# О ДЕФОРМАЦІИ

## КОЛЛИНЕАРНО-ИЗМѢНЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХЪ ИЗМѢРЕНІЙ.

*П. О. Сомова.*

1. Кинематику какой-либо измѣняемой системы можно изучать двоякаго рода способами. Обыкновенный пріемъ, употребляемый главнымъ образомъ въ теоріи упругости и въ гидродинамикѣ, основанъ на разсматриваніи безконечно-малыхъ элементовъ системы, изъ которыхъ каждый можно считать системою однородно-измѣняемою, т. е. такою, для которой прямолинейныя координаты каждой ея точки суть какія-либо линейныя функціи начальныхъ координатъ этой точки. Изучая, какъ измѣняются съ переходомъ отъ одной точки данной системы къ другой направленія главныхъ осей деформаціи и величины удлиненій по этимъ осямъ, можно составить себѣ понятіе о деформаціи всей данной системы. Далеко не всегда такой пріемъ приводитъ къ цѣли, такъ какъ это часто приводитъ къ сложнымъ вычисленіямъ, не соотвѣтствующимъ характеру деформаціи, которая можетъ быть при этомъ весьма простою по своимъ геометрическимъ свойствамъ. Вслѣдствіе этого теряется наглядное представленіе объ этой деформаціи. Это становится понятнымъ, если принять во вниманіе, что различныя измѣняемыя системы подчиняются различнымъ законамъ деформаціи, которые, если разсматривать измѣняемую сис-

тему конечныхъ измѣреній, по своему характеру могутъ вовсе не соотвѣтствовать параметрамъ, измѣряющимъ деформацію однородно-измѣняемой системы.

Въ такихъ случаяхъ другой путь можетъ скорѣе и проще привести къ цѣли. Для каждой измѣняемой системы мы можемъ выбирать особые параметры деформаціи, такіе, которые для этой системы наиболѣе характерны, т. е. которые наиболѣе простымъ и нагляднымъ образомъ выражаютъ законы деформаціи этой системы.

Эти послѣднія соображенія могутъ быть приложены и къ изученію деформаціи коллинеарно-измѣняемой системы трехъ измѣреній, т. е. такой системы точекъ, измѣняемость которой подчинена условію, чтобы всѣ плоскости, составленныя изъ точекъ этой системы, оставались во все время движенія плоскостями. Извѣстно, что однородно-измѣняемая система представляетъ собою частный случай системы коллинеарно - измѣняемой; поэтому мы найдемъ параметры деформаціи, характерные для коллинеарно-измѣняемой системы, если опредѣлимъ деформацію, которая останется у коллинарно-измѣняемой системы, когда эта система будетъ лишена деформаціи, характерной для системы однородно-измѣняемой.

2. Будемъ называть раздвиганіемъ измѣняемой системы такое ея движеніе, въ которомъ всѣ точки, лежащія въ параллельныхъ между собою плоскостяхъ, переходятъ въ плоскости, параллельныя первоначальнымъ, перемѣщаясь при этомъ по радіусамъ-векторамъ, проведеннымъ къ нимъ изъ одного общаго полюса, который мы будемъ называть центромъ раздвиганій. Пусть будетъ $O$ этотъ центръ, а $\delta$ и $\delta'$ разстоянія его отъ одной изъ параллельныхъ плоскостей до и послѣ раздвиганія.

Величину

$$\sigma = \frac{\delta' - \delta}{\delta\delta'} \qquad (1)$$

условимся называть величиною раздвиганія, а направленіе нормали, приведенной изъ точки $O$ къ плоскости $P$ въ ту сторону, куда происходитъ перемѣщеніе этой плоскости, — направленіемъ раздвиганія. Ниже мы увидимъ, чѣмъ оправдывается сдѣланный нами выборъ выраженія для измѣренія величины раздвиганія. Мы увидимъ также, что эту величину раздвиганія удобно изображать графически, откладывая ее изъ центра раздвиганій въ видѣ радіуса-вектора по направленію раздвиганія.

Замѣтимъ себѣ зависимость между величиною раздвиганія и коэффиціентами плоскости до и послѣ раздвиганія. Если $x_0$, $y_0$, $z_0$ суть координаты центра раздвиганій и

$$\lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z + \mu = 0$$

уравненіе раздвигаемой плоскости, то координаты какой-либо ея точки послѣ раздвиганія будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \sigma\delta'(x - x_0) \\ y' &= y + \sigma\delta'(y - y_0) \\ z' &= z + \sigma\delta'(z - z_0) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и будутъ удовлетворять уравненію

$$\lambda_x x' + \lambda_y y' + \lambda_z z' + \mu' = 0.$$

Между $\sigma$, $\mu$ и $\mu'$ будетъ поэтому слѣдующая зависимость:

$$\mu' = \mu + \sigma\delta'(\lambda_x x_0 + \lambda_y y_0 + \lambda_z z_0 + \mu). \qquad (3)$$

**3.** Деформація коллинеарно-измѣняемой системы въ общемъ случаѣ сопряжена съ раздвиганіями, имѣющими общее направленіе и одинаковую величину. Легко можно показать, что этими раздвиганіями и характеризуется отличіе деформаціи коллинеарно-измѣняемой системы отъ деформаціи системы однородно-

измѣняемой, такъ-что послѣднюю можно разсматривать какъ систему коллинеарно-измѣняемую, только лишенную раздвиганій. Дѣйствительно, самыя общія формулы, опредѣляющія движеніе коллинеарно-измѣняемой системы трехъ измѣреній, суть, какъ извѣстно, слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A_1a+B_1b+C_1c+D_1}{\alpha a+\beta b+\gamma c+1} \\ y &= \frac{A_2a+B_2b+C_2c+D_2}{\alpha a+\beta b+\gamma c+1} \\ z &= \frac{A_3a+B_3b+C_3c+D_3}{\alpha a+\beta b+\gamma c+1} \end{aligned}\right\}, \qquad (4)$$

гдѣ $a$, $b$, $c$ суть начальныя координаты точки ($x$, $y$, $z$), а $A_1$, $B_1$,.....$D_3$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ какія нибудь функціи времени. Эти три зависимости можно замѣнить слѣдующими шестью:

$$\left.\begin{aligned} k\xi &= A_1a+B_1b+C_1c+D_1 \\ k\eta &= A_2a+B_2b+C_2c+D_2 \\ k\zeta &= A_3a+B_3b+C_3c+D_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (5)$$

$$x = \frac{k\xi}{\alpha a+\beta b+\gamma c+1},$$

$$y = \frac{k\eta}{\alpha a+\beta b+\gamma c+1},$$

$$z = \frac{k\zeta}{\alpha a+\beta b+\gamma c+1},$$

причемъ въ послѣднихъ трехъ формулахъ можно, воспользовавшись уравненіями (5), подставить:

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+1 = k(\lambda_x\xi+\lambda_y\eta+\lambda_z\zeta+1),$$

гдѣ

$$=_{x} \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \quad \lambda_z = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

$$k = 1 - (D_1 \lambda_x + D_2 \lambda_y + D_3 \lambda_z).$$

Такимъ образомъ, отъ начальнаго положенія всякой точки коллинеарно-измѣняемой системы къ ея конечному положенію можно перейти помощію двухъ слѣдующихъ преобразованій:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{A_1}{k} a + \frac{B_1}{k} b + \frac{C_1}{k} c + \frac{D_1}{k} \\ \eta &= \frac{A_2}{k} a + \frac{B_2}{k} b + \frac{C_2}{k} c + \frac{D_2}{k} \\ \zeta &= \frac{A_3}{k} a + \frac{B_3}{k} b + \frac{C_3}{k} c + \frac{D_3}{k} \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1} \\ y &= \frac{\lambda}{\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1} \\ z &= \frac{\zeta}{\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1} \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Формулы (6) выражаютъ въ самомъ общемъ видѣ движеніе однородно-измѣняемой системы, а формулы (7) опредѣляютъ раздвиганіе по направленію, нормальному къ плоскости.

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1 = \text{пост.} = q, \tag{8}$$

потому что координаты всѣхъ точекъ, лежащихъ въ этой плоскости, увеличиваются при перемѣщеніи, выраженномъ формулами (7), въ отношеніи $1 : q$, и, слѣдовательно, двигаясь по радіусамъ-векторамъ, проведеннымъ къ точкамъ этой плоскости изъ начала координатъ, переходятъ въ другую плоскость, параллельную первой. Центромъ раздвиганій служитъ начало координатъ. Точно также точки, лежащія въ другой плоскости, параллельной плоскости (8), получаютъ раздвиганіе по тому же направленію и съ тѣмъ же центромъ.

Величина раздвиганія будетъ одинакова для всѣхъ параллельныхъ между собою плоскостей. Дѣйствительно, по формуламъ (2) и (7) для величины раздвиганія мы получаемъ:

$$\sigma\delta' = \frac{x-\xi}{\xi} = \frac{y-\eta}{\eta} = \frac{z-\zeta}{\zeta} = -\frac{\lambda_x\xi+\lambda_y\eta+\lambda_z\zeta}{\lambda_x\xi+\lambda_y\eta+\lambda_z\zeta+1} = \frac{1-q}{q}\cdot \quad (9)$$

А постоянный коэффиціентъ плоскости (8) послѣ раздвиганія получимъ, принявъ во вниманіе, что теперь по формулѣ (3)

$$\mu' = (1-q)(1+\sigma\delta') = \frac{1-q}{q}. \quad (10)$$

Такъ какъ

$$\delta' = \frac{\mu'}{\sqrt{\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2}},$$

то, исключивъ изъ двухъ послѣднихъ уравненій $\mu'$, найдемъ

$$\delta' = \frac{1-q}{q\sqrt{\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2}} = \frac{\sigma\delta'}{\sqrt{\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2}},$$

откуда $\sigma = \sqrt{\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2}$ (11)

Итакъ, величина раздвиганія не зависитъ отъ начальнаго разстоянія плоскости отъ центра раздвиганій, т. е. одинакова для всѣхъ параллельныхъ между собою плоскостей.

**4.** Прослѣдимъ, какъ измѣняется отношеніе перемѣщенія раздвигаемой плоскости къ ея первоначальному разстоянію отъ центра раздвиганій, т. е. $\frac{\delta'-\delta}{\delta} = \sigma\,\delta'$, съ измѣненіемъ $q$ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

При $q = -\infty$ формула (9) даетъ $\frac{\delta'-\delta}{\delta} = -1$, а формула (10) $\mu' = -1$ и стало быть всѣ точки, лежавшія въ безконечно-далекой плоскости

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta = -\infty, \tag{12}$$

перешли въ плоскость

$$\lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z = 1. \tag{13}$$

При измѣненіи $q$ отъ $-\infty$ до $-\varepsilon$, гдѣ $\varepsilon$ безконечно-малая положительная величина, $\frac{\delta'-\delta}{\delta}$ будетъ, оставаясь отрицательною, приближаться къ $-\infty$, и точки, лежавшія въ плоскости

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1 = -\varepsilon,$$

удаляются въ безконечность.

При $q = +\varepsilon$, $\frac{\delta'-\delta}{\delta}$ будетъ положительнымъ безконечно-большимъ числомъ и точки плоскости

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1 = +\varepsilon$$

удаляются въ безконечность по направленіямъ, прямо противоположнымъ перемѣщеніямъ соотвѣтственныхъ точекъ предыдущей плоскости. Такимъ образомъ, при непрерывномъ раздвиганіи коллинеарно-измѣняемой системы точки плоскости

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1 = 0$$

переходятъ въ безконечно-удаленную плоскость и черезъ безконечность перескакиваютъ въ другую безконечно-удаленную плоскость, параллельную первой, но лежащую съ другой стороны отъ центра раздвиганій.

При измѣненіи $q$ отъ 0 до $+1$, $\frac{\delta' - \delta}{\delta}$ отъ $+\infty$ приближается къ 0, и, слѣдовательно точки плоскости

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta = 0$$

не претерпѣваютъ раздвиганія, т. е. эта плоскость при раздвиганіи всей системы остается неподвижною и всѣ точки ея сохраняютъ свое положеніе.

Наконецъ, при измѣненіи $q$ отъ $+1$ до $+\infty$, $\frac{\delta' - \delta}{\delta}$ принимаетъ отрицательныя значенія и переходитъ въ $-1$. Точки, лежавшія певоначально въ безконечно-далекой плоскости, находящейся по другую сторону отъ центра раздвиганій чѣмъ плоскость (12), переходятъ въ плоскость (13).

Итакъ, для конечнаго раздвиганія коллинеарно-измѣняемой системы характерны три слѣдующихъ параллельныхъ между собою плоскости: 1) двѣ плоскости, находящіяся на разстояніи $\frac{1}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}}$ отъ центра раздвиганій по разныя отъ него стороны, изъ которыхъ одна при раздвиганіи удаляется въ безконечность, а другая представляетъ собою конечное положеніе плоскости, находившейся до раздвиганія въ безконечности, и 2) плоскость, проходящая черезъ центръ раздвиганій, представляющая геометрическое мѣсто точекъ, которыя при раздвиганіи остаются неподвижными.

5. Раздвиганіе по своему кинематическому значенію представляетъ нѣкоторую аналогію съ другими кинематическими элементами. Эта аналогія проявляется въ вопросѣ о составномъ раздвиганіи, т. е. о перемѣщеніи коллинеарно-измѣняемой системы, состоящемъ изъ двухъ послѣдовательныхъ раздвиганій. Можно показать, что, хотя и не всегда, но при нѣкоторыхъ ограниченіяхъ, совокупность двухъ раздвиганій эквивалентна простому раздвиганію, которое можетъ быть опредѣлено путемъ геометрическаго сложенія.

Формулы (7) опредѣляютъ раздвиганіе, центръ котораго находится въ началѣ координатъ. Замѣнимъ теперь эти формулы болѣе общими, предположивъ, что центръ раздвиганій находится въ какой-нибудь другой точкѣ $(x_0, y_0, z_0)$; эти формулы будутъ:

$$\left.\begin{aligned}
x-x_0 &= \frac{\xi-x_0}{\lambda_x(\xi-x_0)+\lambda_y(\eta-y_0)+\lambda_z(\zeta-z_0)+1}\\
y-y_0 &= \frac{\eta-y_0}{\lambda_x(\xi-x_0)+\lambda_y(\eta-y_0)+\lambda_z(\zeta-z_0)+1}\\
z-z_0 &= \frac{\zeta-z_0}{\lambda_x(\xi-x_0)+\lambda_y(\eta-y_0)+\lambda_z(\zeta-z_0)+1}
\end{aligned}\right\}. \qquad (14)$$

Разсмотримъ теперь движеніе коллинеарно-измѣняемой системы, состоящее изъ совокупности двухъ раздвиганій около различныхъ центровъ. Пусть будетъ $O_1\ (x_1\ y_1\ z_1)$ центръ перваго раздвиганія и $O_2\ (x_2\ y_2\ z_2)$ центръ второго раздвиганія, $(\lambda'_x, \lambda'_y, \lambda'_z)$ и $(\lambda''_x, \lambda''_y, \lambda''_z)$ коэффиціенты этихъ раздвиганій, $(x, y, z)$ координаты какой-нибудь точки системы послѣ перваго раздвиганія, $(X, Y, Z)$ координаты этой точки послѣ перваго и второго раздвиганій.

Составляемыя перемѣщенія будутъ тогда опредѣляться слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
x-x_1&=\frac{\xi-x_1}{\lambda'_x(\xi-x_1)+\lambda'_y(\eta-y_1)+\lambda'_z(\zeta-z_1)+1}\\
y-y_1&=\frac{\eta-y_1}{\lambda'_x(\xi-x_1)+\lambda'_y(\eta-y_1)+\lambda'_z(\zeta-z_1)+1}\\
z-z_1&=\frac{\zeta-z_1}{\lambda'_x(\xi-x_1)+\lambda'_y(\eta-y_1)+\lambda'_z(\zeta-z_1)+1}
\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}
X-x_2&=\frac{x-x_2}{\lambda''_x(x-x_2)+\lambda''_y(y-\eta_2)+\lambda''_z(z-z_2)+1}\\
Y-y_2&=\frac{y-\eta_2}{\lambda''_x(x-x_2)+\lambda''_y(y-\eta_2)+\lambda''_z(z-z_2)+1}\\
Z-z_2&=\frac{z-z_2}{\lambda''_x(x-x_2)+\lambda''_y(y-\eta_2)+\lambda''_z(z-z_2)+1}
\end{aligned}\right\}.$$

Подставивъ въ эти послѣднія формулы для $x$, $y$ и $z$ ихъ выраженія черезъ начальныя координаты, мы и получимъ формулы, опредѣляющія совокупность двухъ послѣдовательныхъ раздвиганій. Эти формулы можно представить въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}
X-x_2&=\frac{[1+\lambda'_x(x_1-x_2)](\xi-x_1)+\lambda'_y(x_1-x_2)(\eta-y_1)+\lambda'_z(x_1-x_2)(\zeta-z_1)+x_1-x_2}{(\lambda''_x+\lambda'_xU_2)(\xi-x_1)+(\lambda''_y+\lambda'_yU_2)(\eta-y_1)+(\lambda''_z+\lambda'_zU_2)(\zeta-z_1)+U_2}\\
Y-y_2&=\frac{\lambda'_x(y_1-y_2)(\xi-x_1)+[1+\lambda'_y(y_1-y_2)](\eta-y_1)+\lambda'_z(y_1-y_2)(\zeta-z_1)+y_1-y_2}{(\lambda''_x+\lambda'_xU_2)(\xi-x_1)+(\lambda''_y+\lambda'_yU_2)(\eta-y_1)+(\lambda''_z+\lambda'_zU_2)(\zeta-z_1)+U_2}\\
Z-z_2&=\frac{\lambda'_x(z_1-z_2)(\xi-x_1)+\lambda'_y(z_1-z_2)(\eta-y_1)+[1+\lambda'_z(z_1-z_2)](\zeta-z_1)+z_1-z_2}{(\lambda''_x+\lambda'_xU_2)(\xi-x_1)+(\lambda''_y+\lambda'_yU_2)(\eta-\eta_1)+(\lambda''_z+\lambda'_zU_2)(\zeta-z_1)+U_2}
\end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

гдѣ

$$U_2=\lambda''_x(x_1-x_2)+\lambda''_y(y_1-y_2)+\lambda''_z(z_1-z_2)+1.$$

Эти формулы выражаютъ движеніе коллинеарно-измѣняемой системы, вообще говоря, болѣе сложное, чѣмъ простое раздвиганіе.

6. Для того, чтобы формулы (15) могли давать простое раздвиганіе, необходимо, чтобы элементы составляемыхъ раздвиганій были связаны между собою нѣкоторыми условіями, которыя мы теперь и опредѣлимъ. Формулы (15) будутъ представлять простое раздвиганіе въ томъ случаѣ, если ихъ можно будетъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} X-A &= \frac{\xi-A}{\lambda_x(\xi-A)+\lambda_y(\eta-B)+\lambda_z(\zeta-C)+1} \\ Y-B &= \frac{\eta-B}{\lambda_x(\xi-A)+\lambda_y(\eta-B)+\lambda_z(\zeta-C)+1} \\ Z-C &= \frac{\zeta-C}{\lambda_x(\xi-A)+\lambda_y(\eta-B)+\lambda_z(\zeta-C)+1} \end{aligned}\right\}, \quad (16)$$

гдѣ $(A, B, C)$ суть координаты центра раздвиганій. Чтобы рѣшить вопросъ, когда это возможно, преобразуемъ формулы (15) такимъ образомъ, чтобы тамъ вездѣ изъ перемѣнныхъ координатъ вычитались координаты искомаго центра раздвиганій $(A, B, C)$. Подставляя

$$\begin{aligned} X-x_2 &= (X-A)+(A-x_2), \\ Y-y_2 &= (Y-B)+(B-y_2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \zeta-z_1 &= (\zeta-C)+(C-z_1), \end{aligned}$$

мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} X-A &= \frac{L_1(\xi-A)+M_1(\eta-B)+N_1(\zeta-C)+P_1}{(\lambda''_x+\lambda'_xU_2)(\xi-A)+(\lambda''_y+\lambda'_yU_2)(\eta-B)+(\lambda''_z+\lambda'_zU_2)(\zeta-C)+Q} \\ Y-B &= \frac{L_2(\xi-A)+M_2(\eta-B)+N_2(\zeta-C)+P_2}{(\lambda''_x+\lambda'_xU_2)(\xi-A)+(\lambda''_y+\lambda'_yU_2)(\eta-B)+(\lambda''_z+\lambda'_zU_2)(\zeta-C)+Q} \\ Z-C &= \frac{L_3(\xi-A)+M_3(\eta-B)+N_3(\zeta-C)+P_3}{(\gamma''_x+\lambda'_xU_2)(\xi-A)+(\lambda''_y+\lambda'_yU_2)(\eta-B)+(\lambda''_z+\lambda'_zU_2)(\zeta-C)+Q} \end{aligned}\right\}, \quad (17)$$

положивъ для сокращенія:

$$\left.\begin{aligned}
L_1 &= 1+\lambda'_x(x_1-x_2)-(\lambda''_x+\lambda'_x U_2)(A-x_2)\\
M_1 &= \lambda'_y(x_1-x_2)-(\lambda''_y+\lambda'_y U_2)(A-x_2)\\
N_1 &= \lambda'_z(x_1-x_2)-(\lambda''_z+\lambda'_z U_2)(A-x_2)\\
P_1 &= L_1(A-x_1)+M_1(B-y_1)+N_1(C-z_1)+\\
&\quad + x_1-x_2-U_2(A-x_2)
\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}
L_2 &= \lambda'_x(y_1-y_2)-(\lambda''_x+\lambda'_x U_2)(B-y_2)\\
M_2 &= 1+\lambda'_y(y_1-y_2)-(\lambda''_y+\lambda'_y U_2)(B-y_2)\\
N_2 &= \lambda'_z(y_1-y_2)-(\lambda''_z+\lambda'_z U_2)(B-y_2)\\
P_2 &= L_2(A-x_1)+M_2(B-y_1)+N_2(C-z_1)+\\
&\quad + y_1-y_2-U_2(B-y_2)
\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}
L_3 &= \lambda'_x(z_1-z_2)-(\lambda''_x+\lambda'_x U_2)(C-z_2)\\
M_3 &= \lambda'_y(z_1-z_2)-(\lambda''_y+\lambda'_y U_2)(C-z_2)\\
N_3 &= 1+\lambda'_z(z_1-z_2)-(\lambda''_z+\lambda'_z U_2(C-z_2)\\
P_3 &= L_3(A-x_1)+M_3(B-y_1)+N_3(C-z_1)+\\
&\quad + z_1-z_2-U_2(C-z_2)
\end{aligned}\right\},$$

$$Q=(\lambda''_x+\lambda'_x U_2)(A-x_1)+(\lambda''_y+\lambda'_y U_2)(B-y_1)+$$
$$+(\lambda''_z+\lambda'_z U_2)(C-z_1)+U_2.$$

Для того, чтобы формулы (17) были тождественны съ формулами (16), должны быть выполнены слѣдующія условія:

$$M_1=0,\quad N_1=0,\quad P_1=0, \tag{18}$$
$$L_2=0,\quad N_2=0,\quad P_2=0, \tag{19}$$
$$L_3=0,\quad M_3=0,\quad P_3=0, \tag{20}$$
$$L_1=M_2=N_3; \tag{21}$$

и кромѣ того, мы должны еще имѣть

$$\frac{L_1}{Q}=1. \tag{22}$$

Тогда мы получимъ для коэффиціентовъ составнаго раздвиганія

$$\lambda_x = \frac{\lambda''_x + \lambda'_x U_2}{L_1}, \; \lambda_y = \frac{\lambda''_y + \lambda'_y U_2}{L_1}, \; \lambda_z = \frac{\lambda''_z + \lambda'_z U_2}{L_1}.$$

При изслѣдованіи найденныхъ условій нужно различать два случая: 1) когда центры слагаемыхъ раздвиганій не совпадаютъ и 2) когда они совпадаютъ.

Обращаясь къ первому случаю, мы можемъ предполагать, что ни одна изъ разностей $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ не равна нулю; если бы одна или двѣ изъ этихъ разностей оказались равными нулю, то можно было бы перемѣною направленій координатныхъ осей этого избѣжать. Первыя два изъ условій (18) даютъ

$$\frac{\lambda''_y}{\lambda'_y} = \frac{\lambda''_z}{\lambda'_z},$$

а первыя два изъ условій (19)

$$\frac{\lambda''_z}{\lambda'_z} = \frac{\lambda''_x}{\lambda'_x},$$

послѣ чего первыя два изъ условій (20) удовлетворяются сами собой.

Послѣднее изъ условій (18), если положимъ

$$\frac{\lambda''_x}{\lambda'_x} = \frac{\lambda''_y}{\lambda'_y} = \frac{\lambda''_z}{\lambda'_z} = k \tag{23}$$

и подставимъ

$$A - x_2 = \frac{\lambda'_y (x_1 - x_2)}{\lambda''_y + \lambda'_y U_2} = \frac{x_1 - x_2}{k + U_2},$$

приводится къ слѣдующему:

$$U_2 = 1,$$

т. е.

$$\lambda''_x(x_1-x_2)+\lambda''_y(y_1-y_2)+\lambda''_z(z_1-z_2)=0. \quad (24)$$

Къ тому же приводятъ и послѣднія изъ условій (19) и (20). Что касается до условій (21), то они теперь удовлетворяются сами собой, такъ какъ каждая изъ величинъ $L_1$ $M_2$ и $N_3$ обращается въ единицу. Условіе (22) тоже удовлетворяется, потому что теперь

$$Q=1.$$

Для координатъ центра составного раздвиганія мы получаемъ

$$A=\frac{kx_2+x_1}{k+1}, \quad B=\frac{ky_2+y_1}{k+1}, \quad C=\frac{kz_2+z_1}{k+1},$$

а для коэффиціентовъ этого раздвиганія

$$\left.\begin{aligned}\lambda_x&=\lambda'_x+\lambda''_x\\ \lambda_y&=\lambda'_y+\lambda''_y\\ \lambda_z&=\lambda'_z+\lambda''_z\end{aligned}\right\}.$$

И такъ, если центры слагаемыхъ раздвиганій не совпадаютъ, то (23) и (24) суть необходимыя и достаточныя условія для того, чтобы совокупность двухъ раздвиганій была тоже простымъ раздвиганіемъ. Мы можемъ найденные результаты формулировать слѣдующимъ образомъ:

Для того, чтобы совокупность двухъ раздвиганій изъ различныхъ центровъ была эквивалентна простому раздвиганію, необходимо и достаточно, 1) чтобы направленія слагаемыхъ раздвиганій совпадали, и 2) чтобы центры слагаемыхъ раздвиганій лежали на прямой, перпендикулярной къ общему направленію раздвиганій. Направленіе сложнаго раздвиганія бу-

детъ при этомъ совпадать съ направленіемъ слагаемыхъ раздвиганій, коэффиціенты его будутъ равны суммамъ соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ слагаемыхъ раздвиганій и центръ его будетъ находиться на прямой, соединяющей центры слагаемыхъ раздвиганій, раздѣляя разстояніе между ними въ отношеніи, обратномъ отношенію соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ раздвиганій.

Во второмъ случаѣ, когда центры слагаемыхъ раздвиганій совпадаютъ, составное движеніе всегда будетъ простымъ раздвиганіемъ съ тѣмъ же самымъ центромъ. Это можно видѣть прямо изъ формулъ (15), которыя, если въ нихъ положимъ

$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2, \tag{25}$$

обращаются въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} X - x_1 &= \frac{\xi - x_1}{(\lambda'_x + \lambda''_x)(\xi - x_1) + (\lambda'_y + \lambda''_y)(\eta - y_1) + (\lambda'_z + \lambda''_z)(\zeta - z_1) + 1} \\ Y - y_1 &= \frac{\eta - y_1}{(\lambda'_x + \lambda''_x)(\xi - x_1) + (\lambda'_y + \lambda''_y)(\eta - y_1) + (\lambda'_z + \lambda''_z)(\zeta - z_1) + 1} \\ Z - z_1 &= \frac{\zeta - z_1}{(\lambda'_x + \lambda''_x)(\xi - x_1) + (\lambda'_y + \lambda''_y)(\eta - y_1) + (\lambda'_z + \lambda''_z)(\zeta - z_1) + 1} \end{aligned}\right\},$$

причемъ направленія слагаемыхъ раздвиганій могутъ теперь и не совпадать.

Послѣднія формулы показываютъ, что величина сложнаго раздвиганія есть геометрическая сумма величинъ слагаемыхъ раздвиганій, если величину раздвиганія откладывать такъ, какъ объ этомъ было сказано въ § 2.

**7.** Порядокъ двухъ послѣдовательныхъ конечныхъ раздвиганій, вообще говоря, не безразличенъ. Дѣйствительно, измѣняя

этотъ порядокъ противъ принятаго нами въ § 6, т. е. употребляя формулы:

$$
\left.
\begin{aligned}
x-x_2 &= \frac{\xi-x_2}{\lambda''_x(\xi-x_2)+\lambda''_y(\eta-y_2)+\lambda''_z(\zeta-z_2)+1}\\
y-y_2 &= \frac{\eta-y_2}{\lambda''_x(\xi-x_2)+\lambda''_y(\eta-y_2)+\lambda''_z(\zeta-z_2)+1}\\
z-z_2 &= \frac{\zeta-z_2}{\lambda''_x(\xi-x_2)+\lambda''_y(\eta-y_2)+\lambda''_z(\zeta+z_2)+1}
\end{aligned}
\right\}
$$

и

$$
\left.
\begin{aligned}
X-x_1 &= \frac{x-x_1}{\lambda'_x(x-x_1)+\lambda'_y(y-y_1)+\lambda'_z(z-z_1)+1}\\
Y-y_1 &= \frac{y-y_1}{\lambda'_x(x-x_1)+\lambda'_y(y-y_1)+\lambda'_z(z-z_1)+1}\\
Z-z_1 &= \frac{z-z_1}{\lambda'_x(x-x_1)+\lambda'_y(y-y_1)+\lambda'_z(z-z_1)+1}
\end{aligned}
\right\},
$$

мы получимъ для $X, Y, Z$ слѣдующія выраженія черезъ начальныя координаты:

$$
\left.
\begin{aligned}
X-x_1 &= \frac{[1+\lambda''_x(x_2-x_1)](\xi-x_2)+\lambda''_y(x_2-x_1)(\eta-y_2)+\lambda''_z(x_2-x_1)(\zeta-z_2)+(x_2-x_1)}{(\lambda'_x+\lambda''_xU_1)(\xi-x_2)+(\lambda'_y+\lambda''_yU_1)(\eta-y_2)+(\lambda'_z+\lambda''_zU_1)(\zeta-z_2)+U_1}\\
Y-y_1 &= \frac{\lambda''_x(y_2-y_1)(\xi-x_2)+[1+\lambda''_y(y_2-y_1)](\eta-y_2)+\lambda''_z(y_2-y_1)(\zeta-z_2)+(y_2-y_1)}{(\lambda'_x+\lambda''_xU_1)(\xi-x_2)+(\lambda'_y+\lambda''_yU_1)(\eta-y_2)+(\lambda'_z+\lambda''_zU_1)(\zeta-z_2)+U_1}\\
Z-z_1 &= \frac{\lambda''_x(z_2-z_1)(\xi-x_2)+\lambda''_y(z_2-z_1)(\eta-y_2)+[1+\lambda''_z(z_2-z_1)](\zeta-z_2)+(z_2-z_1)}{(\lambda'_x+\lambda''_xU_1)(\xi-x_2)+(\lambda'_y+\lambda''_yU_1)(\eta-y_2)+(\lambda'_z+\lambda''_zU_1)(\zeta-z_2)+U_2}
\end{aligned}
\right\},
$$

причемъ

$$U_1=\lambda'_x(x_2-x_1)+\lambda'_y(y_2-y_1)+\lambda'_z(z_2-z_1)+1.$$

Дѣлая сравненіе этихъ формулъ съ формулами (15), мы убѣдимся, что первыя не будутъ въ общемъ случаѣ тождественны со вторыми.

Для насъ важно замѣтить слѣдующее: если совокупность двухъ раздвиганій даетъ опять простое раздвиганіе, то порядокъ раздвиганій становится безразличнымъ.

Это легко видѣть, сравнивая между собою формулы (26) и (15) и принимая при этомъ во вниманіе условія (23) и (24) или условіе (25).

8. Всякое раздвиганіе можетъ быть разложено на три раздвиганія по направленіямъ осей координатъ съ тѣмъ же общимъ центромъ, какъ и данное раздвиганіе, причемъ величинами раздвиганій будутъ проекціи на осяхъ координатъ величины даннаго раздвиганія.

Это есть прямое слѣдствіе результатовъ, приведенныхъ въ § 6-мъ. Легко это показать и непосредственно. Пусть будутъ $\lambda_x$, $\lambda_y$ и $\lambda_z$ величины раздвиганій по направленіямъ координатныхъ осей около центра $x_0$, $y_0$, $z_0$. Координаты какой-нибудь точки въ этихъ послѣдовательныхъ раздвиганіяхъ будутъ выражаться слѣдующимъ образомъ:

въ первомъ раздвиганіи

$$x' - x_0 = \frac{\xi - x_0}{\lambda_x(\xi - x_0) + 1}, \quad y' - y_0 = \frac{\eta - y_0}{\lambda_x(\xi - x_0) + 1},$$

$$z' - z_0 = \frac{\zeta - z_0}{\lambda_x(\xi - x_0) + 1},$$

во второмъ раздвиганіи

$$x'' - x_0 = \frac{x' - x_0}{\lambda_y(y' - y_0) + 1}, \quad y'' - y_0 = \frac{y' - y_0}{\lambda_y(y' - y_0) + 1},$$

$$z'' - z_0 = \frac{z' - z_0}{\lambda_y(y' - y_0) + 1},$$

а въ третьемъ раздвиганіи

$$x - x_0 = \frac{x'' - x_0}{\lambda_z(z'' - z_0) + 1}, \quad y - y_0 = \frac{y'' - y_0}{\lambda_z(z'' - z_0) + 1},$$

$$z - z_0 = \frac{z'' - z_0}{\lambda_z(z'' - z_0) + 1}.$$

Исключая отсюда координаты $x'$, $y'$, $z'$, $x''$, $y''$, $z''$, мы получимъ формулы (14), опредѣляющія простое раздвиганіе, величина котораго равна $\sqrt{\lambda^2{}_x + \lambda^2{}_y + \lambda^2{}_z}$.

9. Теперь мы можемъ ясно себѣ представить тѣ 15 кинематическихъ элементовъ, изъ которыхъ слагается всякое перемѣщеніе коллинеарно-измѣняемой системы:

3 поступательныхъ перемѣщенія по осямъ координатъ,

3 вращенія около осей координатъ,

3 удлиненія по осямъ координатъ,

3 сдвиганія въ плоскостяхъ, параллельныхъ координатнымъ,

3 раздвиганія по направленіямъ координатныхъ осей.

10. При всякомъ безконечно-маломъ перемѣщеніи коллинеарно-измѣняемой системы будетъ происходить безконечно-малое раздвиганіе ея. Будемъ называть предѣлъ отношенія величины этого безконечно-малаго раздвиганія къ соотвѣтственному элементу времени **скоростью раздвиганія**. Согласно этому опредѣленію скорость раздвиганія должна быть измѣряема величиною

$$\tau = \sqrt{\lambda'^2{}_x + \lambda'^2{}_y + \lambda'^2{}_z},$$

гдѣ $\lambda'_x$, $\lambda'_y$, $\lambda'_z$ суть производныя по времени коэффиціентовъ раздвиганія.

Чтобы это показать, выразимъ проекціи на координатныхъ осяхъ скорости какой-нибудь точки въ моментъ $t$ черезъ координаты этой точки, соотвѣтствующія этому моменту. Дифференцируя для этого по $t$ уравненія (7) и подставляя потомъ вмѣ-

сто начальныхъ координатъ ихъ выраженія черезъ $x$, $y$, $z$, получимъ для проекцій скорости:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= -x(\lambda'_x x + \lambda'_y y + \lambda'_z z) \\ V_y &= -y(\lambda'_x x + \lambda'_y y + \lambda'_z z) \\ V_z &= -z(\lambda'_x x + \lambda'_y y + \lambda'_z z) \end{aligned}\right\}. \qquad (27)$$

Проекціи безконечно-малаго перемѣщенія точки, если пренебрегать величинами высшихъ порядковъ, будутъ поэтому:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= -x(\Delta\lambda_x . x + \Delta\lambda_y . y + \Delta\lambda_z . z) \\ \Delta y &= -y(\Delta\lambda_x . x + \Delta\lambda_y . y + \Delta\lambda_z . z) \\ \Delta z &= -z(\Delta\lambda_x . x + \Delta\lambda_y . y + \Delta\lambda_z . z) \end{aligned}\right\}.$$

Съ другой стороны, разсматривая эти перемѣщенія, произошедшими отъ безконечно-малаго раздвиганія, мы должны имѣть:

$$\left.\begin{aligned} x + \Delta x &= \frac{x}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} \\ y + \Delta y &= \frac{y}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} \\ z + \Delta z &= \frac{z}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} \end{aligned}\right\},$$

гдѣ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ суть безконечно-малые коэффиціенты раздвиганій. Для опредѣленія этихъ коэффиціентовъ мы имѣемъ зависимости

$$\frac{x}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} = x[1 - (\Delta\lambda_x . x + \Delta\lambda_y . y + \Delta\lambda_z . z)],$$

$$\frac{y}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} = y[1 - (\Delta\lambda_x . x + \Delta\lambda_y . y + \Delta\lambda_z . z)],$$

$$\frac{z}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} = z[1 - (\Delta\lambda_x . x + \Delta\lambda_y . y + \Delta\lambda_z . z)].$$

Но, пренебрегая безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ, можно написать

$$\frac{1}{\alpha x+\beta y+\gamma z+1}=1-(\alpha x+\beta y+\gamma z)$$

и мы находимъ:

$$\alpha=\Delta\lambda_x,\ \ \beta=\Delta\lambda_y,\ \ \gamma=\Delta\lambda_z.$$

$\sqrt{(\Delta\lambda_x)^2+(\Delta\lambda_y)^2+(\Delta\lambda_z)^2}$ будетъ поэтому величиною этого раздвиганія, а по опредѣленію $\sqrt{{\lambda'_x}^2+{\lambda'_y}^2+{\lambda'_z}^2}$ скоростью раздвиганія.

Если скорость раздвиганія откладывать по предѣльному направленію этого раздвиганія и означить черезъ $\varrho$ радіусъ-векторъ, проведенный изъ центра раздвиганія къ точкѣ $(x, y, z)$, то скорость всякой точки можетъ быть по формулѣ (27) выражена такъ:

$$v=\varrho^2\cdot\tau\cdot\cos(\varrho,\tau),$$

т. е. скорость всякой точки равна квадрату радіуса-вектора, проведеннаго къ ней изъ центра раздвиганій, умноженному на проекцію скорости раздвиганія на направленіе этого радіуса-вектора.

Далѣе, легко видѣть, что если безконечно-малое раздвиганіе разложить на раздвиганія по направленіямъ координатныхъ осей со скоростями $\lambda'_x$, $\lambda'_y$, $\lambda'_z$, то скорости какой-нибудь точки системы, зависящія отъ этихъ раздвиганій, будутъ лежать на одной прямой и будутъ имѣть значенія

$$\varrho.\lambda'_x x,\ \ \varrho.\lambda'_y y,\ \ \varrho.\lambda'_z z,$$

а скорость точки, зависящая отъ полнаго раздвиганія, будетъ алгебраической суммою этихъ трехъ скоростей.

Всѣ точки, лежащія въ плоскости, нормальной къ скорости раздвиганія и проходящей черезъ центръ раздвиганій, имѣютъ скорости, равныя нулю.

Геометрическое мѣсто точекъ, скорости которыхъ равны, есть поверхность четвертаго порядка

$$(x^2+y^2+z^2)(\lambda'_x x+\lambda'_y y+\lambda'_z z)^2=C^2.$$

Эта поверхность имѣетъ свойство, что для всѣхъ ея точекъ произведеніе радіуса-вектора, проведеннаго изъ центра раздвиганій, на направленіе нормали къ плоскости нулевыхъ скоростей, есть величина постоянная.

11. Выраженія (27) суть тѣ добавочные члены, которые нужно приложить къ линейнымъ функціямъ координатъ, выражающимъ проекціи скоростей точекъ однородно-измѣняемой системы, чтобы получить проекціи скоростей точекъ въ общемъ случаѣ движенія системы коллинеарно-измѣняемой. Въ этомъ легко убѣдиться, взявъ производныя по времени въ формулахъ (4) и подставивъ туда потомъ вмѣсто начальныхъ координатъ $a$, $b$, $c$ ихъ выраженія черезъ координаты $x$, $y$, $z$. Это дастъ выраженія, состоящія изъ линейныхъ функцій этихъ координатъ и изъ членовъ такого вида, какіе входятъ въ формулы (27).

Такимъ образомъ, скорость всякой точки коллинеарно-измѣняемой системы слагается изъ скорости, зависящей отъ раздвиганія, и изъ скоростей, которыя въ геометрической суммѣ даютъ скорость точки въ движеніи системы однородно-измѣняемой.