \varkappa^2 J = 2h , \quad . \; . \; . \; . \; . \; (II)$$

$$2h = A + (\vartheta'_0{}^2 + \varkappa^2) J_0 ; \quad A = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \, \alpha_i^2 .$$

Далѣе, каждое изъ дифференціальныхъ уравненій (3) можно представить такъ:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \varrho_i^2}{dt^2} = (\varrho'_i)^2 + \varrho_i^2 (\vartheta')^2 - \varkappa^2 \varrho_i^2 , \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

поэтому интегралу (II) можно дать слѣдующій видъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2J}{dt^2}+2\varkappa^2J=2h\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (6)$$

Произведя надъ (6) два интегрированія, получимъ:

$$J-\frac{h}{\varkappa^2}=\left(J_0-\frac{h}{\varkappa^2}\right)\cos 2\varkappa t+\frac{K}{\varkappa}\sin 2\varkappa t\,,\;.\;.\;. \quad (\mathrm{III, IV})$$

гдѣ

$$K=\sum_{i=1}^{i=n} m_i\,a_i\,\alpha_i\,.$$

Изъ теоріи опредѣлителей извѣстно, что

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i\,\varrho_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i\,(\varrho'_i)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i\,\varrho_i\,\varrho'_i\right)^2=$$

$$=\sum_i\sum_j m_i\,m_j\,(\varrho_i\,\varrho'_j-\varrho_j\,\varrho'_i)^2\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (7)$$

гдѣ двойная сумма распространяется на всевозможныя сочетанія чиселъ 1, 2, ... n попарно. Примѣнивъ равенство это къ начальнымъ значеніямъ ϱ и ϱ', получимъ:

$$J_0A-K^2=\sum_i\sum_j m_i\,m_j\,(a_i\alpha_j-a_j\alpha_i)^2\,;\;\;.\;.\;.\;.\;. \quad (8)$$

отсюда видно, что $J_0\,A-K^2$ есть величина положительная. Отношеніе

$$\frac{J_0A-K^2}{J_0{}^2\vartheta'_0{}^2}\,,$$

которое будетъ также величиною положительною, мы означимъ черезъ D^2. Легко видѣть, что

$$2h=K^2+J_0(\vartheta'_0)^2(1+D^2)+J_0\varkappa^2\;\;.\;.\;.\;.\;. \quad (9)$$

и что

$$J=J_0\vartheta'_0{}^2(1+D^2)\,\frac{\sin^2 t\varkappa}{\varkappa^2}\left\{1+\frac{\varkappa^2}{\vartheta'_0{}^2(1+D^2)}\left(\operatorname{cotg} t\varkappa+\frac{K}{\varkappa J_0}\right)^2\right\}.\;\;. \quad (10)$$

Подставивъ это выраженіе для J въ интегралъ (I), произведемъ пятое интегрированіе; тогда получимъ:

$$\operatorname{cotg}(\vartheta+\Gamma)\sqrt{1+D^2}=\frac{\varkappa}{\vartheta'_0\sqrt{1+D^2}}\left(\operatorname{cotg}t\varkappa+\frac{K}{J_0\varkappa}\right);$$

а если предположимъ, что при $t=0$ уголъ ϑ равенъ нулю, то окажется, что

$$\operatorname{tg}t\varkappa=\frac{J_0\varkappa\operatorname{tg}\varphi}{J_0\vartheta'_0\sqrt{1+D^2}-K\operatorname{tg}\varphi}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(V)}$$

$$\varphi=\vartheta\sqrt{1+D^2}$$

$$J\left\{\left(\cos\varphi-\frac{K}{J_0\vartheta'_0\sqrt{1+D^2}}\sin\varphi\right)^2+\frac{\varkappa^2J_0{}^2}{J_0{}^2\vartheta'_0{}^2(1+D^2)}\sin^2\varphi\right\}=J_0. \quad . \; (11)$$

Теперь замѣтимъ, что дифференціальныя уравненія (3) или (5) можно написать такъ:

$$\varrho_i\varrho_i''=\varrho_i^2[(\vartheta')^2-\varkappa^2];$$

поэтому имѣемъ $(n-1)$ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{\varrho_1''}{\varrho_1}=\frac{\varrho_2''}{\varrho_2}=\ldots\ldots=\frac{\varrho_i''}{\varrho_i}=\ldots\ldots=\frac{\varrho_n''}{\varrho_n},$$

изъ которыхъ найдемъ столько же интеграловъ:

$$\left.\begin{array}{l}\varrho_1\varrho_2'-\varrho_2\varrho_1'=C_{12}, \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \varrho_1\varrho_n'-\varrho_n\varrho_1'=C_{1n},\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (E)$$

гдѣ

$$C_{1i}=a_1\alpha_i-a_i\alpha_1.$$

Эти интегралы можно представить подъ видомъ равенствъ:

$$\frac{d\left(\dfrac{\varrho_2}{C_{12}\varrho_1}\right)}{dt}=\frac{d\left(\dfrac{\varrho_3}{C_{13}\varrho_1}\right)}{dt}=\ldots\ldots=\frac{d\left(\dfrac{\varrho_n}{C_{1n}\varrho_1}\right)}{dt}=\frac{1}{\varrho_1{}^2}, \quad . \; . \; (12)$$

поэтому можно произвести $(n-2)$ новыхъ интегрированій и получить столько же интеграловъ:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\varrho_3}{C_{13}\varrho_1} - \dfrac{\varrho_2}{C_{12}\varrho_1} = \Gamma_{23} \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \dfrac{\varrho_n}{C_{1n}\varrho_1} - \dfrac{\varrho_2}{C_{12}\varrho_1} = \Gamma_{2n}\,, \end{array}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (F)$$

гдѣ

$$\Gamma_{2i} = \frac{a_i}{C_{1i}a_1} - \frac{a_2}{C_{12}a_1} = -\frac{(a_2\alpha_i - a_i\alpha_2)}{C_{1i}C_{12}} \ . \ . \ . \ . \ . \ (13)$$

Такимъ образомъ, произведено $4+5+n-1+n-2$, то есть $(2n+6)$ интегрированій, а требовалось только $(2n+4)$; правда, постоянныя C_{1i} связаны между собою зависимостью:

$$\sum_{i=2}^{i=n} m_i C_{1i} = 0\,, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (14)$$

а съ постоянными Γ_{2i} еще другою зависимостью:

$$\sum_{i=3}^{i=n} m_i \Gamma_{2i} C_{12} C_{1i} + m_1 C_{12} = 0 \,^{*})\,, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (15)$$

---

*) Эти равенства (14) и (15) суть слѣдствія того, что

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i a_i = 0\,, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \alpha_i = 0\,;$$

въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ (14) вмѣсто C_{1i} ихъ выраженія въ a_1, α_1, a_i, α_i, а въ (15) выраженія Γ_{2i} по формулѣ (13), получимъ:

$$\sum_{i=2}^{i=n} m_i C_{1i} = a_1 \sum_{i=1}^{i=n} m_i \alpha_i - \alpha_1 \sum_{i=1}^{i=n} m_i a_i\,,$$

$$\sum_{i=3}^{i=n} m_i \Gamma_{2i} C_{12} C_{1i} = \alpha_2 \sum_{i=2}^{i=n} m_i a_i - a_2 \sum_{i=2}^{i=n} m_i \alpha^i = - m_1(a_2\alpha_1 - a_2\alpha_1)\,.$$

такъ что, стало быть, произведено два излишнихъ интегрированія. Однако, при ближайшемъ разсмотрѣніи полученныхъ результатовъ, оказывается, что вопросъ еще не рѣшенъ и что нужно произвести еще одно интегрированіе. Въ самомъ дѣлѣ, постоянныя C_{1i}, Γ_{2i} связаны между собою и съ постоянными h, K, J_0, ϑ'_0 еще одною зависимостью, которая получится изъ равенства (8) слѣдующимъ образомъ:

Вмѣсто A подставимъ $2h - J_0(\vartheta'^2_0 + \varkappa^2)$ и вмѣсто $(a_i\alpha_j - a_j\alpha_i)$ для i и j неравныхъ единицѣ — слѣдующее:

$$\frac{a_1 a_i \alpha_j - a_i a_j \alpha_1 - a_1 a_j \alpha_i + a_i \alpha_i \alpha_1}{a_1} = \frac{a_i C_{1j} - a_j C_{1i}}{a_1},$$

или, выразивъ a_i и a_j въ Γ_{2i} и въ Γ_{2j}:

$$(\Gamma_{2i} - \Gamma_{2j})\, C_{1i} C_{1j}\,.$$

Такимъ образомъ, получимъ:

$$2hJ_0 - K^2 - J_0^2(\vartheta'^2_0 + \varkappa^2) = \sum_{ij} m_i m_j (\Gamma_{2i} - \Gamma_{2j})^2 C_{1i}^2 C_{1j}^2 +$$

$$+ \sum_{k=2}^{k=n} m_1 m_k C_{1k}^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

гдѣ i и j суть числа $2, 3, \ldots n$, взятыя во всевозможныхъ сочетаніяхъ попарно.

Послѣднее интегрированіе я произведу надъ дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$d\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) = C_{12}\frac{dt}{\varrho_1^2},$$

въ которомъ замѣню dt, на основаніи интеграла (I)-го, отношеніемъ $Jd\vartheta : J_0\vartheta'_0$, вслѣдствіе чего получится:

$$d\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) = \frac{C_{12}}{J_0\vartheta'_0}\frac{J}{\varrho_1^2}\,d\vartheta\,. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Теперь я преобразую выраженіе момента инерціи J при помощи равенствъ:

$$\varrho_i = \frac{C_{1i}}{C_{12}}\varrho_2 + C_{1i}\Gamma_{2i}\varrho_1 = \frac{C_{1i}}{C_{12}}\varrho_2 - \frac{(a_2\alpha_i - a_i\alpha_2)}{C_{12}}\varrho_1$$

или

$$\varrho_i = \frac{C_{1i}\varrho_2 - C_{2i}\varrho_1}{C_{12}},$$

если обозначить разности $(a_2\alpha_i - a_i\alpha_2)$ черезъ C_{2i}; тогда получимъ:

$$C_{12}{}^2 J = \varrho_2{}^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}{}^2 - 2\varrho_2\varrho_1 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i} C_{2i} + \varrho_1{}^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{2i}{}^2, \quad . \quad . \quad (18)$$

поэтому:

$$\frac{J}{\varrho_1{}^2} C_{12}{}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}{}^2 \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i} C_{12}}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}{}^2} - \right)^2 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}{}^2 \sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i C_{2i}{}^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i} C_{2i} \right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}{}^2}.$$

Изъ теоріи опредѣлителей извѣстно, что

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}{}^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{2i}{}^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i} C_{2i} \right)^2 =$$

$$= \sum_{ij} m_i m_j (C_{1i} C_{2j} - C_{1j} C_{2i})^2;$$

здѣсь можно произвести слѣдующее преобразованіе:

$$C_{1i} C_{2j} - C_{1j} C_{2i} = a_2 (C_{1i}\alpha_j - C_{1j}\alpha_i) - \alpha_2 (C_{1i} a_j - C_{1j} a_i);$$

$$C_{1i}\alpha_j - C_{1j}\alpha_i = -(a_i\alpha_j - a_j\alpha_i)\alpha_1,$$

$$C_{1i} a_j - C_{1j} a_i = -(a_i\alpha_j - a_j\alpha_i) a_1,$$

$$C_{1i} C_{2j} - C_{1j} C_{2i} = (a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1)(a_i\alpha_j - a_j\alpha_i).$$

Поэтому, на основаніи равенства (8), вышесказанная разность оказывается равною:

$$C_{12}{}^2 (AJ_0 - K^2) = C_{12}{}^2 J_0{}^2 \vartheta'_0{}^2 D^2.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{J}{\varrho_1{}^2}C_{12}{}^2=\frac{C_{12}{}^2J_0{}^2\vartheta'{}_0{}^2D^2}{\Sigma m_iC_{1i}{}^2}\left\{\frac{(\Sigma m_iC_{1i}{}^2)^2}{J_0{}^2\vartheta'{}_0{}^2D^2C_{12}{}^2}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}-\frac{\Sigma m_iC_{1i}C_{2i}}{\Sigma m_iC_{1i}{}^2}\right)^2+1\right\}. \quad (18\text{bis})$$

Имѣя это выраженіе, я подставляю его въ дифференціальное уравненіе (17), которое интегрирую, и получаю:

$$\frac{\Sigma m_iC_{1i}{}^2}{J_0\vartheta'{}_0DC_{12}}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}-\frac{\Sigma m_iC_{1i}C_{2i}}{\Sigma m_iC_{1i}{}^2}\right)=\operatorname{tg}D(\vartheta+\Gamma)\,.\;\;.\;\;.\quad(19)$$

Здѣсь Γ новая постоянная; такъ какъ при $t=0$ уголъ $\vartheta=0$, $\varrho_1=a_1$, $\varrho_2=a_2$, то

$$\operatorname{tg}D\Gamma=\frac{a_2\Sigma m_iC_{1i}{}^2-a_1\Sigma m_iC_{1i}C_{2i}}{a_1J_0\vartheta'{}_0DC_{12}},$$

$$a_2\Sigma m_iC_{1i}{}^2-a_1\Sigma m_iC_{1i}C_{2i}=\Sigma m_iC_{1i}(a_2C_{1i}-a_1C_{2i})=$$

$$=C_{12}\,\Sigma m_iC_{1i}\alpha_i=C_{12}\,(a_1K-\alpha_1J_0)\,;$$

$$\operatorname{tg}D\Gamma=\frac{a_1K-\alpha_1J_0}{a_1J_0\vartheta'{}_0D}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(20)$$

Изъ выраженія (18 bis) и интегральнаго уравненія (19) получается:

$$\frac{J}{\varrho_1{}^2}=\frac{J_0{}^2\vartheta'{}_0{}^2D^2}{\Sigma m_iC_{1i}{}^2}\,\frac{1}{\cos^2D(\vartheta+\Gamma)}\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(21)$$

а отсюда и изъ (11):

$$\varrho_1=\frac{a_1\cos D\vartheta-\dfrac{a_1K-\alpha_1J_0}{J_0\vartheta'{}_0D}\sin D\vartheta}{\sqrt{\left(\cos\varphi-\dfrac{K}{J_0\vartheta'{}_0\sqrt{1+D^2}}\sin\varphi\right)^2+\dfrac{x^2}{\vartheta'{}_0{}^2(1+D^2)}\sin^2\varphi}}\,,\;.\quad(22)$$

потому что

$$\cos D\Gamma=\frac{a_1J_0\vartheta'{}_0D}{\sqrt{J_0\Sigma m_iC_{1i}{}^2}},\qquad \sin D\Gamma=\frac{a_1K-\alpha_1J_0}{\sqrt{J_0\Sigma m_iC_{1i}{}^2}},$$

$$J_0\Sigma m_iC_{1i}{}^2=J_0(a_1{}^2A-2a_1\alpha_1K+\alpha_1{}^2J_0)=$$

$$=(a_1K-\alpha_1J_0)^2+a_1{}^2(AJ_0-K^2)=(a_1K-\alpha_1J_0)^2+a_1{}^2J_0{}^2\vartheta'{}_0{}^2D^2.$$

Имѣя выраженія для ϱ_1, получимъ выраженія для ϱ_i слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\varrho_i}{\varrho_1} = \frac{a_i}{a_1} + \frac{C_{1i}}{C_{12}}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{a_2}{a_1}\right);$$

$$\frac{C_{1i}}{C_{12}}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{a_2}{a_1}\right) = \frac{J_0\vartheta'_0 DC_{1i}}{\Sigma m_i C_{1i}{}^2}\left[\operatorname{tg} D(\vartheta + \Gamma) - \operatorname{tg} D\Gamma\right] =$$

$$= \frac{J_0\vartheta'_0 DC_{1i}}{\Sigma m_i C_{1i}{}^2}\,\frac{\sin D\vartheta}{\cos D\Gamma \cos D(\vartheta + \Gamma)};$$

$$\cos D\Gamma \cos D(\vartheta + \Gamma) = \frac{a_1\vartheta'_0 D\sqrt{J_0}}{\sqrt{\Sigma m_i C_{1i}{}^2}}\,\frac{\varrho_1}{\sqrt{J}}\,\frac{J_0\vartheta'_0 D}{\sqrt{\Sigma m_i C_{1i}{}^2}};$$

$$\varrho_i = \frac{a_i}{a_1}\varrho_1 + \frac{\sqrt{J}C_{1i}}{a_1\vartheta'_0 D\sqrt{J_0}}\sin D\vartheta;$$

$$\varrho_i\sqrt{\frac{J_0}{J}} = a_i \cos D\vartheta - \frac{a_1 K - \alpha_1 J_0}{a_1\vartheta'_0 DJ_0}\,a_i \sin D\vartheta + \frac{C_{1i}}{a_1\vartheta'_0 D}\sin D\vartheta;$$

$$(a_1 K - \alpha_1 J_0)\,a_i - J_0 C_{1i} = a_1(a_i K - \alpha_i J_0).$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\varrho_i = \frac{a_i \cos D\vartheta - \dfrac{a_i K - \alpha_i J_0}{J_0\vartheta'_0 D}\sin D\vartheta}{\sqrt{\left(\cos\varphi - \dfrac{K}{J_0\vartheta'_0\sqrt{1 + D^2}}\sin\varphi\right)^2 + \dfrac{\varkappa^2}{\vartheta'_0{}^2(1 + D^2)}\sin^2\varphi}},$$

гдѣ $\varphi = \vartheta\sqrt{1 + D^2}$.

Конечно, полученное выраженіе для ϱ_i удовлетворяетъ дифференціальному уравненію второго порядка:

$$\varrho_i'' = \varrho_i\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \varkappa^2\right],$$

въ которомъ

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{J_0\vartheta'_0}{\dfrac{h}{\varkappa^2} + \left(J_0 - \dfrac{h}{\varkappa^2}\right)\cos 2\varkappa t + \dfrac{K}{\varkappa}\sin 2\varkappa t}.$$

11 Ноября 1888 г.