

О ФУНКЦІЯХЪ,

ПОДОВНЫХЪ ФУНКЦІАМЪ ЛЕЖАНДРА.

К. А. Поссе.

Въ 7 и 9 №№ Comptes rendus за 1885 годъ, Г. Stieltjes сообщилъ нѣкоторыя теоремы и формулы, относящіяся до такъ называемыхъ функцій, подобныхъ функціямъ Лежандра, или полиномовъ Якоби и составляющія существенныя дополненія къ извѣстнымъ свойствамъ этихъ функцій. Настоящая замѣтка заключаетъ въ себѣ доказательство результатовъ Г. Stieltjes, основанное на разсмотрѣніи этихъ функцій, какъ знаменателей подходящихъ дробей въ разложеніи интеграла

$$\int_0^1 \frac{z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} dz}{x-z}, \quad (\alpha \text{ и } \beta > 0)$$

въ непрерывную дробь.

Извѣстно, что разлагая

$$\Phi(x) = \int_0^1 \frac{z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} dz}{x-z}$$

въ непрерывную дробь, получаемъ (см. напр. мою диссертацию — «О функціяхъ, подобныхъ функціямъ Лежандра», стр. 28 и слѣд.):

$$\Phi(x) = \frac{a}{x - a_2 - \frac{a_2 a_3}{x - a_3 - a_4 - \frac{a_4 a_5}{x - a_5 - a_6 - \dots}}}$$

гдѣ $a = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$

$$a_{2n} = \frac{(\alpha+n-1)(\alpha+\beta+n-2)}{(\alpha+\beta+2n-3)(\alpha+\beta+2n-2)},$$

$$a_{2n+1} = \frac{n(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n-1)}.$$

Знаменатель n -ой подходящей выражается здѣсь слѣдующимъ образомъ:

$$x^n F\left(1-n-\alpha, -n, 2-2n-(\alpha+\beta), \frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

или

$$(-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\dots(\alpha+\beta+2n-2)} F(\alpha+\beta+n-1, -n, \alpha, x) \quad (2)$$

гдѣ $F(a, b, c, x)$ обозначаетъ гипергеометрическій рядъ

$$1 + \frac{ab}{1.c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)} x^2 + \dots$$

Обозначая эту цѣлую функцію n -ой степени отъ x черезъ $T_n(\alpha, \beta, x)$ или просто T_n , будемъ, слѣдовательно, имѣть:

$$T_n = x^n - \frac{n(\alpha+n-1)}{\alpha+\beta+2n-2} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)}{(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n-3)} x^{n-2} - \dots \quad (1)$$

или

$$T_n = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\dots(\alpha+\beta+2n-2)} \times \\ \times \left[1 - \frac{n(\alpha+\beta+n-1)}{\alpha} x + \dots \right] \quad (2)$$

Эта функція и называется функцією, подобною функціи Лежандра или полиномомъ Якоби.

Перечислимъ главнѣйшія ея свойства, вытекающія изъ ея опредѣленія.

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} T_n \theta_{n-1} dx = 0, \quad \text{I}$$

гдѣ θ_{n-1} — произвольная цѣлая функція степени не выше $n-1$.

$$T_{n+2} = (x - a_{2n+3} - a_{2n+4}) T_{n+1} - a_{2n+2} a_{2n+3} T_n, \quad \text{II}$$

$$T_n(\alpha, \beta, 1-x) = (-1)^n T_n(\beta, \alpha, x). \quad \text{III}$$

Изъ выраженія (2) и формулы III вытекаютъ равенства

$$T_n(\alpha, \beta, 0) = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\dots(\alpha+\beta+2n-2)}, \quad (3)$$

$$T_n(\alpha, \beta, 1) = \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\dots(\alpha+\beta+2n-2)}. \quad (4)$$

Изъ выраженія (1) вытекаетъ соотношеніе

$$T'_n(\alpha, \beta, x) = n T_{n-1}(\alpha+1, \beta+1, x), \quad \text{IV}$$

гдѣ T'_n означаетъ производную отъ T_n .

Изъ общихъ формулъ въ теоріи непрерывныхъ дробей (см. напр. мою диссертацию, стр. 17) получается формула

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} T_n^2(\alpha, \beta, x) dx = a_1 a_2 a_3 \dots a_{2n+1} =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(\alpha+n) \Gamma(\beta+n) \Gamma(\alpha+\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-1) \Gamma(\alpha+\beta+2n-1)^2}. \quad (5)$$

Функція $T_n(\alpha, \beta, x)$ удовлетворяет дифференціальному уравненію

$$(1-x)x \frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha - (\alpha+\beta)x) \frac{dy}{dx} + n(\alpha+\beta+n-1)y = 0, \quad V$$

и всякая цѣлая функція n -ой степени, удовлетворяющая этому уравненію, отличается отъ T_n только постояннымъ множителемъ.

Переходимъ теперь къ доказательству теоремъ и формулъ Г. Stieltjes.

Теорема.

Функція $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$$= (x_1 x_2 \dots x_n)^\alpha [(1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_n)]^\beta \Pi (x_i - x_k)^2,$$

гдѣ α и $\beta > 0$, а переменныя x_1, x_2, \dots, x_n не выходятъ изъ предѣловъ 0 и 1, достигаетъ своего максимум'а, когда x_1, x_2, \dots, x_n дѣлаются равными корнямъ уравненія

$$T_n(\alpha, \beta, x) = 0.$$

Здѣсь $\Pi (x_i - x_k)^2$ обозначаетъ произведеніе квадратовъ разностей, составленныхъ изъ величинъ x_1, x_2, \dots, x_n .

Доказательство.

Уравненія, опредѣляющія величины x_1, x_2, \dots, x_n , соотвѣтствующія максимум'у функціи $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, можно написать подѣ видомъ

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0 \text{ или } \frac{\partial \lg \Phi}{\partial x_k} = 0$$

для $k = 1, 2, \dots, n$.

Полагая

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

и обозначая через Δ дискриминантъ этой функціи, будемъ имѣть

$$\frac{\partial \lg \Phi}{\partial x_k} = \frac{\alpha}{x_k} - \frac{\beta}{1 - x_k} + \frac{\partial \lg \Delta}{\partial x_k} = 0$$

или

$$x_k(1 - x_k) \frac{\partial \lg \Delta}{\partial x_k} + (\alpha - (\alpha + \beta)x_k) = 0. \quad (6)$$

Далѣе, имѣя $\Delta = \prod (x_i - x_k)^2$, находимъ

$$\frac{\partial \lg \Delta}{\partial x_k} = 2 \sum_{(i)} \frac{1}{x_k - x_i}, \quad (i \geq k).$$

Съ другой стороны, полагая

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{(x - x_k)},$$

находимъ

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \sum_{(i)} \frac{1}{x - x_i}, \quad (i \geq k),$$

т. е.

$$\frac{(x - x_k) \varphi'(x) - \varphi(x)}{(x - x_k) \varphi(x)} = \sum_{(i)} \frac{1}{x - x_i}, \quad (i \geq k)$$

и дѣлая $x = x_k$, находимъ

$$\frac{1}{2} \frac{\varphi''(x_k)}{\varphi'(x_k)} = \sum_{(i)} \frac{1}{x_k - x_i},$$

откуда

$$\frac{\partial \lg \Delta}{\partial x_k} = \frac{\varphi''(x_k)}{\varphi'(x_k)},$$

и уравнение (6) даетъ

$$x_k(1 - x_k)\varphi''(x_k) + (\alpha - (\alpha + \beta)x_k)\varphi'(x_k) = 0$$

для $k = 1, 2, \dots, n$.

Слѣдовательно, цѣлая функція n -ой степени

$$x(1 - x)\varphi''(x) + (\alpha - (\alpha + \beta)x)\varphi'(x)$$

отличается отъ $\varphi(x)$ только постояннымъ множителемъ, который, очевидно, равенъ

$$-n(\alpha + \beta + n - 1),$$

такъ что окончательно имѣемъ

$$x(1 - x)\varphi''(x) + (\alpha - (\alpha + \beta)x)\varphi'(x) + n(\alpha + \beta + n - 1)\varphi(x) = 0,$$

а потому

$$\varphi(x) = T_n(\alpha, \beta, x),$$

что и тр. док.

Для вычисленія самаго максимум'а функціи Φ , замѣчаемъ, что

$$\begin{aligned} & [x_1 x_2 \dots x_n]^\alpha [(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n)]^\beta = \\ & = [(-1)^n T_n(\alpha, \beta, 0)]^\alpha [T_n(\alpha, \beta, 1)]^\beta = \\ & = \frac{[\alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)]^\alpha [\beta(\beta + 1) \dots (\beta + n - 1)]^\beta}{[(\alpha + \beta + n - 1)(\alpha + \beta + n) \dots (\alpha + \beta + 2n - 2)]^{\alpha + \beta}}. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, все дѣло сводится къ вычисленію дискрими-

нанта $\Pi(x_i - x_k)^2$ функции $T_n'(\alpha, \beta, x)$.

Для этой цѣли замѣчаемъ вмѣстѣ съ Г. Stieltjes, что если X есть цѣлая функция степени n , съ коэффициентомъ 1 при x^n , X_1 — ея производная, x_1, x_2, \dots, x_n — ея корни, а X_2, X_3, \dots, X_n рядъ функций Штурма, составляемыхъ по схемѣ

$$X = QX_1 - X_2, X_1 = Q_1X_2 - X_3, \dots, X_{n-2} = Q_{n-2}X_{n-1} - X_n, \text{ VI}$$

то, обозначая черезъ A_1, A_2, \dots, A_n коэффициенты при высшихъ степеняхъ x въ функцияхъ X_1, X_2, \dots, X_n , будемъ имѣть для выраженія дискриминанта функции X слѣдующую формулу

$$\Delta = \Pi(x_i - x_k)^2 = A_1^2 A_2^2 \dots A_{n-1}^2 X_n \quad (8)$$

или

$$\Delta = A_1^2 A_2^2 \dots A_{n-1}^2 A_n,$$

потому что $X_n = \text{постоянному } A_n$.

Эта формула есть только частный случай формулъ, получаемыхъ по теоремѣ Сильвестера и Борхгардта (см. *Serret, Cours d'Algèbre supérieure*, Т. I, стр. 570), въ силу которой вообще имѣемъ

$$A_1^2 A_2^2 \dots A_{k-1}^2 X_k = \sum (x_1 - x_2)^2 \dots (x_1 - x_k)^2 \dots (x_{k-1} - x_k)^2 (x - x_{k+1}) \dots (x - x_n),$$

откуда вытекаетъ, что

$$A_1^2 A_2^2 \dots A_{k-1}^2 A_k = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \dots & s_{k-1} \\ s_1, & s_2, & \dots & s_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1}, & s_k, & \dots & s_{2k-2} \end{vmatrix},$$

$$\text{гдѣ } s_\mu = x_1^\mu + x_2^\mu + \dots + x_n^\mu.$$

Обращаясь къ нашему случаю, въ которомъ

$$X = T_n(\alpha, \beta, x),$$

$$X_1 = T'_n(\alpha, \beta, x) = n T_{n-1}(\alpha + 1, \beta + 1, x),$$

дѣлимъ $T_n(\alpha, \beta, x)$ на $T'_n(\alpha, \beta, x)$ и обозначаемъ частное черезъ Q , а остатокъ черезъ R .

Подставляя въ формулу I

$$T_n - Q T'_n + R, \text{ находимъ:}$$

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \left\{ Q T'_n + R \right\} \theta_{n-1} dx = 0;$$

полагая $\theta_{n-1} = x(1-x)\theta_{n-3}$, гдѣ θ_{n-3} — произвольная цѣлая функція степени не выше $n-3$, находимъ:

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \left\{ n Q T_{n-1}(\alpha + 1, \beta + 1, x) + R \right\} \theta_{n-3} dx = 0$$

или замѣчая, что Q есть 1-ой степени относительно x ,

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta R \theta_{n-3} dx = 0,$$

откуда и вытекаетъ, что R отличается отъ

$$T_{n-2}(\alpha + 1, \beta + 1, x)$$

только постояннымъ множителемъ. Такимъ образомъ находимъ соотношение

$$T_n(\alpha, \beta, x) = Q T'_n(\alpha, \beta, x) - c_2 T_{n-2}(\alpha + 1, \beta + 1, x), \quad (8)$$

гдѣ c_2 — постоянное.

Для опредѣленія c_2 , умножаемъ обѣ части равенства (8) на $x^\alpha (1-x)^\beta T_{n-2}(\alpha + 1, \beta + 1, x) dx$ и интегрируемъ отъ 0 до 1; тогда получимъ:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} T_n(\alpha, \beta, x) x(1-x) T_{n-2}(\alpha+1, \beta+1, x) dx = \\ & = \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta} n Q T_{n-1}(\alpha+1, \beta+1, x) T_{n-2}(\alpha+1, \beta+1, x) dx \\ & \quad - c_2 \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta} T_{n-2}^2(\alpha+1, \beta+1, x) dx \end{aligned}$$

или замѣчая, что коэффициенты при высшихъ степеняхъ x въ функціяхъ T_{μ} равны 1, получимъ:

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} T_n^2(\alpha, \beta, x) dx = \\ & = \left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta} T_{n-1}^2(\alpha+1, \beta+1, x) dx \\ & - c_2 \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta} T_{n-2}^2(\alpha+1, \beta+1, x) dx. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Всѣ интегралы, входящіе въ эту формулу, могутъ быть взяты по формулѣ (5), послѣ чего получаемъ:

$$c_2 = \frac{(n-1)(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-3)(\alpha+\beta+2n-2)^2}. \quad (9)$$

Далѣе, замѣнивъ въ формулѣ II α на $\alpha+1$, β на $\beta+1$, n на $n-k$, получимъ для $k \geq 3$ соотношеніе

$$\begin{aligned} & T_{n-k+2}(\alpha+1, \beta+1, x) = \\ & = q_{n-k+1} T_{n-k+1}(\alpha+1, \beta+1, x) - c_k T_{n-k}(\alpha+1, \beta+1, x), \end{aligned}$$

$$\text{гдѣ } c_k = \frac{(n-k+1)(\alpha+n-k+1)(\beta+n-k+1)(\alpha+\beta+n-k+1)}{(\alpha+\beta+2n-2k+1)(\alpha+\beta+2n-2k+2)^2(\alpha+\beta+2n-2k+3)}, \quad (10)$$

а q_{n-k+1} — линейная функція.

Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующій рядъ соотношеній

$$\left. \begin{aligned} T_n(\alpha, \beta, x) &= Q T'_n(\alpha, \beta, x) - c_2 T_{n-2}(\alpha+1, \beta+1, x), \\ T_{n-1}(\alpha+1, \beta+1, x) &= \\ &= q_{n-2} T_{n-2}(\alpha+1, \beta+1, x) - c_3 T_{n-3}(\alpha+1, \beta+1, x), \\ T_{n-2}(\dots) &= q_{n-3} T_{n-3}(\dots) - c_4 T_{n-4}(\dots), \\ &\dots \dots \dots \\ T_2(\dots) &= q_1 T_1(\dots) - c_n. \end{aligned} \right\} \text{VII}$$

Чтобы привести этотъ рядъ соотношеній къ виду VI, полагаемъ

$$\begin{aligned} T_n(\alpha, \beta, x) &= X \\ T'_n(\alpha, \beta, x) &= X_1 = c_1 T_{n-1}(\alpha+1, \beta+1, x), \end{aligned}$$

гдѣ $c_1 = n$, и умножаемъ равенства системы VII соотвѣтственно на

$$1, c_1, c_2, c_1 c_3, c_2 c_4, c_1 c_3 c_5, c_2 c_4 c_6, \dots$$

Тогда система VII приведется къ виду VI, причемъ будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} X_2 &= c_2 T_{n-2}(\alpha+1, \beta+1, x), \\ X_3 &= c_1 c_3 T_{n-3}(\alpha+1, \beta+1, x), \end{aligned}$$

и вообще

$$\begin{aligned} X_k &= c_1 c_3 \dots c_k T_{n-k}(\alpha+1, \beta+1, x), \text{ для } k \text{ нечетнаго,} \\ X_k &= c_2 c_4 \dots c_k T_{n-k}(\alpha+1, \beta+1, x), \text{ для } k \text{ четнаго.} \end{aligned}$$

Слѣдовательно, коэффициентъ A_k при x^{n-k} въ функціи X_k будетъ равенъ $c_1 c_3 \dots c_k$ въ первомъ и $c_2 c_4 \dots c_k$ во второмъ случаѣ. Отсюда въ обоихъ случаяхъ находимъ

$$A_1^2 A_2^2 \dots A_{k-1}^2 A_k = c_1^k c_2^{k-1} \dots c_{k-1}^2 c_k$$

и, взявъ выраженія c_k по формуламъ (9) и (10), окончательно получаемъ:

$$A_1^2 A_2^2 \dots A_{k-1}^2 A_k = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\prod_{r=0}^{k-1} (n-r)^{k-r} (\alpha+n-1-r)^{k-1-r} (\beta+n-1-r)^{k-1-r} \prod_{r=0}^{k-3} (\alpha+\beta+n-2-r)^{k-2-r}}{\prod_{r=0}^{2k-3} (\alpha+\beta+2n-2-r)^{2k-2-r}}$$

При $k=n$, получаемъ выраженіе дискриминанта функціи $T_n(\alpha, \beta, x)$

$$\Delta = \frac{2^2 3^3 \dots n^n (\alpha+1)(\alpha+2)^2 \dots (\alpha+n-1)^{n-1} (\beta+1)(\beta+2)^2 \dots (\beta+n-1)^{n-1}}{(\alpha+\beta+n-1)^{n-1} (x+\beta+n)^n \dots (\alpha+\beta+2n-2)^{2n-2}} \quad (11)$$

Перемножая (7) и (11) находимъ и величину maximum'a Φ , а именно

$$\prod_{r=1}^{r=n} \frac{r^r (\alpha+r-1)^{\alpha+r-1} (\beta+r-1)^{\beta+r-1}}{(\alpha+\beta+n+r-2)^{\alpha+\beta+n+r-2}}. \quad (12)$$

Если въ формулѣ I замѣнимъ x черезъ $\frac{1+x}{2}$ и z черезъ $\frac{1+z}{2}$,

и положимъ

$$T_n(\alpha, \beta, x) = T_n\left(\alpha, \beta, \frac{1+x}{2}\right),$$

то $T'_n(\alpha, \beta, x)$ будетъ цѣлая функція n -ой степени отъ x , удовлетворяющая условію

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} T_n \theta_{n-1} dx = 0,$$

гдѣ θ_{n-1} — произвольная цѣлая функція степени не выше $n-1$, а также и дифференціальному уравненію

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha - \beta - (\alpha + \beta)x) \frac{dy}{dx} + n(n-1 + \alpha + \beta)y = 0. \quad (13)$$

Корни этой функціи $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ связаны съ корнями x_1, x_2, \dots, x_n функціи T_n соотношеніемъ $\xi_i = 2x_i - 1$, а потому дискриминантъ функціи $T'_n(\alpha, \beta, x)$ получится черезъ умноженіе дискриминанта функціи T_n на $2^{n(n-1)}$.

При $\alpha = \beta = 1$ функція $T_n(1, 1, x)$ отличается отъ Лежандровой функціи только постояннымъ множителемъ, поэтому изъ предыдущихъ формулъ прямо получаютъ аналогичныя формулы для Лежандровыхъ функцій, данныя Г. Stieltjes.

Выраженіе функціи $T_n(\alpha, \beta, x)$ по формулѣ (1) сохраняетъ смыслъ и при $\alpha = \beta = 0$; функція $T_n(0, 0, x) = T_n\left(0, 0, \frac{1+x}{2}\right)$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + n(n-1)y = 0 \quad (14)$$

и, какъ видно изъ предыдущаго, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что изъ всѣхъ цѣлыхъ функцій n -ой степени отъ x , корни которыхъ вещественны и не выходятъ изъ предѣловъ -1 и $+1$, функція $T_n(0, 0, x)$ имѣетъ наибольшій дискриминантъ. Значеніе этого дискриминанта Δ , получаемъ по формулѣ (11), умножая на $2^{n(n-1)}$ и полагая $\alpha = \beta = 0$, что даетъ

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{2^{n(n-1)} \cdot 1 \cdot 2^2 \dots n^n [1 \cdot 2^2 \dots (n-1)^{n-1}]^2}{(n-1)^{n-1} n^n \dots (2n-2)^{2n-2}} = \\ &= \frac{1 \cdot 2^2 \dots n^n \cdot 1 \cdot 2^2 \dots (n-2)^{n-2} \cdot 1^2 \cdot 2^4 \cdot 3^6 \dots (n-1)^{2n-2} \cdot 2^n (n-1)}{1 \cdot 2^2 \dots (n-2)^{n-2} (n-1)^{n-1} \dots (2n-2)^{2n-2}} = \\ &= \frac{1 \cdot 2^2 \dots n^n \cdot 1 \cdot 2^2 \dots (n-2)^{n-2}}{1 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \dots (2n-3)^{2n-3}}.\end{aligned}$$

Функция $T_n(0, 0, x)$ отличается только постоянным множителем от функции U_n , определяемой равенством

$$\sqrt{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n z^n. \quad (15)$$

Въ самомъ дѣлѣ, равенство это при $x = \pm 1$ обращается въ

$$1 \pm z = \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n z^n, \text{ откуда видимъ, что при } n \geq 2, U_n(+1) = 0,$$

$$U_n(-1) = 0.$$

Дифференцируя (15) по x , находимъ

$$\frac{-1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum U'_n z^{n-1},$$

откуда, обозначая Лежандрову функцию n -ой степени черезъ X_n , имѣемъ:

$$U'_n = -X_{n-1}$$

$$\text{и слѣдовательно, } U_n = - \int_{-1}^x X_{n-1} dx.$$

Дифференціальное уравненіе для Лежандровыхъ функций даетъ

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) X'_{n-1} \right) = -n(n-1) X_{n-1},$$

откуда

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) U''_n \right) = -n(n-1) U'_n$$

и интегрируя отъ -1 до x , находимъ

$$(1-x^2) U''_n + n(n-1) U_n = 0,$$

и, въ силу уравненія (14), получаемъ

$$U_n = C. T_n(0, 0, x), \text{ что и тр. дов.}$$

Полагая въ

$$\int_0^1 \frac{z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} dz}{x-z}$$

$\alpha = 1$, $z = \frac{u}{\beta-1}$, $x = \frac{\xi}{\beta-1}$ и увеличивая затѣмъ β до ∞ , получаемъ въ дополненіе къ результатамъ Г. Stieltjes еще слѣдующій.

Знаменатель n -ой подходящей въ разложеніи

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u} du}{\xi - u} = \frac{1}{\xi - 1 - \frac{1^2}{\xi - 3 - \frac{2^2}{\xi - 5 - \dots}}}$$

есть цѣлая функція $\psi_n(\xi)$ n -ой степени отъ ξ

$$\psi_n(\xi) = \xi^n - n^2 \xi^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2} \xi^{n-2} - \dots,$$

удовлетворяющая уравненію

$$\xi \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + (1-\xi) \frac{d\psi}{d\xi} + n\psi = 0,$$

и обладающая тѣмъ свойствомъ, что выраженіе

$$\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n e^{-(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)} \prod (\xi_i - \xi_k)^2,$$

гдѣ всѣ $\xi_i > 0$, достигаетъ своего максимум'а, когда переменныя ξ_i дѣлаются равны корнямъ функціи $\psi_n(\xi)$.

Максимумъ этотъ равенъ

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^6 \dots n^{2n} e^{-n^2},$$

а дискриминантъ функціи $\psi_n(\xi)$ равенъ

$$1 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \dots n^{2n-1}.$$

Спб. 31 Января
1886 года.