

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМЪ

УРАВНЕНИИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАГО РЯДА.

А. А. Маркова.

Эта замѣтка посвящена опредѣленію всѣхъ случаевъ, когда произведеніе двухъ какихъ нибудь рѣшеній дифференціального уравненія

$$x(1-x) \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\gamma - (\alpha + \beta + 1)x \right) \frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0 \quad (1)$$

равно цѣлой функціи отъ x .

Для рѣшенія нашего вопроса составимъ сначала по извѣстнымъ правиламъ дифференціальное уравненіе 3-го порядка, которому удовлетворяетъ произведеніе

$$z = y_1 y_2 \quad (2)$$

двухъ какихъ нибудь рѣшеній (y_1 и y_2) уравненія (1).

Полагая для краткости

$$x(1-x) = p, \quad \gamma - (\alpha + \beta + 1)x = q, \quad -\alpha\beta = r, \quad (3)$$

находимъ:

$$z = y_1 y_2,$$

$$\frac{dz}{dx} = y_1 \frac{dy_2}{dx} + y_2 \frac{dy_1}{dx},$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = y_1 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + y_2 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx},$$

$$\begin{aligned} p \frac{d^2 z}{dx^2} &= -y_1 \left(q \frac{dy_2}{dx} + r y_2 \right) - y_2 \left(q \frac{dy_1}{dx} + r y_1 \right) + 2p \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx} = \\ &= 2p \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx} - q \frac{dz}{dx} - 2r z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{dp}{dx} \frac{d^2 z}{dx^2} &= 2p \frac{dy_1}{dx} \frac{d^2 y_2}{dx^2} + 2p \frac{dy_2}{dx} \frac{d^2 y_1}{dx^2} + 2 \frac{dp}{dx} \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx} - \\ &- q \frac{d^2 z}{dx^2} - \left(\frac{dq}{dx} + 2r \right) \frac{dz}{dx} = 2 \left(\frac{dp}{dx} - 2q \right) \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx} - q \frac{d^2 z}{dx^2} - \\ &- \left(\frac{dq}{dx} + 4r \right) \frac{dz}{dx}, \end{aligned}$$

и наконецъ, по исключеніи $\frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dy_2}{dx}$,

$$\begin{aligned} p^2 \frac{d^3 z}{dx^3} + 3pq \frac{d^2 z}{dx^2} + \left(2q^2 + p \frac{dq}{dx} - q \frac{dp}{dx} + 4rp \right) \frac{dz}{dx} + \\ + 2r \left(2q - \frac{dp}{dx} \right) z = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя затѣмъ вмѣсто p , q и r ихъ выраженія (3), получаемъ

$$\begin{aligned} x^2 (1-x)^2 \frac{d^3 z}{dx^3} + 3x(1-x)(ax+b) \frac{d^2 z}{dx^2} + (cx^2 + dx + e) \frac{dz}{dx} + \\ + (fx + g) z = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

гдѣ

$$\left. \begin{aligned} a &= -(\alpha + \beta + 1) \\ b &= \gamma \\ c &= 2\alpha^2 + 8\alpha\beta + 2\beta^2 + 3\alpha + 3\beta + 1 \\ d &= -2\gamma(2\alpha + 2\beta + 1) - 4\alpha\beta \\ e &= 2\gamma^2 - \gamma \\ f &= 4\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ g &= -2\alpha\beta(2\gamma - 1). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

При какихъ же условіяхъ уравненіе (4) допускаетъ рѣшеніе

$z =$ цѣлой функціи x ?

Пусть

$$z = L_0 + L_1x + L_2x^2 + \dots + L_{n-1}x^{n-1} + L_nx^n, \quad (6)$$

гдѣ

$$L_0, L_1, L_2, \dots, L_{n-1}, L_n$$

нѣкоторыя постоянныя и притомъ L_n не нуль.

Подставляя выраженіе (6) вмѣсто z въ лѣвую часть уравненія (4), получаемъ цѣлую функцію $n + 1$ -ой степени относительно x

$$P_0 + P_1x + P_2x^2 + \dots + P_{n-1}x^{n-1} + P_nx^n + P_{n+1}x^{n+1}, \quad (7)$$

которая, согласно нашимъ требованіямъ, должна тождественно обращаться въ нуль.

Коэффициенты

$$P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1}$$

опредѣляются равенствами

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= R_0 L_0 + S_0 L_1 \\ P_1 &= Q_1 L_0 + R_1 L_1 + S_1 L_2 \\ &\dots \dots \dots \\ P_{m+1} &= Q_{m+1} L_m + R_{m+1} L_{m+1} + S_{m+1} L_{m+2} \\ &\dots \dots \dots \\ P_n &= Q_n L_{n-1} + R_n L_n \\ P_{n+1} &= Q_{n+1} L_n, \end{aligned} \right\} (8)$$

гдѣ вообще

$$\left. \begin{aligned} Q_{m+1} &= m(m-1)(m-2) + 3(\alpha + \beta + 1)m(m-1) + \\ &\quad + (2\alpha^2 + 8\alpha\beta + 2\beta^2 + 3\alpha + 3\beta + 1)m + 4\alpha\beta(\alpha + \beta) = \\ &\quad = (m + 2\alpha)(m + 2\beta)(m + \alpha + \beta) \\ R_{m+1} &= -2(m+1)m(m-1) - 3(\gamma + \alpha + \beta + 1)(m+1)m - \\ &\quad - (2\gamma(2\alpha + 2\beta + 1) + 4\alpha\beta)(m+1) - 2\alpha\beta(2\gamma - 1) \\ S_{m+1} &= (m+2)(m+1)m + 3\gamma(m+2)(m+1) + \\ &\quad + (2\gamma^2 - \gamma)(m+2) = (m+2)(m+\gamma+1)(m+2\gamma). \end{aligned} \right\} (9)$$

Остается подобрать числа

$$\alpha, \beta, \gamma, n, L_0, L_1, L_2, \dots, L_{n-1}, L_n$$

такъ, чтобы всѣ выраженія

$$P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1}$$

обратились въ нуль.

Условіе

$$P_{n+1} = 0$$

даетъ намъ

$$n = -2\alpha \text{ или } -2\beta \text{ или } -(\alpha + \beta).$$

Что же касается остальныхъ уравненій

$$P_0 = 0, P_1 = 0, \dots, P_n = 0,$$

то они навѣрно будутъ удовлетворены при нѣкоторой системѣ значеній чиселъ

$$L_0, L_1, \dots, L_n,$$

между которыми встрѣчаются не равныя нулю, если только приводится къ нулю опредѣлитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} R_0, S_0, 0, 0 & \dots & 0, 0 \\ Q_1, R_1, S_1, 0 & \dots & 0, 0 \\ 0, Q_2, R_2, S_2 & \dots & 0, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, 0, \dots & Q_{n-1}, R_{n-1}, S_{n-1} \\ 0, 0, \dots & 0, Q_n, R_n \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Такимъ образомъ вопросъ нашъ сводится къ рѣшенію уравненія

$$\Delta_n = 0 \quad (11)$$

при условіи

$$n = -2\alpha \text{ или } -2\beta \text{ или } -(\alpha + \beta). \quad (12)$$

Это рѣшеніе заключается въ нижеслѣдующихъ предложеніяхъ.

Соотношеніе между Δ_{m+1} , Δ_m и Δ_{m-1}

$$\Delta_{m+1} = R_{m+1} \Delta_m - Q_{m+1} S_m \Delta_{m-1} \quad (13)$$

представляетъ простое слѣдствіе извѣстной теоремы о разложе-
ніи опредѣлителя по элементамъ какой нибудь строки или какого
нибудь столбца.

Лемма 1.

При n четномъ и $\alpha = -\frac{n}{2}$ или $\beta = -\frac{n}{2}$ определитель Δ_n тождественно обращается въ нуль.

Для доказательства достаточно вспомнить, что при n четномъ и $\alpha = -\frac{n}{2}$ или $\beta = -\frac{n}{2}$ уравненіе (1) допускаетъ рѣшеніе $y =$ цѣлой функціи $\frac{n}{2}$ степени отъ x , квадратъ же этой цѣлой функціи долженъ удовлетворять уравненію (4).

Лемма 2.

Если наши уравненія (11) и (12) удовлетворены при нѣкоторой системѣ значеній чиселъ

$$\alpha, \beta, \gamma, n,$$

то они не нарушатся и по замѣнѣ γ на $\alpha + \beta + 1 - \gamma$.

Для доказательства достаточно замѣтить, что замѣна γ на $\alpha + \beta + 1 - \gamma$ соотвѣтствуетъ тому преобразованію дифференціального уравненія (1), когда x замѣняются на $(1 - x)$.

Теорема 1.

$$\begin{aligned} \Delta_{2k} &= \alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\dots \\ &\dots(\alpha+k)(\beta+k)\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)\dots\left(\gamma+\frac{2k-1}{2}\right)\Phi_{2k} \\ \Delta_{2k+1} &= \alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\dots \\ &\dots(\alpha+k)(\beta+k)\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)\dots \\ &\dots\left(\gamma+\frac{2k-1}{2}\right)\Phi_{2k+1}, \end{aligned} \tag{14}$$

гдѣ Φ_{2k} и Φ_{2k+1} цѣлыя функціи отъ α, β, γ , обращающіяся въ нуль:

первая

при

$$\alpha + \beta = -k - s,$$

$$\gamma = -\frac{2k+1}{2}, -\frac{2k+3}{2}, \dots, -\frac{2k+2s-1}{2}$$

$$(s = 1, 2, 3, \dots, k),$$

вторая

при

$$\alpha + \beta = -k - s,$$

$$\gamma = -\frac{2k+1}{2}, -\frac{2k+3}{2}, \dots, -\frac{2k+2s-1}{2}$$

$$(s = 1, 2, 3, \dots, k+1).$$

Доказательство.

Непосредственные вычисления дают:

$$\Delta_0 = -2\alpha\beta(2\gamma - 1),$$

$$\Delta_1 = 4\alpha\beta(2\gamma - 1) [\gamma(2\alpha\beta + \alpha + \beta + 1) + \alpha\beta],$$

откуда нетрудно убедиться въ справедливости теоремы въ случаѣ $k = 0$.

Допуская затѣмъ, что наша теорема справедлива при $k = k'$, получаемъ

$$\Delta_{2k'+2} = \alpha\beta(\alpha + 1)(\beta + 1) \dots (\alpha + k')(\beta + k') \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \dots$$

$$\dots \left(\gamma + \frac{2k'-1}{2}\right) \left\{ R_{2k'+2} \Phi_{2k'+1} - Q_{2k'+2} S_{2k'+1} \Phi_{2k'} \right\},$$

гдѣ

$$Q_{2k'+2} = (2\alpha + 2k' + 1)(2\beta + 2k' + 1)(\alpha + \beta + 2k' + 1).$$

По леммѣ (1) выраженіе

$$R_{2k'+2} \Phi_{2k'+1} - Q_{2k'+2} S_{2k'+1} \Phi_{2k'}$$

должно дѣлиться на произведеніе

$$(\alpha + k' + 1)(\beta + k' + 1).$$

Кромѣ того, согласно сдѣланному нами допущенію, это выраженіе должно обращаться въ нуль всякій разъ, когда

$$\alpha + \beta = -k' - s, \quad \gamma = -\frac{2k'+1}{2}, -\frac{2k'+3}{2}, \dots, -\frac{2k'+2s-1}{2}$$

$$(s = 1, 2, \dots, k' + 1).$$

Если же

$$\alpha + \beta = -(2k' + 2),$$

то, принимая во вниманіе, что $\Delta_{2k'+2}$ обращается въ нуль при

$$\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots, -\frac{2k'-1}{2},$$

на основаніи леммы (2) можемъ указать еще $k' + 1$ значеній γ

$$\gamma = -\frac{2k'+3}{2}, -\frac{2k'+5}{2}, \dots, -\frac{4k'+3}{2},$$

обращающихъ $\Delta_{2k'+2}$ въ нуль.

Поэтому при

$$\alpha + \beta = -(2k' + 2)$$

уравненіе

$$R_{2k'+2} \Phi_{2k'+1} - Q_{2k'+2} S_{2k'+1} \Phi_{2k'} = 0$$

$k' + 2$ степени относительно γ допускаетъ слѣдующія $k' + 1$ рѣшеній

$$\gamma = -\frac{2k'+3}{2}, -\frac{2k'+5}{2}, \dots, -\frac{4k'+3}{2}.$$

Остается найти еще одно рѣшеніе того же уравненія.

И нетрудно понять, что это рѣшеніе не должно мѣняться отъ замѣны γ на $\alpha + \beta + 1 - \gamma = -(2k' + 1 - \gamma)$ и потому оно будетъ

$$\gamma = -\frac{2k'+1}{2}.$$

Сопоставляя этотъ результатъ съ предыдущими, заключаемъ, что при $\gamma = -\frac{2k'+1}{2}$ функція

$$R_{2k'+2} \Phi_{2k'+1} - Q_{2k'+2} S_{2k'+1} \Phi_{2k'}$$

$k' + 2$ степени относительно α обращается въ нуль всякій разъ, когда

$$\alpha = -\beta - k' - 1, -\beta - k' - 2, \dots, -\beta - 2k' - 2, -k' - 1.$$

Такой результатъ показываетъ, что наше выраженіе

$$R_{2k'+2} \Phi_{2k'+1} - Q_{2k'+2} S_{2k'+1} \Phi_{2k'}$$

при $\gamma = -\frac{2k'+1}{2}$ тождественно обращается въ нуль.

Отсюда нетрудно уже вывести равенство

$$\begin{aligned} \Delta_{2k'+2} &= \alpha \beta (\alpha + 1) (\beta + 1) \dots \\ &\dots (\alpha + k' + 1) (\beta + k' + 1) \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \dots \\ &\dots \left(\gamma + \frac{2k'+1}{2}\right) \Phi_{2k'+2}, \end{aligned}$$

гдѣ $\Phi_{2k'+2}$ цѣлая функція отъ α, β, γ и обладаетъ указаннымъ выше свойствомъ обращаться въ нуль при

$$\alpha + \beta = -(k' + 1 + s)$$

$$\text{и } \gamma = -\frac{2k'+3}{2}, -\frac{2k'+5}{2}, \dots, -\frac{2k'+2s+1}{2}$$

$$(s = 1, 2, 3, \dots, k' + 1).$$

Переходя къ выраженію $\Delta_{2k'+3}$, получаемъ

$$\Delta_{2k'+3} = \alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\dots$$

$$\dots(\alpha+k'+1)(\beta+k'+1)\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\dots$$

$$\dots\left(\gamma + \frac{2k'+1}{2}\right)\Phi_{2k'+3},$$

гдѣ

$$\Phi_{2k'+3} = R_{2k'+3} \Phi_{2k'+2} -$$

$$- 8(\alpha + \beta + 2k' + 2)(2k' + 3)(\gamma + 2k' + 2)\Phi_{2k'+1}.$$

На основаніи предыдущаго $\Phi_{2k'+3}$ обращается въ нуль всякій разъ, когда

$$\alpha + \beta = -(k' + 1 + s),$$

$$\gamma = -\frac{2k'+3}{2}, -\frac{2k'+5}{2}, \dots, -\frac{2k'+2s+1}{2}$$

$$(s = 1, 2, 3, \dots, k' + 1).$$

Кромѣ того по леммѣ (2) тотъ же полиномъ $\Phi_{2k'+3}$ долженъ обращаться въ нуль при

$$\alpha + \beta = -(2k' + 3), \gamma = -\frac{2k'+3}{2}, -\frac{2k'+5}{2}, \dots, -\frac{4k'+5}{2}.$$

Такимъ образомъ мы убѣждаемся въ справедливости нашей теоремы при

$$k = k' + 1,$$

если только она справедлива при

$$k = k'.$$

Съ другой стороны, мы знаемъ, что она справедлива при $k=0$; следовательно, она должна быть справедлива и при

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

т. е. при всякомъ k .

Теорема 2.

При

$$\alpha = -\frac{2k+1}{2}$$

уравненіе

$$\Phi_{2k+1} = 0$$

$k+1$ -ой степени относительно буквы γ имѣетъ слѣдующіе корни

$$\gamma = \beta, \beta - 1, \beta - 2, \dots, \beta - k.$$

Для доказательства достаточно замѣтить, что Δ_{2k+1} обращается въ нуль при

$$\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{2k-1}{2}$$

и потому согласно леммѣ (2) этотъ опредѣлитель долженъ обращаться въ нуль также и при

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{2k+1}{2} + \beta + \frac{1}{2}, -\frac{2k+1}{2} + \beta + \frac{3}{2}, \dots \\ &\dots, -\frac{2k+1}{2} + \beta + \frac{2k+1}{2}, \\ &= \beta - k, \beta - k + 1, \dots, \beta, \end{aligned}$$

ЕСЛИ ТОЛЬКО

$$\alpha = -\frac{2k+1}{2}.$$

Заключеніе.

Произведеніе нѣкоторыхъ двухъ рѣшеній дифференціального уравненія гипергеометрическаго ряда равно цѣлой функціи отъ независимой переменнѣй только въ слѣдующихъ случаяхъ:

а) при n четномъ,

$$1) \alpha = -\frac{n}{2},$$

$$2) \beta = -\frac{n}{2},$$

$$3) \alpha + \beta = -n, \gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots, -\frac{2n-1}{2};$$

б) при n нечетномъ,

$$1) \alpha = -\frac{n}{2},$$

$$\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{n-2}{2}, \beta, \beta-1, \beta-2, \dots, \beta-\frac{n-1}{2},$$

$$2) \beta = -\frac{n}{2},$$

$$\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{n-2}{2}, \alpha, \alpha-1, \alpha-2, \dots, \alpha-\frac{n-1}{2},$$

$$3) \alpha + \beta = -n, \gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots, -\frac{2n-1}{2}.$$