

НѢКОТОРОЕ ОБОБЩЕНІЕ

ФОРМУЛЫ ЛЕЖЕНЬ-ДИРИХЛЕ

для потенціальной функціи эллипсоида на внутреннюю
точку.

А. М. Ляпунова.

1. Предметъ этой замѣтки состоитъ въ разысканіи особеннаго
выраженія для интеграла

$$V = \iiint \frac{F(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta,$$

распространеннаго на всѣ вещественныя значенія ξ, η, ζ , удов-
летворяющія условію

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2} \leq 1,$$

въ предположеніи, что x, y, z также удовлетворяютъ условію

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} \leq 1,$$

и что функція $F(s)$ вещественной переменнѣй s такова, что
можетъ быть найдена функція $F(s + t\sqrt{-1})$, для $t=0$ об-
ращающаяся въ $F(s)$, и притомъ синектическая для всѣхъ зна-

ченій комплексной переменнѣй $s + t\sqrt{-1}$, модули которыхъ не превосходятъ k , причемъ k должно быть болѣе $2A$, если A есть наибольшая изъ величинъ A, B, C .

Полагая

$$\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} = r$$

и называя черезъ $d\tau$ элементъ объема эллипсоида

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

мы найдемъ

$$V = \int \frac{F(r)}{r} d\tau, \quad (1)$$

гдѣ интеграль распространень на весь объемъ этого эллипсоида.

V будетъ, слѣдовательно, представлять потенціальную функцію разсматриваемаго эллипсоида на внутреннюю точку для притяженія, законъ котораго въ функціи разстоянія выражается формулой

$$\frac{F(r)}{r^2} - \frac{F'(r)}{r}.$$

Выраженіе, которое мы предполагаемъ найти для нея, будетъ заключать въ себѣ, какъ частный случай, извѣстное выраженіе Дирихле, получаемое при $F(r) = 1$.

Въ силу сдѣланнаго предположенія относительно функціи $F(r)$, на основаніи извѣстной теоремы получимъ:

$$F(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \dots, \quad (2)$$

гдѣ α_0, α_1 и т. д. не зависятъ отъ r , и это разложеніе функціи $F(r)$ будетъ справедливо для всѣхъ значеній r , встрѣчающихся въ подынтегральной функціи выраженія (1).

Такимъ образомъ мы найдемъ:

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n U_n, \quad (3)$$

гдѣ

$$U_n = \int r^{n-1} d\tau.$$

Вопросъ приводится, слѣдовательно, къ разысканію выраженія для U_n .

2. Разысканіе U_n можетъ быть основано на слѣдующихъ теоремахъ:

Теорема 1. U_n есть функція отъ x, y, z, A, B, C и цѣлаго положительнаго (или равнаго нулю) числа n , удовлетворяющая условіямъ:

1) U_n удовлетворяетъ четыремъ слѣдующимъ уравненіямъ съ частными производными и въ конечныхъ разностяхъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{n+2}}{\partial x^2} &= (n+1) \left(x \frac{\partial U_n}{\partial x} + A \frac{\partial U_n}{\partial A} \right), \\ \frac{\partial^2 U_{n+2}}{\partial y^2} &= (n+1) \left(y \frac{\partial U_n}{\partial y} + B \frac{\partial U_n}{\partial B} \right), \\ \frac{\partial^2 U_{n+2}}{\partial z^2} &= (n+1) \left(z \frac{\partial U_n}{\partial z} + C \frac{\partial U_n}{\partial C} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$U_{n+2}^0 = \frac{1}{n+4} \left\{ A^3 \frac{\partial U_n^0}{\partial A} + B^3 \frac{\partial U_n^0}{\partial B} + C^3 \frac{\partial U_n^0}{\partial C} \right\}, \quad (5)$$

гдѣ U_n^0 есть значеніе U_n при $x=y=z=0$.

2) U_n есть четная функція отъ x, y, z .

3) Для $n=0$ и $n=1$, U_n опредѣляется формулами:

$$U_0 = \pi ABC \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{A^2 + \lambda} - \frac{y^2}{B^2 + \lambda} - \frac{z^2}{C^2 + \lambda}}{\sqrt{(A^2 + \lambda)(B^2 + \lambda)(C^2 + \lambda)}} d\lambda,$$

$$U_1 = \frac{4}{3} \pi ABC.$$

Что функція U_n удовлетворяетъ двумъ послѣднимъ условіямъ, это очевидно. Поэтому остается только показать, что она удовлетворяетъ первому.

Легко видѣть, что

$$A \frac{\partial U_n}{\partial A} = U_n + \int \xi \frac{\partial r^{n-1}}{\partial \xi} d\tau = U_n - \frac{\partial}{\partial x} \int \xi r^{n-1} d\tau,$$

а съ другой стороны, нетрудно убѣдиться, что

$$\int \xi r^{n-1} d\tau = x U_n - \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial x} \int r^{n+1} d\tau,$$

откуда и получается первое изъ уравненій (4).

Далѣе, замѣчая, что выраженіе для U_n^0 можетъ быть приведено къ виду:

$$U_n^0 = \frac{2}{n+2} \int_0^\pi \int_0^\pi p \frac{n+2}{2} \sin \theta d\theta d\psi,$$

гдѣ

$$p = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \psi}{A^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \psi}{B^2} + \frac{\cos^2 \theta}{C^2},$$

мы легко убѣждаемся въ справедливости уравненія (5).

Теорема 2. Условія 1), 2) и 3) вполне опредѣляютъ функцію U_n .

Въ самомъ дѣлѣ, пусть V_n удовлетворяетъ условіямъ 1), 2) и 3). Въ такомъ случаѣ функція $W_n = U_n - V_n$ будетъ удовлетворять условіямъ 1) и 2), а для $n=0$ и $n=1$ будетъ приводиться къ нулю. Но если для какого-либо значенія n , $W_n=0$, то въ силу (4)

$$\frac{\partial^2 W_{n+2}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W_{n+2}}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W_{n+2}}{\partial z^2} = 0,$$

и слѣд.

$$W_{n+2} = axyz + a_1yz + b_1zx + c_1xy + a_2x + b_2y + c_2z + a_3,$$

гдѣ a , a_1 , b_1 и т. д. не зависятъ отъ x , y , z . Въ силу же условія 2) и уравненія (5) всѣ эти постоянныя a , a_1 , b_1 и т. д. должны быть нулями. Такимъ образомъ оказывается, что и $W_{n+2} = 0$.

Примѣчаніе. Если положимъ

$$(n+1) \left(x \frac{\partial U_n}{\partial x} + A \frac{\partial U_n}{\partial A} \right) = f_n(x, y, z),$$

$$(n+1) \left(y \frac{\partial U_n}{\partial y} + B \frac{\partial U_n}{\partial B} \right) = \varphi_n(x, y, z),$$

$$(n+1) \left(z \frac{\partial U_n}{\partial z} + C \frac{\partial U_n}{\partial C} \right) = \psi_n(x, y, z),$$

то для вычисленія U_{n+2} по найденному U_n получимъ изъ уравненій (4) слѣдующую формулу

$$U_{n+2} = U_{n+2}^0 + \int_0^x (x-u) f_n(u, y, z) du + \int_0^y (y-v) \varphi_n(o, v, z) dv + \\ + \int_0^w (z-w) \psi_n(o, o, w) dw.$$

По этой формулѣ наприм. найдемъ:

$$U_2 = \frac{\pi}{4} ABC \int_0^\infty \left\{ 1 + \frac{A^2}{A^2 + \lambda} + \frac{B^2}{B^2 + \lambda} + \frac{C^2}{C^2 + \lambda} - \left(H(\lambda) \right)^2 \right\} \frac{\lambda d\lambda}{D(\lambda)},$$

гдѣ положено

$$\left. \begin{aligned} H(\lambda) &= 1 - \frac{x^2}{A^2 + \lambda} - \frac{y^2}{B^2 + \lambda} - \frac{z^2}{C^2 + \lambda}, \\ D(\lambda) &= \sqrt{(A^2 + \lambda)(B^2 + \lambda)(C^2 + \lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

3. Разумѣя подѣ λ комплексную переменную, проведемъ въ плоскости, служащей для ея изображенія, какую-либо замкнутую кривую, не имѣющую кратныхъ точекъ, и пересѣкающую вещественную ось только въ двухъ точкахъ: M , для которой $\lambda > 0$, и N , для которой $\lambda < -A^2$. Направленіе движенія по этой кривой мы будемъ считать положительнымъ, когда движущаяся точка, переходя изъ M въ N , пересѣкаетъ положительную часть мнимой оси.

Разсматривая какую-либо функцію $f(\lambda)$, мы будемъ подѣ интеграломъ

$$\int_0^\infty f(\lambda) d\lambda$$

разумѣть интеграль, взятый по слѣдующему замкнутому контуру: интегрированіе начинается отъ точки $\lambda = 0$, ведется по вещественной оси до точки M , затѣмъ продолжается по упомянутой кривой въ положительномъ направленіи и, по возвращеніи въ точку M , ведется по вещественной оси до точки $\lambda = 0$.

При этомъ условіи могутъ быть доказаны слѣдующія теоремы:

Теорема 3. Выраженія для U_0 и U_1 могутъ быть приведены къ виду:

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{\pi}{2} ABC \int_0^{\infty} \frac{H(\lambda) d\lambda}{D(\lambda)}, \\ U_1 &= -\frac{2}{3} ABC i \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda} (\sqrt{H(\lambda)})^3 d\lambda}{D(\lambda)}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

гдѣ функціи $D(\lambda)$ и $\sqrt{\lambda H(\lambda)}$ въ началѣ интегрированія должны быть положительными.

Здѣсь $D(\lambda)$ и $H(\lambda)$ суть функціи, опредѣляемыя формулами (6), и $i = \sqrt{-1}$.

Для доказательства мы замѣчаемъ, что всѣ особенныя точки функцій

$$D(\lambda) \text{ и } \frac{\sqrt{\lambda H(\lambda)}}{D(\lambda)},$$

за исключеніемъ точки $\lambda = 0$, лежатъ на отрицательной части вещественной оси внутри контура, по которому производится интегрированіе. При томъ первая изъ этихъ функцій имѣетъ три точки развѣтвленія, а вторая вмѣстѣ съ точкой $\lambda = 0$ четыре.

Отсюда слѣдуетъ: 1) что въ первомъ изъ интеграловъ (7) подынтегральная функція при возвращеніи въ точку M получаетъ отрицательное значеніе, а во второмъ — положительное, и 2) что, не измѣняя значеній этихъ интеграловъ, можно предположить, что всѣ точки кривой MN безпредѣльно удаляются отъ точки $\lambda = 0$.

Замѣчая поэтому, что интегралы

$$\int \frac{H(\lambda) d\lambda}{D(\lambda)} \text{ и } \int \frac{\sqrt{\lambda} (\sqrt{H(\lambda)})^3 d\lambda}{D(\lambda)},$$

взятые по кривой MN , при этомъ возрастаніи ея приближают-

ся соотвѣтственно къ значеніямъ 0 и $2\pi i$, мы и убѣждаемся въ справедливости формулъ (7).

Теорема 4. Общее выраженіе U_n опредѣляется формулой

$$U_n = G_n ABC \int_0^{\infty} \frac{H(\lambda) (\sqrt{\lambda H(\lambda)})^n d\lambda}{D(\lambda)}, \quad (8)$$

гдѣ

$$G_n = \frac{(-i)^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \sqrt{\pi}}{(n+2) \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = 2(-i)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi \sin^2 \varphi d\varphi, \quad (9)$$

и гдѣ интегрированіе подчинено тому-же условію, какъ и въ формулахъ (7).

Въ самомъ дѣлѣ, это выраженіе U_n , очевидно, удовлетворяетъ условіямъ 2) и 3), и нетрудно убѣдиться, что оно удовлетворяетъ также и условію 1).

Для облегченія дифференцированій, которыя для этого необходимо произвести, можно ввести новыя переменныя, полагая

$$\frac{1}{A^2} = a, \quad \frac{1}{B^2} = b, \quad \frac{1}{C^2} = c, \quad \frac{x}{A} = \xi, \quad \frac{y}{B} = \eta, \quad \frac{z}{C} = \zeta,$$

вслѣдствіе чего уравненія (4) и (5) обратятся въ

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \xi^2} = -2(n+1) \frac{\partial U_n}{\partial a},$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \eta^2} = -2(n+1) \frac{\partial U_n}{\partial b},$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \zeta^2} = -2(n+1) \frac{\partial U_n}{\partial c},$$

$$\frac{\partial U_n^0}{\partial a} + \frac{\partial U_n^0}{\partial b} + \frac{\partial U_n^0}{\partial c} = -\frac{n+4}{2} U_{n+2}^0,$$

а формула (8) приметъ видъ:

$$U_n = G_n \int_0^{\frac{n}{2}} \frac{\lambda^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{\xi^2}{1+a\lambda} - \frac{\eta^2}{1+b\lambda} - \frac{\zeta^2}{1+c\lambda} \right)^{\frac{n+2}{2}} d\lambda}{\sqrt{(1+a\lambda)(1+b\lambda)(1+c\lambda)}}.$$

Примѣчаніе. Въ случаѣ нечетнаго n путь интегрированія въ выраженіи (8) можетъ состоять изъ одной только замкнутой кривой MN .

4. По формулѣ (3) мы можемъ теперь найти выраженіе для V подъ видомъ ряда. Но для того, чтобы этотъ рядъ можно было просуммировать, пользуясь формулой (2), необходимо, чтобы для всѣхъ точекъ кривой MN , входящей въ составъ пути интегрированія въ выраженіи (8), было удовлетворено условіе

$$\text{mod } \sqrt{\lambda H(\lambda)} < k.$$

Разыскивать предѣльныя положенія кривой MN , удовлетворяющей этому условію, мы не будемъ, а обратимъ вниманіе только на слѣдующую теорему:

Теорема 5. Если λ есть комплексная переменная *постояннаго* модуля R , превосходящаго A^2 , то для того, чтобы модули функціи $\sqrt{\lambda H(\lambda)}$ не превосходили k , необходимо и достаточно, чтобы R удовлетворялъ условію:

$$\frac{k^2 - k\sqrt{k^2 - 4A^2}}{2} < R < \frac{k^2 + k\sqrt{k^2 - 4A^2}}{2}. \quad (10)$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\lambda = Re^{i\varphi},$$

найдемъ:

$$\operatorname{mod} H(\lambda) \leq 1 + \frac{x^2}{\sqrt{A^4 + 2A^2 R \cos \varphi + R^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{B^4 + 2B^2 R \cos \varphi + R^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{C^4 + 2C^2 R \cos \varphi + R^2}}.$$

Но при условии $R > A^2$ наибольшая величина второй части неравенства для рассматриваемых значений x, y, z будет

$$1 + \frac{A^2}{\sqrt{A^4 + 2A^2 R \cos \varphi + R^2}},$$

а потому мы найдемъ

$$\operatorname{mod} H(\lambda) \leq 1 + \frac{A^2}{R - A^2},$$

и слѣдовательно

$$\operatorname{mod} \sqrt{\lambda} H(\lambda) \leq \frac{R}{\sqrt{R - A^2}},$$

а отсюда уже нетрудно заключить о справедливости теоремы.

Если кривая MN , входящая въ составъ пути интегрирования, удовлетворяетъ упомянутому условию, то для V получится слѣдующее выражение:

$$V = 2ABC \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{H(\lambda) d\lambda}{D(\lambda)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(-i\sqrt{\lambda} \overline{H(\lambda)} \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi. \quad (11)$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему результату.

Теорема 6. Если A есть наибольшая изъ полу-осей эллипсоида

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

и если $F(s + ti)$ есть синектическая функція внутри круга радіуса $k > 2A$, то для потенціальной функціи

$$V = \int \frac{F(r)}{r} d\tau$$

этого эллипсоида на внутреннюю точку будетъ справедливо выраженіе (11), въ которомъ интегрированіе по λ производится по замкнутому контуру: начинаясь въ точкѣ $\lambda = 0$, оно ведется по положительному направленію вещественной оси, затѣмъ — въ положительномъ направленіи по всей окружности, описанной изъ точки $\lambda = 0$ радіусомъ R , удовлетворяющимъ условію (10), и наконецъ — въ отрицательномъ направленіи по вещественной оси до точки $\lambda = 0$, причемъ начальныя значенія функцій $D(\lambda)$, $\sqrt{\lambda H(\lambda)}$ должны быть положительны.

Примѣчаніе 1. За путь интегрированія въ выраженіи (11) можетъ быть принята всякая замкнутая кривая, проходящая черезъ точку $\lambda = 0$, для которой эта точка не есть кратная, для которой во всѣхъ точкахъ $\text{mod } \sqrt{\lambda H(\lambda)} < k$, и которая непрерывнымъ измѣненіемъ, при условіи никогда не проходить черезъ особенныя точки функцій $D(\lambda)$ и $\sqrt{H(\lambda)}$, можетъ быть приведена въ совпаденіе съ контуромъ, опредѣленнымъ въ теоремѣ 6.

Примѣчаніе 2. Изъ выраженія (11) для потенціальной функціи можетъ быть найдено слѣдующее выраженіе для проекціи притяженія на ось x -овъ:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2 ABCx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{(A^2 + \lambda) D(\lambda)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(-i\sqrt{\lambda H(\lambda)} \cos \varphi) d\varphi.$$

Примѣчаніе 3. Притяженіе эллипсоидомъ внѣшней точки по теоремѣ Айвори можетъ быть найдено, коль скоро извѣстно притяженіе внутренней точки. Но чтобы перейти къ этому случаю отъ предыдущихъ формулъ, необходимо расширить область синектичности функціи $F(s + ti)$.